

Ο Μετασχηματισμός Z

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζης
Δρ. Επιστήμης Η/Υ Πανεπιστημίου Κρήτης
Δρ. Επεξεργασίας Σήματος Πανεπιστημίου Rennes 1

26 Οκτωβρίου 2015

1 Εισαγωγή

Έχουμε δει σε προηγούμενες σημειώσεις το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT), και το πώς χρησιμοποιείται για να μας δώσει πληροφορία για ένα διακριτό σήμα στο πεδίο της συχνότητας. Το κακό είναι ότι υπάρχουν σήματα που συναντάμε στην πράξη για τα οποία ο DTFT δεν υπάρχει. Τι εννοούμε “δεν υπάρχει” ;

Ας ξαναμιλήσουμε λίγο για τις προϋποθέσεις ύπαρξης του Μετασχ. Fourier, που θα μας δώσουν το πάτημα για να πάμε από τον DTFT στον μετασχηματισμό Z. Όταν λοιπόν μιλάμε για “ύπαρξη” ενός μετασχηματισμού, αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα ή το ολοκλήρωμα, ή γενικότερα η μαθηματική μορφή που τον αναπαριστά, *συγκλίνει*. Εν προκειμένω, υπενθυμίζεται ότι ο DTFT δίνεται από τον τύπο:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (1)$$

Για να υπάρχει λοιπόν ο DTFT ενός διακριτού σήματος $x[n]$ μέσω της σύγκλισης του αθροίσματος, αρκεί να ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \quad (2)$$

δηλαδή, το $x[n]$ να είναι *απολύτως αθροίσιμο*, όπως λέγεται στα μαθηματικά αυτή η σχέση¹. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν πάρουμε τις απόλυτες τιμές των δειγμάτων του σήματος, και τις προσθέσουμε όλες μαζί, το αποτέλεσμα μας δε θα “φύγει” στο $\pm\infty$ αλλά θα συγκλίνει ομοιόμορφα σε έναν αριθμό.

Για παράδειγμα, το σήμα $x[n] = a^n u[n]$, με $|a| < 1$, είναι απολύτως αθροίσιμο. Ας το δούμε:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n u[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n = \frac{1}{1 - |a|} \quad (3)$$

αφού $|a| < 1$, όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές σχέσεις για τα αθροίσματα, που έχουμε δει στις σχετικές σημειώσεις του DTFT.

Όμως για να δούμε τι συμβαίνει για το σήμα $x[n] = a^n u[n]$, με $|a| \geq 1$ αυτή τη φορά. Για να δούμε, είναι απολύτως αθροίσιμο; :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n u[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n = \frac{1}{1 - |a|} \quad (4)$$

¹ Αυτή η συνθήκη είναι ικανή, αλλά όχι και αναγκαία, όπως έχουμε ήδη δει. Υπάρχουν σήματα που ΔΕΝ είναι απολύτως αθροίσιμα αλλά ο μετασχ. Fourier τους υπάρχει, όπως για παράδειγμα η βηματική συνάρτηση $u[n]$, αλλά τότε εμπλέκουμε γενικευμένες συναρτήσεις, όπως η συνάρτηση Δέλτα, για την εύρεση του μετασχηματισμού.

μόνον αν $|a| < 1$. Όμως από υπόθεση έχουμε $|a| \geq 1$, άρα δεν μπορούμε να γράψουμε την τελευταία σιότητα, άρα το σήμα δεν είναι απολύτως αθροίσιμο και άρα ο DTFT του δεν υπάρχει.

Ένα τέτοιο παράδειγμα σήματος είναι το $x[n] = 2^n u[n]$.

Ωραία, και τώρα τι κάνουμε; Υπάρχουν σήματα για τα οποία δεν μπορούμε να ελέγξουμε το συχνοτικό τους περιεχόμενο, απ' ό,τι φαίνεται, δηλ. που δεν μπορούμε να τα δούμε από το πεδίο της συχνότητας. Τι συμφορά! :-) Υπάρχουν ένα σωρό σήματα στην πράξη που δεν πληρούν τη συνθήκη σύγκλισης. Τι θα κάνουμε με αυτά;;;

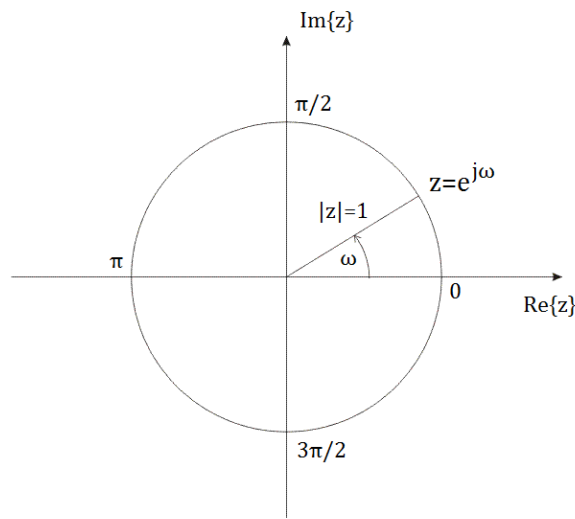
Εδώ έρχεται λοιπόν η “επέκταση” του ορισμού του μετασχηματισμού Fourier, κι αυτή η “επέκταση” λέγεται **Μετασχηματισμός Z** (ZT). Με ποια έννοια είναι επέκταση; Τι ακριβώς “επεκτείνεται” και πού; Ας το δούμε λίγο αυτό, είναι ενδιαφέρον...

1.1 Διαισθητική Προσέγγιση

Η συνάρτηση $e^{j\omega n}$ (ανεξάρτητα της τιμής του n), αν τη δούμε ως μιγαδικό αριθμό στο μιγαδικό επίπεδο, ορίζει τον μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου, γιατί

$$|e^{j\omega n}| = |\cos(\omega n) + j \sin(\omega n)| = \sqrt{\cos^2(\omega n) + \sin^2(\omega n)} = 1$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.

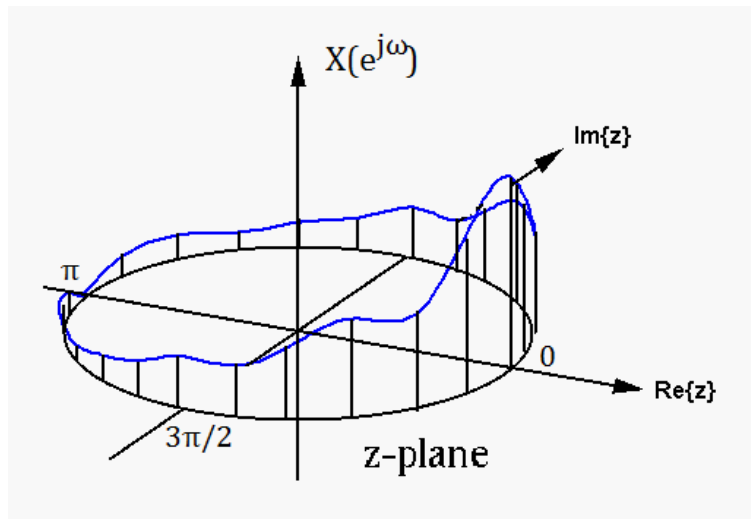


Σχήμα 1: Πεδίο ορισμού του μετασχ. Fourier

Επίσης, τα εκθετικά αυτά είναι περιοδικά στη συχνότητα με περίοδο 2π , γιατί $e^{j\omega n} = e^{j(\omega+2\pi)n}$. Επίσης έχουμε δει ότι το φάσμα ενός σήματος διακριτού χρόνου είναι περιοδικό με περίοδο 2π . Άρα λοιπόν θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο DTFT ορίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο ενός μιγαδικού επιπέδου, αφού αποτελείται από άθροισμα συναρτήσεων $e^{-j\omega n_0}$, που η καθεμία έχει “βάρος” $x[n_0]$. Όταν βλέπουμε λοιπόν ένα DTFT-φάσμα ενός σήματος διακριτού χρόνου, ουσιαστικά αυτό που βλέπουμε ορίζεται πάνω σε αυτόν τον κύκλο, επαναλαμβάνοντας μια πλήρη “στροφή” του κύκλου - και άρα “βλέποντας” το ίδιο κομμάτι του φάσματος κάθε 2π . Απλά το σχεδιάζουμε σε ευθεία γραμμή, όπως έχουμε δει σε προηγούμενες σημειώσεις, για λόγους ευκολίας². Η Εικόνα 2 δείχνει πως είναι πραγματικά το φάσμα ενός διακριτού σήματος (εδώ, το

²Σας θυμίζει κάτι; Μήπως κάτι παρόμοιο κάναμε όταν πήγαμε από το μετασχ. Fourier στο μετασχ. Laplace στα σήματα συνεχούς χρόνου (HY215);!!! :-)

φάσμα είναι πραγματική συνάρτηση του ω , για ευκολία σχεδίασης) :



Σχήμα 2: Φάσμα σήματος

Η μπλέ γραμμή είναι το φάσμα ενός διακριτού σήματος όπως είναι κανονικά, άσχετα αν εμείς το σχεδιάζουμε σε ευθεία γραμμή. Η “επέκταση” λοιπόν που συζητάμε και έρχεται με τον ΖΤ είναι ο ορισμός του ενός φάσματος πάνω και σε άλλους κύκλους του μιγαδικού επιπέδου, και όχι μόνο στο μοναδιαίο, όπως γίνεται στον DTFT! Πώς μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο; Μα φυσικά, χρησιμοποιώντας εκθετικά της μορφής $z = re^{j\omega}$ αντί των απλών $e^{j\omega}$, τα οποία ορίζονται πάνω σε κύκλους ακτίνας r !!

Ας το δούμε στην πράξη λίγο. Μιλήσαμε πριν για το σήμα

$$x[n] = 2^n u[n] \quad (5)$$

και είπαμε ότι δεν έχει μετασχ. Fourier. Όμως ξέρουμε ότι

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (6)$$

για $|a| < 1$. Πώς θα μπορούσαμε να κάνουμε το προαναφερθέν $x[n]$ να έχει μετασχ. Fourier; Μα φυσικά αν κάπως “μετατρέπαμε” αυτό το 2^n σε κάτι (μικρότερο της μονάδας) n , ώστε να πέσουμε στην περίπτωση της Σχέσης (6). Έστω λοιπόν ότι διαιρούμε αυτό το 2^n με έναν αριθμό $r^n > 2^n$, με $r > 0$ και πραγματικό, ώστε να μπορεί να γίνει μετασχηματισμός (sic) κατά Fourier. Έτσι θα είναι

$$\left(\frac{2}{r}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{r}\right)^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{r}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{r} e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{r} e^{-j\omega}} \quad (7)$$

με $r > 2$. Για μισό λεπτό όμως. Η σχέση

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{r}\right)^n u[n] e^{-j\omega n} \quad (8)$$

μπορεί να γραφεί ως

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n r^{-n} u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n u[n] r^{-n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n u[n] (re^{j\omega})^{-n} \quad (9)$$

Όμως αυτή η σχέση είναι ουσιαστικά ένας ντεμί-μετασχηματισμός :-) Fourier του αρχικού μας σήματος, όχι επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, αλλά σε έναν κύκλο ακτίνας r , με $r > 2$!! Έτσι, το σήμα μας αναλύεται σε μιγαδικά εκθετικά της μορφής $z = re^{j\omega}$, αντί των $z = e^{j\omega}$ του μετασχ. Fourier. Άρα μόνο στην περιοχή $r > 2$ του μιγαδικού επιπέδου μπορούμε να ορίσουμε αυτόν το μετασχηματισμό. Όμως r είναι η ακτίνα του κύκλου που ορίζουν τα εκθετικά αυτά, οπότε είναι το μέτρο των εκθετικών αυτών. Μπορούμε δηλαδή να πούμε ισοδύναμα ότι η περιοχή αυτή είναι η $|z| > 2$. Με άλλα λόγια, μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε κύκλο ακτίνας $|z| > 2$ (άρα έχουμε άπειρες επιλογές) για να μετασχηματίσουμε το σήμα μας! ;-)

Έτσι, ο μετασχηματισμός που αναλύει σήματα διακριτού χρόνου σε κύκλους ακτίνας $r > 0$ του μιγαδικού επιπέδου που ορίζονται από μιγαδικά εκθετικά $re^{j\omega}$, λέγεται Μετασχηματισμός Z και ορίζεται ως:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad (10)$$

με $z = re^{j\omega}$, και ο αντίστροφός του ορίζεται ως:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz \quad (11)$$

και τον οποίον τον βλέπουμε μόνο για να καταλάβουμε πόσο δύσκολος είναι να υπολογιστεί. :-) Πρόκειται για επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο μιγαδικό επίπεδο. Ενδιαφέρον για τους μαθηματικούς, αλλά για μας όχι. :-) Στην πράξη, θα χρησιμοποιούμε άλλες μεθόδους για να πηγαίνουμε από τον χώρο του ΖΤ στο χώρο του χρόνου.

Με την ευκαιρία, δείτε την ομοιότητά του με τον μετασχηματισμό Fourier:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (12)$$

Ουσιαστικά δηλαδή, αν στον ορισμό του ΖΤ θέσουμε $z = e^{j\omega}$, θα πάρουμε τον DTFT, δηλ. ο DTFT είναι η “έκδοση” του ΖΤ πάνω στο μοναδιαίο κύκλο! Καθολου περιέργο, με βάση όσα είπαμε ;-)

1.2 Ύπαρξη του μετασχ. Z

Από τον ορισμό του μετασχ. Z , έχουμε ότι

$$Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x[n]}{z^n} \quad (13)$$

Η ύπαρξη του μετασχηματισμού είναι εγγυημένη αν

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x[n]}{z^n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{z^n} \right| < +\infty \quad (14)$$

για κάποιο z . Αν θεωρήσουμε ότι $x[n] = 0$, $n < 0$, τότε το παραπάνω γράφεται

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{z^n} \right| < +\infty \quad (15)$$

Αποδεικνύεται ότι οποιοδήποτε σήμα μεγαλώνει πιο αργά από το r^n , για $r > 0 \in \mathfrak{R}$, δηλ. $|x[n]| \leq r^n$, η παραπάνω σχέση ικανοποιείται και άρα υπάρχει ο μετασχ. Z του, γιατί

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{z^n} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{r^n}{z^n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{|z|} \right)^n = \frac{1}{1 - \left(\frac{r}{|z|} \right)^n} \quad (16)$$

για $|z| > r$. Έτσι, ο μετασχ. Z υπάρχει μόνο για $|z| > r$.

Με παρόμοιο συλλογισμό αποδεικνύεται η ύπαρξη για οποιοδήποτε σήμα $x[n]$. Ευτυχώς, σήματα που μεγαλώνουν πιο γρήγορα από το r^n (όπως π.χ. το r^{n^2}), έχουν ελάχιστη πρακτική ή θεωρητική σημασία.

1.3 Παραδείγματα με τον ορισμό

Ας δούμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα υπολογισμού του ZT πάνω σε συνήθη σήματα, και πώς ακριβώς γίνεται αυτή η “επέκταση” σε κύκλους διαφορετικούς από το μοναδιαίο. Κι εδώ, χρήσιμες θα μας φανούν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}, |\alpha| < 1. \quad (17)$$

$$\sum_{n=0}^N \alpha^n = \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha}. \quad (18)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n] = a^n u[n]$.

