ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Πρώτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1.

Να προσδιοριστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y[n] - \frac{3}{5}y[n-1] + \frac{2}{25}y[n-2] = x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-2]$$

Λύση: Στην προκειμένη περίπτωση, οι τιμές των παραμέτρων που εμφανίζονται στη γενική εξίσωση είναι οι $N = M = 2$, $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = -\frac{3}{5}, \alpha_2 = \frac{2}{25}, \beta_0 = 0, \beta_1 = 1$ και $\beta_2 = \frac{1}{2}$. Εξισώνοντας το δεύτερο μέλος της εξίσωσης διαφορών του συστήματος με τη διακριτή κρουστική συνάρτηση $\delta[n]$, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$h_0[n] - \frac{3}{5}h_0[n-1] + \frac{2}{25}h_0[n-2] = \delta[n]$$

και στη συνέχεια επιλύουμε την ομογενή εξίσωση διαφορών

$$h_0[n] - \frac{3}{5}h_0[n-1] + \frac{2}{25}h_0[n-2] = \delta[n]$$

θεωρώντας ξανά εκθετική λύση της μορφής $h_\beta[n] = A\gamma^n$, η αντικατάσταση της στην ομογενή εξίσωση διαφορών θα οδηγήσει στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\gamma^2 - \frac{3}{5}\gamma + \frac{2}{25} = 0$$

με ρίζες $\gamma_1 = \frac{2}{5}$ και $\gamma_2 = \frac{1}{5}$.
Η γενική λύση θα δίνεται από την έκφραση

$$h_0[n] = \Big[A_1\Big(\frac{2}{5}\Big)^n + A_2\Big(\frac{1}{5}\Big)^n\Big]u[n]$$

με τις τιμές των σταθερών A_1 και A_2 να προσδιορίζονται και πάλι από τις αρχικές συνθήκες. Στην προκειμένη περίστωση, αυτές οι συνθήκες οδηγούν στο σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$h_0[0] = A_1 + A_2 = 1, \quad h_0[1] = A_1\Big(\frac{2}{5}\Big) + A_2\Big(\frac{1}{5}\Big) = \frac{3}{5}$$

με λύση $(A_1, A_2) = (2, -1)$ και επομένως η συνάρτηση $h[n]$ θα έχει τη μορφή

$$h_0[n] = \Big[2\Big(\frac{2}{5}\Big)^n - 1\Big(\frac{1}{5}\Big)^n\Big]u[n]$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση του συστήματος $h[n]$ υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} h[n] &= \sum_{k=0}^{2}\beta_k h_0[n-k] = \beta_0 h_0[n] + \beta_1 h_0[n-1] + \beta_2 h_0[n-2] = \\ &= \Big[2\Big(\frac{2}{5}\Big)^{n-1} - \Big(\frac{1}{5}\Big)^{n-1}\Big]u[n-1] + \frac{1}{2}\Big[2\Big(\frac{2}{5}\Big)^{n-2} - \Big(\frac{1}{5}\Big)^{n-2}\Big]u[n-2] = \\ &= \Big[2\Big(\frac{2}{5}\Big)^{n-1} - \Big(\frac{1}{5}\Big)^{n-1}\Big]u[n-1] + \frac{5}{2}\Big[\Big(\frac{2}{5}\Big)^{n-1} - \Big(\frac{1}{5}\Big)^{n-1}\Big]u[n-2] \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Να προσδιοριστεί το μέτρο και η φάση της συχνότικής απόκρισης του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

Λύση: Από την εξίσωση ορισμού της φασματικής απόκρισης, δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως ο υπολογισμός αυτής της συνάρτησης απαιτεί *την εύρεση της κρουστικής απόκρισης* $h[n]$. Στηριζόμενοι στις ιδιότητες της χρονικώς μετατοπισμένης κρουστικής συνάρτησης, προκύπτει αμέσως ότι

$$x[n] = x[n] * \delta[n], \;\; x[n-1] = x[n] * \delta[n-1], \;\; x[n-2] = x[n] * \delta[n-2]$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην εξίσωση διαφορών του συστήματος:

$$y[n] = x[n] * \delta[n] + 2x[n] * \delta[n-1] + x[n] * \delta[n-2] = x[n] * (\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]) = x[n] * \delta[n]$$

Κατα συνέπεια, η κρουστική απόκριση του συστήματος θα δίνεται από τη σχέση

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

ενώ η συχνοτική του απόκριση θα υπολογίζεται ως

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]e^{-j\omega k} + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-1]e^{-j\omega k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-2]e^{-j\omega k}$$

Από τον ορισμό αυτό, όμως, της διακριτής συνάρτησης Δέλτα προκύπτει αμέσως ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]e^{-j\omega k} = e^{-j\omega k}\Big|_{k=0} = 1$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-1]e^{-j\omega k} = e^{-j\omega k}\Big|_{k=1} = e^{-j\omega}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-2]e^{-j\omega k} = e^{-j\omega k}\Big|_{k=2} = e^{-j2\omega}$$

και η παραπάνω σχέση γράφεται

$$H\left(e^{j\omega}\right) = 1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} = 2e^{-j\omega}\Big(\frac{1}{2}e^{j\omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\Big) = 2e^{-j\omega}\Big[\cos(\omega) + 1\Big]$$

Επομένως, το μέτρο και η φάση της φασματικής απόκρισης του συστήματος θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 2\left[\cos(\omega) + 1\right]$$

και

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = -\omega$$

Άσκηση 3.

