ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Τέταρτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1.
Για το παρακάτω σύστημα $H(z)$,

$$H(z) = \frac{(1+3z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})(1-\frac{4}{3}z^{-1})} \tag{1}$$

βρείτε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης $H_{min}(z)$ τέτοιο ώστε οι αποκρίσεις πλάτους των δυο συστημάτων να είναι ίσες, δηλ. $|H(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})|$.

Λύση:
Το σύστημα έχει δυο μηδενικά, στις θέσεις $z = -3$ και $z = \frac{1}{4}$, ενώ έχει δυο πόλους στις θέσεις $z = \frac{3}{4}$ και $z = \frac{4}{3}$. Το μηδενικό στη θέση $z = -3$ και ο πόλος στη θέση $z = \frac{4}{3}$ θα ανήκουν σε ένα all-pass σύστημα, το οποίο θα έχει επίσης πόλο στη θέση $z = -1/3$ και μηδενικό στη θέση $z = \frac{3}{4}$, και άρα θα είναι

$$H_{ap}(z) = \frac{(1+3z^{-1})(1-\frac{3}{4}z^{-1})}{(1+\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{4}{3}z^{-1})} \tag{2}$$

το οποίο γράφεται ως

$$H_{ap}(z) = -\frac{9}{4}\frac{(z^{-1}+\frac{1}{3})(z^{-1}-\frac{4}{3})}{(1+\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{4}{3}z^{-1})} \tag{3}$$

Το σύστημα ελάχιστης φάσης θα έχει ένα μηδενικό στη θέση $z = \frac{1}{4}$, έναν πόλο στη θέση $z = \frac{3}{4}$ από το αρχικό σύστημα, ενώ θα έχει και ένα μηδενικό στη θέση $z = \frac{1}{3}$ και έναν πόλο στη θέση $z = \frac{3}{4}$, που πρέπει να υπάρχουν για να ακυρώνονται οι όροι που εισήχθησαν στο all-pass. Άρα

$$H_{min}(z) = \frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})^2} \tag{4}$$

και μεταφέροντας το συντελεστή $-9/4$ από το all-pass, έχουμε

$$H_{min}(z) = -\frac{9}{4}\frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})^2} \tag{5}$$

Άσκηση 2.
Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1-1.5z^{-1}-z^{-2})(1+0.9z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+j0.7z^{-1})(1-j0.7z^{-1})} \tag{6}$$

(α΄) Γράψτε την εξίσωση διαφορών που ικανοποιείται από την είσοδο και την έξοδο του συστήματος.

(β΄) Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων μηδενικών και ορίστε την περιοχή σύγκλισης του συστήματος.

(γ΄) Σχεδιάστε την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$.

(δ΄) Εξηγήστε αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω δηλώσεις:

- Το σύστημα είναι ευσταθές.
- Η κρουστική απόκριση πλησιάζει μια σταθερά για μεγάλες τιμές του n.
- Η απόκριση πλάτους έχει μια κορυφή στη συχνότητα $\omega \approx \pm\pi/4$.
- Το σύστημα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα.

Λύση:

(α') Το σύστημα γράφεται ως

$$H(z) = \frac{(1-1.5z^{-1}-z^{-2})(1+0.9z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+j0.7z^{-1})(1-j0.7z^{-1})} \tag{7}$$

$$= \frac{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1+0.9z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+j0.7z^{-1})(1-j0.7z^{-1})} \tag{8}$$

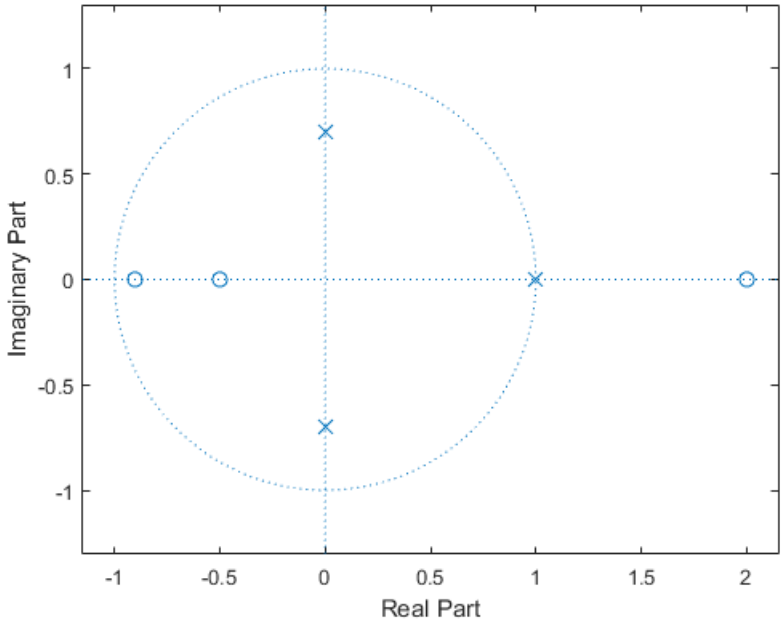
$$= \frac{1-0.6z^{-1}-2.35z^{-2}-0.9z^{-3}}{1-z^{-1}+0.49z^{-2}-0.49z^{-3}} \tag{9}$$

$$= \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{10}$$

Πολλαπλασιάζοντας χιαστί και κάνοντας αντίστροφο μετασχ. Z λαμβάνουμε

$$y[n]-y[n-1]+0.49y[n-2]-0.49y[n-3] = x[n]-0.6x[n-1]-2.35x[n-2]-0.9x[n-3] \tag{11}$$

(β') Υπάρχουν τρεις πόλοι στις θέσεις $z = \pm j0.7$ και $z = 1$, ενώ τρια μηδενικά υπάρχουν στις θέσεις $z = 2$, $z = -1/2$ και $z = -0.9$. Το διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 1.

