

Κεφάλαιο 15

Ο Μετασχηματισμός Z

Έχουμε δει σε προηγούμενο κεφάλαιο το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT), και το πώς χρησιμοποιείται για να μας δώσει πληροφορία για ένα διακριτό σήμα στο πεδίο της συχνότητας. Το κακό είναι ότι υπάρχουν σήματα που συναντάμε στην πράξη για τα οποία ο DTFT δεν υπάρχει. Τι εννοούμε “δεν υπάρχει”; Ας ξαναμιλήσουμε λίγο για τις προϋποθέσεις ύπαρξης του Μετασχ. Fourier, που θα μας δώσουν το πάτημα για να πάμε από τον DTFT στον μετασχηματισμό Z. Όταν λοιπόν μιλάμε για “ύπαρξη” ενός μετασχηματισμού, αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα ή το ολοκλήρωμα, ή γενικότερα η μαθηματική μορφή που τον αναπαριστά, συγκλίνει. Εν προκειμένω, υπενθυμίζεται ότι ο DTFT δίνεται από τον τύπο:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (15.1)$$

Για να υπάρχει λοιπόν ο DTFT ενός διακριτού σήματος $x[n]$ μέσω της σύγκλισης του αθροίσματος, αρκεί να ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \quad (15.2)$$

δηλαδή, το $x[n]$ να είναι *απολύτως αθροίσιμο*¹. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν πάρουμε τις απόλυτες τιμές των δειγμάτων του σήματος, και τις προσθέσουμε όλες μαζί, το αποτέλεσμά μας δε θα “φύγει” στο $\pm\infty$ αλλά θα συγκλίνει ομοιόμορφα σε έναν αριθμό.

Για παράδειγμα, το σήμα $x[n] = a^n u[n]$, με $|a| < 1$, είναι απολύτως αθροίσιμο. Ας το δούμε:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n u[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} \quad (15.3)$$

αφού $|a| < 1$, όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές σχέσεις για τα αθροίσματα, που έχουμε δει στις σχετικές σημειώσεις του DTFT.

Όμως για να δούμε τι συμβαίνει για το σήμα $x[n] = a^n u[n]$, με $|a| \geq 1$ αυτή τη φορά. Για να δούμε, είναι απολύτως αθροίσιμο;

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n u[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} \quad (15.4)$$

μόνον αν $|a| < 1$. Όμως από υπόθεση έχουμε $|a| \geq 1$, άρα δεν μπορούμε να γράψουμε την τελευταία ισότητα, άρα το σήμα δεν είναι απολύτως αθροίσιμο και άρα ο DTFT του δεν υπάρχει.

Ένα τέτοιο παράδειγμα σήματος είναι το $x[n] = 2^n u[n]$.

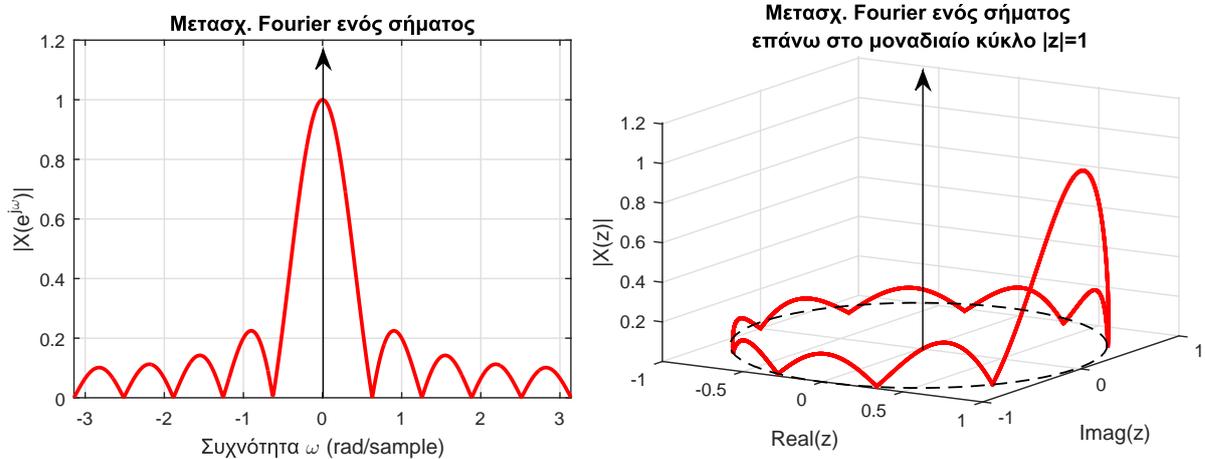
Ωραία, και τώρα τι κάνουμε; Υπάρχουν σήματα για τα οποία δεν μπορούμε να ελέγξουμε το συχνοτικό τους περιεχόμενο, απ’ ό,τι φαίνεται, δηλ. που δεν μπορούμε να τα δούμε από το πεδίο της συχνότητας. Τι συμφορά! :-)
Υπάρχουν ένα σωρό σήματα στην πράξη που δεν πληρούν τη συνθήκη σύγκλισης. Τι θα κάνουμε με αυτά;;;

¹ Αυτή η συνθήκη είναι ικανή, αλλά όχι και αναγκαία, όπως έχουμε ήδη δει. Υπάρχουν σήματα που ΔΕΝ είναι απολύτως αθροίσιμα αλλά ο μετασχ. Fourier τους υπάρχει, όπως για παράδειγμα η βηματική συνάρτηση $u[n]$, αλλά τότε εμπλέκουμε γενικευμένες συναρτήσεις, όπως η συνάρτηση Δέλτα, για την εύρεση του μετασχηματισμού.

Εδώ έρχεται λοιπόν η “επέκταση” του ορισμού του μετασχηματισμού Fourier, κι αυτή η “επέκταση” λέγεται **Μετασχηματισμός Z** (ZT). Με ποια έννοια είναι επέκταση; Τι ακριβώς “επεκτείνεται” και πού; Ας το δούμε λίγο αυτό, είναι ενδιαφέρον...

15.1 Διαισθητική Προσέγγιση

Ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ ενός σήματος $x[n]$ μπορεί να ιδωθεί ως μια προβολή του σήματος $x[n]$ στο χώρο που δημιουργούν οι εκθετικές συναρτήσεις $e^{-j\omega n}$. Επίσης, τα μιγαδικά αυτά εκθετικά είναι περιοδικά στη συχνότητα με περίοδο 2π , γιατί $e^{j\omega n} = e^{j(\omega+2\pi)n}$. Επίσης έχουμε δει ότι το φάσμα ενός σήματος διακριτού χρόνου είναι περιοδικό με περίοδο 2π . Άρα λοιπόν θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο DTFT ορίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο ενός μιγαδικού επιπέδου, αφού αποτελείται από άθροισμα συναρτήσεων $e^{-j\omega n}$, που η καθεμία έχει “βάρος” $x[n_0]$. Όταν βλέπουμε λοιπόν ένα DTFT-φάσμα ενός σήματος διακριτού χρόνου, ουσιαστικά αυτό που βλέπουμε ορίζεται πάνω σε αυτόν τον κύκλο, επαναλαμβάνοντας μια πλήρη “στροφή” του κύκλου - και άρα “βλέποντας” το ίδιο κομμάτι του φάσματος κάθε 2π . Απλά το σχεδιάζουμε σε ευθεία γραμμή, όπως έχουμε δει σε προηγούμενες σημειώσεις, για λόγους ευκολίας². Το Σχήμα 15.1 δείχνει πως είναι πραγματικά το φάσμα ενός διακριτού σήματος (εδώ, το φάσμα είναι πραγματική συνάρτηση του ω , για ευκολία σχεδίασης). Παρατηρήστε ότι ορίζουμε το



Σχήμα 15.1: Φάσμα σήματος στο μιγαδικό επίπεδο.

περιοδικό φάσμα ως τιμές μιας συνάρτησης που ορίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Η “επέκταση” λοιπόν που συζητάμε και έρχεται με τον ZT είναι ο ορισμός του ενός φάσματος πάνω και σε άλλους κύκλους του μιγαδικού επιπέδου, και όχι μόνο στο μοναδιαίο, όπως γίνεται στον DTFT! Πώς μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο; Μα φυσικά, χρησιμοποιώντας εκθετικά της μορφής $z = re^{j\omega}$ αντί των απλών $e^{j\omega}$, τα οποία ορίζονται πάνω σε κύκλους ακτίνας r !!

Ας το δούμε στην πράξη λίγο. Μιλήσαμε πριν για το σήμα

$$x[n] = 2^n u[n] \quad (15.5)$$

και είπαμε ότι δεν έχει μετασχ. Fourier. Όμως ξέρουμε ότι

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (15.6)$$

για $|a| < 1$. Πώς θα μπορούσαμε να κάνουμε το προαναφερθέν $x[n]$ να έχει μετασχ. Fourier; Μα φυσικά αν κάπως “μετατρέπαμε” αυτό το 2^n σε κάτι (μικρότερο της μονάδας)ⁿ, ώστε να πέσουμε στην περίπτωση της Σχέσης (15.6). Έστω λοιπόν ότι διαιρούμε αυτό το 2^n με έναν αριθμό $r^n > 2^n$, με $r > 0$ και πραγματικό, ώστε να μπορεί να γίνει μετασχηματισμο (sic) κατά Fourier. Έτσι θα είναι

$$\left(\frac{2}{r}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{r}\right)^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{r}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{r} e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{r} e^{-j\omega}} \quad (15.7)$$

²Σας θυμίζει κάτι; Μήπως κάτι παρόμοιο κάναμε όταν πήγαμε από το μετασχ. Fourier στο μετασχ. Laplace στα σήματα συνεχούς χρόνου (HT215);!!! :-)

με $r > 2$. Για μισό λεπτό όμως. Η σχέση

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{r}\right)^n u[n]e^{-j\omega n} \quad (15.8)$$

μπορεί να γραφεί ως

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n r^{-n} u[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n u[n] r^{-n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n u[n] (re^{j\omega})^{-n} \quad (15.9)$$

Όμως αυτή η σχέση είναι ουσιαστικά ένας ντεμί-μετασχηματισμός (-) Fourier του αρχικού μας σήματος, όχι επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, αλλά σε έναν κύκλο ακτίνας r , με $r > 2$!! Έτσι, το σήμα μας αναλύεται σε μιγαδικά εκθετικά της μορφής $z = re^{j\omega}$, αντί των $z = e^{j\omega}$ του μετασχ. Fourier. Άρα μόνο στην περιοχή $r > 2$ του μιγαδικού επιπέδου μπορούμε να ορίσουμε αυτόν το μετασχηματισμό. Όμως r είναι η ακτίνα του κύκλου που ορίζουν τα εκθετικά αυτά, οπότε είναι το μέτρο των εκθετικών αυτών. Μπορούμε δηλαδή να πούμε ισοδύναμα ότι η περιοχή αυτή είναι η $|z| > 2$. Με άλλα λόγια, μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε κύκλο ακτίνας $|z| > 2$ (άρα έχουμε άπειρες επιλογές) για να μετασχηματίσουμε το σήμα μας! Το σύνολο των κύκλων αυτών, πάνω στους οποίους ορίζεται ο μετασχ. Z ονομάζεται **Πεδίο Σύγκλισης - Region of Convergence - ROC**.

Έτσι, ο μετασχηματισμός που αναλύει σήματα διακριτού χρόνου σε κύκλους ακτίνας $r > 0$ του μιγαδικού επιπέδου που ορίζονται από μιγαδικά εκθετικά $re^{j\omega}$, λέγεται Μετασχηματισμός Z και ορίζεται ως:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad (15.10)$$

με $z = re^{j\omega}$, και ο αντίστροφός του ορίζεται ως:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz \quad (15.11)$$

Ο τελευταίος πρόκειται για επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο μιγαδικό επίπεδο, και θα αναφερθούμε σε αυτόν αργότερα. Στην πράξη, θα χρησιμοποιούμε άλλες μεθόδους για να πηγαίνουμε από τον χώρο του ZT στο χώρο του χρόνου.

Με την ευκαιρία, δείτε την ομοιότητά του με τον μετασχηματισμό Fourier:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (15.12)$$

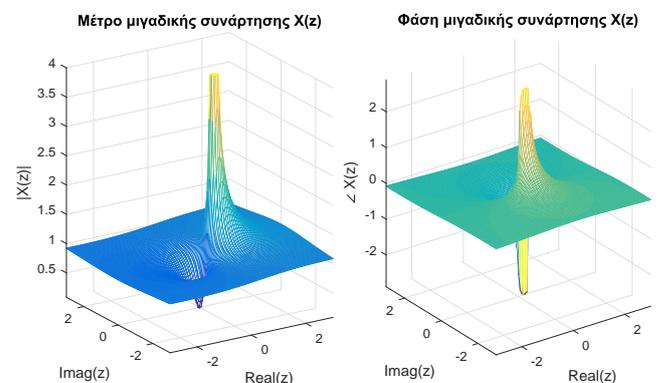
Ουσιαστικά δηλαδή, αν στον ορισμό του ZT θέσουμε $z = e^{j\omega}$, θα πάρουμε τον DTFT, δηλ. ο DTFT είναι η “έκδοση” του ZT πάνω στο μοναδιαίο κύκλο! Καθολού περιέργο, με βάση όσα είπαμε, όμως θα δούμε κάποιες λεπτομέρειες αργότερα...

Παρατηρήστε ότι ο μετασχ. Z είναι μια τετραδιάστατη συνάρτηση ($z : \mathbb{C} \rightarrow X(z) : \mathbb{C}$), και άρα εν γένει δεν μπορούμε να τον σχεδιάσουμε στο χαρτί. Μπορούμε όμως να σχεδιάσουμε το μέτρο του, $|X(z)| = |X(re^{j\omega})|$, και τη φάση του, $\angle X(z) = \angle X(re^{j\omega})$, για διάφορα r , ως τριδιάστατες συναρτήσεις του z . Μάλιστα, μια τέτοια σχεδίαση θα μας δώσει ένα διαισθητικό πλεονέκτημα στη συμπεριφορά του μετασχ. Z σε σχέση με το μετασχ. Fourier.

Ας δούμε πως μοιάζουν το μέτρο και η φάση μιας μιγαδικής συνάρτησης $X(z)$, χωρίς αυτή να συνδέεται με το μετασχ. Z. Έστω λοιπόν η συνάρτηση

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (15.13)$$

για $a = 0.5$. Ας βρούμε τις τιμές του πλάτους και της φάσης της σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 15.2.



Σχήμα 15.2: Μέτρο και φάση μιγαδικής συνάρτησης $X(z)$.

Όμως είδαμε νωρίτερα ότι ο μετασχ. Z έχει κάποιους περιορισμούς στο χώρο του μιγαδικού επιπέδου που μπορούμε να τον ορίσουμε. Για το σήμα $x[n] = 2^n u[n]$, ο περιορισμός ήταν $|z| > 2$, και το αναφέραμε ως Πεδίο Σύγκλισης. Πριν δούμε κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα υπολογισμού του μετασχ. Z και των γραφημάτων που προκύπτουν, ας μελετήσουμε τις συνθήκες ύπαρξης του μετασχ. Z .

15.2 Ύπαρξη του μετασχ. Z

Από τον ορισμό του μετασχ. Z , έχουμε ότι

$$Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x[n]}{z^n} \quad (15.14)$$

Η ύπαρξη του μετασχηματισμού είναι εγγυημένη αν

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x[n]}{z^n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{z^n} \right| < +\infty \quad (15.15)$$

για κάποιο z . Αν θεωρήσουμε ότι $x[n] = 0$, $n < 0$, τότε το παραπάνω γράφεται

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{z^n} \right| < +\infty \quad (15.16)$$

Αποδεικνύεται ότι οποιοδήποτε σήμα μεγαλώνει πιο αργά από το r^n , για $r > 0 \in \mathfrak{R}$, δηλ. $|x[n]| \leq r^n$, η παραπάνω σχέση ικανοποιείται και άρα υπάρχει ο μετασχ. Z του, γιατί

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{z^n} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{r^n}{z^n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{|z|} \right)^n = \frac{1}{1 - \left(\frac{r}{|z|} \right)^n} \quad (15.17)$$

για $|z| > r$. Έτσι, ο μετασχ. Z υπάρχει μόνο για $|z| > r$.

Με παρόμοιο συλλογισμό αποδεικνύεται η ύπαρξη για οποιοδήποτε σήμα $x[n]$. Σήματα που μεγαλώνουν πιο γρήγορα από το r^n (όπως π.χ. το r^{n^2}) δε θα μας απασχολήσουν.

15.3 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Ας δούμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα υπολογισμού του ΖΤ πάνω σε συνήθη σήματα, και πώς ακριβώς γίνεται αυτή η “επέκταση” σε κύκλους διαφορετικούς από το μοναδιαίο. Κι εδώ, χρήσιμες θα μας φανούν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha}, \quad |\alpha| < 1. \quad (15.18)$$

$$\sum_{n=0}^N \alpha^n = \frac{1 - \alpha^{N+1}}{1 - \alpha}. \quad (15.19)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n] = a^n u[n]$.

Λύση:
Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n]z^{-n} \quad (15.20)$$

Επειδή η $u[n]$, η γνωστή βηματική συνάρτηση, είναι μη μηδενική και ίση με 1 για $n \geq 0$, μπορούμε να

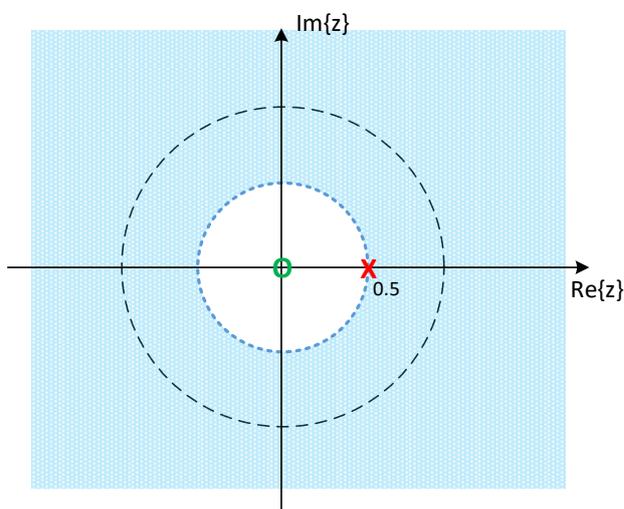
γράφουμε το παραπάνω άθροισμα ως:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n \tag{15.21}$$

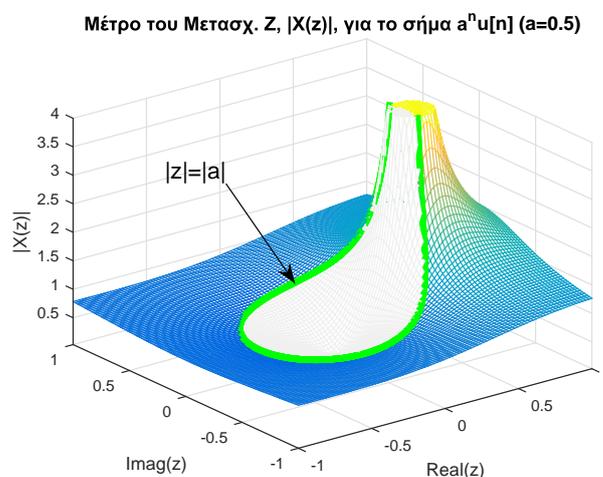
Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την κατάλληλη από τις δυο παραπάνω Σχέσεις (15.18,15.19) που γράψαμε, όπου $\alpha = (az^{-1})$. Άρα θα έχουμε:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{15.22}$$

με $|az^{-1}| < 1 \iff |a| < |z|$. Να λοιπόν ο χώρος του μιγαδικού επιπέδου που ορίζεται ο ZT, δηλ. το Πεδίο Σύγκλισης. Αν το $|a|$ είναι μικρότερο της μονάδας, ο ZT ορίζεται σε όλους τους κύκλους εντός του μπλέ χρώματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 15.3(α) (η θέση του a είναι τυχαία στο σχήμα και ίση με 0.5). Στο



(α') Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$



(β') Μέτρο μετασχ. Z.

Σχήμα 15.3: Μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n] = a^n u[n]$: (α) Πεδίο σύγκλισης, (β) Μέτρο Μετασχηματισμού.

Σχήμα 15.3(β) φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Z. Παρατηρήστε ότι δεν περιλαμβάνει τις τιμές για τις οποίες $|z| < |a|$. Η πράσινη καμπύλη ορίζει τον κύκλο $|z| = |a|$. Αν γράψουμε το μετασχηματισμό ως

$$X(z) = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a| \tag{15.23}$$

μπορούμε να ορίσουμε τη θέση $z = a$ ως πόλος του μετασχηματισμού, διότι τον απειρίζεται (μηδενίζει τον παρονομαστή), ενώ τη θέση $z = 0$ ως μηδενικό του μετασχηματισμού, διότι τον μηδενίζει (μηδενίζει τον αριθμητή).

2. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n] = -a^n u[-n - 1]$.

Λύση:
Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n - 1]z^{-n} \tag{15.24}$$

Επειδή η $u[-n - 1]$ είναι μη μηδενική για $n \leq -1$, μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω άθροισμα ως:

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n \tag{15.25}$$

Εδώ που φτάσαμε, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αμέσως κάποια από τις Σχέσεις (15.18),(15.19), γιατί τα όρια στο παραπάνω άθροισμα δεν είναι ίδια με κάποια από τις σχέσεις αυτές. Πρέπει να κάνουμε ένα βήμα ακόμα. Κι αυτό δεν είναι άλλο από το να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε $k = -n$ και τότε το άθροισμά μας γίνεται

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n = - \sum_{k=\infty}^1 (a^{-1}z)^k \quad (15.26)$$

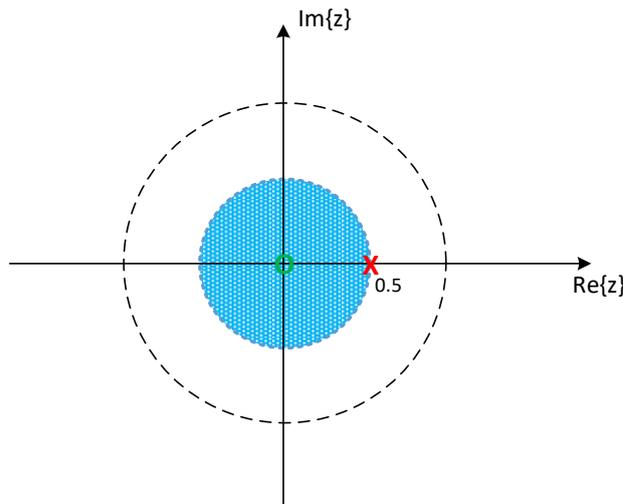
$$= - \sum_{k=1}^{+\infty} (a^{-1}z)^k = - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^k - 1 \right) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^k \quad (15.27)$$

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την κατάλληλη από τις δυο παραπάνω Σχέσεις (15.18),(15.19) που γράψαμε, όπου $\alpha = (a^{-1}z)$. Άρα θα έχουμε:

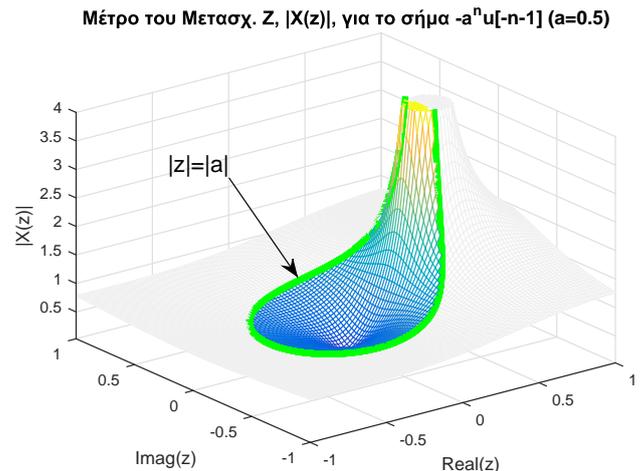
$$X(z) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^k = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1 - a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} - \frac{1}{1 - a^{-1}z} \quad (15.28)$$

$$= \frac{1 - 1 - a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = - \frac{a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (15.29)$$

με πεδίο σύγκλισης ROC $|a^{-1}z| < 1 \iff |a| > |z|$, άρα εδώ ορίζεται ο ΖΤ σε κύκλους οι οποίοι έχουν ακτίνα μικρότερη από $|a|$, όπως δείχνει το Σχήμα 15.4(α) (η θέση του a είναι τυχαία στο σχήμα και ίση με 0.5). Στο Σχήμα 15.4(β) φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Ζ. Παρατηρήστε ότι δεν περιλαμβάνει τις τιμές για



(α') Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Ζ για $a = 0.5$



(β') Μέτρο μετασχ. Ζ για $a = 0.5$

Σχήμα 15.4: Μετασχηματισμός Ζ του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$: (α) Πεδίο σύγκλισης, (β) Μέτρο Μετασχηματισμού.

τις οποίες $|z| > |a|$. Η πράσινη καμπύλη ορίζει τον κύκλο $|z| = |a|$. Αν γράψουμε το μετασχηματισμό ως

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a| \quad (15.30)$$

μπορούμε να ορίσουμε τη θέση $z = a$ ως πόλος του μετασχηματισμού, διότι τον απειρίζεται (μηδενίζει τον παρονομαστή), ενώ τη θέση $z = 0$ ως μηδενικό του μετασχηματισμού, διότι τον μηδενίζει (μηδενίζει τον αριθμητή).

Σημαντική παρατήρηση:

Είδαμε στα δυο πρώτα παραδείγματα ότι δυο διαφορετικά σήματα στο χρόνο, έχουν τον ίδιο ΖΤ. Σωστά; Λάθος! :-). Ο ΖΤ δεν είναι μόνο ο τύπος που καταλήγουν τα μαθηματικά. Είναι ΚΑΙ το πεδίο σύγκλισης ROC! Ποτέ δε γράφουμε μόνο τον τύπο του ΖΤ. Πάντα πρέπει να γράφουμε μαζί και το εκάστοτε ROC! Το ROC είναι αυτό που ορίζει μονοσήμαντα τα ζευγάρια μετασχηματισμού Ζ! Χωρίς αυτό, αν μας έδιναν τον

τύπο του μετασχηματισμού Z των παραδειγμάτων 1 και 2, δε θα μπορούσαμε να πούμε από ποιό σήμα στο χρόνο προέρχεται! Μπορεί να είναι είτε το

$$x[n] = a^n u[n]$$

είτε το

$$y[n] = -a^n u[-n - 1]$$

Το ROC είναι αυτό που καθορίζει το κάθε ζευγάρι μετασχηματισμού Z! Ανάλογα λοιπόν με το ROC, έχουμε διαφορετικά ζεύγη ZT.

3. Να βρεθεί ο μετασχ. Z του σήματος

$$w[n] = x[n] + y[n] = a^n u[n] - \beta^n u[-n - 1] \quad (15.31)$$

Λύση:

Είδαμε παραπάνω ότι

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a| \quad (15.32)$$

$$-\beta^n u[-n - 1] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} = \frac{z}{z - \beta}, \quad |z| < |\beta| \quad (15.33)$$

Επειδή ο μετασχ. Z είναι γραμμικός (θα αναφερθούμε σύντομα σε αυτό), το άθροισμα δυο σημάτων έχει μετασχ. Z το άθροισμα των μετασχηματισμών, με την περιοχή σύγκλισης του αθροίσματος να ικανοποιεί τη σχέση

$$ROC_w \supset ROC_x \cap ROC_y \quad (15.34)$$

Αυτό σημαίνει προφανώς ότι για να υπάρχει ο μετασχ. Z του αθροίσματος, θα πρέπει το πεδίο σύγκλισής του να είναι μη κενό σύνολο. Αυτό εξαρτάται από τις σχετικές θέσεις των a, β . Η αλγεβρική έκφραση του μετασχηματισμού θα είναι

$$W(z) = \frac{z}{z - a} + \frac{z}{z - \beta} = \frac{z(z - \beta) + z(z - a)}{(z - a)(z - \beta)} \quad (15.35)$$

Οι πόλοι του μετασχ. αυτού βρίσκονται στις θέσεις $z_1 = a, z_2 = \beta$.

- Αν $|a| < |\beta|$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι το $|a| < |z| < |\beta|$, δηλ. ένας δακτύλιος στο z -επίπεδο. Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο Σχήμα 15.5(α) ενώ το μέτρο του μετασχηματισμού στο Σχήμα 15.5(β). Αν γράψουμε το μετασχηματισμό ως

$$W(z) = \frac{z}{z - a} + \frac{z}{z - \beta} = \frac{z(2z - (a + \beta))}{(z - a)(z - \beta)}, \quad |\beta| > |z| > |a| \quad (15.36)$$

μπορούμε να ορίσουμε τις θέσεις $z = a, z = \beta$ ως πόλοι του μετασχηματισμού, διότι τον απειρίζουν (μηδενίζουν τον παρονομαστή), ενώ τις θέσεις $z = 0, z = (a + \beta)/2$ ως μηδενικά του μετασχηματισμού, διότι τον μηδενίζουν (μηδενίζει τον αριθμητή).

- Αν $|a| \geq |\beta|$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο, \emptyset , και άρα ο μετασχ. Z, παρ' όλο που έχει αλγεβρική μορφή, ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ, γιατί δεν έχει "πεδίο ορισμού", δηλ. κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου όπου θα ορίζεται!

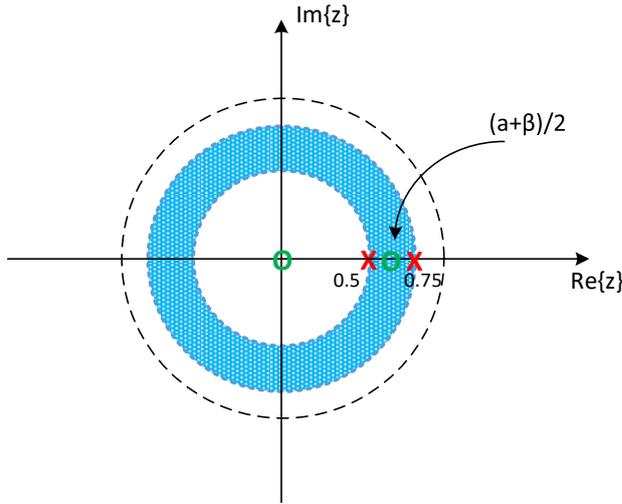
4. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n] = \delta[n]$.

Λύση:

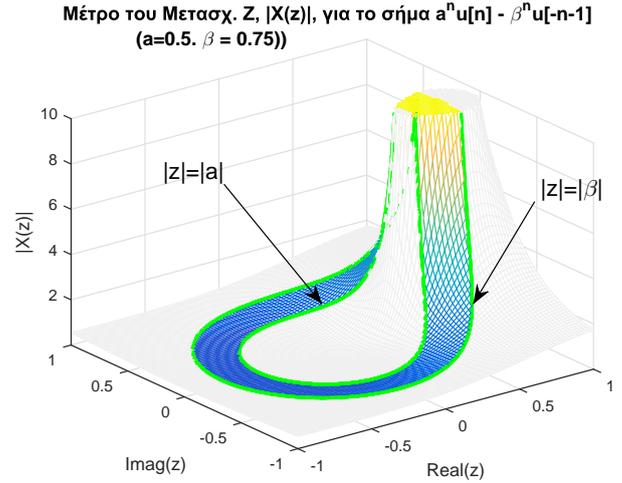
Ας βρούμε και τον ZT της πιο σημαντικής συνάρτησης, της συνάρτησης Δέλτα. Είναι:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]z^{-n} \quad (15.37)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$ ορίζεται μόνο στη θέση $n = 0$ κι έχει πλάτος 1. Παντού



(α') Πεδίο σύγκλισης, με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.



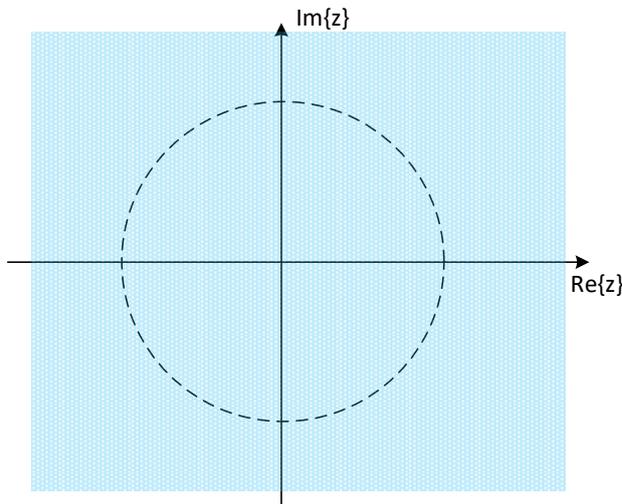
(β') Μέτρο μετασχ. Z με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.

Σχήμα 15.5: Μετασχηματισμός Z του σήματος $w[n] = a^n u[n] - \beta^n u[-n - 1]$: (α) Πεδίο σύγκλισης, (β) Μέτρο Μετασχηματισμού.

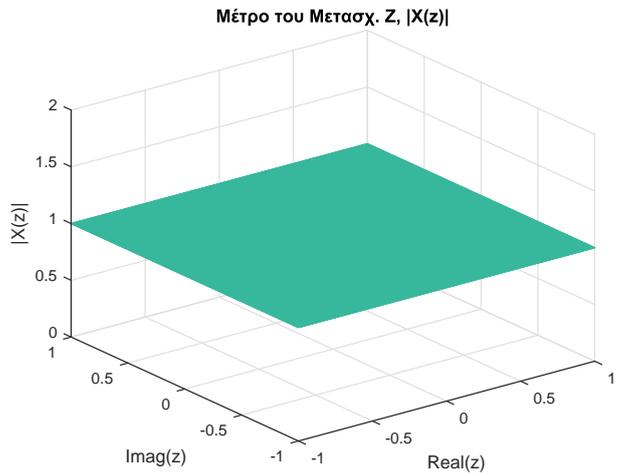
αλλού είναι μηδέν. Άρα το παραπάνω άθροισμα θα γίνει:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]z^{-n} = 1z^0 = 1 \tag{15.38}$$

Προφανώς εδώ δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός όσον αφορά το πεδίο σύγκλισης ROC, άρα ο ZT του σήματος αυτού ορίζεται σε ΟΛΟ το μιγαδικό επίπεδο!! Ενδιαφέρον! Το μέτρο του μετασχ. Z φαίνεται στο Σχήμα 15.6.



(α') Πεδίο σύγκλισης.



(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n]$.

Σχήμα 15.6: Μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n] = \delta[n]$: (α) Πεδίο σύγκλισης, (β) Μέτρο Μετασχηματισμού.

5. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$.

Λύση:

Εδώ θα βρούμε τον Z της μετατοπισμένης συνάρτησης Δέλτα. Η $\delta[n - n_0]$ είναι μια συνάρτηση Δέλτα στη θέση n_0 . Το n_0 αυτό μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό. Είναι λοιπόν:

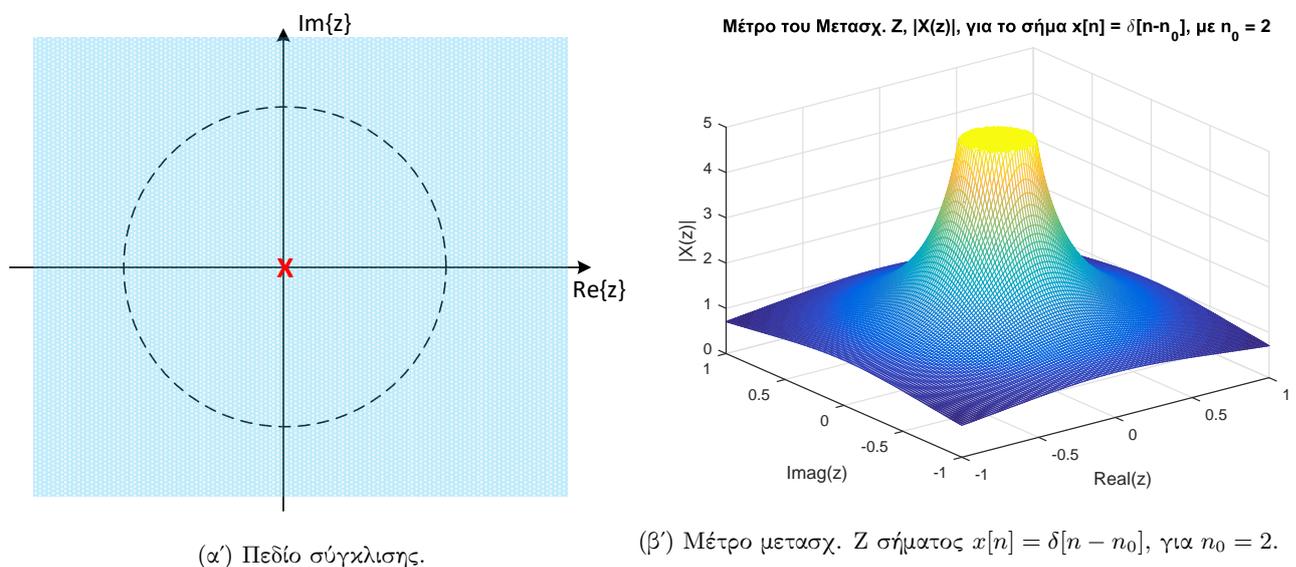
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]z^{-n} \quad (15.39)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n - n_0]$ ορίζεται μόνο στη θέση $n = n_0$ κι έχει πλάτος 1. Παντού αλλού είναι μηδέν. Άρα το παραπάνω άθροισμα θα γίνει:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]z^{-n} = 1z^{-n_0} = z^{-n_0} \quad (15.40)$$

με πεδίο σύγκλισης ROC το $|z| > 0$. Το μηδέν δεν περιλαμβάνεται στο ROC γιατί για $z = 0$, απειρίζεται το $z^{-n_0} = \frac{1}{z^{n_0}}$ (μηδενίζεται ο παρονομαστής). Οπότε ο μετασχηματισμός έχει έναν πόλο στη θέση $z = 0$. Άρα βρήκαμε ότι ο ZT της $\delta[n - n_0]$ είναι ο z^{-n_0} , με ROC $|z| > 0$.

Το μέτρο του μετασχ. Z για $n_0 = 2$ φαίνεται στο Σχήμα 15.7. Παρατηρήστε πως αν γράψουμε το μετασχη-



Σχήμα 15.7: Μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$, για $n_0 = 2$: (α) Πεδίο σύγκλισης, (β) Μέτρο Μετασχηματισμού.

ματισμό ως

$$X(z) = \frac{1}{z^{n_0}} \quad (15.41)$$

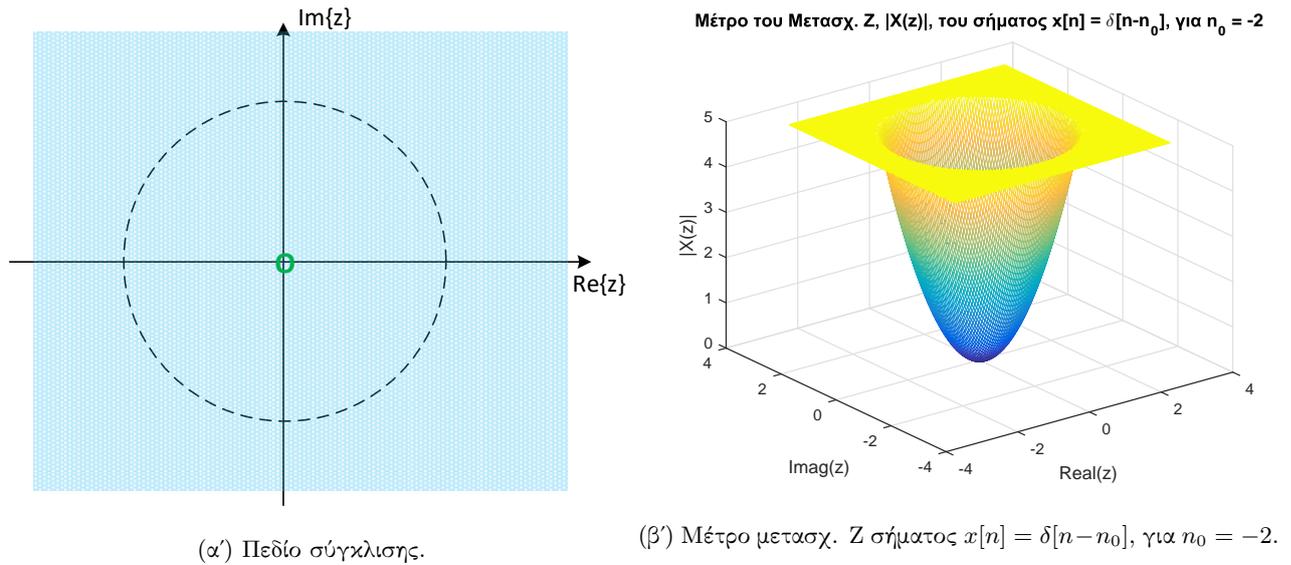
παρατηρούμε εύκολα ότι ο μετασχηματισμός απειρίζεται στη θέση $z = 0$, και μάλιστα ο πόλος στη θέση αυτή είναι πολλαπλός (τάξης n_0). Επίσης παρατηρούμε ότι για $z \rightarrow \pm\infty$, ο μετασχηματισμός μηδενίζεται. Άρα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα μηδενικό στο άπειρο!