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier, καθώς και οι αποκρίσεις πλάτους και φάσης, του σήματος $x[n]$ το οποίο ορίζεται ως

$$x[n] = \begin{cases} \text{A} & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

Λύση: Λαμβάνοντας υπόψη πως το σήμα $x[n]$ είναι μια ακολουθία πεπερασμένου μήκους, ο ζητούμενος μετασχηματισμός Fourier υπάρχει και υπολογίζεται ως

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-j\omega n} = A\sum_{n=0}^{L-1}\left(e^{-j\omega}\right)^n = \frac{A\left(1 - e^{-j\omega L}\right)}{1 - e^{-j\omega}}$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται

$$X\left(e^{j\omega}\right) = A\left\{\frac{e^{-j\omega L/2}}{e^{-j\omega/2}}\right\}\left\{\frac{e^{j\omega L/2}-e^{-j\omega L/2}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}\right\} = A\frac{\sin\left(\omega L/2\right)}{\sin\left(\omega/2\right)}exp\Big[-j\frac{\omega\left(L-1\right)}{2}\Big]$$

Επομένως, το μέτρο και η φάση της συνάρτησης $X\left(e^{j\omega}\right)$ υπολογίζονται ως

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = |A|\left|\frac{\sin\left(\omega L/2\right)}{\sin\left(\omega/2\right)}\right|$$

και

$$\angle X\left(e^{j\omega}\right) = -\frac{\omega\left(L-1\right)}{2}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε πως για την τιμή $\omega = 0$ οι παραπάνω σχέσεις λαμβάνουν την απλή μορφή $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = |A|\,L$ και $\angle X\left(e^{j\omega}\right) = 0$. Η συνάρτηση $\left|X\left(e^{e^{j\omega}}\right)\right|$ για την $A = 1$ είναι γνωστή ως πυρήνας του Dirichlet.

Άσκηση 5.

Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός $Fourier$ και να σχεδιαστούν τα φάσματα πλάτους και φάσης της διακριτής ακολουθίας $x[n]$ η οποία ορίζεται ως

$$x[n] = \alpha^{|n|}, |\alpha| < 1$$

Λύση: Ο μετασχηματισμός $Fourier$ του παραπάνω διακριτού σήματος υφίσταται, λόγω της σύνθηκης $|\alpha| < 1$ και δίνεται από τη σχέση

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^{|n|}e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n}e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\alpha^{-n}e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha e^{-j\omega}\right)^{n} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\alpha e^{j\omega}\right)^{-n}$$

όπου για την κατασκευή της τελευταίας σχέσης χρησιμοποιούμε τον ορισμό της συνάρτησης της απόλυτης τιμής. Ανατρέχοντας στο μαθηματικό τυπολόγιο, το πρώτο άθροισμα υπολογίζεται ως

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha e^{j\omega}\right)^{n} = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

Από την άλλη πλευρά, για τον υπολογισμό του δεύτερου αθροίσματος προχωρούμε στην αντικατάσταση $n \to m = -n$. Για $n = -\infty$ είναι $m = \infty$, ενώ για $n = -1$ είναι $m = 1$ και το παραπάνω άθροισμα γράφεται

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\alpha e^{j\omega}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left(\alpha e^{j\omega}\right)^{m} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\alpha e^{j\omega}\right)^{m} - \left(\alpha e^{j\omega}\right)^{m}\Big|_{m=0} = \frac{1}{1-\alpha e^{j\omega}} - 1 = \frac{\alpha e^{j\omega}}{1-\alpha e^{j\omega}}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x[n]$ υπολογίζεται ως

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{\alpha e^{j\omega}}{1-\alpha e^{j\omega}} = \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

όπως προκύπτει εύκολα μετά από απλές αλγεβρικές πράξεις, που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα. Παρατηρούμε πως, στην προκειμένη περίπτωση, η συνάρτηση $X\left(e^{j\omega}\right)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση.

Άσκηση 6.

Να προσδιοριστεί η απόκριση σε συχνότητα του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι $\gamma = 0.5$, οπότε το σύστημα είναι ευσταθές και μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκριση σε συχνότητα. Έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] &= x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \\ Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) + 2e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) + e^{-j2\omega}X(e^{j\omega}) \\ H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} &= \frac{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

με την τελευταία σχέση να προκύπτει από το θεώρημα της συνέλιξης.

Άσκηση 7.

Χρησιμοποιώντας μετασχ. Fourier, προσδιορίστε την έξοδο $y[n]$ του συστήματος με κρουστική απόκριση της μορφής

$$h[n] = 5\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n u[n]$$

όταν στην είσοδό του βρεθεί το σήμα

$$x[n] = \Big(\frac{1}{3}\Big)^n u[n]$$

Λύση: Η άσκηση μπορεί να λυθεί με χρήση της πράξης της συνέλιξης, αλλά εδώ θα δούμε κάτι διαφορετικό. Γνωρίζουμε από το θεώρημα της συνέλιξης ότι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \tag{1}$$

Οι μετασχ. Fourier της εισόδου και του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{5}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \\ H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \frac{5}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \\ &= \frac{3}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \\ y[n] &= 3\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n u[n] + 2\Big(\frac{1}{3}\Big)^n u[n] \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα και γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών για να βρούμε το $y[n]$.