Λύση:

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n]z^{-n} \quad (19)$$

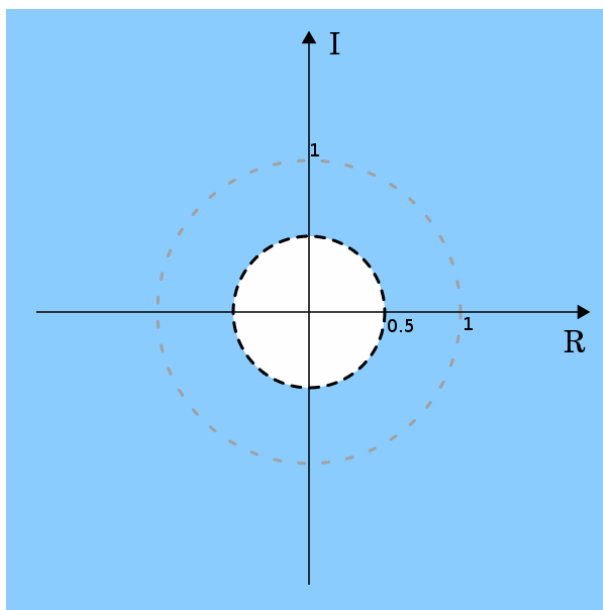
Επειδή η $u[n]$, η γνωστή βηματική συνάρτηση, είναι μη μηδενική και ίση με 1 για $n \geq 0$, μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω άθροισμα ως:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n \quad (20)$$

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την κατάλληλη από τις δυο παραπάνω Σχέσεις (17,18) που γράψαμε, όπου $\alpha = (az^{-1})$. Άρα θα έχουμε:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad (21)$$

με $|az^{-1}| < 1 \iff |a| < |z|$. Να λοιπόν ο χώρος του μιγαδικού επιπέδου που ορίζεται ο ZT. Ορίζεται MONO για κύκλους με ακτίνα μεγαλύτερη από $|a|$. Αν το $|a|$ είναι μικρότερο της μονάδας, ο ZT ορίζεται σε όλους τους κύκλους εντός του μπλέ χρώματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα (3) (η θέση του a είναι τυχαία στο σχήμα): Ο χώρος του μιγαδικού επιπέδου για τον οποίο ορίζεται ο ZT του σήματος $x[n]$, δηλ. ο χώρος που ισχύει $|z| > |a|$ στο παράδειγμά μας (ο μπλε χώρος δλδ) λέγεται **Πεδίο Σύγκλισης - Region of Convergence - ROC**, και από δω και πέρα θα τον αναφέρουμε ως ROC. Επίσης, η θέση $z = a$ λέγεται **πόλος** του μετασχηματισμού, διότι τον απειρίζεται (μηδενίζει τον παρονομαστή).



Σχήμα 3: Πεδίο σύγκλισης $a^n u[n]$, για $a = 0.5$

2. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n] = -a^n u[-n - 1]$.

Λύση:

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n - 1]z^{-n} \quad (22)$$

Επειδή η $u[-n - 1]$ είναι μη μηδενική για $n \leq -1$, μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω άθροισμα ως:

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n \quad (23)$$

Εδώ που φτάσαμε, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αμέσως κάποια από τις Σχέσεις (17),(18), γιατί τα όρια στο παραπάνω άθροισμα δεν είναι ίδια με κάποια από τις σχέσεις αυτές. Πρέπει να κάνουμε ένα βήμα ακόμα. Κι αυτό δεν είναι άλλο από το να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε $k = -n$ και τότε το άθροισμά μας γίνεται:

$$\begin{aligned} X(z) &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n = - \sum_{k=\infty}^1 (a^{-1}z)^k \\ &= - \sum_{k=1}^{+\infty} (a^{-1}z)^k = - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^k - 1 \right) = - \sum_{k=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^k + 1 \end{aligned} \quad (24)$$

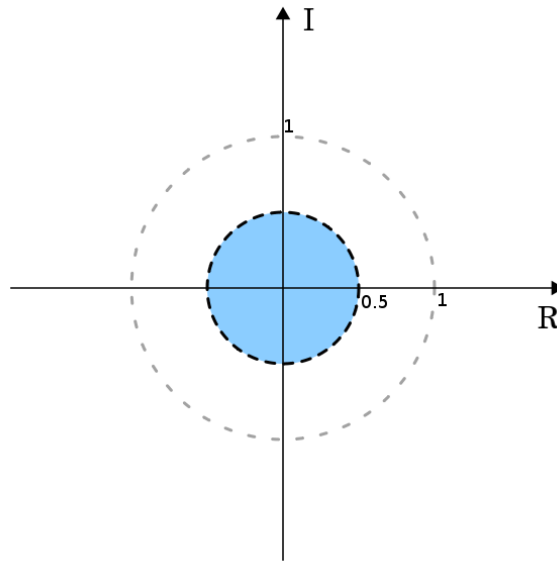
Πώς κάναμε το παραπάνω; Καταλήξαμε αρχικά σε ένα άθροισμα από $k = 1$ ως $+\infty$ μετά την αλλαγή μεταβλητής. Όμως οι Σχέσεις (17),(18) είναι για αθροίσματα από 0 ως αριθμό ή ως $+\infty$. Οπότε πρέπει να αλλάξουμε το κάτω όριο του αθροίσματος από $k = 1$ σε $k = 0$. Αυτό γίνεται εύκολα αν συμπεριλάβουμε την τιμή του $(a^{-1}z)^k$ για $k = 0$ στο άθροισμα, και ταυτόχρονα να την αφαιρέσουμε, για να είμαστε συνεπείς μαθηματικά. Η τιμή για $k = 0$ είναι προφανώς $(a^{-1}z)^0 = 1$, κι αυτό το 1

είναι αυτό που αφαιρούμε παραπάνω.

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την κατάλληλη από τις δυο παραπάνω Σχέσεις (17),(18) που γράψαμε, όπου $\alpha = (a^{-1}z)$. Άρα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} X(z) &= -\sum_{k=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^k + 1 = -\frac{1}{1-a^{-1}z} + 1 = -\frac{1}{1-a^{-1}z} + \frac{1-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} \\ &= \frac{-1+1-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} \end{aligned} \quad (25)$$

με πεδίο σύγκλισης ROC $|a^{-1}z| < 1 \iff |a| > |z|$, άρα εδώ ορίζεται ο ZT σε κύκλους οι οποίοι έχουν ακτίνα μικρότερη από $|a|$, όπως δείχνει το Σχήμα (4) (η θέση του a είναι τυχαία στο σχήμα): Ξανά εδώ, η θέση $z = a$ λέγεται πόλος του μετασχηματισμού Z.



Σχήμα 4: Πεδίο σύγκλισης $-a^n u[-n-1]$ για $a = 0.5$

Σημαντική παρατήρηση:

Είδαμε στα δυο πρώτα παραδείγματα ότι δυο διαφορετικά σήματα στο χρόνο, έχουν τον ίδιο ZT. Σωστά; Λάθος! :-). Ο ZT δεν είναι μόνο ο τύπος που καταλήγουν τα μαθηματικά. Είναι ΚΑΙ το πεδίο σύγκλισης ROC! Π Ο Τ Ε δε γράφουμε μόνο τον τύπο του ZT. Π Α Ν Τ Α γράφουμε μαζί και το εκάστοτε ROC! Το ROC είναι αυτό που ορίζει μονοσήμαντα τα ζευγάρια μετασχηματισμού Z! Χωρίς αυτό, αν μας έδιναν τον τύπο του μετασχηματισμού Z των παραδειγμάτων 1 και 2, δε θα μπορούσαμε να πούμε από ποιο σήμα στο χρόνο προέρχεται! Μπορεί να είναι είτε το

$$x[n] = a^n u[n]$$

είτε το

$$y[n] = -a^n u[-n-1]$$

Το ROC είναι αυτό που καθορίζει το κάθε ζευγάρι μετασχηματισμού Z! Ανάλογα λοιπόν με το ROC, έχουμε διαφορετικά ζεύγη ZT.

3. Να βρεθεί ο μετασχ. Z του σήματος

$$w[n] = x[n] + y[n] = a^n u[n] - \beta^n u[-n - 1]$$

Λύση:

Είδαμε παραπάνω ότι

$$\begin{aligned} a^n u[n] &\leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a| \\ -\beta^n u[-n - 1] &\leftrightarrow \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} = \frac{z}{z - \beta}, \quad |z| < |\beta| \end{aligned} \quad (26)$$

Επειδή ο μετασχ. Z είναι γραμμικός (θα αναφερθούμε σύντομα σε αυτό), το άθροισμα δυο σημάτων έχει μετασχ. Z το άθροισμα των μετασχηματισμών, με την περιοχή σύγκλισης του αθροίσματος να ικανοποιεί τη σχέση

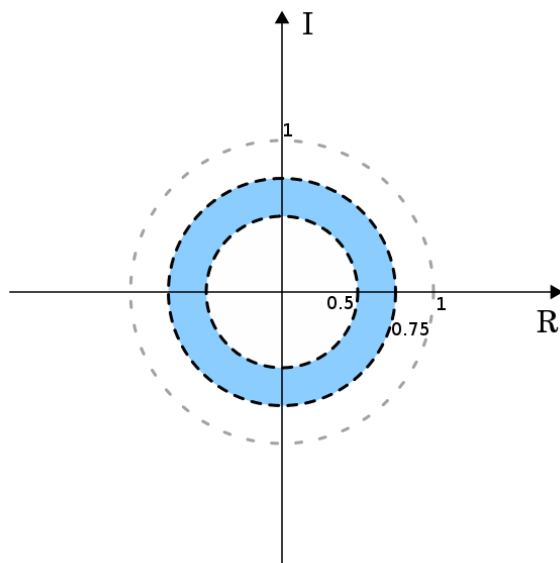
$$ROC_w \supset ROC_x \cap ROC_y$$

Αυτό σημαίνει προφανώς ότι για να υπάρχει ο μετασχ. Z του αθροίσματος, θα πρέπει το πεδίο σύγκλισής του να είναι μη κενό σύνολο. Αυτό εξαρτάται από τις σχετικές θέσεις των a, β . Η αλγεβρική έκφραση του μετασχηματισμού θα είναι

$$W(z) = \frac{z}{z - a} + \frac{z}{z - \beta} = \frac{z(z - \beta) + z(z - a)}{(z - a)(z - \beta)} \quad (27)$$

Οι πόλοι του μετασχ. αυτού βρίσκονται στις θέσεις $z_1 = a, z_2 = \beta$.

- Αν $|a| < |\beta|$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι το $|a| < |z| < |\beta|$, δηλ. ένας δακτύλιος στο z -επίπεδο. Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5: Πεδίο σύγκλισης $a^n u[n] - \beta^n u[-n - 1]$, με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$

- Αν $|a| \geq |\beta|$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο, \emptyset , και άρα ο μετασχ. Z , παρ' όλο που έχει μαθηματική μορφή, ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ, γιατί δεν έχει "πεδίο ορισμού", δηλ. κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου όπου θα ορίζεται! :-)

4. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n] = \delta[n]$.

Λύση:

Ας βρούμε και τον ZT της πιο σημαντικής συνάρτησης, της συνάρτησης Δέλτα. Είναι:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]z^{-n} \quad (28)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$ ορίζεται μόνο στη θέση $n = 0$ κι έχει πλάτος 1. Παντού αλλού είναι μηδέν. Άρα το παραπάνω άθροισμα θα γίνει:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]z^{-n} = 1z^0 = 1 \quad (29)$$

Προφανώς εδώ δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός όσον αφορά το πεδίο σύγκλισης ROC, άρα ο ZT του σήματος αυτού ορίζεται σε ΟΛΟ το μιγαδικό επίπεδο!! Ενδιαφέρον! :-)

5. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$.

Λύση:

Εδώ θα βρούμε τον Z της μετατοπισμένης συνάρτησης Δέλτα. Η $\delta[n - n_0]$ είναι μια συνάρτηση Δέλτα στη θέση n_0 . Το n_0 αυτό μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό. Είναι λοιπόν:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]z^{-n} \quad (30)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n - n_0]$ ορίζεται μόνο στη θέση $n = n_0$ κι έχει πλάτος 1. Παντού αλλού είναι μηδέν. Άρα το παραπάνω άθροισμα θα γίνει:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]z^{-n} = 1z^{-n_0} = z^{-n_0} \quad (31)$$

με πεδίο σύγκλισης ROC το $|z| > 0$. Το μηδέν δεν περιλαμβάνεται στο ROC γιατί για $z = 0$, απειρίζεται το $z^{-n_0} = \frac{1}{z^{n_0}}$ (μηδενίζεται ο παρονομαστής). Άρα βρήκαμε ότι ο ZT της $\delta[n - n_0]$ είναι ο z^{-n_0} , με ROC $|z| > 0$.

2 Σύνδεση με το μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου

Όταν θέτουμε $z = e^{j\omega}$ στο άθροισμα του μετασχ. Z, αυτό που κάνουμε “σιωπηλά” είναι ότι εκτιμούμε το μετασχ. Z σε συχνότητες που βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου, που δεν είναι άλλος απ’ τον κύκλο $|z| = |e^{j\omega}| = 1$!

Για να μπορούμε όμως να το κάνουμε αυτό, ΠΡΕΠΕΙ ο μοναδιαίος αυτός κύκλος να περιέχεται μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z! Αλλιώς δεν έχει κανένα νόημα ο υπολογισμός του $X(z)|_{z=e^{j\omega}}$! Γι’ αυτό λοιπόν, όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου μέσω του μετασχ. Z, πρέπει να προσέχουμε πρώτα αν ο μοναδιαίος κύκλος περιέχεται μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z. Αν περιέχεται, καλώς, αντικαθιστούμε $z = e^{j\omega}$ στον τύπο του μετασχ. Z και έχουμε το μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου. Αν όχι, τότε ο μετασχ. Fourier ΔΕΝ μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Z! Ας

μιλήσουμε όμως με λίγο μεγαλύτερη ακρίβεια σχετικά με αυτά...
Ο ορισμός του μετασχ. Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (32)$$

είναι ταυτόσημος με τον ορισμό του μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (33)$$

αν στη Σχέση (33) θέσουμε όπου $e^{j\omega}$ το $z = re^{j\omega}$. Είναι εύλογο να περιμένει κανείς ότι ο μετασχ. Z, $X(z)$, ενός σήματος $x[n]$, να είναι ίδιος με τον μετασχ. Fourier, $X(\omega)$, του ίδιου σήματος, με το $e^{j\omega}$ να έχει αντικατασταθεί από το z . Για παράδειγμα, μάθαμε πριν λίγο ότι

$$a^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a| \quad (34)$$

Αντικαθιστώντας το z με το $e^{j\omega}$, έχουμε ότι

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = X(e^{j\omega}) \quad (35)$$

που είναι ο μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου του σήματος $x[n]$, όπως είδαμε σε προηγούμενο Κεφάλαιο. Δυστυχώς αυτή η διαδικασία δεν ισχύει για κάθε σήμα $x[n]$. Μπορούμε να την χρησιμοποιούμε μόνο όταν η περιοχή σύγκλισης του μετασχ. Z περιέχει το μοναδιαίο κύκλο.

Για παράδειγμα, ο μετασχ. Fourier της βηματικής συνάρτησης $x[n] = u[n]$ είναι ο

$$x[n] = u[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \quad (36)$$

για $\omega \in [-\pi, \pi]$. Ο αντίστοιχος μετασχ. Z είναι ο

$$x[n] = u[n] \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1 \quad (37)$$

και όπως βλέπουμε από την περιοχή σύγκλισης, δεν περιλαμβάνεται ο μοναδιαίος κύκλος. Άρα, ο μετασχ. Z ΔΕΝ μπορεί να μας δώσει το μετασχ. Fourier, αλλά ούτε και το αντίστροφο! Σε αυτές τις περιπτώσεις, η σχέση μεταξύ των δυο μετασχηματισμών δεν είναι τόσο απλή. Ο λόγος για αυτήν την περιπλοκή σχετίζεται με τη σύγκλιση του αθροίσματος του μετασχ. Fourier, όπου η άθροιση περιορίζεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Λόγω αυτού του περιορισμού, το άθροισμα Fourier Διακριτού Χρόνου για τη βηματική συνάρτηση δε συγκλίνει. Χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μια γενικευμένη συνάρτηση ($\delta(\omega)$) για τη σύγκλιση.