Στην περίπτωση που $n_0 < 0$, το μέτρο του μετασχ. Z για $n_0 = -2$ φαίνεται στο Σχήμα 15.8. Τέλος, παρατηρούμε εύκολα ότι ο μετασχηματισμός απειρίζεται όταν $z \rightarrow \pm\infty$, και μάλιστα ο πόλος στη θέση αυτή είναι πολλαπλός (τάξης n_0). Άρα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένας πόλος στο άπειρο. Επίσης παρατηρούμε ότι για $z = 0$, ο μετασχηματισμός μηδενίζεται, οπότε υπάρχει ένα μηδενικό στη συμβολή των αξόνων.

15.4 Σύνδεση με το μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου

Όταν θέτουμε $z = e^{j\omega}$ στο άθροισμα του μετασχ. Z, αυτό που κάνουμε “σιωπηλά” είναι ότι εκτιμούμε το μετασχ. Z σε συχνότητες που βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου, που δεν είναι άλλος απ’ τον κύκλο $|z| = |e^{j\omega}| = 1$!

Για να μπορούμε όμως να το κάνουμε αυτό, ΠΡΕΠΕΙ ο μοναδιαίος αυτός κύκλος να περιέχεται μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z! Αλλιώς δεν έχει κανένα νόημα ο υπολογισμός του $X(z)|_{z=e^{j\omega}}$! Γι’ αυτό λοιπόν, όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου μέσω του μετασχ. Z, πρέπει να



Σχήμα 15.8: Μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$, για $n_0 = -2$: (α) Πεδίο σύγκλισης, (β) Μέτρο Μετασχηματισμού.

προσέχουμε πρώτα αν ο μοναδιαίος κύκλος περιέχεται μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z. Αν περιέχεται, καλώς, αντικαθιστούμε $z = e^{j\omega}$ στον τύπο του μετασχ. Z και έχουμε το μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου. Αν όχι, τότε ο μετασχ. Fourier ΔΕΝ μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Z! Ας μιλήσουμε όμως με λίγο μεγαλύτερη ακρίβεια σχετικά με αυτά...

Ο ορισμός του μετασχ. Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (15.42)$$

είναι ταυτόσημος με τον ορισμό του μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (15.43)$$

αν στη Σχέση (15.43) θέσουμε όπου $e^{j\omega}$ το $z = re^{j\omega}$. Είναι εύλογο να περιμένει κανείς ότι ο μετασχ. Z, $X(z)$, ενός σήματος $x[n]$, να είναι ίδιος με τον μετασχ. Fourier, $X(\omega)$, του ίδιου σήματος, με το $e^{j\omega}$ να έχει αντικατασταθεί από το z . Για παράδειγμα, μάθαμε πριν λίγο ότι

$$a^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a| \quad (15.44)$$

Αντικαθιστώντας το z με το $e^{j\omega}$, έχουμε ότι

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = X(e^{j\omega}) \quad (15.45)$$

που είναι ο μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου του σήματος $x[n]$, όπως είδαμε σε προηγούμενο Κεφάλαιο. Δυστυχώς αυτή η διαδικασία δεν ισχύει για κάθε σήμα $x[n]$. Μπορούμε να την χρησιμοποιούμε μόνο όταν η περιοχή σύγκλισης του μετασχ. Z περιέχει το μοναδιαίο κύκλο.

Για παράδειγμα, ο μετασχ. Fourier της βηματικής συνάρτησης $x[n] = u[n]$ είναι ο

$$x[n] = u[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \quad (15.46)$$

για $\omega \in [-\pi, \pi]$. Ο αντίστοιχος μετασχ. Z είναι ο

$$x[n] = u[n] \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1 \quad (15.47)$$

και όπως βλέπουμε από την περιοχή σύγκλισης, δεν περιλαμβάνεται ο μοναδιαίος κύκλος. Άρα, ο μετασχ. Z ΔΕΝ μπορεί να μας δώσει το μετασχ. Fourier, αλλά ούτε και το αντίστροφο! Σε αυτές τις περιπτώσεις, η σχέση μεταξύ των δυο μετασχηματισμών δεν είναι τόσο απλή. Ο λόγος για αυτήν την περιπλοκή σχετίζεται με τη σύγκλιση του αθροίσματος του μετασχ. Fourier, όπου η άθροιση περιορίζεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Λόγω αυτού του περιορισμού, το άθροισμα Fourier Διακριτού Χρόνου για τη βηματική συνάρτηση δε συγκλίνει. Χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μια γενικευμένη συνάρτηση - τη $\delta(\omega)$ - για τη σύγκλιση.

Αντιθέτως, το άθροισμα Z για τη βηματική συνάρτηση συγκλίνει αλλά μόνο για $|z| > 1$, μια περιοχή που είναι “απαγορευμένη” για το μετασχ. Fourier! :-)

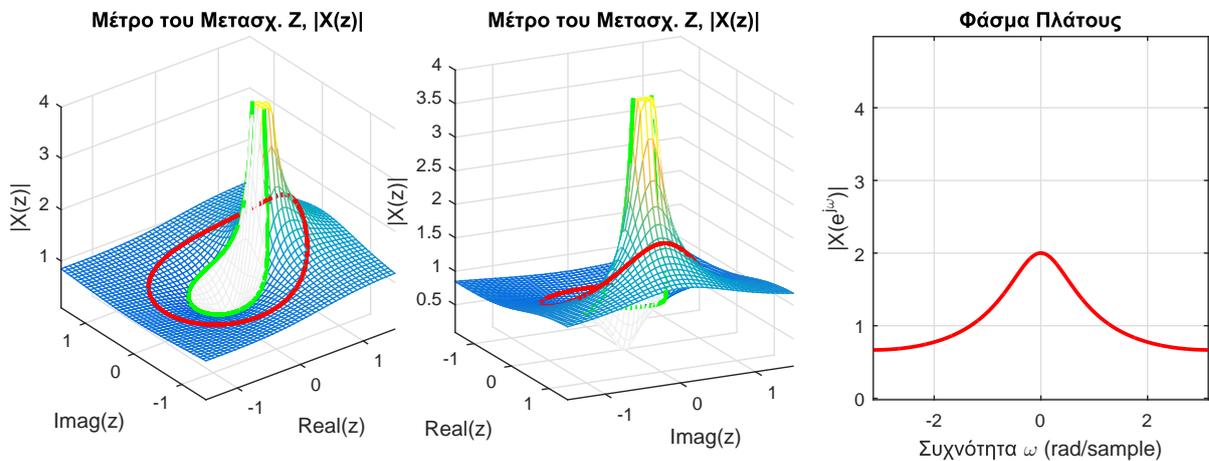
Ένα ακόμα ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι παρ’ όλο που ο μετασχ. Z είναι μια γενίκευση του μετασχ. Fourier, υπάρχουν σήματα (π.χ. περιοδικά σήματα), για τα οποία ο μετασχ. Z δεν υπάρχει, ενώ ο μετασχ. Fourier υπάρχει! :-) (αλλά δεν προκύπτει από απλή σύγκλιση του αθροίσματος).

Ας δούμε μερικά παραδείγματα αυτής της σχέσης των δυο μετασχηματισμών.

- Ας θεωρήσουμε ξανά το σήμα

$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1 \quad (15.48)$$

Είδαμε ότι αυτό έχει μετασχηματισμό Z ως



Σχήμα 15.9: Μέτρο μετασχ. Z, $|X(z)|$ και μοναδιαίος κύκλος (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους $|X(e^{j\omega})|$, για $a = 0.5$.

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a| \quad (15.49)$$

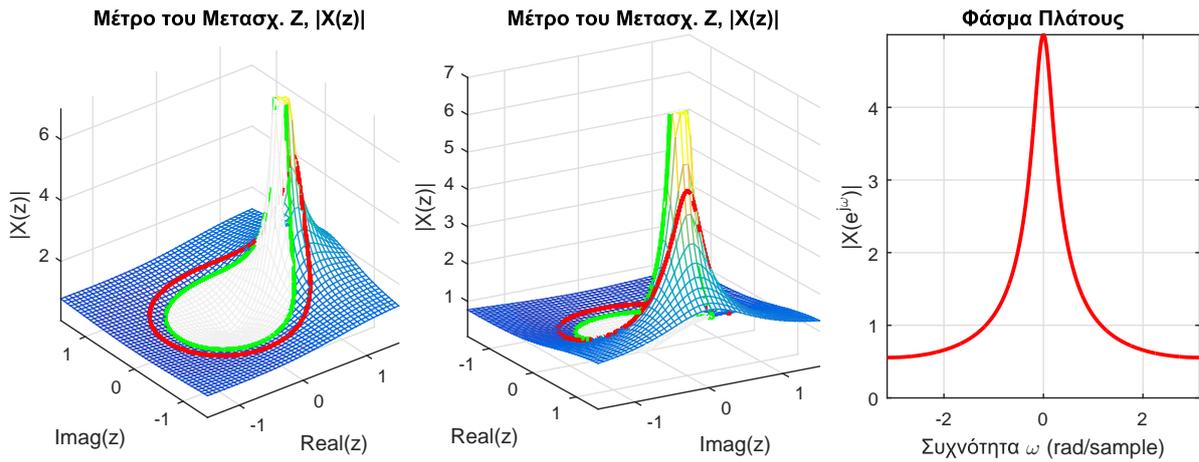
και από προηγούμενες σημειώσεις, ότι έχει μετασχ. Fourier ως

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (15.50)$$

Στα Σχήματα 15.9, 15.10 βλέπετε το $|X(z)|$ για μερικές τιμές του z από δυο οπτικές γωνίες, και για $a = 0.5$ και $a = 0.8$ αντίστοιχα, καθώς και το μέτρο του Μετασχ. Fourier του ίδιου σήματος, το οποίο θυμίζει ότι είναι

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos(\omega)}} \quad (15.51)$$

Παρατηρήστε στα τρισδιάστατα γραφήματα το μοναδιαίο κύκλο που έχει σχεδιαστεί επάνω στο $|X(z)|$. Αυτός ο κύκλος είναι ο μοναδιαίος κύκλος όπου εκεί ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier, και ο κύκλος αυτός έχει “απλωθεί” επάνω στο τρισδιάστατο γράφημα για να μας δώσει τις τιμές του $|X(e^{j\omega})|$! Είναι ακριβώς οι ίδιες τιμές με το $|X(e^{j\omega})|$ που είναι σχεδιασμένο ως δισδιάστατο σήμα και στα δύο Σχήματα. Ακολουθήστε τις τιμές του μοναδιαίου κύκλου για μια πλήρη περιστροφή επάνω στο $|X(z)|$ και δείτε ότι ακολουθούν ακριβώς την ίδια μονοτονία με το $|X(e^{j\omega})|$! Επίσης, προσέξτε τον πόλο στη θέση $z = a = 0.5$ και $z = a = 0.8$, ο οποίος απειρίζεται το $|X(z)|$. Τέλος, το $|X(z)|$ μηδενίζεται για $z = 0$, οπότε στο $z = 0$ βλέπετε ένα μικρό “βύθισμα” της γραφικής παράστασης. Τέλος, πρέπει να επισημανθεί ότι το πεδίο σύγκλισης δε φαίνεται στα σχήματα αυτά, αλλά γνωρίζουμε ότι είναι $|z| > |a|$ και για τα δυο Σχήματα.



Σχήμα 15.10: Μέτρο μετασχ. Z, $|X(z)|$ και μοναδιαίος κύκλος (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους $|X(e^{j\omega})|$, για $a = 0.8$.

Συγκρίνετε το Σχήμα 15.9 με το Σχήμα 15.10. Καταλαβαίνετε γιατί άλλαξε το μέτρο του μετασχ. Fourier κατ' αυτόν τον τρόπο; Πώς επηρεάστηκε το μέτρο της φασματικής απόκρισης όταν ο πόλος πλησίασε το μοναδιαίο κύκλο; Μπορείτε να αντιληφθήτε τι θα συμβεί αν ο πόλος βρεθεί ακριβώς επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, δηλ. στη θέση $|z| = 1$;

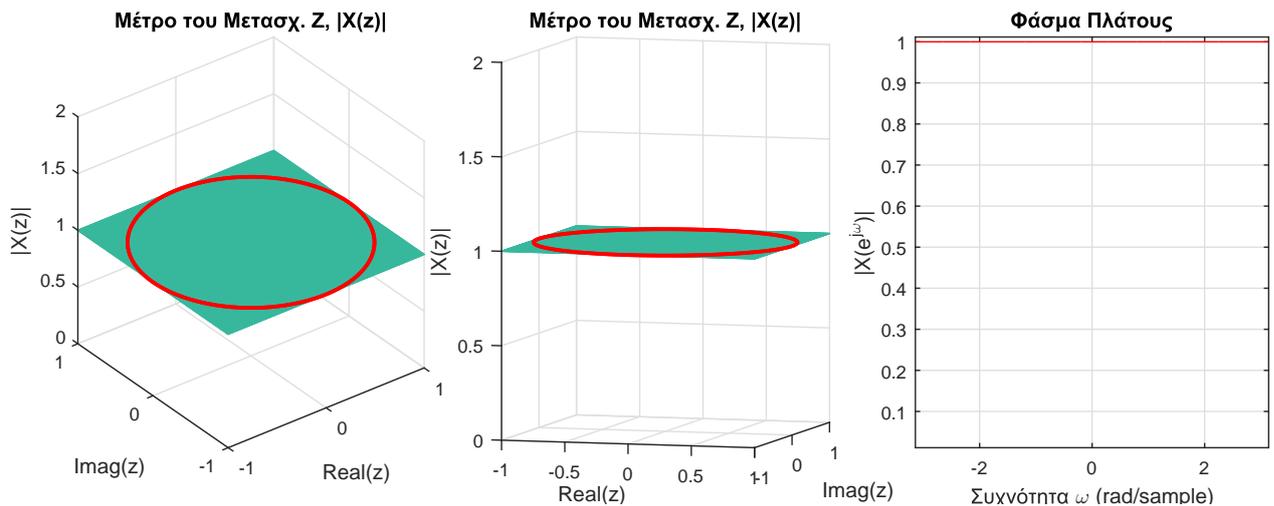
- Ας δούμε τώρα και το μετασχ. Z της συνάρτησης Δέλτα. Πιο πριν δείξαμε ότι

$$x[n] = \delta[n] \longleftrightarrow X(z) = 1, \quad \forall z \tag{15.52}$$

και γνωρίζουμε ότι

$$x[n] = \delta[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = 1 \tag{15.53}$$

Στο Σχήμα (15.11), βλέπουμε ακριβώς αυτό που περιμέναμε. Για κάθε τιμή του z , ο μετασχ. Z είναι



Σχήμα 15.11: Μέτρο μετασχ. Z, $|X(z)|$ και μοναδιαίος κύκλος (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους $|X(e^{j\omega})|$, της συνάρτησης $x[n] = \delta[n]$.

σταθερός και ίσος με 1, το ίδιο και ο μετασχ. Fourier που ορίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

- Ας δούμε τώρα και το μετασχ. Z μιας μετατοπισμένης συνάρτησης Δέλτα. Πιο πριν δείξαμε ότι

$$x[n] = \delta[n - n_0] \longleftrightarrow X(z) = z^{-n_0}, \quad \forall z \neq 0 \tag{15.54}$$

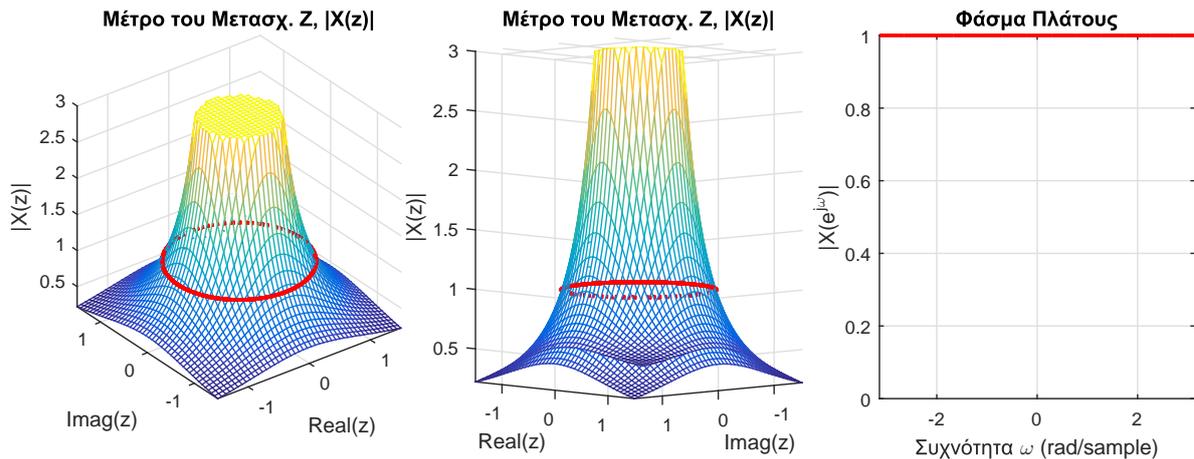
και γνωρίζουμε ότι

$$x[n] = \delta[n - n_0] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \quad (15.55)$$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο του μετασχ. Fourier είναι μονάδα, αλλά υπάρχει μη μηδενική φάση ίση με $\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_0$. Ας θεωρήσουμε $n_0 = 2$. Το μέτρο του μετασχ. Z θα είναι

$$|X(z)| = |z^{-2}| = \frac{1}{|z^2|} = \frac{1}{|r^2 e^{j2\omega}|} = \frac{1}{r^2} \quad (15.56)$$

Στο Σχήμα (15.12), βλέπουμε ακριβώς αυτό που περιμέναμε. Για $z = e^{j\omega}$, δηλ. επάνω στο μοναδιαίο κύκλο,



Σχήμα 15.12: Μέτρο μετασχ. Z, $|X(z)|$ και μοναδιαίος κύκλος (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους $|X(e^{j\omega})|$, της συνάρτησης $x[n] = \delta[n - 2]$.

ο μετασχ. Z είναι σταθερός και ίσος με 1, το ίδιο φυσικά και ο μετασχ. Fourier, αφού κι αυτός ορίζεται επάνω εκεί. Επίσης, το φάσμα πλάτους είναι όπως ακριβώς το περιμέναμε.

- Τέλος, ας δούμε το φίλτρο κυλιόμενης μέσης τιμής (Moving Average), που τόσες φορές το έχουμε αναφέρει. Ως γνωστόν, το αιτιατό φίλτρο κυλιόμενης μέσης τιμής δίνεται από τον τύπο

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_2 + 1}, & 0 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (15.57)$$

Υπενθυμίζεται ότι για το παραπάνω φίλτρο κυλιόμενης μέσης τιμής, έχουμε δείξει ότι

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{M_2 + 1} \left| \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} \right| |e^{-j\omega M_2/2}| = \frac{1}{M_2 + 1} \left| \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} \right| \quad (15.58)$$

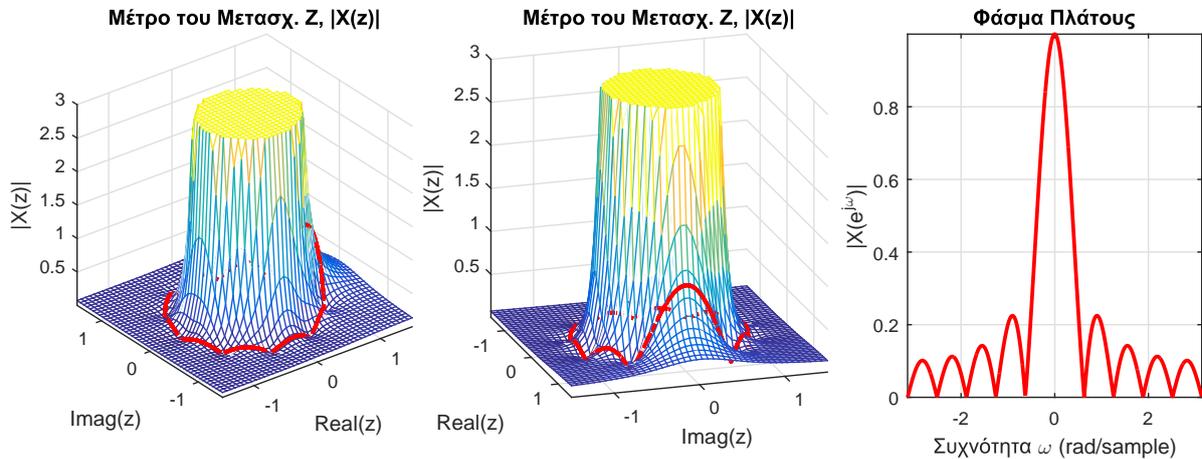
και

$$\angle X(e^{j\omega}) = \begin{cases} -M_2\omega/2, & 0 \leq \omega < \frac{2\pi}{M_2+1} \\ -M_2\omega/2 + \pi, & \frac{2\pi}{M_2+1} \leq \omega < \frac{4\pi}{M_2+1} \\ -M_2\omega/2, & \frac{4\pi}{M_2+1} \leq \omega < \frac{6\pi}{M_2+1} \\ -M_2\omega/2 + \pi, & \frac{6\pi}{M_2+1} \leq \omega < \frac{8\pi}{M_2+1} \\ -M_2\omega/2, & \frac{8\pi}{M_2+1} \leq \omega < \frac{10\pi}{M_2+1} \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad (15.59)$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι ο μετασχ. Z του παραπάνω σήματος είναι

$$X(z) = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{n=0}^{M_2} z^{-n} = \frac{1}{M_2 + 1} \frac{1 - (z^{-1})^{M_2+1}}{1 - z^{-1}} \quad (15.60)$$

Το παραπάνω όμως μπορεί να γραφεί ως



Σχήμα 15.13: Μέτρο μετασχ. Z, $|X(z)|$ και μοναδιαίος κύκλος (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους $|X(e^{j\omega})|$, του φίλτρου κυλιόμενης μέσης τιμής για $M_2 = 9$.

$$X(z) = \frac{1}{M_2 + 1} \frac{1 - (z^{-1})^{M_2+1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{z^{M_2}} \frac{z^{M_2+1} - 1}{z - 1} \quad (15.61)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι υπάρχουν $M_2 + 1$ μηδενισμοί του παρονομαστή (δηλ. οι πόλοι), ο ένας βρίσκεται στο $z = 1$ και οι υπόλοιποι M_2 στο $z = 0$. Οι μηδενισμοί του αριθμητή (που θα δούμε αργότερα ότι λέγονται *μηδενικά*) βρίσκονται στις θέσεις $z_k = e^{j2\pi k/(M_2+1)}$, $k = 0, 1, \dots, M_2$, δηλ. είναι $M_2 + 1$ το πλήθος. Ο ένας απ' αυτούς, ο $z_0 = 1$ βρίσκεται στην ίδια θέση με τον πόλο που αναφέραμε πριν. Αυτοί οι δυο μηδενισμοί, του αριθμητή και του παρονομαστή στη θέση $z = 1$ αλληλοακυρώνονται, οπότε στη θέση $z = 1$ η συνάρτηση $H(z)$ συμπεριφέρεται κανονικά, χωρίς να μηδενίζεται ή να απειρίζεται.