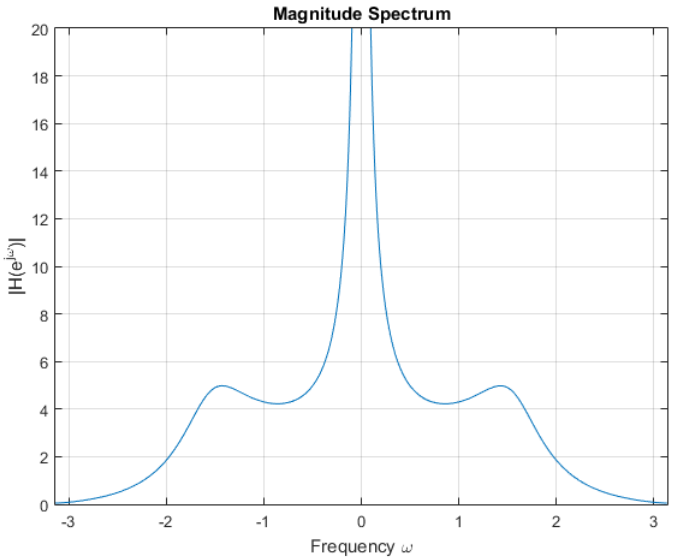


Σχήμα 1: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών Άσκησης 2.

Αφού το σύστημα είναι αιτιατό, το πεδίο σύγκλισης θα είναι εξωστρεφές και θα εκτείνεται "έξω" του μεγαλύτερου πόλου κατά μέτρο, άρα

$$|z| > 1 \tag{12}$$

(γ') Η απόκριση πλάτους θα είναι περίπου όπως στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Απόκριση πλάτους Άσκησης 2.

(δ') Έχουμε:

- Το σύστημα είναι ευσταθές: Λάθος, υπάρχει πόλος στη θέση $z = 1$, άρα είναι ασταθές.
- Η κρουστική απόκριση πλησιάζει μια σταθερά για μεγάλες τιμές του n: Το σύστημα είναι ασταθές με πόλο στο $z = 1$, άρα θα υπάρχει κάποιος όρος $Au[n]$ στην κρουστική απόκριση. Οπότε για μεγάλα n, πράγματι η κρουστική απόκριση θα πλησιάζει τη σταθερή τιμή A - εφ'οσον οι άλλοι (ευσταθείς) όροι που αντιστοιχούν στους υπόλοιπους πόλους θα έχουν "σβήσει" για μεγάλα n.
- Η απόκριση πλάτους έχει μια κορυφή στη συχνότητα $\omega \approx \pm\pi/4$: Λάθος, οι πόλοι βρίσκονται στη συχνότητα $\omega = \pm\pi/2$.
- Το σύστημα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα: Λάθος, γιατί στο αντίστροφο σύστημα το μηδενικό στη θέση $z = 2$ θα γίνει πόλος, κι ως εκ τούτου δεν υπάρχει πεδίο σύγκλισης που να δίνει ευσταθές και αιτιατό ταυτόχρονα σύστημα. Άρα το αρχικό σύστημα δεν έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα.

Άσκηση 3.
Θεωρήστε το αιτιατό σήμα $x[n]$ με μετασχ. Z ως

$$X(z) = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{5}z)}{(1-\frac{1}{6}z)} \tag{13}$$

Για ποιές τιμές του α, το σήμα $\alpha^n x[n]$ είναι ένα σήμα πραγματικό και ελάχιστης φάσης;

Λύση:
Ο μετασχ. Z μπορεί να γραφεί ως

$$X(z) = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{5}z)}{(1-\frac{1}{6}z)} = \frac{6}{5}\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-5z^{-1})}{(1-6z^{-1})} \tag{14}$$

Όμως

$$\alpha^n x[n] \longleftrightarrow X(\alpha^{-1}z) = \frac{6}{5}\frac{(1-\frac{1}{2}\alpha z^{-1})(1-\frac{1}{4}\alpha z^{-1})(1-5\alpha z^{-1})}{(1-6\alpha z^{-1})} \tag{15}$$

Ένα σήμα ελάχιστης φάσης έχει όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου του. Άρα πρέπει

$$|\alpha/2| < 1 \Rightarrow |\alpha| < 2 \tag{16}$$

$$|\alpha/4| < 1 \Rightarrow |\alpha| < 4 \tag{17}$$

$$|5\alpha| < 1 \Rightarrow |\alpha| < \frac{1}{5} \tag{18}$$

$$|6\alpha| < 1 \Rightarrow |\alpha| < \frac{1}{6} \tag{19}$$

Το σήμα $\alpha^n x[n]$ είναι πραγματικό και ελάχιστης φάσης μόνον αν $|\alpha| < \frac{1}{6}$.