Αντιθέτως, το άθροισμα Z για τη βηματική συνάρτηση συγκλίνει αλλά μόνο για $|z| > 1$, μια περιοχή που είναι “απαγορευμένη” για το μετασχ. Fourier! :-)

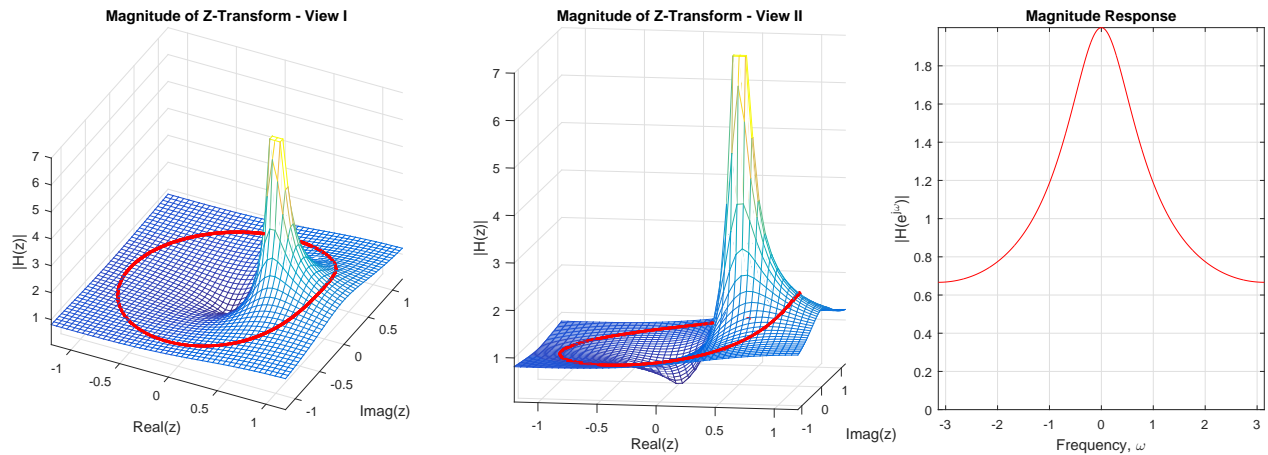
Ένα ακόμα ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι παρ’ όλο που ο μετασχ. Z είναι μια γενίκευση του μετασχ. Fourier, υπάρχουν σήματα (π.χ. περιοδικά σήματα), για τα οποία ο μετασχ. Z ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ, ενώ ο μετασχ. Fourier ΥΠΑΡΧΕΙ! :-) (αλλά δεν προκύπτει από απλή σύγκλιση του αθροίσματος).

Ας δούμε μερικά παραδείγματα αυτής της σχέσης των δυο μετασχηματισμών.

- Ας θεωρήσουμε ξανά το σήμα

$$h[n] = a^n u[n], |a| < 1 \quad (38)$$

Είδαμε ότι αυτό έχει μετασχηματισμό Z ως



Σχήμα 6: Μέτρο μετασχ. Z, $|H(z)|$, μοναδιαίος κύκλος, και φάσμα πλάτους $|H(e^{j\omega})|$, για $a = 0.5$.

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (39)$$

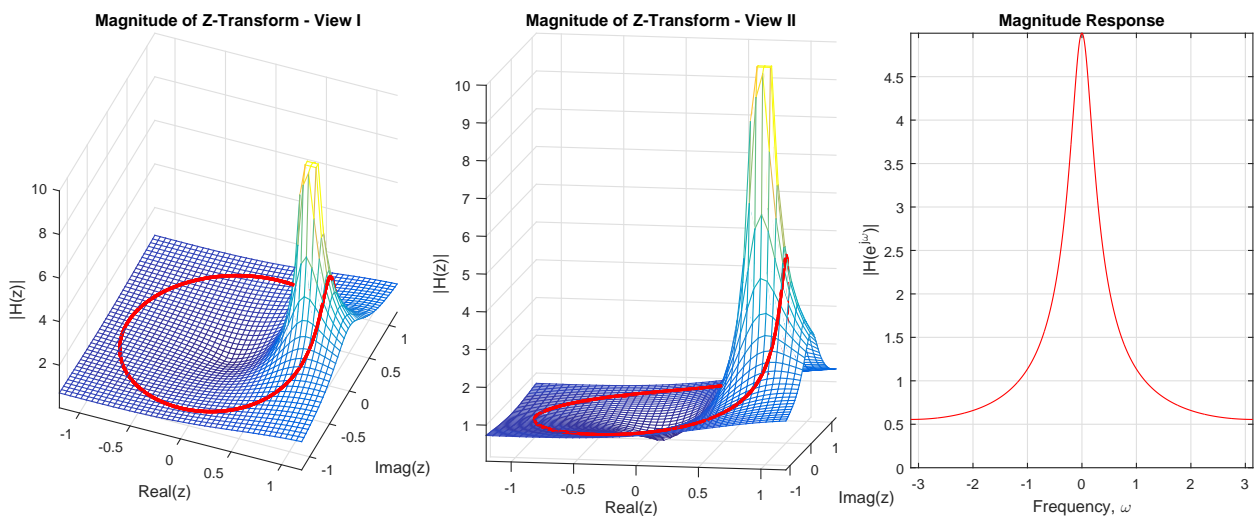
και από προηγούμενες σημειώσεις, ότι έχει μετασχ. Fourier ως

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (40)$$

Στα Σχήματα (6,7) βλέπετε το $|H(z)|$ για μερικές τιμές του z από δυο οπτικές γωνίες, και για $a = 0.5$ και $a = 0.8$ αντίστοιχα, καθώς και το μέτρο του Μετασχ. Fourier του ίδιου σήματος, το οποίο θυμίζεται ότι είναι

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos(\omega)}} \quad (41)$$

Παρατηρήστε στα τρισδιάστατα γραφήματα το μοναδιαίο κύκλο που έχει σχεδιαστεί επάνω στο



Σχήμα 7: Μέτρο μετασχ. Z, $|H(z)|$, μοναδιαίος κύκλος, και φάσμα πλάτους $|H(e^{j\omega})|$, για $a = 0.8$.

$|H(z)|$. Αυτός ο κύκλος είναι ο μοναδιαίος κύκλος όπου εκεί ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier,

και ο κύκλος αυτός έχει “απλωθεί” επάνω στο τρισδιάστατο γράφημα για να μας δώσει τις τιμές του $|H(e^{j\omega})|$! Είναι ακριβώς οι ίδιες τιμές με το $|H(z)|$ που είναι σχεδιασμένο ως δισδιάστατο σήμα και στα δύο Σχήματα. Ακολουθήστε τις τιμές του μοναδιαίου κύκλου για μια πλήρη περιστροφή επάνω στο $|H(z)|$ και δείτε ότι ακολουθούν ακριβώς την ίδια μονοτονία με το $|H(e^{j\omega})|$! Επίσης, προσέξτε τον πόλο στη θέση $z = a = 0.5$ και $z = a = 0.8$, ο οποίος απειρίζεται το $|H(z)|$. Τέλος, το $|H(z)|$ μηδενίζεται για $z = 0$, οπότε στο $z = 0$ βλέπετε ένα μικρό “βύθισμα” της γραφικής παράστασης. Τέλος, πρέπει να επισημανθεί ότι το πεδίο σύγκλισης δε φαίνεται στα σχήματα αυτά, αλλά γνωρίζουμε ότι είναι $|z| > |a|$ και για τα δυο Σχήματα.

Συγκρίνετε το Σχήμα (6) με το Σχήμα (7). Καταλαβαίνετε γιατί άλλαξε το μέτρο του μετασχ. Fourier κατ’ αυτόν τον τρόπο; Πώς επηρεάστηκε το μέτρο της φασματικής απόκρισης όταν ο πόλος πλησίασε το μοναδιαίο κύκλο; Μπορείτε να αντιληφθείτε τι θα συμβεί αν ο πόλος βρεθεί ακριβώς επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, δηλ. στη θέση $|z| = 1$;

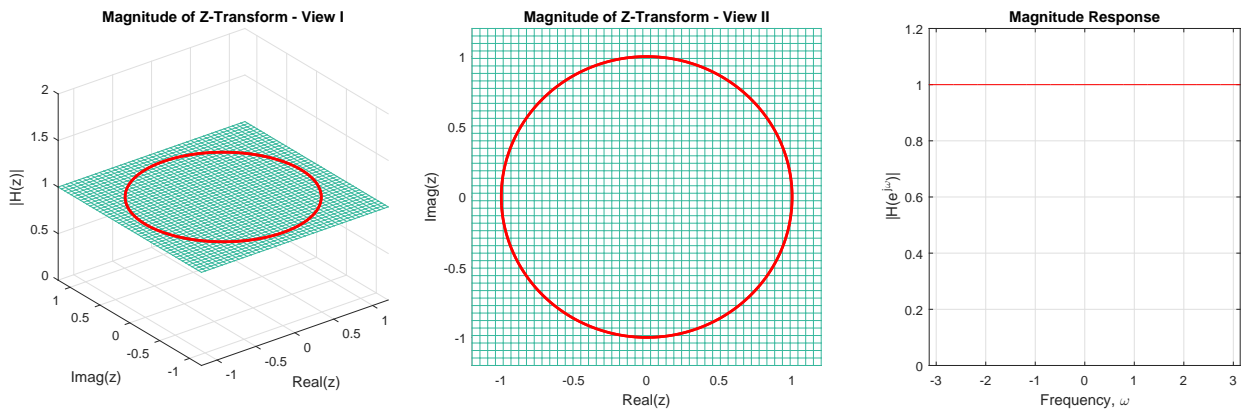
- Ας δούμε τώρα και το μετασχ. Z της συνάρτησης Δέλτα. Πιο πριν δείξαμε ότι

$$h[n] = \delta[n] \longleftrightarrow H(z) = 1, \quad \forall z \quad (42)$$

και γνωρίζουμε ότι

$$h[n] = \delta[n] \longleftrightarrow H(e^{j\omega}) = 1 \quad (43)$$

Στο Σχήμα (8), βλέπουμε ακριβώς αυτό που περιμέναμε. Για κάθε τιμή του z , ο μετασχ. Z είναι



Σχήμα 8: Μέτρο μετασχ. Z, $|H(z)|$, μοναδιαίος κύκλος, και φάσμα πλάτους $|H(e^{j\omega})|$, της συνάρτησης $h[n] = \delta[n]$.

σταθερός και ίσος με 1, το ίδιο και ο μετασχ. Fourier που ορίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

- Ας δούμε τώρα και το μετασχ. Z μιας μετατοπισμένης συνάρτησης Δέλτα. Πιο πριν δείξαμε ότι

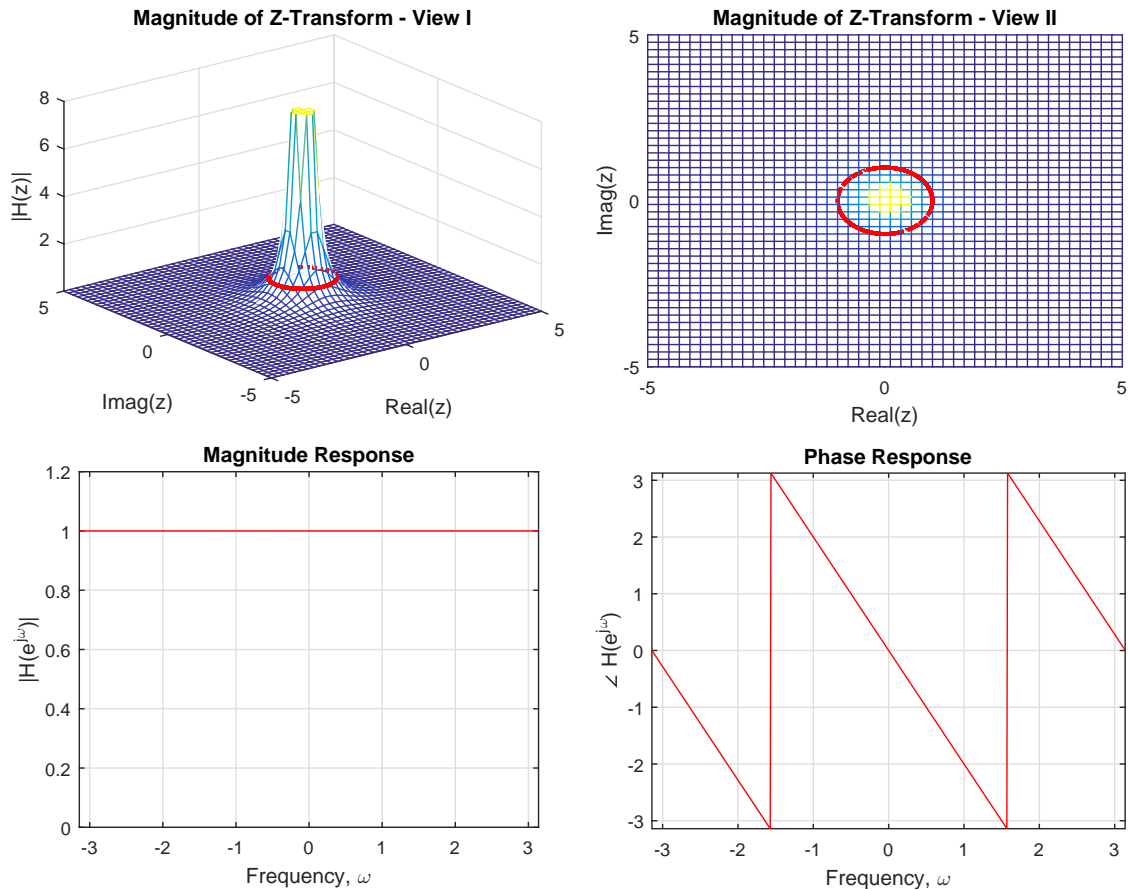
$$h[n] = \delta[n - n_0] \longleftrightarrow H(z) = z^{-n_0}, \quad \forall z \neq 0 \quad (44)$$

και γνωρίζουμε ότι

$$h[n] = \delta[n - n_0] \longleftrightarrow H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \quad (45)$$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο του μετασχ. Fourier είναι μονάδα, αλλά υπάρχει μη μηδενική φάση ίση με $\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_0$. Ας θεωρήσουμε $n_0 = 2$. Το μέτρο του μετασχ. Z θα είναι

$$|H(z)| = |z^{-2}| = \frac{1}{|z^2|} = \frac{1}{|r^2 e^{j2\omega}|} = \frac{1}{r^2} \quad (46)$$



Σχήμα 9: Μέτρο μετασχ. Z , $|H(z)|$, μοναδιαίος κύκλος, και φάσμα πλάτους $|H(e^{j\omega})|$, της συνάρτησης $h[n] = \delta[n - 2]$.

Στο Σχήμα (9), βλέπουμε ακριβώς αυτό που περιμέναμε. Για $z = e^{j\omega}$, δηλ. επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, ο μετασχ. Z είναι σταθερός και ίσος με 1, το ίδιο φυσικά και ο μετασχ. Fourier, αφού κι αυτός ορίζεται επάνω εκεί. Επίσης, το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης είναι όπως ακριβώς το περιμέναμε.