Άρα τελικά, το $X(z)$ έχει M_2 πόλους στο $z = 0$ και M_2 μηδενικά στα $z_k = e^{j2\pi k/(M_2+1)}$, $k = 1, \dots, M_2$. Δείτε το Σχήμα (15.13). Ανατρέξτε στην ανάλυση που κάναμε για το φίλτρο κυλιόμενης μέσης τιμής, όταν συζητούσαμε για τη φασματική απόκριση. Παρατηρήστε τις ομοιότητες.

Από τα παραπάνω παραδείγματα, μπορούμε να συνοψίσουμε τα εξής συμπεράσματα:

1. Ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ ενός σήματος $x[n]$ μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Z $X(z)$ αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.
2. Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια “φέτα” του μετασχ. Z στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας $|z| = 1$.
3. Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά “φέτες” των διδιάστατων συναρτήσεων $|X(z)|$ και $\phi(z)$ επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

15.5 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z

Έχουν αποδειχθεί κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες σχετικά με τον Z. Ο πίνακας 15.1 εμφανίζει τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες.

15.6 Κατηγορίες σημάτων και η σχέση τους με το Μετασχ. Z

Εδώ θα κάνουμε μια μικρή αναφορά σε ένα είδος κατηγοριοποίησης σημάτων με βάση τις τιμές τους στο χρόνο, και θα δούμε τη σχέση τους με το μετασχηματισμό Z.

Ιδιότητες μετασχηματισμού Z			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Z	Πεδίο Σύγκλισης
	$x[n]$	$X(z)$	R_x
	$y[n]$	$Y(z)$	R_y
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	$R \supset R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n - n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το R_x
Πολλαπλασιασμός με εκθετικό	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n - k]$	$X(z)Y(z)$	$R \supset R_x \cap R_y$
Παραγωγή στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το R_x
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0]$	

Πίνακας 15.1: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Z

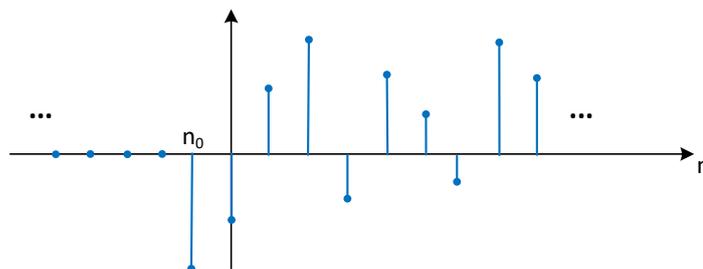
Ένα σήμα λέγεται **δεξιόπλευρο** όταν οι μη-μηδενικές τιμές του ξεκινούν από ένα σημείο n_0 στο χρόνο και εκτείνονται ως το $+\infty$ (με άλλα λόγια, όταν πριν από κάποιο χρονικό σημείο n_0 οι τιμές του σήματος είναι μηδέν). Για παράδειγμα, τα σήματα

$$x_1[n] = a^n u[n], x_2[n] = u[n + 5], x_3[n] = nu[n - 2]$$

είναι δεξιόπλευρα, αλλά ΟΧΙ και τα

$$x_1[n] = a^n u[-n - 1], x_2[n] = u[-5 - n], x_3[n] = nu[2 - n], x_4[n] = n^2 + 1$$

(διότι είτε έχουν μη-μηδενικές τιμές σε κάθε χρονική στιγμή, είτε δεν υπάρχει κάποιο χρονικό σημείο n_0 πίσω από το οποίο οι τιμές του σήματος να είναι μηδέν). Παρακάτω, στο Σχήμα 15.14, φαίνεται πώς μοιάζει ένα δεξιόπλευρο σήμα.



Σχήμα 15.14: Δεξιόπλευρο σήμα.

Ένα σήμα λέγεται **αριστερόπλευρο** όταν οι μη-μηδενικές τιμές του ξεκινούν από ένα σημείο n_0 στο χρόνο και εκτείνονται ως το $-\infty$ (με άλλα λόγια, όταν μετά από κάποιο χρονικό σημείο n_0 οι τιμές του σήματος είναι

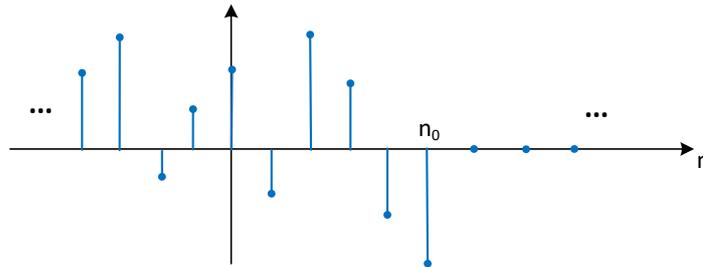
μηδέν). Για παράδειγμα, τα σήματα

$$x_1[n] = -a^n u[-n-1], x_2[n] = u[-n+5], x_3[n] = nu[-n-2]$$

είναι αριστερόπλευρα, αλλά ΟΧΙ και τα

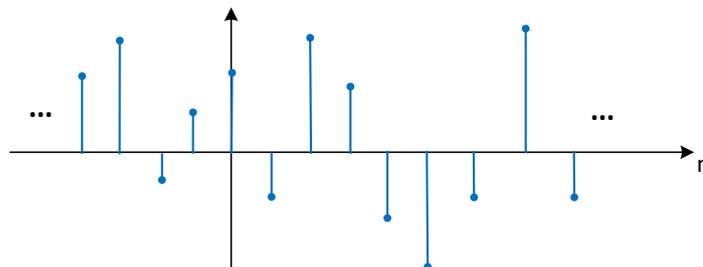
$$x_1[n] = a^n u[n+3], x_2[n] = u[n+5], x_3[n] = nu[3+n], x_4[n] = n^2 + 1$$

(διότι είτε έχουν μη-μηδενικές τιμές σε κάθε χρονική στιγμή, είτε δεν υπάρχει κάποιο χρονικό σημείο n_0 μετά από το οποίο οι τιμές του σήματος να είναι μηδέν). Παρακάτω, στο Σχήμα 15.15 φαίνεται πώς μοιάζει ένα αριστερόπλευρο σήμα. Υπάρχουν και τα **αμφίπλευρα** σήματα, που δεν είναι ούτε αριστερόπλευρα, ούτε δεξιόπλευρα, δηλ.



Σχήμα 15.15: Αριστερόπλευρο σήμα.

εκτείνονται από το $-\infty$ ως το $+\infty$ στο χρόνο, όπως αυτό του Σχήματος 15.16.



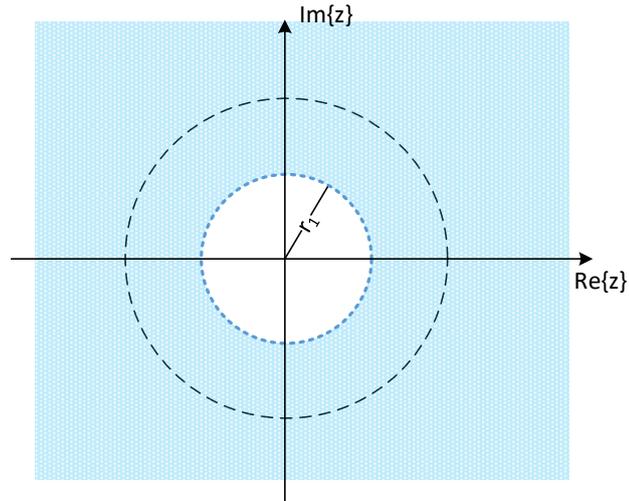
Σχήμα 15.16: Αμφίπλευρο σήμα.

Πώς μεταφράζεται αυτή η κατηγοριοποίηση των σημάτων, όσον αφορά το μετασχηματισμό Z, και κυρίως την περιοχή σύγκλισής τους;

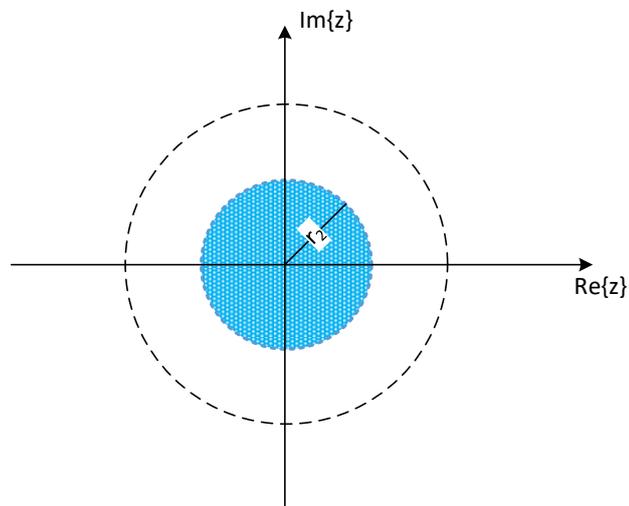
- Αποδεικνύεται ότι τα δεξιόπλευρα σήματα έχουν περιοχή σύγκλισης ένα κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου που ξεκινάει από έναν κύκλο και προεκτείνεται προς τα “έξω”, προς το $\pm\infty$. Αυτό μαθηματικά γράφεται ως $|z| > |r_1|$. Το Παράδειγμα 1 στην Ενότητα 15.3 είναι ένα δεξιόπλευρο σήμα. Δείτε το ROC του. Γενικότερα, το ROC ενός τέτοιου σήματος φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 15.17.
- Επίσης, τα αριστερόπλευρα σήματα έχουν περιοχή σύγκλισης ένα κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου που ξεκινάει από έναν κύκλο και προεκτείνεται προς τα “μέσα”, προς το 0. Αυτό γράφεται μαθηματικά ως $|z| < |r_1|$. Το Παράδειγμα 2 στην Ενότητα 15.3 είναι ένα αριστερόπλευρο σήμα. Δείτε το ROC του. Γενικότερα, το ROC ενός τέτοιου σήματος φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 15.18.
- Τα αμφίπλευρα σήματα έχουν περιοχή σύγκλισης ένα κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου που αποτελεί έναν δακτύλιο ανάμεσα σε δυο πόλους. Αυτό γράφεται μαθηματικά ως $|r_1| < |z| < |r_2|$. Το Παράδειγμα 3 στην Ενότητα 15.3 είναι ένα αμφίπλευρο σήμα. Γενικότερα, το ROC ενός τέτοιου σήματος φαίνεται στο Σχήμα 15.19.

Επίσης, ένα σήμα $x[n]$ λέγεται **αιτιατό**, όταν ισχύει $x[n] = 0, n < 0$, δηλαδή όταν οι τιμές του είναι μηδέν πριν τη χρονική στιγμή $n = 0$. Τα σήματα

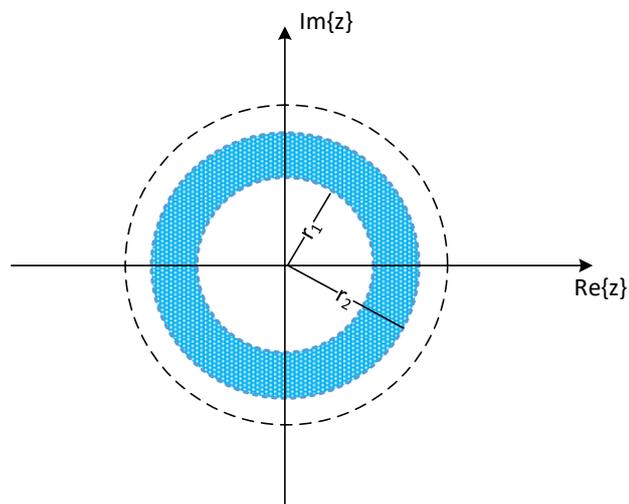
$$x_1[n] = a^n u[n], x_2[n] = a^n u[n-6], x_3[n] = -u[n-1]$$



Σχήμα 15.17: Πεδίο σύγκλισης δεξιόπλευρου σήματος.



Σχήμα 15.18: Πεδίο σύγκλισης αριστερόπλευρου σήματος.

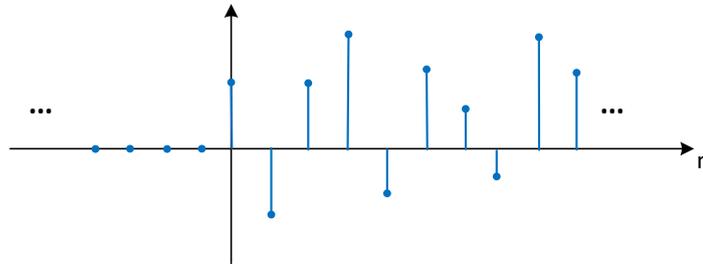


Σχήμα 15.19: Πεδίο σύγκλισης αμφίπλευρου σήματος.

είναι αιτιατά αλλά ΟΧΙ τα

$$x_1[n] = a^n u[n+1], x_2[n] = a^n u[n+6], x_3[n] = -u[n+1]$$

γιατί έχουν μη-μηδενικές τιμές πριν τη χρονική στιγμή $n = 0$. Όπως είναι φανερό, ένα αιτιατό σήμα δεν μπορεί να είναι αριστερόπλευρο (αλλά σίγουρα είναι δεξιόπλευρο). Η γραφική παράσταση ενός αιτιατού σήματος διακριτού χρόνου φαίνεται στο Σχήμα 15.20. Το ROC ενός αιτιατού σήματος είναι όπως το ROC που φαίνεται για το



Σχήμα 15.20: Αιτιατό σήμα.

δεξιόπλευρο σήμα, δηλ. ένα κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου που εκτείνεται από έναν κύκλο και προς το ∞ .

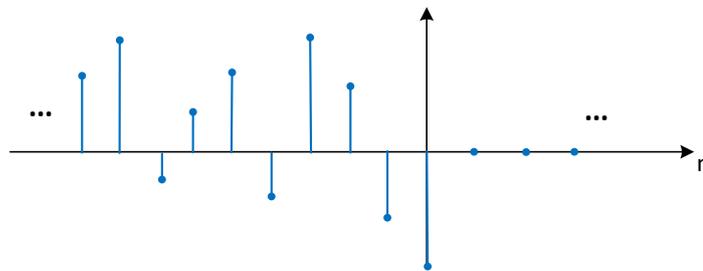
Ένα σήμα $x[n]$ λέγεται **αντι-αιτιατό**, όταν ισχύει $x[n] = 0, n > 0$, δηλαδή όταν οι τιμές του είναι μηδέν μετά τη χρονική στιγμή $n = 0$. Τα σήματα

$$x_1[n] = -a^n u[-n-1], x_2[n] = a^n u[-n-6], x_3[n] = -u[-n-3]$$

είναι αντι-αιτιατά αλλά ΟΧΙ τα

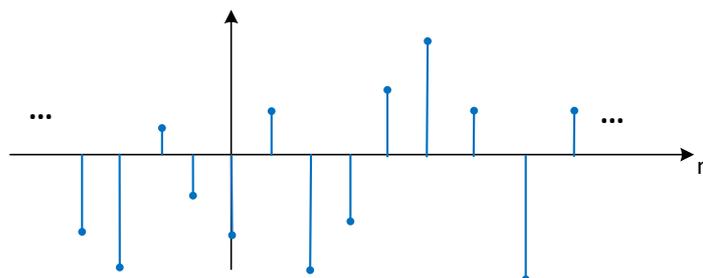
$$x_1[n] = a^n u[-n+1], x_2[n] = a^n u[-n+6], x_3[n] = -u[-n+1]$$

γιατί έχουν μη-μηδενικές τιμές μετά τη χρονική στιγμή $n = 0$. Όπως είναι φανερό, ένα αντί-αιτιατό σήμα δεν μπορεί να είναι δεξιόπλευρο (αλλά είναι σίγουρα αριστερόπλευρο). Η γραφική παράσταση ενός αντί-αιτιατού σήματος διακριτού χρόνου φαίνεται στο Σχήμα 15.21. Το ROC ενός αντι-αιτιατού σήματος είναι όπως το ROC



Σχήμα 15.21: Αντιατιατό σήμα.

που φαίνεται για το αριστερόπλευρο σήμα, δηλ. ένα κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου που εκτείνεται από έναν κύκλο και προς το 0.



Σχήμα 15.22: Μη αιτιατό σήμα.

Τέλος, ένα σήμα λέγεται **μη αιτιατό** όταν έχει μη-μηδενικές τιμές και σε θετικούς και σε αρνητικούς χρόνους. Ένα μη αιτιατό σήμα διακριτού χρόνου φαίνεται στο Σχήμα 15.22.

Όπως καταλαβαίνετε, μας ενδιαφέρουν λίγο παραπάνω τα αιτιατά σήματα γιατί αυτά είναι πραγματοποιήσιμα (δεν υπάρχει στην πράξη αρνητικός χρόνος! :-)). Βέβαια, κάποια μη αιτιατά σήματα μπορούν να γίνουν αιτιατά αν τους κάνουμε μια μετατόπιση στο χρόνο.

15.7 Πίνακες Μετασχηματισμού Z

Ευτυχώς, υπάρχουν διαθέσιμοι πίνακες που μας δίνουν γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών Z, και αυτούς χρησιμοποιούμε για να δουλεύουμε χωρίς να χρησιμοποιούμε τον ορισμό. Ένας τέτοιος πίνακας δίνεται στον πίνακα 15.2.