- Τέλος, ας δούμε το φίλτρο κυλιόμενης μέσης τιμής (Moving Average), που τόσες φορές το έχουμε αναφέρει. :-) Ως γνωστόν, το αιτιατό φίλτρο κυλιόμενης μέσης τιμής δίνεται από τον τύπο

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_2 + 1}, & 0 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (47)$$

Υπενθυμίζεται ότι για το παραπάνω φίλτρο κυλιόμενης μέσης τιμής, έχουμε δείξει ότι

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{M_2 + 1} \left| \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} \right| |e^{-j\omega M_2/2}| = \frac{1}{M_2 + 1} \left| \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} \right| \quad (48)$$

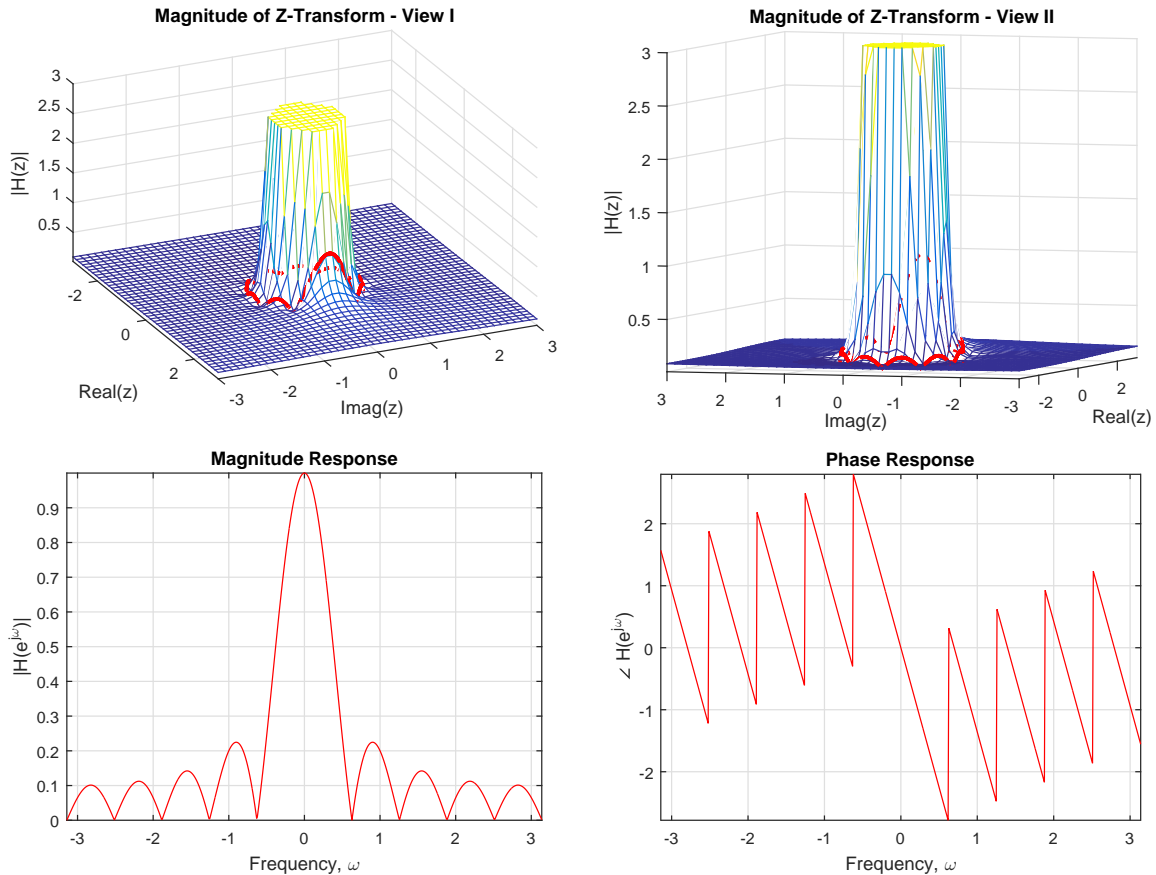
και

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -M_2\omega/2, & 0 \leq \omega < \frac{2\pi}{M_2+1} \\ -M_2\omega/2 + \pi, & \frac{2\pi}{M_2+1} \leq \omega < \frac{4\pi}{M_2+1} \\ -M_2\omega/2, & \frac{4\pi}{M_2+1} \leq \omega < \frac{6\pi}{M_2+1} \\ -M_2\omega/2 + \pi, & \frac{6\pi}{M_2+1} \leq \omega < \frac{8\pi}{M_2+1} \\ -M_2\omega/2, & \frac{8\pi}{M_2+1} \leq \omega < \frac{10\pi}{M_2+1} \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad (49)$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι ο μετασχ. Z του παραπάνω σήματος είναι

$$H(z) = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} z^{-n} = \frac{1}{M_2+1} \frac{1 - (z^{-1})^{M_2+1}}{1 - z^{-1}} \quad (50)$$

Το παραπάνω όμως μπορεί να γραφεί ως



Σχήμα 10: Μέτρο μετασχ. Z, $|H(z)|$, μοναδιαίος κύκλος, και φάσμα πλάτους $|H(e^{j\omega})|$, του φίλτρου κυλιόμενης μέσης τιμής για $M_2 = 9$.

$$H(z) = \frac{1}{M_2+1} \frac{1 - (z^{-1})^{M_2+1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{z^{M_2}} \frac{z^{M_2+1} - 1}{z - 1} \quad (51)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι υπάρχουν $M_2 + 1$ μηδενισμοί του παρονομαστή (δηλ. οι πόλοι), ο ένας βρίσκεται στο $z = 1$ και οι υπόλοιποι M_2 στο $z = 0$. Οι μηδενισμοί του αριθμητή (που θα δούμε αργότερα ότι λέγονται *μηδενικά*) βρίσκονται στις θέσεις $z_k = e^{j2\pi k/(M_2+1)}$, $k = 0, 1, \dots, M_2$, δηλ. είναι $M_2 + 1$ το πλήθος. Ο ένας απ' αυτούς, ο $z_0 = 1$ βρίσκεται στην ίδια θέση με τον πόλο που αναφέραμε πριν. Αυτοί οι δυο μηδενισμοί, του αριθμητή και του παρονομαστή στη θέση $z = 1$ αλληλοακυρώνονται, οπότε στη θέση $z = 1$ η συνάρτηση $H(z)$ συμπεριφέρεται κανονικά, χωρίς να μηδενίζεται ή να απειρίζεται.

Άρα τελικά, το $H(z)$ έχει M_2 πόλους στο $z = 0$ και M_2 μηδενικά στα $z_k = e^{j2\pi k/(M_2+1)}$, $k = 1, \dots, M_2$. Δείτε το Σχήμα (10). Ανατρέξτε στην ανάλυση που κάναμε για το φίλτρο κυλιόμενης μέσης τιμής, όταν συζητούσαμε για τη φασματική απόκριση. Παρατηρήστε τις ομοιότητες.

3 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z

Έχουν αποδειχθεί κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες σχετικά με τον Z. Ο πίνακας 1 εμφανίζει τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες.

Ιδιότητες μετασχηματισμού Z			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Z	Πεδίο Σύγκλισης
	$x[n]$	$X(z)$	R_x
	$y[n]$	$Y(z)$	R_y
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	$R \supset R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n - n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το R_x
Πολλαπλασιασμός με εκθετικό	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n] * y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[k]y[n - k]$	$X(z)Y(z)$	$R \supset R_x \cap R_y$
Παραγωγή στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το R_x
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{z \rightarrow \infty} zX(z) = x[0]$	

Πίνακας 1: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Z

4 Κατηγορίες σημάτων και η σχέση τους με το Μετασχ. Z

Εδώ θα κάνουμε μια μικρή αναφορά σε ένα είδος κατηγοριοποίησης σημάτων με βάση τις τιμές τους στο χρόνο, και θα δούμε τη σχέση τους με το μετασχηματισμό Z.

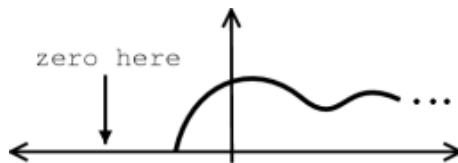
Ένα σήμα λέγεται **δεξιόπλευρο** όταν οι μη-μηδενικές τιμές του ξεκινούν από ένα σημείο n_0 στο χρόνο και εκτείνονται ως το $+\infty$ (με άλλα λόγια, όταν πριν από κάποιο χρονικό σημείο n_0 οι τιμές του σήματος είναι μηδέν). Για παράδειγμα, τα σήματα

$$x_1[n] = a^n u[n], x_2[n] = u[n + 5], x_3[n] = nu[n - 2]$$

είναι δεξιόπλευρα, αλλά ΟΧΙ και τα

$$x_1[n] = a^n u[-n - 1], x_2[n] = u[-5 - n], x_3[n] = nu[2 - n], x_4[n] = n^2 + 1$$

(διότι είτε έχουν μη-μηδενικές τιμές σε κάθε χρονική στιγμή, είτε δεν υπάρχει κάποιο χρονικό σημείο n_0 πίσω από το οποίο οι τιμές του σήματος να είναι μηδέν). Παρακάτω, στο Σχήμα (11), φαίνεται πώς μοιάζει ένα δεξιόπλευρο σήμα στο συνεχή χρόνο, ευθέως ανάλογο είναι και ένα διακριτό σήμα.



Σχήμα 11: Δεξιόπλευρο σήμα

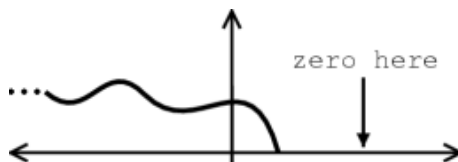
Ένα σήμα λέγεται **αριστερόπλευρο** όταν οι μη-μηδενικές τιμές του ξεκινούν από ένα σημείο n_0 στο χρόνο και εκτείνονται ως το $-\infty$ (με άλλα λόγια, όταν μετά από κάποιο χρονικό σημείο n_0 οι τιμές του σήματος είναι μηδέν). Για παράδειγμα, τα σήματα

$$x_1[n] = -a^n u[-n - 1], x_2[n] = u[-n + 5], x_3[n] = nu[-n - 2]$$

είναι αριστερόπλευρα, αλλά OXI και τα

$$x_1[n] = a^n u[n + 3], x_2[n] = u[n + 5], x_3[n] = nu[3 + n], x_4[n] = n^2 + 1$$

(διότι είτε έχουν μη-μηδενικές τιμές σε κάθε χρονική στιγμή, είτε δεν υπάρχει κάποιο χρονικό σημείο n_0 μετά από το οποίο οι τιμές του σήματος να είναι μηδέν). Παρακάτω, στο Σχήμα (12) φαίνεται πώς μοιάζει ένα αριστερόπλευρο σήμα στο συνεχή χρόνο, ευθέως ανάλογο είναι και ένα διακριτό σήμα. Υπάρχουν και

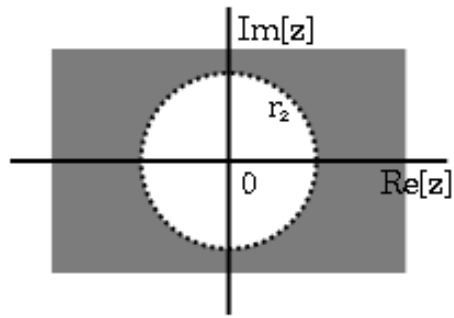


Σχήμα 12: Αριστερόπλευρο σήμα

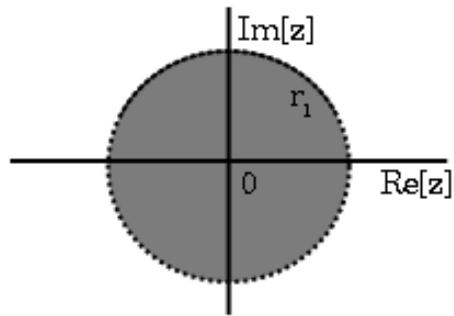
τα **αμφίπλευρα** σήματα, που δεν είναι ούτε αριστερόπλευρα, ούτε δεξιόπλευρα, δηλ. εκτείνονται από το $-\infty$ ως το $+\infty$ στο χρόνο.

Πώς μεταφράζεται αυτή η κατηγοριοποίηση των σημάτων, όσον αφορά το μετασχηματισμό Z , και κυρίως την περιοχή σύγκλισής τους;

- Αποδεικνύεται ότι τα δεξιόπλευρα σήματα έχουν περιοχή σύγκλισης ένα κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου που ξεκινάει από έναν κύκλο και προεκτείνεται προς τα “έξω”, προς το $\pm\infty$. Αυτό μαθηματικά γράφεται ως $|z| > |r_1|$. Το Παράδειγμα 1 στην Ενότητα 1.3 είναι ένα δεξιόπλευρο σήμα. Δείτε το ROC του. Γενικότερα, το ROC ενός τέτοιου σήματος φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 13 (γκρι περιοχή).
- Επίσης, τα αριστερόπλευρα σήματα έχουν περιοχή σύγκλισης ένα κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου που ξεκινάει από έναν κύκλο και προεκτείνεται προς τα “μέσα”, προς το 0. Αυτό γράφεται μαθηματικά ως $|z| < |r_1|$. Το Παράδειγμα 2 στην Ενότητα 1.3 είναι ένα αριστερόπλευρο σήμα. Δείτε το ROC του. Γενικότερα, το ROC ενός τέτοιου σήματος φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα (14) (γκρι περιοχή).

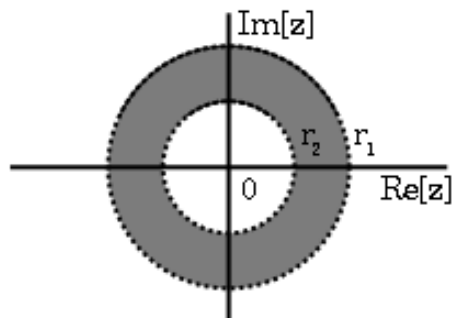


Σχήμα 13: Πεδιο σύγκλισης δεξιόπλευρου σηματος



Σχήμα 14: Πεδιο σύγκλισης αριστερόπλευρου σηματος

- Τα αμφίπλευρα σήματα έχουν περιοχή σύγκλισης ένα κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου που αποτελεί έναν δακτύλιο ανάμεσα σε δυο πόλους. Αυτό γράφεται μαθηματικά ως $|r_1| < |z| < |r_2|$. Το Παράδειγμα 3 στην Ενότητα 1.3 είναι ένα αμφίπλευρο σήμα. Γενικότερα, το ROC ενός τετοιου σηματος φαινεται στο Σχήμα (15) (γκρι περιοχη).



Σχήμα 15: Πεδιο σύγκλισης αμφίπλευρου σηματος

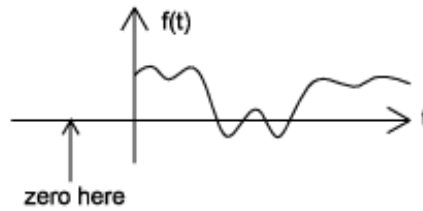
Επίσης, ένα σήμα $x[n]$ λέγεται **αιτιατό**, όταν ισχύει $x[n] = 0, n < 0$, δηλαδή όταν οι τιμές του είναι μηδέν πριν τη χρονική στιγμή $n = 0$. Τα σήματα

$$x_1[n] = a^n u[n], x_2[n] = a^n u[n - 6], x_3[n] = -u[n - 1]$$

είναι αιτιατά αλλά ΟΧΙ τα

$$x_1[n] = a^n u[n + 1], x_2[n] = a^n u[n + 6], x_3[n] = -u[n + 1]$$

γιατί έχουν μη-μηδενικές τιμές πριν τη χρονική στιγμή $n = 0$. Όπως είναι φανερό, ένα αιτιατό σήμα δεν μπορεί να είναι αριστερόπλευρο (αλλά σίγουρα είναι δεξιόπλευρο). Η γραφική παράσταση ενός αιτιατού σήματος συνεχούς χρόνου φαίνεται στο Σχήμα (16) (ευθέως ανάλογο είναι για το διακριτό χρόνο). Το



Σχήμα 16: Αιτιατό σήμα

ROC ενός αιτιατού σήματος είναι όπως το ROC που φαίνεται για το δεξιόπλευρο σήμα, δηλ. ένα κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου που εκτείνεται από έναν κύκλο και προς το ∞ .

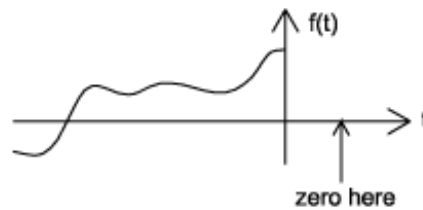
Ένα σήμα $x[n]$ λέγεται **αντι-αιτιατό**, όταν ισχύει $x[n] = 0, n > 0$, δηλαδή όταν οι τιμές του είναι μηδέν μετά τη χρονική στιγμή $n = 0$. Τα σήματα

$$x_1[n] = -a^n u[-n - 1], x_2[n] = a^n u[-n - 6], x_3[n] = -u[-n - 3]$$

είναι αντι-αιτιατά αλλά ΟΧΙ τα

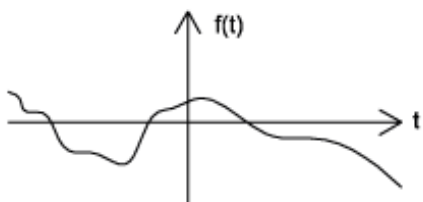
$$x_1[n] = a^n u[-n + 1], x_2[n] = a^n u[-n + 6], x_3[n] = -u[-n + 1]$$

γιατί έχουν μη-μηδενικές τιμές μετά τη χρονική στιγμή $n = 0$. Όπως είναι φανερό, ένα αντί-αιτιατό σήμα δεν μπορεί να είναι δεξιόπλευρο (αλλά είναι σίγουρα αριστερόπλευρο). Η γραφική παράσταση ενός αντί-αιτιατού σήματος συνεχούς χρόνου φαίνεται στο Σχήμα (17) (ευθέως ανάλογο είναι για το διακριτό χρόνο). Το ROC ενός αντι-αιτιατού σήματος είναι όπως το ROC που φαίνεται για το αριστερόπλευρο σήμα, δηλ.



Σχήμα 17: Αντιατιατό σήμα

ένα κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου που εκτείνεται από έναν κύκλο και προς το 0.



Σχήμα 18: Μη αιτιατό σήμα

Τέλος, ένα σήμα λέγεται **μη αιτιατό** όταν έχει μη-μηδενικές τιμές και σε θετικούς και σε αρνητικούς χρόνους. Ένα μη αιτιατό σήμα συνεχούς χρόνου φαίνεται στο Σχήμα (18) (ευθέως ανάλογο είναι για το διακριτό χρόνο).

Όπως καταλαβαίνετε, μας ενδιαφέρουν λίγο παραπάνω τα αιτιατά σήματα και συστήματα γιατί αυτά είναι πραγματοποιήσιμα (δεν υπάρχει στην πράξη αρνητικός χρόνος! :-). Βέβαια, τα περισσότερα μη αιτιατά σήματα και συστήματα μπορούν να γίνουν αιτιατά αν τους κάνουμε μια μετατόπιση στο χρόνο.

5 Πίνακες Μετασχηματισμού Z

Ευτυχώς, υπάρχουν διαθέσιμοι πίνακες που μας δίνουν γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών Z, και αυτούς χρησιμοποιούμε για να δουλεύουμε χωρίς να χρησιμοποιούμε τον ορισμό. Ένας τέτοιος πίνακας δίνεται στον πίνακα 2.

Πίνακας Μετασχηματισμών Z			
Σήμα	Μετ. Z	ROC	Κατηγορία σήματος
$\delta[n]$	1	όλο το z	αιτιατό
$\delta[n - n_0]$	z^{-n_0}	$z \neq 0$	αιτιατό
$\delta[n + n_0]$	z^{n_0}	$z \neq 0$	μη αιτιατό
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$	αιτιατό
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$	μη αιτιατό
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $	αιτιατό
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $	μη αιτιατό
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z > 1$	αιτιατό
$-nu[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z < 1$	μη αιτιατό
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $	αιτιατό
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $	μη αιτιατό
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$	αιτιατό
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$	αιτιατό
$a^n \cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $	αιτιατό
$a^n \sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $	αιτιατό

Πίνακας 2: Πίνακας με γνωστά ζεύγη μετασχ. Z

6 Ιδιότητες Περιοχής Σύγκλισης

Οι ιδιότητες του πεδίου σύγκλισης (ROC) παρατίθενται παρακάτω³:

1. Το ROC είναι ένας δακτυλιός, ένας δίσκος με κέντρο την αρχή των αξόνων, ή μια περιοχή εκτός ενός δίσκου με κέντρο την αρχή των αξόνων.
2. Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχηματισμό Z, αν και μόνο αν το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού Z του σήματος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο.
3. Το ROC δεν πρέπει να περιέχει ΠΟΤΕ πόλους!
4. Αν το $x[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι ολο το z-επίπεδο, εκτός ίσως από το $z = 0$ ή το $z = \infty$.
5. Αν το $x[n]$ είναι δεξιόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης εκτείνεται από το μακρινότερο από το $z = 0$ πόλο (αυτον με το μεγαλύτερο πλάτος) και ως το ∞ , δηλ. είναι της μορφής $|z| > |a|$, με a τον μακρινότερο πόλο.
6. Αν το $x[n]$ είναι αριστερόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης εκτείνεται από το κοντινότερο στο $z = 0$ πόλο (αυτον με το μικρότερο πλάτος) και ως το 0, δηλ. είναι της μορφής $|z| < |b|$, με b τον κοντινότερο πόλο.
7. Αν το $x[n]$ είναι αμφίπλευρο, το πεδίο σύγκλισης αποτελείται από έναν δακτυλιό, που φράσσεται δεξιά και αριστερά του από πόλους, δηλ. είναι της μορφής $|a| < |z| < |b|$, με $|a| < |b|$ πόλους, και κανέναν άλλο πόλο ενδιάμεσα των $|a|, |b|$.

Ας δούμε το Σχήμα (19). Έστω το σήμα $x[n]$ με μετασχηματισμό Z $X(z)$ ο οποίος έχει πόλους $z = a, b, c$ όπως στο Σχήμα (19a). Τα πιθανά πεδία σύγκλισης του μετασχηματισμού είναι αυτά που φαίνονται στα Σχήματα (19b,c,d,e). Στο Σχήμα (19b), το πεδίο σύγκλισης είναι

$$ROC : |z| > c \quad (52)$$

και σύμφωνα με όσα έχουμε πει, αντιστοιχεί σε ένα δεξιόπλευρο σήμα. Οπότε το σήμα στο χρόνο θα περιέχει μέσα όρους της μορφής

$$x[n] = f\{a^n u[n], b^n u[n], c^n u[n]\} \quad (53)$$

Στο Σχήμα (19c), το πεδίο σύγκλισης είναι

$$ROC : |z| < a \quad (54)$$

και αντιστοιχεί σε ένα αριστερόπλευρο σήμα. Οπότε το σήμα στο χρόνο θα περιέχει μέσα όρους της μορφής

$$x[n] = f\{-a^n u[-n-1], -b^n u[-n-1], -c^n u[-n-1]\} \quad (55)$$

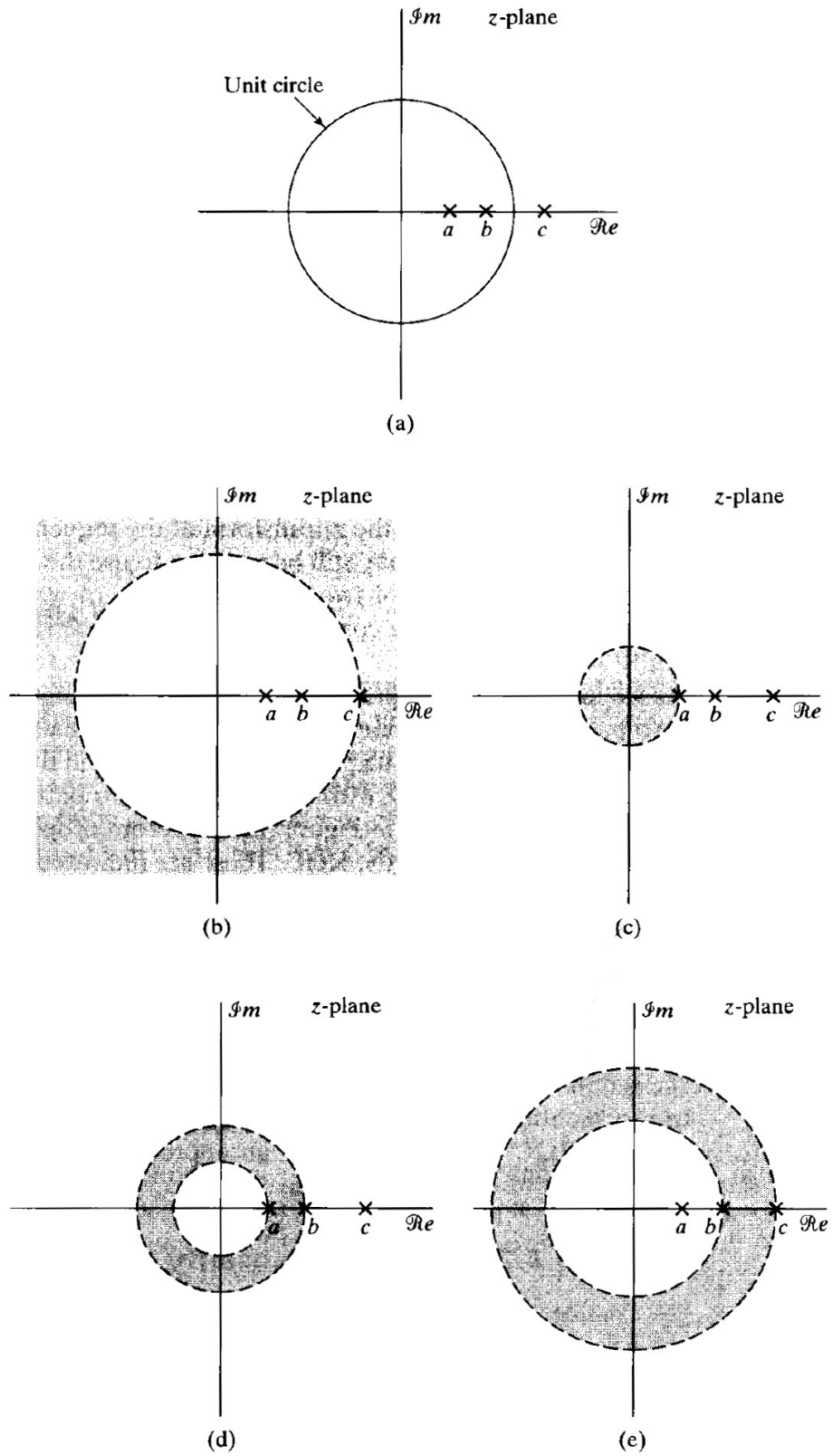
Στο Σχήμα (19d), το πεδίο σύγκλισης είναι

$$ROC : a < |z| < b \quad (56)$$

και αντιστοιχεί σε ένα αμφίπλευρο σήμα. Οπότε το σήμα στο χρόνο θα περιέχει μέσα όρους της μορφής

$$x[n] = f\{a^n u[n], -b^n u[-n-1], -c^n u[-n-1]\} \quad (57)$$

³Είναι αντίστοιχες με αυτές που είχαμε δει όταν μιλούσαμε για Μετασχηματισμό Laplace στο ΗΥ215, για όσους θυμούνται... :-)



Σχήμα 19: Πιθανά πεδία σύγκλισης ενός σήματος με τρεις πόλους.

αφού το πεδίο σύγκλισης $a < |z| < b$ προκύπτει ως η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης

$$ROC = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{|z| > a\} \cap \{|z| < b\} \cap \{|z| < c\} \quad (58)$$

Στο Σχήμα (19e), το πεδίο σύγκλισης είναι

$$ROC : b < |z| < c \quad (59)$$

και αντιστοιχεί ξανά σε ένα αμφίπλευρο σήμα, αφού το πεδίο σύγκλισης $b < |z| < c$ προκύπτει ως η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης

$$ROC = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{|z| > a\} \cap \{|z| > b\} \cap \{|z| < c\} \quad (60)$$

Παρατηρήστε ότι αν έχουμε N πόλους, τότε έχουμε $N + 1$ πιθανά πεδία σύγκλισης.

7 Συστήματα

Ας δούμε τώρα και πάλι τα συστήματα, αυτή τη φορά από τη σκοπιά του μετασχηματισμού Z , όπως κάναμε και για τον DTFT. Ενδιαφερόμαστε φυσικά για Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα συστήματα (ΓΧΑ).

Έχουμε δει ότι πολλές χρήσιμες διαδικασίες γίνονται μέσα από τα Συστήματα. Τα Συστήματα, όπως έχουμε πει, περιγράφονται με δυο τρόπους:

1. με μια εξίσωση εισόδου-εξόδου, π.χ.

$$y[n] = 2x[n - 1] - x[n - 2] + x[n - 3], \quad (61)$$

2. με την κρουστική απόκρισή τους, π.χ.

$$h[n] = 2\delta[n - 3] - 3\delta[n - 4] + \delta[n - 5]. \quad (62)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι η έξοδος ενός συστήματος, $y[n]$, συνδέεται με την είσοδο αυτού, $x[n]$, και με την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος, με την πράξη της συνέλιξης

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (63)$$

Εδώ, θα δούμε τα συστήματα από τη σκοπιά του Z και θα δούμε πόσο πιο απλά γίνονται τα πράγματα μερικές φορές στη συχνότητα από ότι στο χρόνο. Τα πράγματα είναι ολόιδια με τη μεθοδολογία που κάναμε για τον DTFT, γι' αυτό και θα ακολουθήσουμε το ίδιο μοτίβο, ενώ στο τέλος θα δούμε και κάτι πιο σύνθετο.

Γνωρίζουμε πλέον πολύ καλά ότι η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται γινόμενο στη συχνότητα, άρα

$$Y(z) = X(z)H(z) \quad (64)$$

Ως τώρα βλέπετε ότι τα πράγματα μοιάζουν πάρα πολύ με ό,τι κάναμε στο DTFT - και έτσι είναι, μια και ο DTFT είναι, όπως είπαμε, “εξειδίκευση” του ΖΤ πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Υπενθυμίζεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος ονομάζεται *απόκριση σε συχνότητα*. Στην περίπτωση του μετασχηματισμού Z , ο μετασχηματισμός Z της κρουστικής απόκρισης λέγεται *Συνάρτηση Μεταφοράς*, γιατί προφανώς μας μεταφέρει από το χρόνο στο χώρο του Z .

Από εδώ και κάτω, θα πούμε κάποια πρόσθετα πράγματα σχετικά με το μετασχηματισμό Z . Δυο είναι αυτά: Πρώτον, θα διαχωρίσουμε τα συστήματά μας σε συστήματα Πεπερασμένης και Άπειρης κρουστικής απόκρισης, όπως κάναμε όταν μιλούσαμε για εξισώσεις διαφορών, και δεύτερον, την αναπαράσταση πόλων-μηδενικών πάνω στο μιγαδικό επίπεδο.

7.1 Συστήματα Άπειρης και Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης

Μια σημαντική κατηγοριοποίηση των ΓΧΑ συστημάτων έχει να κάνει με τη διάρκεια της κρουστικής απόκρισής τους $h[n]$. Ας τα θυμηθούμε.

7.1.1 Συστήματα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης - Finite Impulse Response (FIR)

Συστήματα που περιγράφονται από μια κρουστική απόκριση η οποία έχει πεπερασμένη διάρκεια (δηλ. μηδενίζεται από κάποια χρονική στιγμή και πέρα) λέγονται συστήματα *Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης* η πιο σύντομα FIR συστήματα. Για παράδειγμα, το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση

$$h[n] = 3\delta[n - 1] + 5\delta[n + 2] - \frac{1}{2}\delta[n + 5] \quad (65)$$

είναι ένα FIR σύστημα. Επίσης, το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση

$$y[n] = 2x[n] + 3x[n - 2] \quad (66)$$

είναι ένα FIR σύστημα, γιατί αν θέσουμε $x[n] = \delta[n]$, παίρνουμε $h[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n - 2]$, που είναι προφανώς πεπερασμένη κρουστική απόκριση. Μην ξεχνάτε, ο ορισμός της κρουστικής απόκρισης είναι η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται μια συνάρτηση Δέλτα, $\delta[n]$!! ;-)

Μεταφερόμενοι στο χώρο της συχνότητας, ένα FIR σύστημα εκφράζεται ως μη-ρητή συνάρτηση του z , όπως για παράδειγμα το σύστημα

$$H(z) = 3z^{-1} + 5z^2 - \frac{1}{2}z^5 \quad (67)$$

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα για το πως δουλεύουμε στο χώρο του μετασχ. Z .

Παράδειγμα 1:

Έστω ένα σύστημα με τη μορφή εξίσωσης εισόδου-εξόδου:

$$y[n] = x[n] + 2x[n - 1] - 3x[n - 2] \quad (68)$$

και μας ζητείται να βρούμε το $h[n]$, δηλ. την κρουστική απόκριση του συστήματος.