Πίνακας Μετασχηματισμών Z			
Σήμα	Μετ. Z	ROC	Κατηγορία σήματος
$\delta[n]$	1	όλο το z	αιτιατό
$\delta[n - n_0]$	z^{-n_0}	$z \neq 0$	αιτιατό
$\delta[n + n_0]$	z^{n_0}	$z \neq 0$	μη αιτιατό
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$	αιτιατό
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$	μη αιτιατό
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $	αιτιατό
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $	μη αιτιατό
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z > 1$	αιτιατό
$-nu[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z < 1$	μη αιτιατό
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $	αιτιατό
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $	μη αιτιατό
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$	αιτιατό
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$	αιτιατό
$a^n \cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $	αιτιατό
$a^n \sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $	αιτιατό

Πίνακας 15.2: Πίνακας με γνωστά ζεύγη μετασχ. Z

15.8 Ιδιότητες Περιοχής Σύγκλισης

Οι ιδιότητες του πεδίου σύγκλισης (ROC) παρατίθενται παρακάτω³:

1. Το ROC είναι ένας δακτυλιός, ένας δίσκος με κέντρο την αρχή των αξόνων, ή μια περιοχή εκτός ενός δίσκου με κέντρο την αρχή των αξόνων.
2. Ο μετασχ. Fourier μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Z, αν και μόνο αν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z του σήματος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο.
3. Το ROC δεν πρέπει να περιέχει ΠΟΤΕ πόλους!
4. Αν το $x[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι ολο το z -επίπεδο, εκτός ίσως από το $z = 0$ ή το $z = \infty$.
5. Αν το $x[n]$ είναι δεξιόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης εκτείνεται από το μακρινότερο από το $z = 0$ πόλο (αυτον με το μεγαλύτερο πλάτος) και ως το ∞ , δηλ. είναι της μορφής $|z| > |a|$, με a τον μακρινότερο πόλο.
6. Αν το $x[n]$ είναι αριστερόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης εκτείνεται από το κοντινότερο στο $z = 0$ πόλο (αυτον με το μικρότερο πλάτος) και ως το 0, δηλ. είναι της μορφής $|z| < |b|$, με b τον κοντινότερο πόλο.
7. Αν το $x[n]$ είναι αμφίπλευρο, το πεδίο σύγκλισης αποτελείται από έναν δακτυλιο, που φράσσεται δεξιά και αριστερά του από πόλους, δηλ. είναι της μορφής $|a| < |z| < |b|$, με $|a| < |b|$ πόλους, και κανέναν άλλο πόλο ενδιάμεσα των $|a|, |b|$.

Ας δούμε το Σχήμα 15.23. Έστω το σήμα $x[n]$ με μετασχ. Z $X(z)$ ο οποίος έχει πραγματικούς πόλους $z_r = a < b < c$ και συζυγείς μιγαδικούς πόλους $z_c = d, d^*$, με $b < |d| < c$ όπως στο Σχήμα 15.23(α). Επίσης, έστω ότι τα μηδενικά βρίσκονται στις θέσεις $z_o = e, e^*, f$, τα οποία όμως δεν σχετίζονται με το πεδίο σύγκλισης.

Τα πιθανά πεδία σύγκλισης του μετασχηματισμού φαίνονται στα Σχήματα 15.23(β,γ,δ,ε,στ), εφαρμόζοντας απλά τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν νωρίτερα. Στο Σχήμα 15.23(β), το πεδίο σύγκλισης είναι

$$ROC : |z| > c \quad (15.62)$$

και σύμφωνα με όσα έχουμε πει, αντιστοιχεί σε ένα δεξιόπλευρο σήμα. Οπότε το σήμα στο χρόνο θα περιέχει μέσα όρους της μορφής

$$x[n] = f\{a^n u[n], b^n u[n], c^n u[n], d^n u[n], (d^*)^n u[n]\} \quad (15.63)$$

Στο Σχήμα 15.23(γ), το πεδίο σύγκλισης είναι

$$ROC : |d| < |z| < c \quad (15.64)$$

και αντιστοιχεί σε ένα αμφίπλευρο σήμα. Οπότε το σήμα στο χρόνο θα περιέχει μέσα όρους της μορφής

$$x[n] = f\{a^n u[n], b^n u[n-1], -c^n u[-n-1], -d^n u[-n-1], -(d^*)^n u[-n-1]\} \quad (15.65)$$

αφού το πεδίο σύγκλισης $|d| < |z| < c$ προκύπτει ως η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης

$$ROC = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{|z| > a\} \cap \{|z| > b\} \cap \{|z| < c\} \cap \{|z| > |d|\} \quad (15.66)$$

Στο Σχήμα 15.23(δ), το πεδίο σύγκλισης είναι

$$ROC : |z| < a \quad (15.67)$$

και αντιστοιχεί σε ένα αριστερόπλευρο σήμα. Οπότε το σήμα στο χρόνο θα περιέχει μέσα όρους της μορφής

$$x[n] = f\{-a^n u[-n-1], -b^n u[-n-1], -c^n u[-n-1], -d^n u[-n-1], -(d^*)^n u[-n-1]\} \quad (15.68)$$

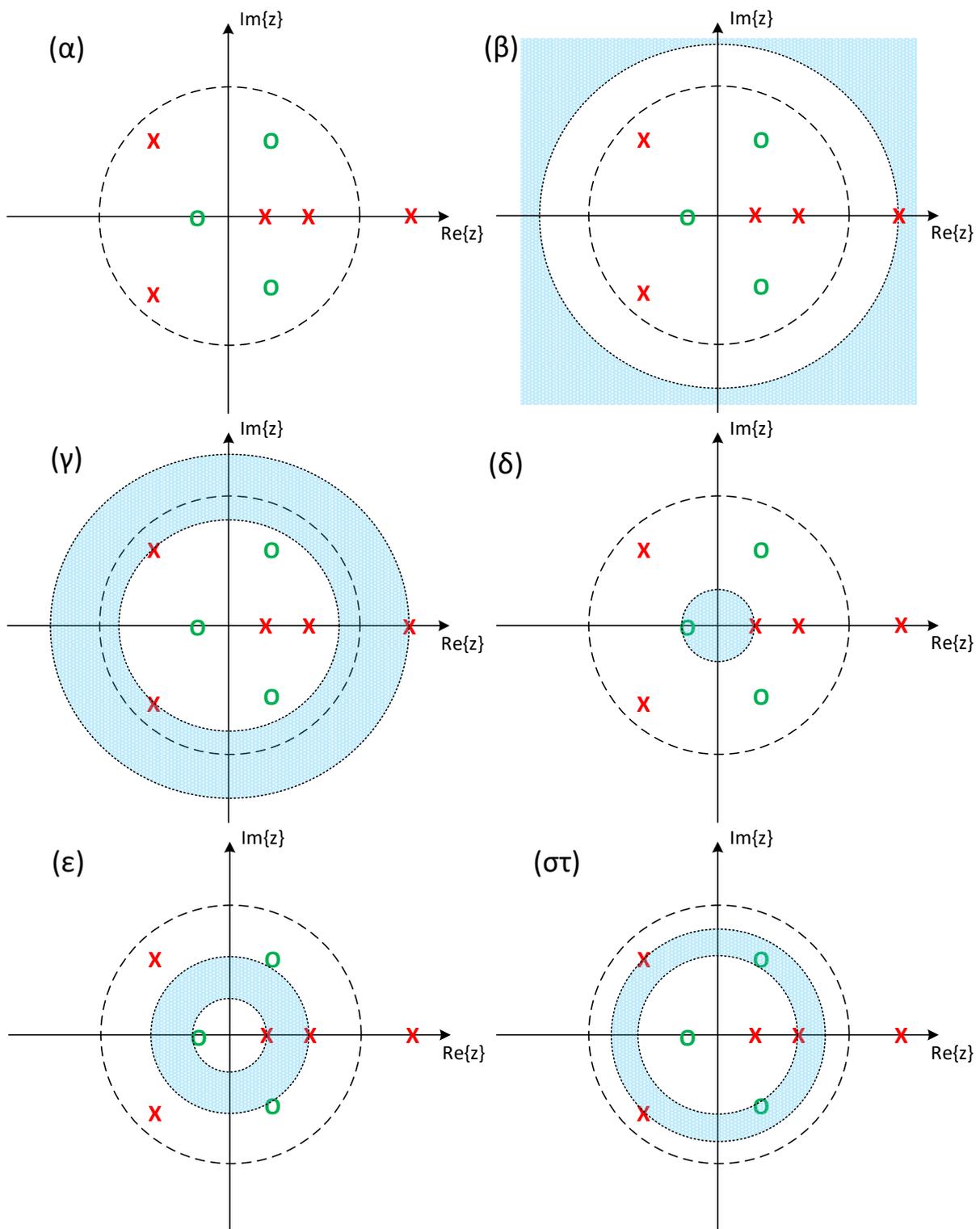
Στο Σχήμα 15.23(ε), το πεδίο σύγκλισης είναι

$$ROC : a < |z| < b \quad (15.69)$$

και αντιστοιχεί σε ένα αμφίπλευρο σήμα. Οπότε το σήμα στο χρόνο θα περιέχει μέσα όρους της μορφής

$$x[n] = f\{a^n u[n], -b^n u[-n-1], -c^n u[-n-1], -d^n u[-n-1], -(d^*)^n u[-n-1]\} \quad (15.70)$$

³Είναι αντίστοιχες με αυτές που είχαμε δει όταν μιλούσαμε για Μετασχ. Laplace στο HY215, για όσους/ες θυμούνται... :-)



Σχήμα 15.23: Πιθανά πεδία σύγκλισης ενός σήματος με τρεις πραγματικούς και δυο συζυγείς μιγαδικούς πόλους.

αφού το πεδίο σύγκλισης $a < |z| < b$ προκύπτει ως η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης

$$ROC = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{|z| > a\} \cap \{|z| < b\} \cap \{|z| < c\} \cap \{|z| > |d|\} \quad (15.71)$$

Στο Σχήμα 15.23(στ), το πεδίο σύγκλισης είναι

$$ROC : b < |z| < |d| \quad (15.72)$$

και αντιστοιχεί ξανά σε ένα αμφίπλευρο σήμα. Οπότε το σήμα στο χρόνο θα περιέχει μέσα όρους της μορφής

$$x[n] = f\{a^n u[n], b^n u[n], -c^n u[-n-1], -d^n u[-n-1], -(d^*)^n u[-n-1]\} \quad (15.73)$$

αφού το πεδίο σύγκλισης $b < |z| < |d|$ προκύπτει ως η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης

$$ROC = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{|z| > a\} \cap \{|z| > b\} \cap \{|z| < c\} \cap \{|z| < |d|\} \quad (15.74)$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι αν έχουμε N διακριτούς πραγματικούς πόλους, τότε έχουμε $N + 1$ πιθανά πεδία σύγκλισης.

15.9 Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών

Η προηγούμενη παράγραφος έκανε εμφανές ότι όταν μιλάμε για σήματα (και πολύ σύντομα, για συστήματα) στο χώρο του μετασχηματισμού Z , μας ενδιαφέρει να μπορούμε να γνωρίζουμε τους πόλους και τα μηδενικά τους, και να μπορούμε να σχεδιάζουμε το περίφημο **διάγραμμα πόλων-μηδενικών**. Θα επικεντρωθούμε σε μετασχηματισμούς που έχουν ρητή μορφή (λόγος πολυωνύμων), όπως όλοι όσοι έχουμε δει ως τώρα, αφού στην πράξη είναι πολύ συχνά εμφανιζόμενοι⁴. Ας θυμηθούμε τους ορισμούς: για ένα ρητό μετασχ. Z , **μηδενικά** ονομάζονται οι θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου μηδενίζεται ο μετασχ. Z (πιθανές τέτοιες θέσεις: οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή) και **πόλοι** ονομάζονται οι θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου απειρίζεται ο μετασχ. Z (πιθανές τέτοιες θέσεις: οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή). Γενικότερα, μηδενικά λέγονται τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που μηδενίζουν το μετασχηματισμό, ενώ πόλοι λέγονται τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που τον απειρίζουν.

Μια ρητή συνάρτηση στο χώρο του Z μπορεί να γραφεί γενικότερα ως:

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}} \quad (15.75)$$

όπου M, N ο βαθμός των πολυωνύμων. Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με z^M και z^N αντίστοιχα, θα έχουμε:

$$X(z) = z^{N-M} \frac{a_0 z^M + a_1 z^{M-1} + a_2 z^{M-2} + \dots + a_M}{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \dots + b_N} \quad (15.76)$$

Παραγοντοποιώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{\prod_{k=1}^N (z - \lambda_k)}, \quad (15.77)$$

με ξ_k, λ_k τα μηδενικά και οι πόλοι αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι υπάρχουν M μηδενικά και N πόλοι, ενώ

- αν $N > M$ τότε υπάρχουν επιπλέον $N - M$ μηδενικά στο $z = 0$ (δηλ. ένα μηδενικό τάξης $N - M$), και
- αν $N < M$ υπάρχουν επιπλέον $M - N$ πόλοι στο $z = 0$ (δηλ. ένας πόλος τάξης $N - M$).

Άρα βλέπετε ότι κάθε ρητός μετασχ. Z έχει τόσους πόλους όσα και μηδενικά!

Αν πάλι ο μετασχ. Z είναι της μορφής

$$X(z) = \frac{a_0 \prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{b_0 \prod_{k=1}^N (z - \lambda_k)}, \quad (15.78)$$

τότε υπάρχουν M μηδενικά και N πόλοι, ενώ

- αν $N > M$, τότε υπάρχουν $N - M$ μηδενικά στο ∞ , και
- αν $N < M$, τότε υπάρχουν $M - N$ πόλοι στο ∞ .

Άρα και πάλι βλέπετε ότι κάθε ρητός μετασχ. Z έχει τόσους πόλους όσα και μηδενικά.

⁴Όταν μιλήσουμε για εξισώσεις διαφορών που περιγράφουν ΓΧΑ συστήματα, αυτό θα γίνει εμφανέστερο.

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι ο μετασχ. Z καθορίζεται πλήρως από τη θέση των πόλων και των μηδενικών του, πέραν μιας σταθεράς a_0/b_0 . Η σταθερά αυτή επηρεάζει μόνο το πλάτος του σήματος, ενώ οι πόλοι και τα μηδενικά καθορίζουν τη συμπεριφορά του, όπως έχουμε ήδη δει στα παραδείγματα.

Για παράδειγμα, στο διάγραμμα πόλων-μηδενικών του Σχήματος 15.23, μπορούμε να εξάγουμε το μετασχ. Z που αντιστοιχεί σε αυτό, και είναι

$$X(z) = A \frac{(z-e)(z-e^*)(z-f)}{(z-d)(z-d^*)(z-a)(z-b)(z-c)} \quad (15.79)$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 3 μηδενικά και 5 πόλοι. Άρα υπάρχουν 2 επιπλέον μηδενικά στο ∞ (που δεν έχουν σχεδιαστεί).

15.10 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

Στην Παράγραφο 15.1, είδαμε ότι ο αντίστροφος μετασχ. Z δίνεται ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (15.80)$$

και αποτελεί ένα ολοκλήρωμα στο μιγαδικό επίπεδο επάνω σε κλειστή καμπύλη C που περιέχει τη συμβολή των αξόνων και βρίσκεται εντός του πεδίου σύγκλισης, και με φορά ολοκλήρωσης την αντίστροφη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Για να υπολογίσει κανείς το παραπάνω ολοκλήρωμα απαιτείται το *θεώρημα ολοκλήρωσης του Cauchy*, καθώς και το *θεώρημα υπολοίπων* της μιγαδικής ανάλυσης. Τα δυο αυτά θεωρήματα ανήκουν στον τομέα της Μιγαδικής Ανάλυσης, τον οποίο δε θεωρούμε ότι κατέχετε \odot . Εναλλακτικά, θα χρησιμοποιήσουμε δυο άλλες μεθόδους:

1. Το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρές
2. Τη μακρά διαίρεση
3. Το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

Ας τα δούμε, μαζί με χαρακτηριστικά παραδείγματα.

15.10.1 Ανάπτυγμα σε Δυναμοσειρά

Σκοπός μας σε αυτή τη μέθοδο είναι να αναπτύξουμε το μετασχ. Z ως

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{-n} \quad (15.81)$$

δηλ. ως μια δυναμοσειρά απείρων όρων, η οποία θα πρέπει να συγκλίνει εντός της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού. Γνωρίζουμε όμως ότι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \quad (15.82)$$

από τον ορισμό του μετασχ. Z. Επειδή η αναπαράσταση μιας συνάρτησης από άπειρους όρους είναι μονοσήμαντη, θα πρέπει

$$x[n] = a_n \quad \forall n \quad (15.83)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Z του σήματος

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a| \quad (15.84)$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (15.85)$$

για $|x| \leq 1$. Για $x = az^{-1}$, έχουμε

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) (az^{-1})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n \right) z^{-n} \quad (15.86)$$

Από την παραπάνω σχέση εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$x[n] = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n, & n \geq 1 \\ 0, & n < 1 \end{cases} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n u[n-1] \quad (15.87)$$

Παράδειγμα:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Ζ του σήματος

$$X(z) = \cos(z) \quad (15.88)$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (15.89)$$

Για $x = z$, θα είναι

$$X(z) = \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (15.90)$$

Θέτοντας $k = -2n \iff n = -k/2$, με την απαίτηση το k να είναι άρτιος, έχουμε

$$X(z) = \sum_{k=0}^{-\infty} (-1)^{-\frac{k}{2}} \frac{z^{-k}}{(-k)!} = \sum_{k=-\infty}^0 \frac{(-1)^{-\frac{k}{2}}}{(-k)!} z^{-k} \quad (15.91)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$x[n] = \frac{(-1)^{-\frac{n}{2}}}{(-n)!} \quad (15.92)$$

για $n < 0$ και άρτιο.

Παράδειγμα:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Ζ του *απιατού* σήματος

$$X(z) = \frac{1}{1 - 4z^{-5}} \quad (15.93)$$

Λύση:

Με *χρήση* γεωμετρικών σειρών, έχουμε

$$X(z) = \frac{1}{1 - 4z^{-5}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (4z^{-5})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^n z^{-5n} = 1 + 4z^{-5} + 16z^{-10} + \dots \quad (15.94)$$

Ο αντίστροφος μετασχ. Ζ θα είναι

$$x[n] = Z^{-1}\{1 + 4z^{-5} + 16z^{-10} + \dots\} = \delta[n] + 4\delta[n-5] + 16\delta[n-10] + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} 4^k \delta[n-5k] \quad (15.95)$$

15.10.2 Μακρά Διάρθρωση

Η μακρά διάρθρωση - αν και όχι τόσο δημοφιλής - μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν ο μετασχ. Ζ $X(z)$ αποτελείται από λόγο πολυωνύμων και η διάρθρωσή τους είναι απλή. Επίσης, χρησιμοποιείται αν θέλουμε να βρούμε μερικές από τις πρώτες τιμές του σήματος στο χρόνο $x[n]$. Το μειονέκτημά της είναι ότι μπορεί να οδηγήσει σε μη κλειστή μορφή εξίσωσης του $x[n]$, και ότι δεν εφαρμόζεται σε αμφίπλευρα σήματα.

Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Z του σήματος

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \tag{15.96}$$

Λύση:

Παρ' όλο που ο παραπάνω αντίστροφος είναι γνωστός, ας δούμε πως εφαρμόζεται η μακρά διαίρεση στο Σχήμα 15.24. Άρα

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots \tag{15.97}$$

Ο αντίστροφος μετασχ. Z τότε θα είναι

$$x[n] = Z^{-1}\{1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots\} = \delta[n] + a\delta[n-1] + a^2\delta[n-2] + \dots = a^n u[n] \tag{15.98}$$

Παράδειγμα:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Z του σήματος

$$X(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \left|\frac{1}{2}\right| \tag{15.99}$$

Λύση:

Η μακρά διαίρεση φαίνεται στο Σχήμα 15.25. Άρα

$$X(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = 2 + 2z^{-1} + z^{-2} + \dots \tag{15.100}$$

Ο αντίστροφος μετασχ. Z τότε θα είναι

$$x[n] = Z^{-1}\{2 + 2z^{-1} + z^{-2} + \dots\} = 2\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots \tag{15.101}$$

1	1 - az ⁻¹
-1 + az ⁻¹	1 + az ⁻¹ + a ² z ⁻² + ...
az ⁻¹	
-(-a ² z ⁻² + az ⁻¹)	
a ² z ⁻²	
-(-a ³ z ⁻³ + a ² z ⁻²)	
a ³ z ⁻³	
...	

Σχήμα 15.24: Μακρά Διαίρεση του λόγου πολυωνύμων 1/(1 - az⁻¹).

15.10.3 Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα

Ο τρίτος, και πιο δημοφιλής, τρόπος να βρεί κανείς τον αντίστροφο μετ. Z ενός σήματος είναι μέσω του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα (partial fraction expansion - PFE). Η ιδέα της μεθόδου συνίσταται στη διάσπαση μιας σύνθετης ρητής συνάρτησης σε απλούστερες, των οποίων ο αντίστροφος μετασχ. Z υπολογίζεται εύκολα εξετάζοντας τους Πίνακες 15.2 και 15.1.

Αρχικά, πρέπει να σημειωθεί ότι η PFE εφαρμόζεται *μόνον* όταν η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι αυστηρά μικρότερη της τάξης του πολυωνύμου του παρονομαστή. Αν δεν ισχύει αυτό, τότε πρέπει να κάνουμε πρώτα διαίρεση πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή, ώστε να καταλήξουμε σε περίπτωση που μπορούμε να εφαρμόσουμε PFE.

Η γενική μορφή ενός μετασχ. Z είναι

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \tag{15.102}$$

Αποδεικνύεται ότι

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N A_k \frac{1}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^L C_m \frac{1}{(1 - d_i z^{-1})^m} \tag{15.103}$$

2 + z ⁻¹	1 - 0.5z ⁻¹
-2 + z ⁻¹	2 + 2z ⁻¹ + z ⁻² + ...
2z ⁻¹	
-(-z ⁻² + 2z ⁻¹)	
z ⁻²	
-(-0.5z ⁻³ + z ⁻²)	
0.5z ⁻³	
...	

Σχήμα 15.25: Μακρά Διαίρεση του λόγου πολυωνύμων (2 + z⁻¹)/(1 - 1/2 z⁻¹).

όπου

$$A_k = (1 - d_k z^{-1})X(z) \Big|_{z=d_k} \quad (15.104)$$

$$C_m = \frac{1}{(L-m)!(-d_i)^{L-m}} \left\{ \frac{d^{L-m}}{d(z^{-1})^{L-m}} [(1 - d_i z^{-1})^L X(z)] \right\} \Big|_{z=d_i} \quad (15.105)$$

και τα B_r προκύπτουν από διαίρεση των πολυωνύμων $P(z), Q(z)$, στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερης ή ίσης τάξης του παρονομαστή. Όταν αυτό δεν ισχύει, τότε $B_r = 0, \forall r$. Όμοια, τα C_m είναι μηδενικά όταν όλες οι ρίζες είναι απλές. Αν υπάρχει πολλαπλή ρίζα τάξης s , τότε $C_m \neq 0, m = 1, \dots, s$.

As δούμε τρία χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Z του

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (15.106)$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι η τάξη του αριθμητή είναι μικρότερη από του παρονομαστή, οπότε στη Σχέση (15.103) δε θα υπάρχουν οι όροι με συντελεστές B_r . Επίσης, οι δυο ρίζες του παρονομαστή είναι απλές, οπότε δεν υπάρχουν και οι όροι με συντελεστές C_m . Τελικά

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (15.107)$$

με

$$A_1 = (1 - \frac{1}{4}z^{-1})X(z) \Big|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z=\frac{1}{4}} = -1 \quad (15.108)$$

$$A_2 = (1 - \frac{1}{2}z^{-1})X(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = 2 \quad (15.109)$$

Έτσι, θα είναι

$$X(z) = -\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + 2\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (15.110)$$

Επειδή $|z| > \frac{1}{2}$, το σήμα στο χρόνο θα είναι δεξιόπλευρο. Ελέγχοντας τον Πίνακα 15.2, καταλήγουμε στο

$$x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (15.111)$$

Παράδειγμα:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Z του

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}, \quad |z| > 1 \quad (15.112)$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι αριθμητής και παρονομαστής έχουν την ίδια τάξη, άρα πρέπει να τους διαιρέσουμε πριν εφαρμόσουμε το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα. Θα είναι

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = 2 - \frac{1 - 5z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (15.113)$$

και παραγοντοποιώντας

$$X(z) = 2 - \frac{1 - 5z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)} \quad (15.114)$$

Παρατηρήστε τον όρο $B_0 = 2$, και ότι δεν υπάρχουν πολλαπλές ρίζες. Αναπτύσσοντας τη ρητή συνάρτηση που

προέκυψε, έχουμε

$$X(z) = 2 - \frac{1 - 5z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)} = 2 - \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z^{-1}} \quad (15.115)$$

με

$$A_1 = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = -9 \quad (15.116)$$

$$A_2 = \left(1 - z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=1} = 8 \quad (15.117)$$

Άρα

$$X(z) = 2 - 9\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + 8\frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (15.118)$$

Επειδή το πεδίο σύγκλισης είναι $|z| > 1$, το σήμα στο χρόνο θα είναι δεξιόπλευρο, και συμβουλευόμενοι τον Πίνακα 15.2, καταλήγουμε στο

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n] \quad (15.119)$$

Παράδειγμα:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Z του

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2\left(1 - z^{-1}\right)}, \quad |z| > 1 \quad (15.120)$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι η τάξη του αριθμητή είναι μικρότερη από αυτή του παρονομαστή. Όμως βλέπουμε ότι στον παρονομαστή υπάρχει πολλαπλή ρίζα, το $z = \frac{1}{2}$. Άρα θα έχουμε μη μηδενικούς όρους C_m , $m = 1, 2$ από τη Σχέση (15.103). Θα είναι

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2\left(1 - z^{-1}\right)} = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{C_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{C_2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \quad (15.121)$$

με

$$A_1 = \left(1 - z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=1} = 4 \quad (15.122)$$

$$C_2 = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 X(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = -1 \quad (15.123)$$

$$C_1 = \frac{1}{(2-1)! \left(-\frac{1}{2}\right)^{2-1}} \left\{ \frac{d^{2-1}}{d(z^{-1})^{2-1}} \left[\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 X(z) \right] \right\} \Big|_{z=\frac{1}{2}} \quad (15.124)$$

$$= -2 \left(\frac{d}{dz^{-1}} \frac{1}{1 - z^{-1}} \right) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -2 \frac{1}{(1 - z^{-1})^2} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -2 \quad (15.125)$$

Οπότε

$$X(z) = \frac{4}{1 - z^{-1}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \quad (15.126)$$

Συμβουλευόμενοι τους Πίνακες 15.2, 15.1, και ότι το πεδίο σύγκλισης είναι το $|z| > 1$, το σήμα στο χρόνο είναι

$$x[n] = 4u[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] \quad (15.127)$$

15.11 Συστήματα στο χώρο του Z

Ας επικεντρώσουμε τώρα το ενδιαφέρον μας στα ΓΧΑ συστήματα, αυτή τη φορά από τη σκοπιά του μετασχηματισμού Z, όπως κάναμε και για τον μετασχ. Z. Έχουμε δει ότι πολλές χρήσιμες διαδικασίες γίνονται μέσα από τα συστήματα. Τα ΓΧΑ συστήματα, όπως έχουμε δει, περιγράφονται με τρεις τρόπους:

1. με μια εξίσωση εισόδου-εξόδου

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (15.128)$$

2. με την κρουστική απόκρισή τους, $h[n]$

3. με την απόκριση σε συχνότητά τους, $H(e^{j\omega})$

Εδώ, θα δούμε τα συστήματα από τη σκοπιά του Z και θα δούμε πόσο πιο απλά γίνονται τα πράγματα μερικές φορές στο χώρο του μετασχ. Z . Στην ανάλυση που ακολουθεί, θα διαπιστώσετε μεγάλη ομοιότητα με τη αντίστοιχη που κάναμε για τον DTFT, γι' αυτό και θα ακολουθήσουμε το ίδιο μοτίβο.

Πριν όμως, ας συζητήσουμε για λίγο τη χρησιμότητα αναπαράστασης συστημάτων στο χώρο του Z . Ο κυριότερος λόγος μιας τέτοιας προσέγγισης είναι η ευελιξία σχεδίασης ΓΧΑ συστημάτων. Θυμίζουμε ότι τα συστήματα έχουν ως σκοπό την επεξεργασία (με οποιονδήποτε τρόπο) των σημάτων που παρουσιάζονται στην είσοδό τους. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα ΓΧΑ σύστημα που θα εκτελεί μια συγκεκριμένη τροποποίηση στο σήμα εισόδου του. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να το κατασκευάσουμε με βάση τα επιθυμητά για εμάς χαρακτηριστικά της απόκρισης σε συχνότητα του, $H(e^{j\omega})$ - προφανώς θα επεξεργαστούμε πραγματικό σήμα εισόδου, το οποίο θα αναλύεται σε πραγματικές συχνότητες μέσω του μετασχ. Fourier. Είδαμε νωρίτερα, και μέσω παραδειγμάτων, ότι η θέση των πόλων και των μηδενικών καθορίζει σχεδόν απόλυτα τη συμπεριφορά ενός σήματος στο χώρο του Z , και κατά συνέπεια τη μορφή του μετασχ. Fourier του. Αν λοιπόν τοποθετήσουμε κατάλληλα τους πόλους ή/και τα μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο, μπορούμε να κατασκευάσουμε συστήματα με επιθυμητές αποκρίσεις σε συχνότητα. Αυτές οι αποκρίσεις μπορούν να υπολογιστούν από το μετασχ. Z θέτοντας $z = e^{j\omega}$, και με τις τεχνικές υπολογισμού αντιστρόφου μετασχηματισμού που γνωρίζουμε, να βρούμε την κρουστική απόκρισή τους.

Παρ' όλο που ως τώρα συζητάμε την επιρροή του μετασχ. Z στο φάσμα πλάτους ενός σήματος, στην πραγματικότητα με όμοιο τρόπο επηρεάζεται και το φάσμα φάσης από την παρουσία των πόλων και των μηδενικών. Γνωρίζουμε ότι η φάση συνδέεται με τη θέση, ή αλλιώς τη χρονική δομή του σήματος ή του συστήματος στο χρόνο. Σε επόμενο κεφάλαιο θα αναπτύξουμε έννοιες και εργαλεία για τον κατάλληλο έλεγχο της φάσης μέσω της θέσης των πόλων και των μηδενικών. Προς το παρόν, θα συνεχίσουμε να αγνοούμε την επίδραση του μετασχ. Z στο φάσμα φάσης ενός σήματος ή συστήματος.

Ένας άλλος λόγος είναι ότι μέσω του μετασχ. Z μπορούμε να αναλύσουμε σήματα και συστήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier. Με άλλα λόγια, μπορούμε να αναλύσουμε συστήματα που είναι ασταθή. Σίγουρα θα σκεφτήκατε ότι ασταθή συστήματα δεν έχουν κάποια πρακτική χρησιμότητα. Παρ' όλα αυτά, ασταθή συστήματα παρουσιάζονται πολύ συχνά στη μηχανική, και για να μπορούμε να χειριστούμε την αστάθειά τους, πρέπει να μπορούμε να τα μελετήσουμε. Περισσότερα για αυτό θα δούμε σύντομα.

15.11.1 Η Συνάρτηση Μεταφοράς

Σήματα της μορφής

$$x[n] = r e^{j\omega n} = z^n, \quad -\infty < n < \infty, \quad r > 0 \quad (15.129)$$

όπου r, ω είναι σταθερές, αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις ενός ΓΧΑ συστήματος. Ας το δείξουμε.

Γνωρίζουμε επίσης ότι η έξοδος ενός συστήματος, $y[n]$, συνδέεται με την είσοδο αυτού, $x[n]$, και με την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος, με την πράξη της συνέλιξης:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (15.130)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} = H(z) z^n \quad (15.131)$$

Άρα, η ιδιοτιμή, που συμβολίζουμε με $H(z)$, είναι η

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \quad (15.132)$$

που δεν είναι άλλη από το μετασχ. Z της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ του συστήματος. Παρατηρήστε την ομοιότητα με την περίπτωση του μετασχ. Fourier (Παράγραφος 13.2). Στην περίπτωση του μετασχ. Z , ο μετασχ. Z της κρουστικής απόκρισης λέγεται **Συνάρτηση Μεταφοράς - Transfer Function**, γιατί προφανώς μας

μεταφέρει από το χρόνο στο χώρο του Z.

Από τον Πίνακα 15.1), γνωρίζουμε ότι η συνέλιξη στο χρόνο μετατρέπεται σε γινόμενο στο χώρο του Z, δηλ.

$$y[n] = x[n] * h[n] \longleftrightarrow Y(z) = X(z)H(z) \quad (15.133)$$

Ως τώρα βλέπετε ότι τα πράγματα μοιάζουν πάρα πολύ με ό,τι κάναμε στο μετασχ. Fourier - και έτσι είναι, μια και ο τελευταίος είναι, όπως είπαμε (υπό συγκεκριμένες συνθήκες βέβαια), “εξειδίκευση” του ΖΤ πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Θα ήταν πολύ χρήσιμο για τη μελέτη μας να διαχωρίσουμε τη μελέτη των συστημάτων στο χώρο του Z σε δυο κατηγορίες, σύμφωνα με τη διάρκεια της κρουστικής τους απόκρισης.

15.11.2 Συστήματα Άπειρης και Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης

Μια σημαντική κατηγοριοποίηση των ΓΧΑ συστημάτων έχει να κάνει με τη διάρκεια της κρουστικής απόκρισής τους $h[n]$. Ας τα θυμηθούμε, και ας δούμε τι συμβαίνει στο καθένα στο χώρο της συχνότητας.

15.11.2.1 Συστήματα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης - Finite Impulse Response (FIR)

Συστήματα που περιγράφονται από κρουστική απόκριση η οποία έχει πεπερασμένη διάρκεια (δηλ. είναι μη μηδενική μόνο για συγκεκριμένο και πεπερασμένο διάστημα δειγμάτων $[n_1, n_2]$) λέγονται συστήματα *Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης*, ή πιο σύντομα, FIR συστήματα. Για παράδειγμα, το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση

$$h[n] = 3\delta[n-1] + 5\delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+5] \quad (15.134)$$

είναι ένα FIR σύστημα. Επίσης, το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση

$$y[n] = 2x[n] + 3x[n-2] \quad (15.135)$$

είναι ένα FIR σύστημα, γιατί αν θέσουμε $x[n] = \delta[n]$, παίρνουμε $h[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-2]$, που είναι προφανώς πεπερασμένη κρουστική απόκριση. Θυμηθείτε ότι ο ορισμός της κρουστικής απόκρισης είναι η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται μια συνάρτηση Δέλτα, $\delta[n]$, και οι αρχικές συνθήκες του είναι μηδενικές.

Μεταφερόμενοι στο χώρο της συχνότητας, ένα FIR σύστημα εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του z , όπως για παράδειγμα το σύστημα

$$H(z) = 3z^{-1} + 5z^2 - \frac{1}{2}z^5 \quad (15.136)$$

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα για το πως δουλεύουμε στο χώρο του μετασχ. Z.

Παράδειγμα 1:

Έστω ένα σύστημα με τη μορφή εξίσωσης διαφορών

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2] \quad (15.137)$$

και μας ζητείται να βρούμε το $h[n]$, δηλ. την κρουστική απόκριση του συστήματος.

Ας δούμε λίγο τη Σχέση (15.133). Αν λύσουμε ως προς $H(z)$, θα πάρουμε:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (15.138)$$

Ας το εφαρμόσουμε στο παράδειγμά μας:

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2] \longleftrightarrow Y(z) = X(z) + 2X(z)z^{-1} - 3X(z)z^{-2} \quad (15.139)$$

$$= X(z)(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}) \quad (15.140)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} \quad (15.141)$$

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} \quad (15.142)$$

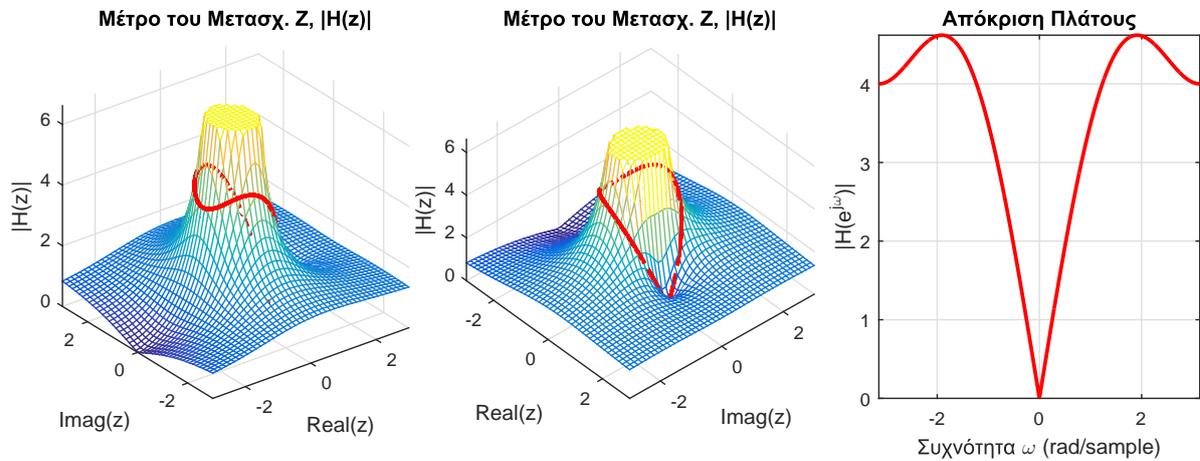
Άρα τελικά $H(z) = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}$. Η κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος μπορεί να βρεθεί από τους Πίνακες 15.2, 15.1, και είναι η:

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2] \quad (15.143)$$

Παρατηρήστε ότι το σύστημα είναι αιτιατό, και το πεδίο σύγκλισης του είναι το $|z| > 0$. Από τη μορφή της συνάρτησης μεταφοράς, βλέπουμε ότι αν τη γράψουμε στη μορφή

$$H(z) = 1 + 2\frac{1}{z} - 3\frac{1}{z^2} = \frac{z^2 + 2z - 3}{z^2} \quad (15.144)$$

θα βρούμε ότι έχει δυο πόλους στη θέση $z = 0$ (διπλός πόλος) και δυο μηδενικά στις θέσεις $z = -3, z = 1$. Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε διαισθητικά και ποιοτικά τη συμπεριφορά του συστήματος αυτού, θεωρώντας την απόκριση πλάτους στο διάστημα $[-\pi, \pi)$. Το μηδενικό στη θέση $z = -3$ βρίσκεται “μακριά” από το μοναδιαίο κύκλο, οπότε θα έχει μικρή επίδραση στις συχνότητες κοντά στα $\omega = \pm\pi$. Αντίθετα, το μηδενικό $z = 1$ βρίσκεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, άρα θα μηδενίσει απόλυτα το πλάτος της συχνότητας $\omega = 0$, και θα μειώσει σημαντικά το πλάτος των γειτονικών συχνοτήτων γύρω από αυτήν. Θα μπορούσαμε λοιπόν να χαρακτηρίσουμε το σύστημα ως υπερπαρατής φύσεως. Το Σχήμα 15.26 επιβεβαιώνει τα προηγούμενα.



Σχήμα 15.26: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος $h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2]$ και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους.

Το παραπάνω παράδειγμα ήταν σχετικά απλό, και μπορούσε να λυθεί στο χώρο του χρόνου πιο εύκολα και γρήγορα. Πώς; Απλά θέτοντας $x[n] = \delta[n]$, και παίρνοντας $y[n] = h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2]$. Απλά δείξαμε τον τρόπο που χρησιμοποιείται το πεδίο της συχνότητας και ο μετασχ. Z για να βρούμε την κρουστική απόκριση. Σε άλλα, πιο σύνθετα παραδείγματα συστημάτων, επιβάλλεται η χρήση του μετασχ. Z αν θέλουμε να γλιτώσουμε κόπο και χρόνο. Τέτοια παραδείγματα θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2:

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-3] - \frac{2}{3}x[n-4] \quad (15.145)$$

Να βρεθεί:

(α') η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(z)$

(β') η κρουστική του απόκριση, $h[n]$

(γ') η έξοδος του συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανιστεί το σήμα $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1]$.