Ας δούμε λίγο τη Σχέση (64). Αν λύσουμε ως προς $H(z)$, θα πάρουμε:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (69)$$

Ας κάνουμε ZT στο παράδειγμά μας:

$$y[n] = x[n] + 2x[n - 1] - 3x[n - 2] \longleftrightarrow \quad (70)$$

$$Y(z) = X(z) + 2X(z)z^{-1} - 3X(z)z^{-2} \quad (71)$$

$$= X(z)(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}) \quad (72)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} = H(z) \quad (73)$$

Άρα τελικά $H(z) = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}$. Άρα τελικά η κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος είναι η:

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n - 1] - 3\delta[n - 2] \quad (74)$$

Το παραπάνω παράδειγμα ήταν σχετικά απλό, και μπορούσε να λυθεί στο χώρο του χρόνου πιο εύκολα και γρήγορα. Πώς; Απλά θέτοντας $x[n] = \delta[n]$, και πέρνοντας $y[n] = h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2]$. Απλά δείξαμε τον τρόπο που χρησιμοποιείται το πεδίο της συχνότητας και ο ΖΤ για να βρούμε την κρουστική απόκριση. Σε άλλα, πιο σύνθετα παραδείγματα συστημάτων, επιβάλλεται η χρήση του ΖΤ αν θέλουμε να γλιτώσουμε κόπο και χρόνο. Τέτοια παραδείγματα θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2:

Έστω το σύστημα

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n+1] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{8}x[n-3] \quad (75)$$

Να βρεθεί:

(α') η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

(β') η κρουστική του απόκριση

(γ') η έξοδος του συστήματος όταν του δώσουμε είσοδο το σήμα $x[n] = \delta[n-2] - \delta[n-4]$.

Λύση:

(α') Θα είναι:

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n+1] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{8}x[n-3] \longleftrightarrow Y(z) = \frac{1}{2}X(z)z^1 - \frac{2}{3}X(z)z^{-1} + \frac{1}{8}X(z)z^{-3} \quad (76)$$

και άρα

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2}z^1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-3} \quad (77)$$

(β') Η κρουστική απόκριση είναι ο αντίστροφος ΖΤ της Συνάρτησης Μεταφοράς που μόλις βρήκαμε. Άρα θα είναι:

$$H(z) = \frac{1}{2}z^1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-3} \longleftrightarrow h[n] = \frac{1}{2}\delta[n+1] - \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{8}\delta[n-3] \quad (78)$$

Φυσικά θα μπορούσαμε να βρούμε την κρουστική απόκριση θέτοντας απλά $h[n] = \delta[n]$ στην εξίσωση διαφορών. Θα πέραμε το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα, και μάλιστα πιο εύκολα.

(γ') Η εύκολη λύση δίνεται στο πεδίο του χρόνου, αφού η είσοδός μας είναι απλά συναρτήσεις Δέλτα. Θα είναι

$$y[n] = x[n] * h[n] = \left(\frac{1}{2}\delta[n+1] - \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{8}\delta[n-3] \right) * (\delta[n-2] - \delta[n-4]) \quad (79)$$

$$= \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{7}{6}\delta[n-3] + \frac{19}{24}\delta[n-5] - \frac{1}{8}\delta[n-7] \quad (80)$$

Στο χώρο του Z τώρα, αφού έχουμε το $h[n]$ από το β) ερώτημα, και μας δίνουν το $x[n]$, μπορούμε να βρούμε την έξοδο $y[n]$. Έχουμε:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \left(\frac{1}{2}z^1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-3} \right) (z^{-2} - z^{-4}) \quad (81)$$

$$= \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-3} + \frac{2}{3}z^{-5} + \frac{1}{8}z^{-5} - \frac{1}{8}z^{-7} \quad (82)$$

$$= \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{7}{6}z^{-3} + \frac{19}{24}z^{-5} - \frac{1}{8}z^{-7} \quad (83)$$

Θα είναι λοιπόν:

$$Y(z) \longleftrightarrow y[n] = \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{7}{6}\delta[n-3] + \frac{19}{24}\delta[n-5] - \frac{1}{8}\delta[n-7] \quad (84)$$

που είναι και το ζητούμενο.

Τέλος, ένα ακόμα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3: Έστω το απλό αιτιατό σύστημα

$$y[n] - y[n-1] = x[n] - x[n-2]. \quad (85)$$

του οποίου ζητούμε:

- (α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$
- (β') την χροστική απόκριση $h[n]$
- (γ') την έξοδο του συστήματος, $y[n]$, για είσοδο $x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-3]$.

Λύση:

- (α) Αναζητούμε λοιπόν αρχικά τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του απλού συστήματος που περιγράψαμε παραπάνω. Κάνουμε ZT στην εξίσωση:

$$Y(z) - Y(z)z^{-1} = X(z) - X(z)z^{-2} \longleftrightarrow \quad (86)$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = X(z)(1 - z^{-2}) \longleftrightarrow \quad (87)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (88)$$

Να λοιπόν εδώ που έχουμε μια ρητή συνάρτηση (κλάσμα πολυωνύμων του z^{-1}) μεταφοράς. Σε πρώτη φάση, ίσως υποψιαστούμε ότι το σύστημά μας δεν είναι FIR, γιατί εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση. Για να δούμε...

- (β') Κατ' αρχάς, εδώ δεν μπορούμε να βρούμε την χροστική απόκριση θέτοντας $x[n] = \delta[n]$, γιατί τότε παίρνουμε

$$h[n] - h[n-1] = \delta[n] - \delta[n-2] \quad (89)$$

και δεν μπορούμε να λύσουμε ως προς $h[n]$ με κλειστό τύπο⁴. Όμως, βλέπουμε ότι ο αριθμητής είναι

⁴Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα ακολουθιακά, θέτοντας τιμές του n στον τύπο, και παίρνοντας τις τιμές του $h[n]$, $\forall n$, αφού ξέρουμε ότι το σύστημα είναι αιτιατό, άρα $h[n] = 0$, $n < 0$... Δηλαδή:

$$h[0] = h[-1] + \delta[0] - \delta[-2] = 0 + 1 - 0 = 1 \quad (90)$$

$$h[1] = h[0] + \delta[1] - \delta[-1] = 1 + 0 - 0 = 1 \quad (91)$$

$$h[2] = h[1] + \delta[2] - \delta[0] = 1 + 0 - 1 = 0 \quad (92)$$

$$h[3] = h[2] + \delta[3] - \delta[1] = 0 + 0 - 0 = 0 \quad (93)$$

$$\vdots \quad (94)$$

$$h[k] = h[k-1] + \delta[k] - \delta[k-1] = 0 + 0 - 0 = 0 \quad (95)$$

που σημαίνει ότι $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$. Επίσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ότι το σύστημα είναι ΓΧΑ, άρα αν η χροστική απόκριση του συστήματος

$$h[n] - h[n-1] = \delta[n] \quad (96)$$

είναι $h_1[n] = (1)^n u[n]$, τότε η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $-\delta[n-2]$ είναι $h_2[n] = -h_1[n-2] = -(1)^{n-2} u[n-2]$, και άρα η συνολική απόκριση είναι

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] = u[n] - u[n-2] = \delta[n] + \delta[n-1] \quad (97)$$

διαφορά τετραγώνων και άρα

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} \longleftrightarrow h[n] = \delta[n] + \delta[n - 1] \quad (98)$$

πολύ εύκολα και πολύ γρήγορα. :-) Βλέπουμε λοιπόν ότι όντως το σύστημά μας είναι FIR, παρ' ότι αρχικά δεν εκφραζόταν ως μη-ρητή συνάρτηση. Με τη σχετική απλοποίηση, ο παρονομαστής απαλείφθηκε και καταλήξαμε σε ένα FIR σύστημα.

Αν όμως ο αριθμητής δεν ήταν διαφορά τετραγώνων ή δεν το βλέπαμε ότι ήταν :-), τι θα μπορούσαμε να κάνουμε; Μια λύση θα ήταν να κάνουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, αλλά επειδή ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι μικρότερος από του αριθμητή, θα χρειαστεί να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων. Ας το δούμε.

$$\begin{array}{r|l} 1 + 0z^{-1} - z^{-2} & 1 - z^{-1} \\ -(0 + z^{-1} - z^{-2}) & \text{-----} \\ \text{-----} & z^{-1} + 1 \\ 1 - z^{-1} & \\ -(1 - z^{-1}) & \\ \text{-----} & \\ 0 & \end{array} \quad (99)$$

Άρα τελικά το $H(z)$, και κατά συνέπεια το $h[n]$, γράφεται ως

$$H(z) = 1 + z^{-1} \longleftrightarrow h[n] = \delta[n] + \delta[n - 1] \quad (100)$$

Ας υποθέσουμε όμως ότι δε θέλουμε να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων, αν και σε πολλές περιπτώσεις είναι απαραίτητη. Τι άλλο θα μπορούσαμε να κάνουμε στο συγκεκριμένο παράδειγμα; Δείτε ότι αν “πειράξουμε” λίγο το $H(z)$, μπορούμε να βγάλουμε εύκολα άκρη.

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}} z^{-2} \quad (101)$$

Τώρα εμφανίσαμε δυο όρους, “σπάζοντας” το αρχικό κλάσμα. Αν κοιτάξουμε τώρα τον πρώτο όρο, και συμβουλευτούμε τον Πίνακα (2) με τα ζεύγη μετασχηματισμών Z, θα δούμε ότι είναι το ζεύγος:

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (102)$$

με ROC $|z| > 1$, γιατί από εκφώνηση το σύστημα είναι αιτιατό.

Άρα ο αντίστοιχος ZT του πρώτου όρου είναι η βηματική συνάρτηση $u[n]$. Από ιδιότητες, εύκολα βρίσκουμε ότι ο δεύτερος όρος είναι η καθυστερημένη βηματική κατά $n_0 = 2$, δηλ. η $u[n - 2]$! Άρα τελικά η χροστική απόκριση θα είναι η:

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}} z^{-2} \longleftrightarrow h[n] = u[n] - u[n - 2] \quad (103)$$

Προσέξτε ότι η $h[n] = u[n] - u[n - 2]$ είναι ουσιαστικά η $h[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$!! Σχεδιάστε τη διαφορά των δυο βηματικών για να το δείτε! :-)

(γ') Αφού η είσοδός μας είναι ένα άθροισμα από συναρτήσεις Δέλτα, η έξοδος βρίσκεται πολύ εύκολα κατ' ευθείαν στο πεδίο του χρόνου, ως

$$y[n] = x[n] * h[n] = (u[n] - u[n-2]) * (\delta[n] - 2\delta[n-3]) \quad (104)$$

$$= u[n] * \delta[n] - 2u[n] * \delta[n-3] - u[n-2] * \delta[n] + 2u[n-2] * \delta[n-3] \quad (105)$$

$$= u[n] - 2u[n-3] - u[n-2] + 2u[n-5] \quad (106)$$

$$= u[n] - u[n-2] - 2u[n-3] + 2u[n-5] \quad (107)$$

που σχεδιάζοντας τις βηματικές στο χρόνο, βλέπουμε ότι γράφεται ως

$$y[n] = \delta[n] + \delta[n-1] - 2\delta[n-3] - 2\delta[n-4] \quad (108)$$

Πολύ εύκολο αποτέλεσμα! Στο ίδιο θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε τη μορφή του $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$, δηλ.

$$y[n] = x[n] * h[n] = (\delta[n] + \delta[n-1]) * (\delta[n] - 2\delta[n-3]) \quad (109)$$

$$= \delta[n] - 2\delta[n-3] + \delta[n-1] - 2\delta[n-4] \quad (110)$$

$$= \delta[n] + \delta[n-1] - 2\delta[n-3] - 2\delta[n-4] \quad (111)$$

Ας δούμε τώρα το ίδιο στο χώρο της συχνότητας.

Εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-3] \longleftrightarrow X(z) = 1 - 2z^{-3} \quad (112)$$

και έτσι

$$Y(z) = H(z)X(z) = \left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}}z^{-2} \right) (1 - 2z^{-3}) \quad (113)$$

$$= \frac{1 - 2z^{-3}}{1 - z^{-1}} - \frac{1 - 2z^{-3}}{1 - z^{-1}}z^{-2} \quad (114)$$

Για να βρούμε τώρα το $y[n]$, θα δουλέψουμε όπως στο β) ερώτημα. Θα σπάσουμε τα κλάσματα σε πιο απλά, θα συμβουλευτούμε πίνακες και ιδιότητες και ελπίζουμε :-) να βρούμε τα κατάλληλα ζεύγη που θα μας πάνε εύκολα και γρήγορα στο χώρο του χρόνου.

$$Y(z) = \frac{1 - 2z^{-3}}{1 - z^{-1}} - \frac{1 - 2z^{-3}}{1 - z^{-1}}z^{-2} \quad (115)$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}} - 2\frac{1}{1 - z^{-1}}z^{-3} - \frac{1}{1 - z^{-1}}z^{-2} + 2\frac{1}{1 - z^{-1}}z^{-5} \quad (116)$$

Με χρήση πινάκων και ιδιοτήτων, η έξοδος του συστήματος, $y[n]$, θα είναι η:

$$Y(z) \longleftrightarrow y[n] = u[n] - 2u[n-3] - u[n-2] + 2u[n-5] = u[n] - u[n-2] - 2u[n-3] + 2u[n-5] \quad (117)$$

7.1.2 Συστήματα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης - Infinite Impulse Response (IIR)

Ως τώρα έχουμε δει συναρτήσεις μεταφοράς $H(z)$ οι οποίες είναι μη κλασματικές. Είπαμε ότι αυτές αντιπροσωπεύουν FIR - Finite Impulse Response συστήματα. Υπάρχουν όμως και κρουστικές αποκρίσεις που είναι άπειρες σε διάρκεια, όπως η $h[n] = u[n]$. Τέτοια συστήματα λέγονται *Συστήματα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης - Infinite Impulse Response*, και εκφράζονται στο χώρο του Z μέσω ρητών συναρτήσεων μεταφοράς (δηλ. πηλίκου πολυωνύμων).

Ας δούμε τι συμβαίνει όταν οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι ρητές, μέσω παραδειγμάτων, και πως τα αντιμετωπίζουμε.

1. Έστω το αιτιατό σύστημα

$$y[n] + 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]. \quad (118)$$

του οποίου ζητούμε:

(α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$

(β') την κρουστική απόκριση $h[n]$

Λύση:

(α') Κάνουμε ΖΤ στη σχέση εισόδου-εξόδου που μας δίνει:

$$Y(z) + 2Y(z)z^{-1} - 3Y(z)z^{-2} = X(z) - 2X(z)z^{-1} \quad (119)$$

$$Y(z)(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}) = X(z)(1 - 2z^{-1}) \quad (120)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}} \quad (121)$$

(β') Θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή σας τεχνική της *Ανάπτυξης σε Μερικά Κλάσματα*. Θυμίζεται ότι η τεχνική αυτή εφαρμόζεται μόνον όταν έχουμε πολυώνυμο σε αριθμητή και παρονομαστή, και ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος απ' το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή. Στην περίπτωσή μας, είναι, οπότε μπορούμε να την εφαρμόσουμε. Πριν από αυτήν όμως, ας παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή.

Θα είναι:

$$1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} \Rightarrow (\text{επί } z^2)z^2 + 2z - 3 = (z-1)(z+3) \quad (122)$$

Άρα οι ρίζες του πολυωνύμου είναι οι $z_1 = 1, z_2 = -3^5$. Άρα ο παρονομαστής μας θα γράφεται ως:

$$1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} = (1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1}) \quad (123)$$

Τώρα λοιπόν θα έχουμε, αντικαθιστώντας:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \quad (124)$$

Ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι $M = 1$, ενώ του παρονομαστή $N = 2$, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα. Θα είναι

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1})} = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 + 3z^{-1}} \quad (125)$$

με

$$A = H(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=1} = -\frac{1}{4} \quad (126)$$

$$B = H(z)(1 + 3z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{5}{4} \quad (127)$$

⁵Παρένθεση:

Ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$ έχει ρίζες που δίνονται από τη σχέση $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ και μπορεί να γραφεί ως: $\alpha(z - z_1)(z - z_2)$.

και άρα

$$H(z) = -\frac{1}{4} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{5}{4} \frac{1}{1+3z^{-1}} \quad (128)$$

Εύκολα λοιπόν καταλήγουμε, σύμφωνα και με τον Πίνακα (2), ότι

$$H(z) \longleftrightarrow h[n] = -\frac{1}{4}u[n] + \frac{5}{4}3^n u[n] \quad (129)$$

αφού το σύστημά μας είναι αιτιατό από εκφώνηση.