Λύση:

(α') Θα είναι:

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-3] - \frac{2}{3}x[n-4] \longleftrightarrow Y(z) = \frac{1}{2}X(z) - \frac{2}{3}X(z)z^{-1} + \frac{1}{2}X(z)z^{-3} - \frac{2}{3}X(z)z^{-4} \quad (15.146)$$

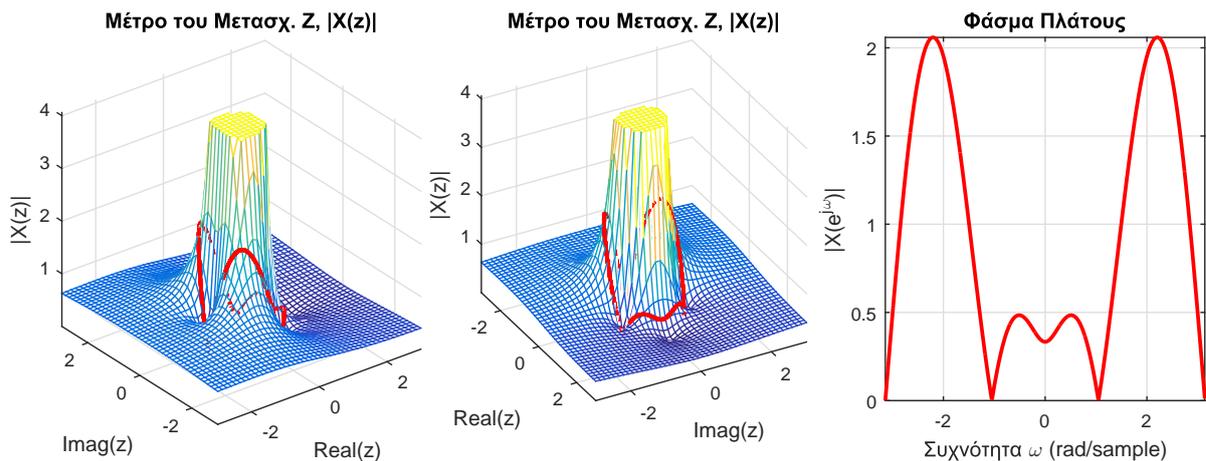
και άρα

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4} \quad (15.147)$$

Αν γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^4 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{2}z - \frac{2}{3}}{z^4} \quad (15.148)$$

βλέπουμε ότι έχει τέσσερις πόλους στη θέση $z = 0$ και τέσσερα μηδενικά στις θέσεις $z = -1$, $z = 4/3$, $z = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$. Παρατηρήστε ότι τα δυο τελευταία μηδενικά είναι συζυγή. Ας προσπαθήσουμε και σε αυτό το παράδειγμα να καταλάβουμε διαισθητικά και ποιοτικά τη συμπεριφορά του συστήματος αυτού, θεωρώντας ξανά την απόκριση πλάτους στο διάστημα $[-\pi, \pi)$. Το μηδενικό στη θέση $z = 4/3$ βρίσκεται “αρκετά κοντά” στο μοναδιαίο κύκλο, οπότε θα έχει μια επίδραση στις συχνότητες κοντά στα $\omega = 0$, χαμηλώνοντας τις τιμές του φάσματος πλάτους. Αντίθετα, το μηδενικό $z = -1$ βρίσκεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, άρα θα μηδενίσει απόλυτα το πλάτος της συχνότητας $\omega = \pm\pi$, και θα μειώσει σημαντικά το πλάτος των γειτονικών συχνοτήτων γύρω από αυτήν. Το μηδενικό $z = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ βρίσκεται υπό γωνία $\theta = \tan^{-1} \sqrt{3} = \pi/3$ σε σχέση με τον άξονα των πραγματικών, και έχει μέτρο $|z| = \sqrt{0.5^2 + \sqrt{3}^2} = 1$, άρα βρίσκεται ακριβώς επάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Ως αποτέλεσμα, μηδενίζει τη συχνότητα $\omega = \pi/3$ rad/sample. Το συζυγές μηδενικό, $z = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ βρίσκεται υπό γωνία $\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\pi/3$ σε σχέση με τον άξονα των πραγματικών, και έχει επίσης μέτρο $|z| = 1$, άρα βρίσκεται κι αυτό επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, μηδενίζοντας απόλυτα τη συχνότητα $\omega = -\pi/3$ rad/sample. Θα μπορούσαμε λοιπόν να χαρακτηρίσουμε το σύστημα ως ζωνοπερατής φύσεως. Το Σχήμα 15.27 επιβεβαιώνει την ανάλυσή μας.



Σχήμα 15.27: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος $H(z) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4}$ και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους.

(β') Η κρουστική απόκριση είναι ο αντίστροφος μετασχ. Z της συνάρτησης μεταφοράς που μόλις βρήκαμε. Άρα θα είναι:

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-3] - \frac{2}{3}\delta[n-4] \quad (15.149)$$

Φυσικά θα μπορούσαμε να βρούμε την κρουστική απόκριση θέτοντας απλά $h[n] = \delta[n]$ στην εξίσωση διαφορών. Θα παίρναμε το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα, και μάλιστα πιο εύκολα.

(γ') Η εύκολη λύση δίνεται στο πεδίο του χρόνου, αφού η είσοδός μας είναι απλά συναρτήσεις Δέλτα. Θα είναι

$$y[n] = x[n] * h[n] = \left(\frac{1}{2}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-3] - \frac{2}{3}\delta[n-4]\right) * \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1] \quad (15.150)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n (u[n-1] + 64u[n-4]) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (u[n-2] + 64u[n-5]) \quad (15.151)$$

Ας δούμε να παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα στο χώρο του μετασχ. Z. Η συνέλιξη μετατρέπεται σε γινόμενο των επιμέρους μετασχηματισμών, οπότε

$$Y(z) = X(z)H(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4}\right) \frac{1}{4} \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad (15.152)$$

$$= \frac{1}{8} \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{1}{6} \frac{z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{8} \frac{z^{-4}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{1}{6} \frac{z^{-5}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad (15.153)$$

Με χρήση των Πινάκων 15.2, 15.1, διαπιστώνουμε ότι

$$y[n] = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[n-2] + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-4} u[n-4] - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-5} u[n-5] \quad (15.154)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με τη Σχέση (15.151).

Τέλος, ένα ακόμα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3:

Έστω το απλό αιτιατό σύστημα

$$y[n] - y[n-1] = x[n] - x[n-2]. \quad (15.155)$$

του οποίου ζητούμε:

(α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$

(β') την κρουστική απόκριση $h[n]$

(γ') την έξοδο του συστήματος, $y[n]$, για είσοδο $x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-3]$.

Λύση:

(α') Αναζητούμε λοιπόν αρχικά τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του απλού συστήματος που περιγράψαμε παραπάνω. Κάνουμε μετασχ. Z στην εξίσωση:

$$Y(z) - Y(z)z^{-1} = X(z) - X(z)z^{-2} \quad (15.156)$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = X(z)(1 - z^{-2}) \quad (15.157)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (15.158)$$

Να λοιπόν εδώ που έχουμε μια ρητή συνάρτηση (λόγος πολυωνύμων του z^{-1}) μεταφοράς. Σε πρώτη σκέψη, ίσως το σύστημά μας δεν είναι FIR. Για να δούμε...

(β') Κατ' αρχάς, εδώ δεν μπορούμε να βρούμε γρήγορα την κρουστική απόκριση θέτοντας $x[n] = \delta[n]$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες, γιατί τότε παίρνουμε

$$h[n] - h[n-1] = \delta[n] - \delta[n-2] \quad (15.159)$$

που δεν οδηγεί άμεσα σε κλειστό τύπο του $h[n]$. Χρειάζεται να εφαρμόσουμε τις τεχνικές που είδαμε στην ανάλυσή μας στο πεδίο του χρόνου. Για να το αποφύγουμε, βλέπουμε ότι ο αριθμητής είναι διαφορά τετραγώνων και άρα

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} \longleftrightarrow h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \quad (15.160)$$

πολύ εύκολα και πολύ γρήγορα, αφού γνωρίζουμε ότι το σύστημά μας είναι αιτιατό \odot . Βλέπουμε λοιπόν ότι το σύστημά μας είναι τελικά FIR.

Ένας εναλλακτικός τρόπος εύρεσης της κρουστικής απόκρισης θα ήταν να εφαρμόσουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, αλλά επειδή ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι μικρότερος από του αριθμητή, θα χρειαστεί να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων. Άρα τελικά το $H(z)$, και κατά συνέπεια το $h[n]$, γράφεται ως

$$H(z) = 1 + z^{-1} \longleftrightarrow h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \quad (15.161)$$

Ας υποθέσουμε όμως ότι δε θέλουμε να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων, αν και σε πολλές περιπτώσεις είναι απαραίτητη. Τι άλλο θα μπορούσαμε να κάνουμε στο συγκεκριμένο παράδειγμα; Το $H(z)$ μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}} z^{-2} \quad (15.162)$$

Τώρα εμφανίσαμε δυο όρους, χωρίζοντας το αρχικό κλάσμα σε δυο όρους. Αν συμβουλευτούμε τον Πίνακα 15.2 με τα ζεύγη μετασχηματισμών Z, θα δούμε ότι ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στο ζεύγος:

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (15.163)$$

με ROC $|z| > 1$, γιατί το σύστημα είναι αιτιατό. Άρα ο αντίστοιχος μετασχ. Z του πρώτου όρου είναι η βηματική συνάρτηση $u[n]$. Από τον Πίνακα 15.1 και τον Πίνακα 15.2, εύκολα βρίσκουμε ότι ο δεύτερος όρος είναι η καθυστερημένη βηματική κατά $n_0 = 2$, δηλ. η $u[n - 2]$. Άρα τελικά η κρουστική απόκριση θα είναι

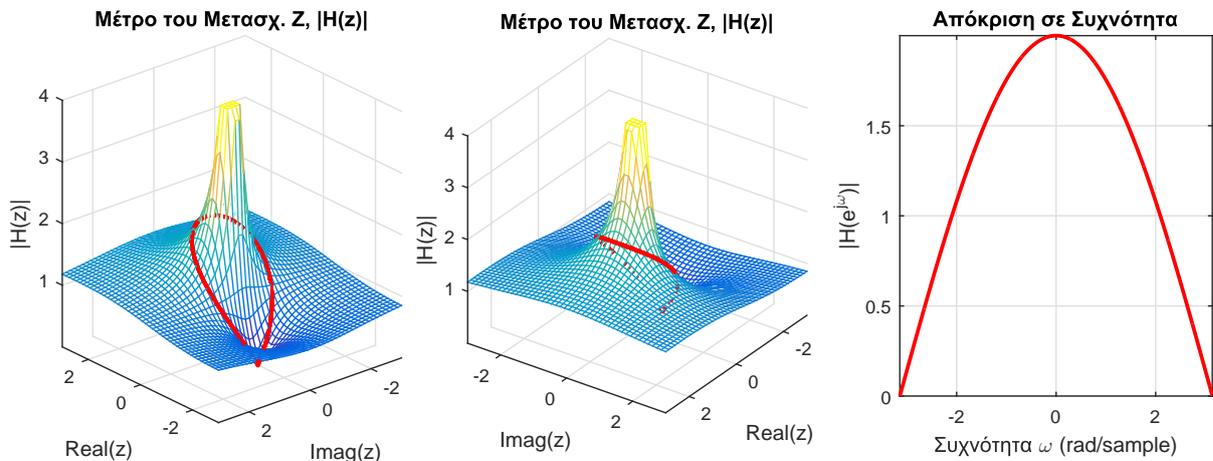
$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}} z^{-2} \longleftrightarrow h[n] = u[n] - u[n - 2] \quad (15.164)$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε διαφορετικό αποτέλεσμα σε σχέση με πριν; Ασφαλώς όχι. Προσέξτε ότι η $h[n] = u[n] - u[n - 2]$ είναι ουσιαστικά η $h[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$ - σχεδιάστε τη διαφορά των δυο βηματικών για να το δείτε.

Ας δούμε πως συμπεριφέρεται το σύστημα μας. Αν γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως

$$H(z) = 1 + z^{-1} = \frac{z + 1}{z} \quad (15.165)$$

βλέπουμε ότι έχει έναν πόλο στη θέση $z = 0$ και ένα μηδενικό στη θέση $z = -1$. Ας προσπαθήσουμε και σε αυτό το παράδειγμα να καταλάβουμε διαισθητικά και ποιοτικά τη συμπεριφορά του συστήματος αυτού, θεωρώντας ξανά την απόκριση πλάτους στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Το μηδενικό $z = -1$ βρίσκεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, άρα θα μηδενίσει απόλυτα το πλάτος της συχνότητας $\omega = \pm\pi$, και θα μειώσει σημαντικά το πλάτος των γειτονικών συχνοτήτων γύρω από αυτήν. Θα μπορούσαμε λοιπόν να χαρακτηρίσουμε το σύστημα ως χαμηλοπερατής φύσεως. Το Σχήμα 15.28 επιβεβαιώνει την ανάλυσή μας.



Σχήμα 15.28: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος $h[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$ και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους.

(γ') Αφού η είσοδός μας είναι ένα άθροισμα από συναρτήσεις Δέλτα, η έξοδος βρίσκεται πολύ εύκολα κατ' ευθείαν στο πεδίο του χρόνου, ως

$$y[n] = x[n] * h[n] = (u[n] - u[n - 2]) * (\delta[n] - 2\delta[n - 3]) \quad (15.166)$$

$$= u[n] * \delta[n] - 2u[n] * \delta[n - 3] - u[n - 2] * \delta[n] + 2u[n - 2] * \delta[n - 3] \quad (15.167)$$

$$= u[n] - 2u[n - 3] - u[n - 2] + 2u[n - 5] \quad (15.168)$$

$$= u[n] - u[n - 2] - 2u[n - 3] + 2u[n - 5] \quad (15.169)$$

που σχεδιάζοντας τις βηματικές συναρτήσεις στο χρόνο, βλέπουμε ότι γράφεται ως

$$y[n] = \delta[n] + \delta[n - 1] - 2\delta[n - 3] - 2\delta[n - 4] \quad (15.170)$$

Στο ίδιο θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε τη μορφή του $h[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$ (κάντε το!).

Ας δούμε τώρα το ίδιο στο χώρο του μετασχ. Z . Εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-3] \longleftrightarrow X(z) = 1 - 2z^{-3} \quad (15.171)$$

και έτσι

$$Y(z) = H(z)X(z) = \left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}}z^{-2} \right) (1-2z^{-3}) \quad (15.172)$$

$$= \frac{1-2z^{-3}}{1-z^{-1}} - \frac{1-2z^{-3}}{1-z^{-1}}z^{-2} \quad (15.173)$$

Για να βρούμε τώρα την έξοδο $y[n]$, θα δουλέψουμε όπως στο προηγούμενο ερώτημα. Θα χωρίσουμε τις επιμέρους ρητές συναρτήσεις του z^{-1} σε πιο απλές, θα συμβουλευτούμε τους Πίνακες 15.2, 15.1, και ελπίζουμε © να βρούμε τα κατάλληλα ζεύγη που θα μας μεταφέρουν εύκολα και γρήγορα στο πεδίο του χρόνου.

$$Y(z) = \frac{1-2z^{-3}}{1-z^{-1}} - \frac{1-2z^{-3}}{1-z^{-1}}z^{-2} \quad (15.174)$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} - 2\frac{1}{1-z^{-1}}z^{-3} - \frac{1}{1-z^{-1}}z^{-2} + 2\frac{1}{1-z^{-1}}z^{-5} \quad (15.175)$$

Με χρήση πινάκων και ιδιοτήτων, η έξοδος του συστήματος, $y[n]$, θα είναι η:

$$y[n] = u[n] - 2u[n-3] - u[n-2] + 2u[n-5] = u[n] - u[n-2] - 2u[n-3] + 2u[n-5] \quad (15.176)$$

15.11.2.2 Συστήματα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης - Infinite Impulse Response (IIR)

Ως τώρα έχουμε δει συναρτήσεις μεταφοράς $H(z)$ οι οποίες είναι μη κλασματικές. Είπαμε ότι αυτές αντιπροσωπεύουν FIR - Finite Impulse Response συστήματα. Υπάρχουν όμως και κρουστικές αποκρίσεις που είναι άπειρες σε διάρκεια, όπως η $h[n] = u[n]$. Τέτοια συστήματα λέγονται *Συστήματα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης - Infinite Impulse Response*, και εκφράζονται στο χώρο του Z μέσω ρητών συναρτήσεων μεταφοράς (δηλ. πηλίκου πολυωνύμων).

Εν γένει, τέτοια συστήματα μπορούν να έχουν πόλους και μηδενικά σε οποιαδήποτε περιοχή του μιγαδικού επιπέδου, εν αντιθέσει με τα FIR, που είχαν πόλους μόνο στο μηδέν ή στο άπειρο. Ας δούμε τι συμβαίνει όταν οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι ρητές, μέσω παραδειγμάτων, και πως τα αντιμετωπίζουμε.

1. Έστω το αιτιατό σύστημα

$$y[n] + 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]. \quad (15.177)$$

του οποίου ζητούμε:

(α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$

(β') την κρουστική απόκριση $h[n]$

Λύση:

(α') Κάνουμε μετασχ. Z στην εξίσωση διαφορών, έχουμε

$$Y(z) + 2Y(z)z^{-1} - 3Y(z)z^{-2} = X(z) - 2X(z)z^{-1} \quad (15.178)$$

$$Y(z)(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}) = X(z)(1 - 2z^{-1}) \quad (15.179)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}} \quad (15.180)$$

(β') Θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή σας τεχνική της *Ανάπτυξης σε Μερικά Κλάσματα*. Θυμίζεται ότι η τεχνική αυτή εφαρμόζεται μόνον όταν έχουμε πολυώνυμα σε αριθμητή και παρονομαστή, και ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος απ' το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή. Στην περίπτωσή μας, είναι, οπότε μπορούμε να την εφαρμόσουμε. Πριν από αυτήν όμως, ας παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή. Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι οι $z_1 = 1$, $z_2 = -3$. Άρα ο παρονομαστής μας θα γράφεται ως:

$$1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} = (1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1}) \quad (15.181)$$

Τώρα λοιπόν θα έχουμε, αντικαθιστώντας:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \quad (15.182)$$

Οπότε θα είναι

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1})} = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 + 3z^{-1}} \quad (15.183)$$

με

$$A = H(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=1} = -\frac{1}{4} \quad (15.184)$$

$$B = H(z)(1 + 3z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{5}{4} \quad (15.185)$$

και άρα

$$H(z) = -\frac{1}{4} \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{5}{4} \frac{1}{1 + 3z^{-1}} \quad (15.186)$$

Εύκολα λοιπόν καταλήγουμε, σύμφωνα και με τον Πίνακα 15.2, ότι

$$H(z) \longleftrightarrow h[n] = -\frac{1}{4}u[n] + \frac{5}{4}3^n u[n] \quad (15.187)$$

αφού το σύστημά μας είναι αιτιατό από εκφώνηση. Παρατηρήστε ότι ο όρος $3^n u[n]$ οδηγεί τις τιμές της κρουστικής απόκρισης στο $+\infty$, όταν $n \rightarrow +\infty$, άρα το σύστημά μας δεν είναι ευσταθές. Αυτό επιβεβαιώνεται και από την παρουσία ενός πόλου στη θέση $z = 1$, δηλ. επάνω στο μοναδιαίο κύκλο όπου ορίζεται ο μετασχ. Fourier, πράγμα που τον οδηγεί στο να μη συγκλίνει.

2. Έστω το αντι-αιτιατό σύστημα

$$y[n] - 7y[n - 1] + 12y[n - 2] = x[n] - 2x[n - 1]. \quad (15.188)$$

του οποίου ζητούμε:

(α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$

(β') την κρουστική απόκριση $h[n]$

Λύση:

(α') Κάνουμε μετασχ. Z στην εξίσωση διαφορών και έχουμε

$$Y(z) - 7Y(z)z^{-1} + 12Y(z)z^{-2} = X(z) - 2X(z)z^{-1} \quad (15.189)$$

$$Y(z)(1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}) = X(z)(1 - 2z^{-1}) \quad (15.190)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}} \quad (15.191)$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι οι $z_1 = 3$, $z_2 = 4$, άρα το πεδίο σύγκλισης είναι $|z| < 3$, αφού το σύστημα είναι αντι-αιτιατό.

(β') Εδώ πρέπει να παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή, και να χρησιμοποιήσουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα. Ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος απ' το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή, οπότε μπορούμε να την εφαρμόσουμε. Ο παρονομαστής θα γράφεται ως

$$1 - 7z^{-1} + 12z^{-2} = (1 - 3z^{-1})(1 - 4z^{-1}) \quad (15.192)$$

Άρα

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - 3z^{-1})(1 - 4z^{-1})} \quad (15.193)$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = \frac{A}{1 - 3z^{-1}} + \frac{B}{1 - 4z^{-1}} \quad (15.194)$$

με

$$A = H(z)(1 - 3z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{3}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 4z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{3}} = -1 \quad (15.195)$$

$$B = H(z)(1 - 4z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{4}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 3z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{4}} = 2 \quad (15.196)$$

$$(15.197)$$

Οπότε το $H(z)$ γράφεται ως

$$H(z) = -\frac{1}{1 - 3z^{-1}} + 2\frac{1}{1 - 4z^{-1}} \quad (15.198)$$

και συμβουλευόμενοι τον Πίνακα 15.2 και δεδομένου ότι το σύστημα είναι αντι-αιτιατό, θα είναι

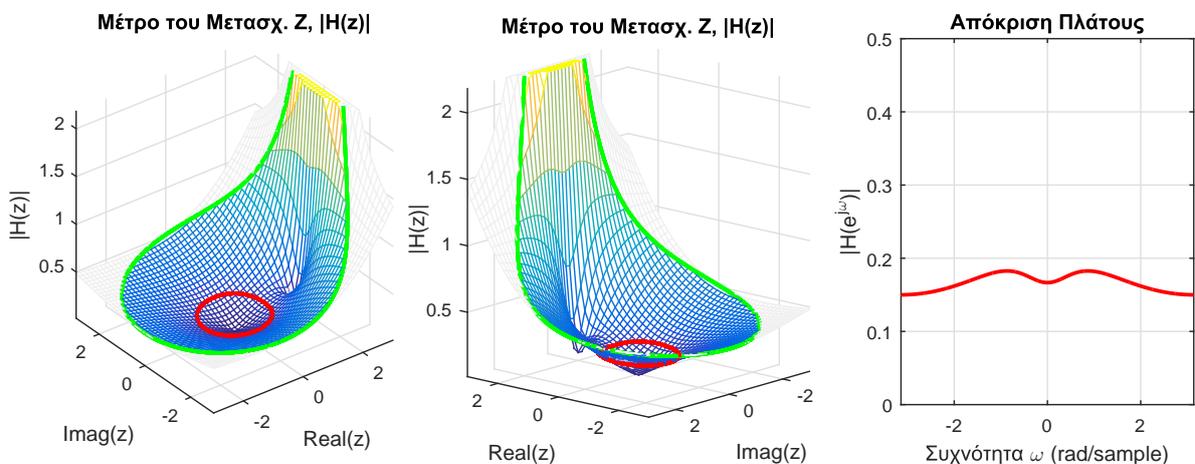
$$H(z) \longleftrightarrow h[n] = 3^n u[-n - 1] - 2(4)^n u[-n - 1] \quad (15.199)$$

που είναι και το ζητούμενο.

Ας δούμε πως συμπεριφέρεται το σύστημα μας. Παρατηρήστε ότι το πεδίο σύγκλισης Αν γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - 7z + 12} = \frac{z(z - 2)}{(z - 3)(z - 4)} \quad (15.200)$$

βλέπουμε ότι έχει δυο πόλους στις θέσεις $z = 3$, $z = 4$ και δυο μηδενικά στις θέσεις $z = 0$, $z = 2$. Θεωρώντας ξανά την απόκριση πλάτους στο διάστημα $[-\pi, \pi)$, παρατηρούμε ότι οι πόλοι και τα μηδενικά βρίσκονται “σχετικά μακριά” από το μοναδιαίο κύκλο, και άρα η επιρροή τους θα είναι μικρή. Λόγω του μηδενικού στη θέση $z = 0$, οι τιμές της απόκρισης πλάτους θα είναι χαμηλές, αλλά δεν υπάρχει καταστολή κάποιας συγκεκριμένης συχνότητας. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το σύστημα επιτρέπει τη διέλευση όλων των συχνοτήτων μέσα από αυτό. Το Σχήμα 15.29 επιβεβαιώνει την παρατήρησή μας.



Σχήμα 15.29: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος $h[n] = 3^n u[-n - 1] - 2(4)^n u[-n - 1]$ και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους.

3. Έστω το σύστημα που περιγράφεται από

$$H(z) = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} \quad (15.201)$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$ για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης.

Λύση:

Το πολυώνυμο του αριθμητή είναι μεγαλύτερης τάξης από του παρονομαστή, άρα δεν μπορεί να γίνει απ' ευθείας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα. Πρέπει αναγκαστικά να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων, η οποία μας δίνει

$$H(z) = 4 - 8z^{-1} + \frac{5}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} \quad (15.202)$$

Από τους πίνακές μας, έχουμε κατ' ευθείαν ότι αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε

$$h[n] = 4\delta[n] - 8\delta[n-1] + 5\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] \quad (15.203)$$

με $|z| > \frac{3}{4}$, ενώ αν το σύστημα είναι αντι-αιτιατό, τότε

$$h[n] = 4\delta[n] - 8\delta[n-1] - 5\left(\frac{3}{4}\right)^n u[-n-1] \quad (15.204)$$

με $|z| < \frac{3}{4}$.

4. Έστω το αιτιατό σύστημα, του οποίου η κρουστική απόκριση δίνεται παρακάτω:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 3^{n-2} u[n-4]. \quad (15.205)$$

του οποίου ζητούμε:

(α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$

(β') την εξίσωση εισόδου-εξόδου που περιγράφει το σύστημα

Λύση:

(α') Η κρουστική απόκριση μπορεί να γραφεί ως

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 3^{n-2} u[n-4] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - (3^2)(3^{-2})3^{n-2} u[n-4] \quad (15.206)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - (3^2)3^{n-4} u[n-4] \quad (15.207)$$

Κάνοντας μετασχ. Z στην κρουστική απόκριση, παίρνουμε

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - 9\frac{1}{1 - 3z^{-1}}z^{-4}, \quad |z| > 3 \quad (15.208)$$

αφού το σύστημα δίνεται ως αιτιατό.

(β') Προφανώς

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - 9\frac{1}{1 - 3z^{-1}}z^{-4} = \frac{1 - 3z^{-1} - 9z^{-4} + \frac{9}{2}z^{-5}}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} \quad (15.209)$$

και άρα θα έχουμε

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 3z^{-1} - 9z^{-4} + \frac{9}{2}z^{-5}}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} \quad (15.210)$$

$$X(z)\left(1 - 3z^{-1} - 9z^{-4} + \frac{9}{2}z^{-5}\right) = Y(z)\left(1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}\right) \quad (15.211)$$

και τελικά με αντίστροφο μετασχ. Z έχουμε

$$X(z) - 3X(z)z^{-1} - 9X(z)z^{-4} + \frac{9}{2}X(z)z^{-5} = Y(z) - \frac{7}{2}Y(z)z^{-1} + \frac{3}{2}Y(z)z^{-2} \quad (15.212)$$

$$x[n] - 3x[n-1] - 9x[n-4] + \frac{9}{2}x[n-5] = y[n] - \frac{7}{2}y[n-1] + \frac{3}{2}y[n-2] \quad (15.213)$$

5. Έστω το αιτιατό σύστημα $H(z)$ που δίνεται ως

$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\pi/4}z^{-1})(1 - re^{-j\pi/4}z^{-1})} \quad (15.214)$$

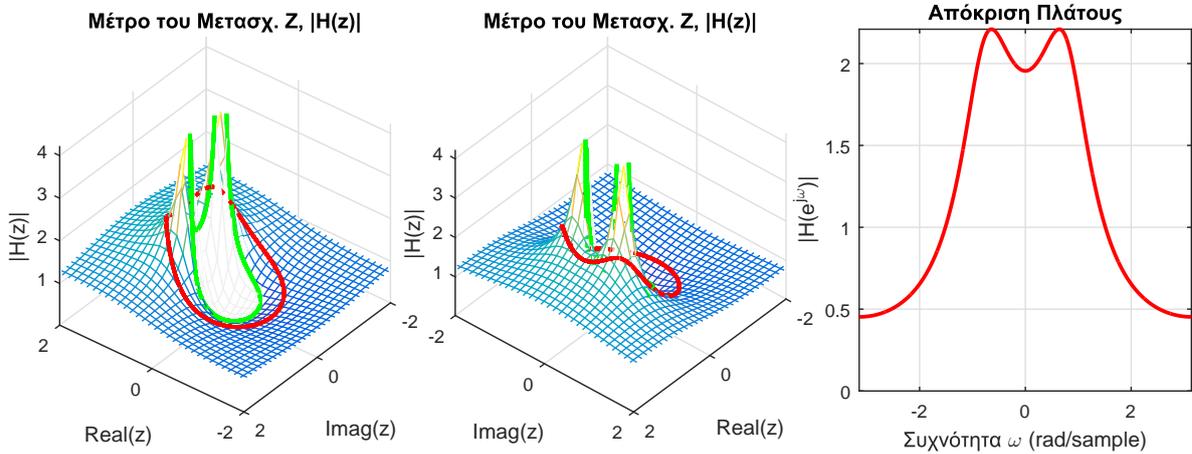
Μελετήστε ποιοτικά τη συμπεριφορά του φάσματος πλάτους του συστήματος για $r = 0.6$ και $r = 0.9$ και βρείτε την κρουστική του απόκριση $h[n]$.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι το σύστημα γράφεται ως

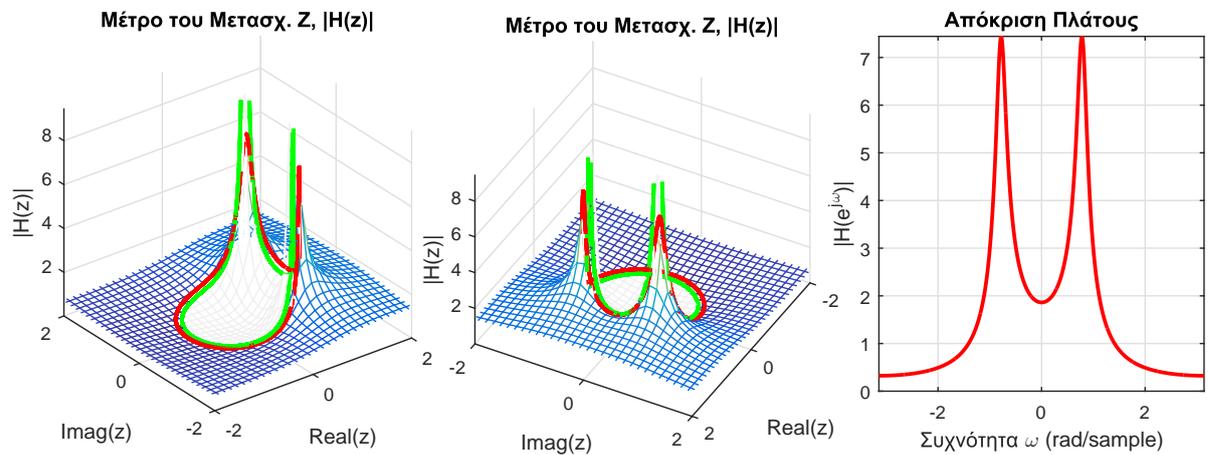
$$H(z) = \frac{z^2}{(z - re^{j\pi/4})(z - re^{-j\pi/4})} \tag{15.215}$$

και άρα έχει δυο μηδενικά στη θέση $z = 0$, και δυο πόλους στις θέσεις $z = re^{\pm j\pi/4}$. Η παρουσία πόλων για



Σχήμα 15.30: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος $H(z) = \frac{1}{(1-re^{j\pi/4}z^{-1})(1-re^{-j\pi/4}z^{-1})}$ και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους για $r = 0.6$.

$\omega = \pm\pi/4$ θα αυξήσει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από αυτές τις συχνότητες. Στην περίπτωση που $r = 0.6$, η αύξηση θα είναι μικρή και πιο ομαλή, αφού οι πόλοι βρίσκονται “μακριά” από το μοναδιαίο κύκλο, ενώ για $r = 0.9$, η αύξηση θα είναι μεγαλύτερη και πιο απότομη, αφού οι πόλοι βρίσκονται κοντά στο μοναδιαίο κύκλο. Τα συμπεράσματα αυτά επιβεβαιώνονται από τα Σχήματα 15.30 και 15.31. Η κρουστική



Σχήμα 15.31: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος $H(z) = \frac{1}{(1-re^{j\pi/4}z^{-1})(1-re^{-j\pi/4}z^{-1})}$ και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους για $r = 0.9$.

απόκριση δίνεται αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα τη ρητή συνάρτηση μεταφοράς. Είναι

$$H(z) = \frac{A}{1 - re^{j\pi/4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - re^{-j\pi/4}z^{-1}} \tag{15.216}$$

με

$$A = (1 - re^{j\pi/4}z^{-1})H(z) \Big|_{z=re^{j\pi/4}} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \tag{15.217}$$

$$B = (1 - re^{-j\pi/4}z^{-1})H(z) \Big|_{z=re^{-j\pi/4}} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \tag{15.218}$$

τα οποία είναι μιγαδικοί συντελεστές και μπορούν να γραφούν σε πολική μορφή ως

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4} \quad (15.219)$$

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\pi/4} \quad (15.220)$$

Άρα μέσω αντιστρόφου μετασχ. Z θα έχουμε

$$H(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4} \frac{1}{1 - re^{j\pi/4} z^{-1}} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\pi/4} \frac{1}{1 - re^{-j\pi/4} z^{-1}} \quad (15.221)$$

$$h[n] = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4} (re^{j\pi/4})^n u[n] + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\pi/4} (re^{-j\pi/4})^n u[n] \quad (15.222)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} r^n (e^{j\pi(n-1)/4} + e^{-j\pi(n-1)/4}) u[n] \quad (15.223)$$

$$= \sqrt{2} r^n \cos\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right) u[n] \quad (15.224)$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε εν γένει ότι

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος $h[n] \leftrightarrow H(z)$ είναι της μορφής

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k (a_k)^n u[n] - \sum_{l=1}^M B_l (b_l)^n u[-n-1] \leftrightarrow X(z) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{1 - a_k z^{-1}} + \sum_{l=1}^M B_l \frac{1}{1 - b_l z^{-1}},$$

με $\text{ROC}_k : |z| > |a_k|$ και $\text{ROC}_k : |z| < |b_l|$, και $\max_k \{|a_k|\} < |z| < \min_l \{|b_l|\}$, τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως $Y(z) = H(z)X(z)$, και κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί τελικά η έξοδος $y[n]$.

και

Αν ένα σύστημα περιγράφεται με εξισώσεις διαφορών ως

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \leftrightarrow H(z) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}},$$

τότε χρησιμοποιούμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα για να αναλύσουμε τη Συνάρτηση Μεταφοράς $H(z)$ σε απλά κλάσματα και να βρούμε με χρήση Πινάκων την κρουστική απόκριση $h[n]$.

15.11.3 Ευστάθεια στο χώρο του Z και Περιοχή Σύγκλισης

Ας μιλήσουμε τέλος για την ευστάθεια ενός συστήματος στο χώρο του Μετασχ. Z. Για να είναι ένα σύστημα ευσταθές, πρέπει για φραγμένη είσοδο, το σύστημα να παράγει φραγμένη έξοδο, δηλ.

$$|x[n]| < M_x \implies |y[n]| < M_y, \quad M_x, M_y \in \mathfrak{R} \quad (15.225)$$

Αν πάρουμε το άθροισμα της συνέλιξης, θα έχουμε

$$|y[n]| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[k] h[n-k]| \quad (15.226)$$

Όμως $|x[n]| < M_x$, άρα

$$|y[n]| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[k] h[n-k]| < \sum_{n=-\infty}^{+\infty} M_x |h[n-k]| = M_x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| \quad (15.227)$$

Άρα για να είναι φραγμένη η έξοδος πρέπει να ισχύει

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty \quad (15.228)$$

Όμως αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχει ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου της κρουστικής απόκρισης $h[n]$. Όμως είπαμε ότι ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου ορίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο! Άρα τι σημαίνει αυτό; Σημαίνει ότι πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z!

Ας δούμε ένα παράδειγμα που συνοψίζει όλα τα παραπάνω.

Παράδειγμα:

Έστω το σήμα $x[n]$ με μετασχ. Z

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \quad (15.229)$$

Βρείτε το $x[n]$ για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης, και χαρακτηρίστε το ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα.

Λύση:

Αν γράψουμε το $X(z)$ σε μορφή δυνάμεων του z , θα έχουμε

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 3z^{-1})} = \frac{z^2(z + 1)}{(z - 1)(z - \frac{1}{2})(z + 3)} \quad (15.230)$$

και βλέπουμε ότι έχει 3 πόλους, στις θέσεις $p_0 = 1, p_1 = 1/2, p_2 = -3$. Επίσης, βλέπουμε ότι έχει 3 μηδενικά, στις θέσεις $z_0 = -1, z_1 = z_2 = 0$. Οπότε τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι

$$(\alpha') |z| > 3$$

$$(\beta') |z| < \frac{1}{2}$$

$$(\gamma') \frac{1}{2} < |z| < 1$$

$$(\delta') 1 < |z| < 3$$

Ο μετασχ. Z μπορεί να αναπτυχθεί με τη γνωστή σας διαδικασία του Αναπτύγματος σε Μερικά Κλάσματα (βλ. Παράρτημα 2.5). Έχουμε

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \quad (15.231)$$

$$= A \frac{1}{1 - z^{-1}} + B \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + C \frac{1}{1 + 3z^{-1}} \quad (15.232)$$

με

$$A = X(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=1} = 1 \quad (15.233)$$

$$B = X(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=2} = -\frac{3}{7} \quad (15.234)$$

$$C = X(z)(1 + 3z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=-1/3} = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=-1/3} = \frac{3}{7} \quad (15.235)$$

Άρα ο μετασχ. Z γράφεται ως

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1 + 3z^{-1}} \quad (15.236)$$

Για κάθε ένα από τα παραπάνω πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

(α') Το πεδίο σύγκλισης είναι $|z| > 3$, άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι δεξιόπλευρο, οπότε από τον Πίνακα (15.2)

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}} \longleftrightarrow \quad (15.237)$$

$$x[n] = u[n] - \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7} (-3)^n u[n] \quad (15.238)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στο πεδίο σύγκλισης του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι αιτιατό, από τη μορφή του $x[n]$.

(β') Το πεδίο σύγκλισης είναι $|z| < 1/2$, άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι αριστερόπλευρο, οπότε από τον Πίνακα (15.2)

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}} \longleftrightarrow \quad (15.239)$$

$$x[n] = -u[-n-1] + \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1] \quad (15.240)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στο πεδίο σύγκλισης του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι αντι-αιτιατό, από τη μορφή του $x[n]$.

(γ') Το πεδίο σύγκλισης είναι $1/2 < |z| < 1$, άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι αμφίπλευρο. Για να προκύψει αυτός ο δακτύλιος ως τομή κάποιων επιμέρους πεδίων σύγκλισης που ορίζονται από τους πόλους $p_0 = 1, p_1 = 1/2, p_2 = -3$, θα πρέπει αυτά τα επιμέρους πεδία να είναι τα

$$\{|z| < 3\} \cap \{|z| > 1/2\} \cap \{|z| < 1\} = \{1/2 < |z| < 1\} \quad (15.241)$$

Οπότε από τον Πίνακα (15.2) και τα επιμέρους πεδία σύγκλισης παραπάνω, έχουμε

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}} \longleftrightarrow \quad (15.242)$$

$$x[n] = -u[-n-1] - \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1] \quad (15.243)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στο πεδίο σύγκλισης του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι μη αιτιατό, από τη μορφή του $x[n]$.

(δ') Το πεδίο σύγκλισης είναι $1 < |z| < 3$, άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι αμφίπλευρο. Για να προκύψει αυτός ο δακτύλιος ως τομή κάποιων επιμέρους πεδίων σύγκλισης που ορίζονται από τους πόλους $p_0 = 1, p_1 = 1/2, p_2 = -3$, θα πρέπει αυτά τα επιμέρους πεδία να είναι τα

$$\{|z| < 3\} \cap \{|z| > 1/2\} \cap \{|z| > 1\} = \{1 < |z| < 3\} \quad (15.244)$$

Οπότε από τον Πίνακα (15.2) και τα επιμέρους πεδία σύγκλισης παραπάνω, έχουμε

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}} \longleftrightarrow \quad (15.245)$$

$$x[n] = u[n] - \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1] \quad (15.246)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στο πεδίο σύγκλισης του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι μη αιτιατό, από τη μορφή του $x[n]$.

Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι

Ένα αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα έχει μετασχ. Fourier - όταν έχει όλους τους πόλους του εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Ένα αντι-αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα έχει μετασχ. Fourier - όταν έχει όλους τους πόλους του εκτός του μοναδιαίου κύκλου.



Σχήμα 15.32: Διδάσκοντας τον Μετασχηματισμό Z... :-)

Κριτήριο ευστάθειας (και άρα ύπαρξης του μετασχ. Fourier) για οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα είναι η συμπερίληψη του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z που το περιγράφει.

Οι δυο πρώτες παρατηρήσεις ίσως σας φαίνονται περίεργες. Γιατί η αιτιατότητα να έχει να κάνει με τη θέση των πόλων; Αφού μόλις πριν λίγο είπαμε - και γράψαμε μόλις δυο σειρές πιο πάνω - ότι κριτήριο ευστάθειας είναι μόνον η συμπερίληψη του μοναδιαίου κύκλου στο πεδίο σύγκλισης. Πράγματι, έτσι είναι, απλώς οι δυο πρώτες παρατηρήσεις είναι μια επαναδιατύπωση του κριτηρίου αυτού σε σχέση με την αιτιατότητα ή μη ενός συστήματος.

Σκεφτείτε το λίγο.... αν ένα σύστημα είναι αιτιατό, τότε έχει εξωστρεφές πεδίο σύγκλισης, με όριο τον πόλο με το μεγαλύτερο μέτρο, έστω $|a_i|$ αυτός. Άρα το πεδίο σύγκλισης είναι $|z| > |a_i|$. Όμως αν όλοι οι πόλοι είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε και αυτός ο πόλος θα είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου, άρα $|a_i| < 1$, και έτσι το πεδίο σύγκλισης αυτόματα περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Άρα είναι ευσταθές! :-) Με παρόμοια λογική αποδεικνύεται και το αντίστοιχο για τα αντι-αιτιατά συστήματα.

15.11.4 Διάταξη Συστημάτων

Η διάταξη σε σειρά και σε παραλληλία έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο περί Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου. Συστήματα σε σειρά εκφράζονται ως η συνέλιξη των επιμέρους συστημάτων στο χρόνο (και άρα σε γινόμενο των μετασχ. Z τους), ενώ συστήματα σε παραλληλία εκφράζονται σε άθροισμα των επιμέρους συστημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και σε αυτόν του μετασχ. Z.