2. Έστω το αιτιατό σύστημα

$$y[n] - 7y[n-1] + 12y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]. \quad (130)$$

του οποίου ζητούμε:

- (α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$
- (β') την κρουστική απόκριση $h[n]$

Λύση:

(α') Κάνουμε ZT στη σχέση εισόδου-εξόδου που μας δίνει:

$$Y(z) - 7Y(z)z^{-1} + 12Y(z)z^{-2} = X(z) - 2X(z)z^{-1} \quad (131)$$

$$Y(z)(1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}) = X(z)(1 - 2z^{-1}) \quad (132)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}} \quad (133)$$

(β') Εδώ πρέπει να παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή, και να χρησιμοποιήσουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα. Ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος απ' το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή, οπότε μπορούμε να την εφαρμόσουμε.

Παραγοντοποίηση παρονομαστή:

Θα είναι:

$$1 - 7z^{-1} + 12z^{-2} \Rightarrow (\text{επί } z^2) z^2 - 7z + 12 = (z-3)(z-4) \quad (134)$$

Άρα οι ρίζες του πολυωνύμου είναι οι $z_1 = 3, z_2 = 4$. Άρα ο παρονομαστής μας θα γράφεται ως:

$$1 - 7z^{-1} + 12z^{-2} = (1 - 3z^{-1})(1 - 4z^{-1}) \quad (135)$$

Τώρα λοιπόν θα έχουμε, αντικαθιστώντας:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - 3z^{-1})(1 - 4z^{-1})} \quad (136)$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = \frac{A}{1 - 3z^{-1}} + \frac{B}{1 - 4z^{-1}} \quad (137)$$

με

$$A = H(z)(1 - 3z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{3}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 4z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{3}} = -1 \quad (138)$$

$$B = H(z)(1 - 4z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{4}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 3z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{4}} = 2 \quad (139)$$

$$(140)$$

Οπότε το $H(z)$ γράφεται ως

$$H(z) = -\frac{1}{1-3z^{-1}} + 2\frac{1}{1-4z^{-1}} \quad (141)$$

και συμβουλευόμενοι τον Πίνακα (2) και δεδομένου ότι το σύστημα είναι αιτιατό, θα είναι

$$H(z) \longleftrightarrow h[n] = -3^n u[n] + 24^n u[n] \quad (142)$$

που είναι και το ζητούμενο.

3. Έστω το σύστημα που περιγράφεται από

$$H(z) = \frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{1-z^{-1}} \quad (143)$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$ για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης.

Λύση:

Παρατηρούμε αρχικά ότι το σύστημα είναι IIR. Όμως το πολυώνυμο του αριθμητή είναι μεγαλύτερης τάξης από του παρονομαστή, άρα δεν μπορεί να γίνει απ' ευθείας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα. Πρέπει αναγκαστικά να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων. Είναι

$$\begin{array}{r|l} 1-5z^{-1}+6z^{-2} & 1-z^{-1} \\ -(0-6z^{-1}+6z^{-2}) & \text{-----} \\ \text{-----} & -6z^{-1}-1 \\ & 1+z^{-1} \\ & -(-1+z^{-1}) \\ \text{-----} & \\ & 2 \end{array} \quad (144)$$

Άρα το σύστημα τελικά μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = -6z^{-1} - 1 + \frac{2}{1-z^{-1}} \quad (145)$$

Από τους πίνακές μας, έχουμε κατ' ευθείαν ότι

$$h[n] = -6\delta[n-1] - \delta[n] + 2u[n] \quad (146)$$

αν το σύστημα είναι αιτιατό, με $|z| > 1$, ενώ

$$h[n] = -6\delta[n-1] - \delta[n] - 2u[-n-1] \quad (147)$$

αν το σύστημα είναι αντι-αιτιατό, με $|z| < 1$.

4. Έστω το αιτιατό σύστημα, του οποίου η κρουστική απόκριση δίνεται παρακάτω:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 3^{n-2} u[n-4]. \quad (148)$$

του οποίου ζητούμε:

(α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$

(β') την εξίσωση εισόδου-εξόδου που περιγράφει το σύστημα

Λύση:

(α') Η κρουστική απόκριση μπορεί να γραφεί ως:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 3^{n-2} u[n-4] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - (3^2)(3^{-2})3^{n-2} u[n-4] \quad (149)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - (3^2)3^{n-4} u[n-4] \quad (150)$$

Κάνοντας ΖΤ στην κρουστική απόκριση, παίρνουμε:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - 9 \frac{1}{1 - 3z^{-1}} z^{-4} \quad (151)$$

(β') Προφανώς

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - 9 \frac{1}{1 - 3z^{-1}} z^{-4} = \frac{1 - 3z^{-1} - 9z^{-4} + \frac{9}{2}z^{-5}}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} \quad (152)$$

και άρα θα έχουμε:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 3z^{-1} - 9z^{-4} + \frac{9}{2}z^{-5}}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} \quad (153)$$

$$X(z) \left(1 - 3z^{-1} - 9z^{-4} + \frac{9}{2}z^{-5}\right) = Y(z) \left(1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}\right) \quad (154)$$

και τελικά:

$$X(z) - 3X(z)z^{-1} - 9X(z)z^{-4} + \frac{9}{2}X(z)z^{-5} = Y(z) - \frac{7}{2}Y(z)z^{-1} + \frac{3}{2}Y(z)z^{-2} \quad (155)$$

$$x[n] - 3x[n-1] - 9x[n-4] + \frac{9}{2}x[n-5] = y[n] - \frac{7}{2}y[n-1] + \frac{3}{2}y[n-2] \quad (156)$$

5. Έστω το αιτιατό σύστημα $H(z)$ που δίνεται ως

$$H(z) = \frac{z-1}{(z+3)(z-2)^2} \quad (157)$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

Λύση:

Αφού το σύστημα είναι αιτιατό, και οι πόλοι είναι -3 και 2 (διπλός πόλος!), θα έχει πεδίο σύγκλισης το $|z| > 3$. Οπότε θα έχουμε

$$H(z) = \frac{z-1}{(z+3)(z-2)^2} = \frac{A}{z+3} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{(z-2)^2} \quad (158)$$

με

$$A = H(z)(z+3) \Big|_{z=-3} = \frac{z-1}{(z-2)^2} \Big|_{z=-3} = \frac{-4}{(-5)^2} = -\frac{4}{25} \quad (159)$$

$$C = H(z)(z-2)^2 \Big|_{z=2} = \frac{z-1}{z+3} \Big|_{z=2} = \frac{1}{5} \quad (160)$$

$$\text{και} \quad (161)$$

$$B = \frac{d}{dz} \left(H(z)(z-2)^2 \right) \Big|_{z=2} = \frac{d}{dz} \frac{z-1}{z+3} \Big|_{z=2} = \frac{z+3 - (z-1)}{(z+3)^2} \Big|_{z=2} = \frac{4}{25} \quad (162)$$

Έτσι, το $H(z)$ γράφεται ως

$$H(z) = -\frac{4}{25} \frac{1}{z+3} + \frac{4}{25} \frac{1}{z-2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(z-2)^2} \quad (163)$$

$$= -\frac{4}{25} \frac{z}{z+3} z^{-1} + \frac{4}{25} \frac{z}{z-2} z^{-1} + \frac{1}{5} \frac{1}{(z-2)^2} z^{-1} \longleftrightarrow \quad (164)$$

$$h[n] = -\frac{4}{25} (-3)^{n-1} u[n-1] + \frac{4}{25} 2^{n-1} u[n-1] + \frac{1}{10} (n-1) 2^{n-1} u[n-1] \quad (165)$$

αφού γνωρίζουμε ότι

$$na^n u[n] \longleftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2} \quad (166)$$

και

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad (167)$$

Προσέξτε ότι εδώ είχαμε πολλαπλή ρίζα τάξης $n = 2$ ενός όρου στον παρονομαστή. Σε τέτοια περίπτωση, ο υπολογισμός των A, B, C γίνεται όπως παραπάνω, όπου παραγωγίζουμε τη σχέση για τον όρο που ανταποκρίνεται στην τάξη $n - 1 = 1$ της πολλαπλής ρίζας.

Παρατηρήσεις:

1. Όπως είδατε, ο υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ είναι απλή υπόθεση. Το ίδιο και ο υπολογισμός της εξίσωσης εισόδου-εξόδου (όπου ζητήθηκε παραπάνω). Όταν πάμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση $h[n]$, η διαδικασία είναι η ίδια πάντα:

- Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή της $H(z)$.
- Εφαρμόζουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα σε ένα κλάσμα της $H(z)$, του οποίου ο αριθμητής είναι μικρότερου βαθμού από του παρονομαστή.

Μπορούμε λοιπόν να πούμε εν γένει ότι

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος $h[n] \longleftrightarrow H(z)$ είναι της μορφής

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k (a_k)^n u[n] - \sum_{l=1}^M B_l (b_l)^n u[-n-1] \longleftrightarrow X(z) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{1-a_k z^{-1}} + \sum_{l=1}^M B_l \frac{1}{1-b_l z^{-1}},$$

με $|z| > |a_k|$ και $|z| < |b_l|$, και $\max_k \{|a_k|\} < |z| < \min_l \{|b_l|\}$, τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως $Y(z) = H(z)X(z)$, και κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί τελικά η έξοδος $y[n]$.

και

Αν ένα σύστημα περιγράφεται με εξισώσεις διαφορών ως

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \longleftrightarrow H(z) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}},$$

τότε χρησιμοποιούμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα για να αναλύσουμε τη Συνάρτηση Μεταφοράς $H(z)$ σε απλά κλάσματα και να βρούμε με χρήση Πινάκων την κρουστική απόκριση $h[n]$.

7.2 Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών

Όταν μιλάμε για συστήματα στο χώρο του μετασχηματισμού Z , μας ενδιαφέρει να μπορούμε να σχεδιάζουμε το περίφημο *διάγραμμα πόλων-μηδενικών*. Τι είναι όμως οι πόλοι (αν και πήρατε μια ιδέα νωρίτερα) και τι τα μηδενικά; Ας το δούμε (ή μάλλον, θυμηθούμε, γιατί τα είχαμε δει και στο μετασχ. Laplace στο ΗΥ215 ... :-))...

Ο μετασχηματισμός Z ενός σήματος μπορεί να είναι εν γένει μια ρητή συνάρτηση, όπως π.χ.

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{ή} \quad Y(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 4z^{-2}}$$

Μηδενικά ονομάζονται οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή και Πόλοι ονομάζονται οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή. Γενικότερα, μηδενικά λέγονται τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που μηδενίζουν το $H(z)$, ενώ πόλοι λέγονται τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που απειρίζουν το $H(z)$.

Μια ρητή συνάρτηση στο χώρο του ΖΤ μπορεί να γραφεί γενικότερα ως:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_Mz^{-M}}{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Nz^{-N}} \quad (168)$$

όπου M, N ο βαθμός των πολυωνύμων. Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με z^M και z^N αντίστοιχα, θα έχουμε:

$$H(z) = z^{N-M} \frac{a_0z^M + a_1z^{M-1} + a_2z^{M-2} + \dots + a_M}{b_0z^N + b_1z^{N-1} + b_2z^{N-2} + \dots + b_N} \quad (169)$$

Παραγοντοποιώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή, θα έχουμε:

$$H(z) = \frac{a_0 \prod_{k=1}^M (1 - \xi_k z^{-1})}{b_0 \prod_{k=1}^N (1 - \lambda_k z^{-1})}, \quad (170)$$

και βγάζοντας ξανά κοινό παράγοντα τα z^{-M}, z^{-N} αντίστοιχα σε αριθμητή και παρονομαστή, έχουμε:

$$H(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{\prod_{k=1}^N (z - \lambda_k)}, \quad (171)$$

με ξ_k, λ_k τα μηδενικά και οι πόλοι αντίστοιχα.

- Αν $N > M$ τότε υπάρχουν επιπλέον $(N - M)$ μηδενικά στο $z = 0$, και
- αν $N < M$ υπάρχουν επιπλέον $(M - N)$ πόλοι στο $z = 0$.

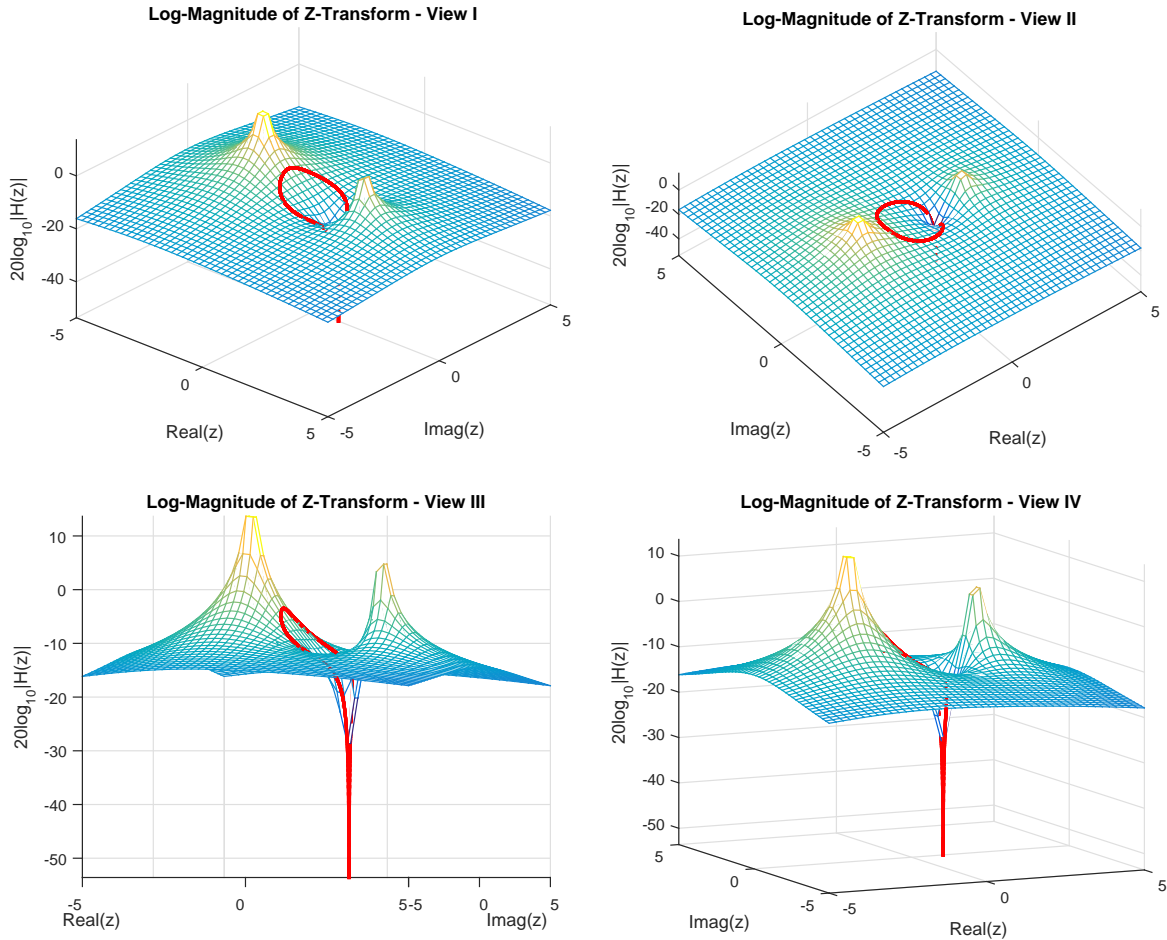
Άρα βλέπετε ότι κάθε συνάρτηση μεταφοράς έχει τόσους πόλους όσα και μηδενικά!

Αν η συνάρτηση μεταφοράς είναι της μορφής

$$H(z) = \frac{a_0 \prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{b_0 \prod_{k=1}^N (z - \lambda_k)}, \quad (172)$$

τότε

- Αν $N > M$, τότε υπάρχουν $N - M$ μηδενικά στο ∞ , και



Σχήμα 20: Μέτρο μετασχ. Z, $|H(z)|$ και μοναδιαίος κύκλος για το σύστημα $H(z) = \frac{z-1}{z^2-4}$.

- αν $N < M$, τότε υπάρχουν $M - N$ πόλοι στο ∞ .

Άρα και πάλι βλέπετε ότι κάθε συνάρτηση μεταφοράς έχει τοσους πόλους οσα και μηδενικά!! Έχουμε δει πώς φαίνεται μια συνάρτηση μεταφοράς στον τρισδιάστατο χώρο. Ξέρετε ότι δεν μπορούμε να αναπαραστήσουμε το $H(z)$, αφού είναι μιγαδική συνάρτηση, αλλά μπορούμε να αναπαραστήσουμε το $|H(z)| = |H(re^{j\omega})|$, για διάφορα r , που είναι πραγματικό. Εδώ θα δούμε μια πιο βολική αναπαράσταση της συνάρτησης μεταφοράς, η οποία είναι σε λογαριθμική κλίμακα. Η λογαριθμική κλίμακα είναι βολική οπτικά (αλλά και αριθμητικά, διότι μετατρέπει ένα γινόμενο μετασχ. Z σε άθροισμα, λόγω των ιδιοτήτων των λογαρίθμων⁶, γιατί αναδεικνύει καλύτερα τους πόλους και τα μηδενικά. Θυμηθείτε ότι

$$\log_{10}(+\infty) = +\infty \quad (174)$$

$$\log_{10}(0) = -\infty \quad (175)$$

Άρα λοιπόν στα λογαριθμικά διαγράμματα, οι πόλοι θα εμφανίζονται ως “κορυφές” ενώ τα μηδενικά ως “τρύπες”. :-) Δείτε λοιπόν το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς

$$H(z) = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - 4z^{-2}} = \frac{z - 1}{z^2 - 4} \quad (176)$$

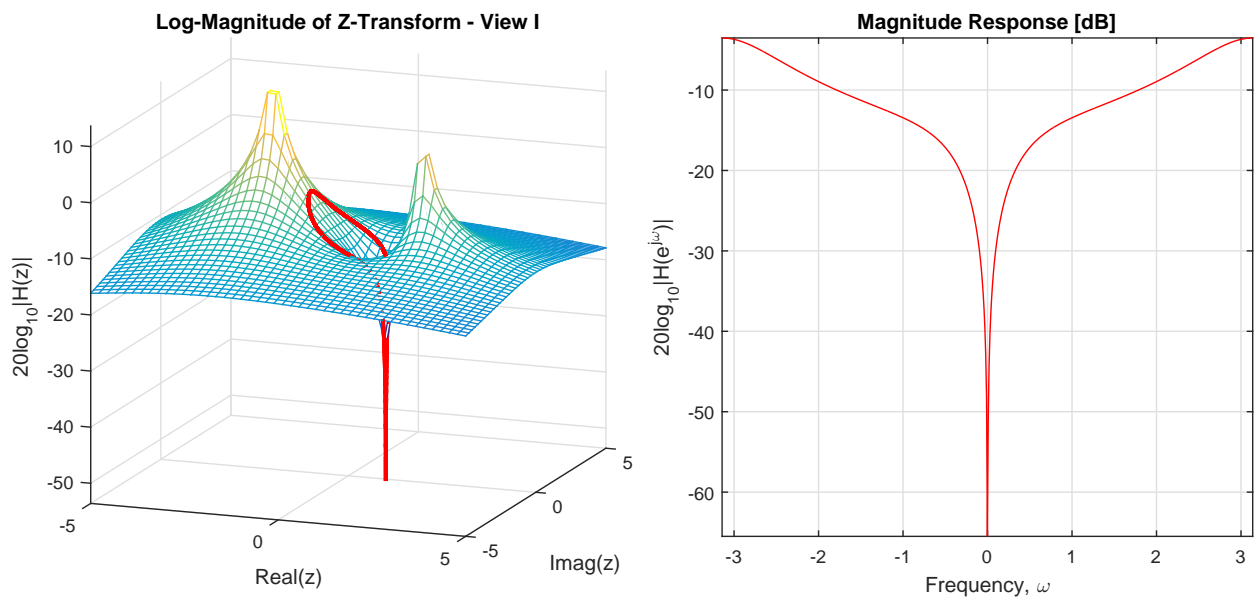
6

$$10 \log(|X(z)||H(z)|) = 10 \log |X(z)| + 10 \log |H(z)| \quad (173)$$

στο Σχήμα (20), από διάφορες οπτικές.

Βλέπετε ότι εκεί που το τρισδιάστατο γράφημα έχει κορυφές, σε εκείνες τις θέσεις του μιγαδικού επιπέδου υπάρχουν πόλοι (για $z = 2$ και $z = -2$, άρα οι κορυφές βρίσκονται πάνω στον πραγματικό άξονα). Αντίστοιχα, εκεί που το τρισδιάστατο γράφημα έχει “τρύπες” (για $z = 1$, άρα πάλι στον πραγματικό άξονα), σε εκείνα τα σημεία του επιπέδου έχει μηδενικά. :-)

Είπαμε όμως νωρίτερα ότι μπορούμε μέσω του μετασχ. Z, να βρούμε το μετασχ. Fourier, αν θέσουμε $z = e^{j\omega}$. Αυτό σημαίνει ότι εκτιμούμε το $H(z)$ μόνον επάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Άρα, όπως έχουμε ήδη δει, είναι σαν να παίρνουμε μια κατακόρυφη, στρογγυλή “φέτα” γραφήματος πάνω από το μοναδιαίο κύκλο, που μας δίνει το $|H(e^{j\omega})|$. Αν το κάνουμε αυτό, θα πάρουμε μια διδιάστατη αναπαράσταση, όπως στο Σχήμα (21), όπου φαίνεται η “φέτα” που θα εξαχθεί στο τρισδιάστατο γράφημα του $20 \log_{10} |H(z)|$, ενώ επίσης φαίνεται η “κανονική” αναπαράσταση του $|H(e^{j\omega})|$, όπως θα τη σχεδιάζαμε στο χαρτί. Προσέξτε



Σχήμα 21: Μέτρο μετασχ. Z, $|H(z)|$, μοναδιαίος κύκλος, και μέτρο φασματικής απόκρισης $|H(e^{j\omega})|$ για το σύστημα $H(z) = \frac{z-1}{z^2-4}$.

ότι επειδή υπάρχει μηδενικό επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, ο μοναδιαίος κύκλος στο σημείο $z = 1$ πηγαίνει προς το $-\infty$.

Αυτό που βλέπετε στο Σχήμα (21) δεν είναι τίποτε άλλο από το $20 \log_{10} |H(\omega)|$, που δίνεται ως

$$20 \log_{10} |H(z)| \Big|_{z=e^{j\omega}} = 10 \log_{10} |H(z)|^2 \Big|_{z=e^{j\omega}} = 10 \log_{10} \left| \frac{e^{j\omega} - 1}{e^{j2\omega} - 4} \right|^2 \quad (177)$$

$$= 10 \log_{10} \frac{(\cos(\omega) - 1)^2 + \sin^2(\omega)}{(\cos(2\omega) - 4)^2 + \sin^2(2\omega)} \quad (178)$$

$$= 10 \log_{10} \frac{2 - 2 \cos(\omega)}{17 - 8 \cos(2\omega)} \quad (179)$$

Αυτοί οι πόλοι και τα μηδενικά σχεδιάζονται ευκολότερα πάνω στο δισδιάστατο μιγαδικό επίπεδο και μας δίνουν πληροφορία για τη συνάρτηση που εξετάζουμε. Οι πόλοι συμβολίζονται με ένα X και τα μηδενικά με ένα O (κύκλος). Όπως καταλαβαίνετε, για να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα πόλων-μηδενικών, πρέπει να ξέρουμε τις ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή, ίσως χρειαστεί δηλ. να κάνουμε παραγοντοποίηση και στους δυο.

Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι τα FIR συστήματα δεν έχουν πόλους, παρά μόνο ίσως στο $z = 0$ ή στο $z = +\infty$. Αντίθετα, τα IIR συστήματα (τα οποία εκφράζονται ως ρητές συναρτήσεις πολυωνύμων, όπως είδαμε παραπάνω), μπορούν να έχουν πόλους οπουδήποτε. Ας δούμε όμως μερικά παραδείγματα, απλά και πιο σύνθετα, για να καταλάβουμε τι ακριβώς γίνεται.

Παραδείγματα:

1. Έστω η συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

Λύση:

Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως:

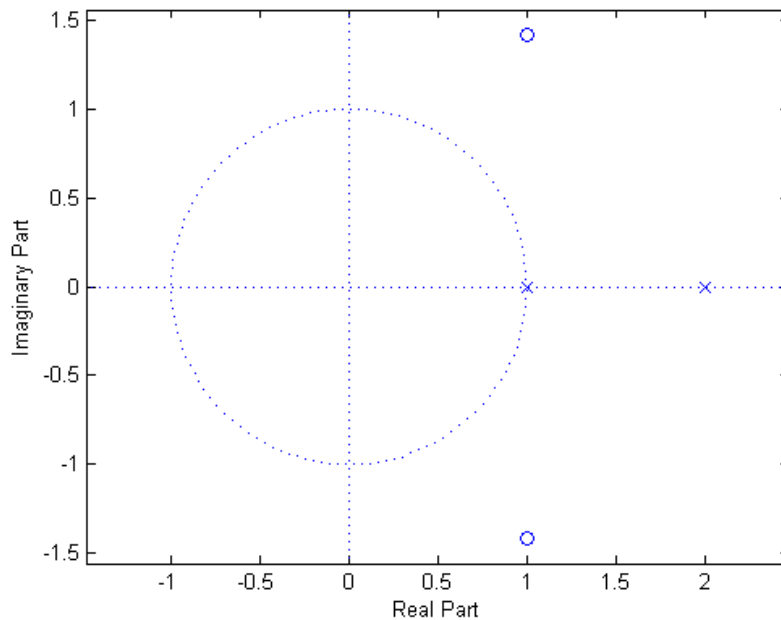
$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^{-2}(z^2 - 2z + 3)}{z^{-2}(z^2 - 3z + 2)} = \frac{z^2 - 2z + 3}{z^2 - 3z + 2}. \quad (180)$$

Προφανώς το σύστημα είναι IIR. Πρέπει να βρούμε τις ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή. Άρα λύνουμε λοιπόν τις αντίστοιχες εξισώσεις:

$$z^2 - 2z + 3 = 0 \implies z = 1 + j\sqrt{2} \text{ ή } z = 1 - j\sqrt{2} \text{ και} \quad (181)$$

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \implies z = 2 \text{ ή } z = 1 \quad (182)$$

Άρα έχουμε δυο μηδενικά στις θέσεις $z = 1 + j\sqrt{2}$ και $z = 1 - j\sqrt{2}$, και δυο πόλους στις θέσεις $z = 2$ και $z = 1$. Όσοι πόλοι, τόσα μηδενικά, άρα είμαστε OK. Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται παρακάτω, στο Σχήμα 22.

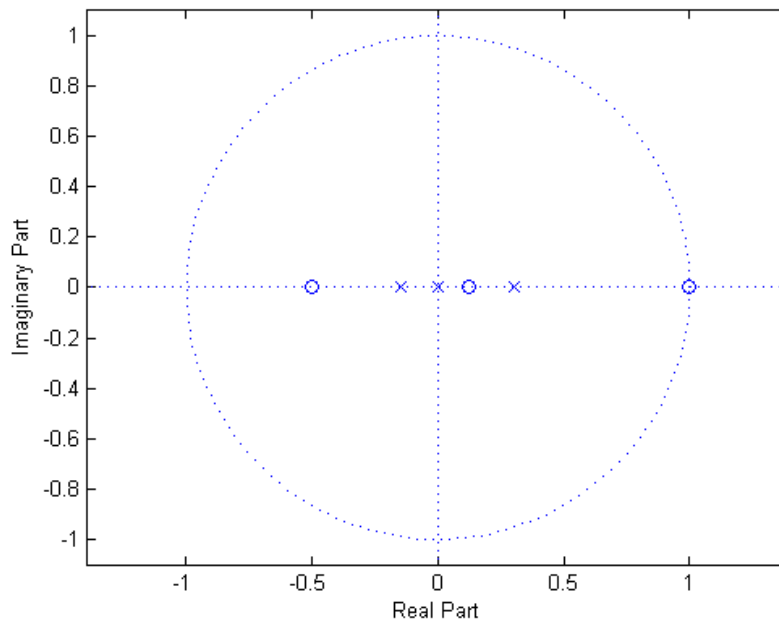


Σχήμα 22: Διάγραμμα Πόλων Μηδενικών - Παραδειγμα 1

2. Έστω η συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = \frac{(z-1)(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{8})}{z(z+0.15)(z-0.3)}$. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

Λύση:

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι ήδη παραγοντοποιημένη και βλέπουμε πολύ εύκολα τους πόλους και τα μηδενικά από την εξίσωση! Έχουμε 3 μηδενικά στις θέσεις $z = 1, z = -\frac{1}{2}, z = \frac{1}{8}$ και 3 πόλους στις θέσεις $z = 1, z = -0.15, z = 0.3$. 3 πόλοι, 3 μηδενικά, όλα OK. Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται παρακάτω, στο Σχήμα 23.



Σχήμα 23: Διάγραμμα Πόλων Μηδενικών - Παραδειγμα 2

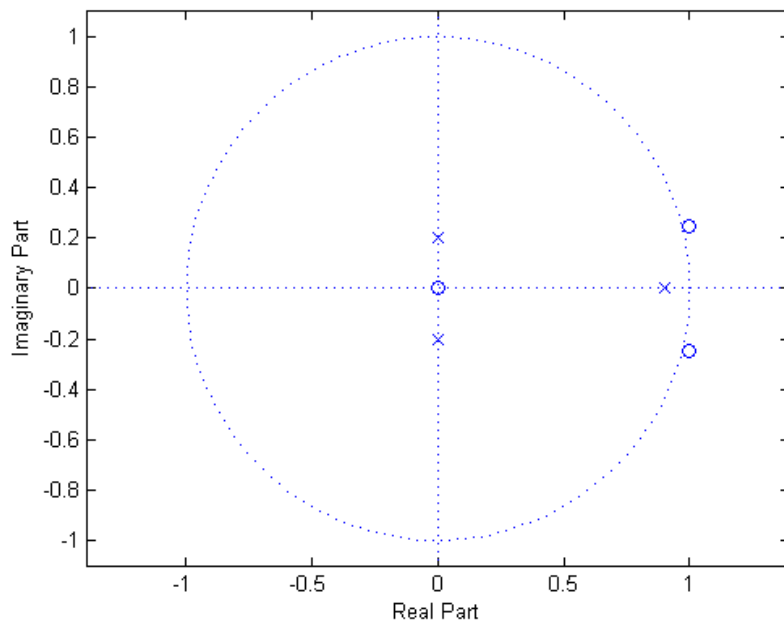
3. Έστω η συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = \frac{z(z - (1 + j0.25))(z - (1 - j0.25))}{(z - j\frac{1}{5})(z + j\frac{1}{5})(z - 0.9)}$. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

Λύση:

Κι εδώ ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι παραγοντοποιημένοι. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι ρίζες του αριθμητή (δηλ. τα μηδενικά) είναι στις θέσεις $z = 1 + j0.25, z = 1 - j0.25, z = 0$. Επίσης, οι ρίζες του παρονομαστή (δηλ. οι πόλοι) είναι στις θέσεις $z = j\frac{1}{5}, z = -j\frac{1}{5}, z = 0.9$. Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται παρακάτω, στο Σχήμα 24:

4. Έστω η συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = 2 + z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}$. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

Λύση:



Σχήμα 24: Διάγραμμα Πόλων Μηδενικών - Παράδειγμα 3

Η $H(z)$ γράφεται:

$$H(z) = 2 + z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} = z^{-2}(2z^2 + z + \frac{1}{4}) = \frac{2z^2 + z + \frac{1}{4}}{z^2} \quad (183)$$

Άρα έχουμε να λύσουμε τις εξισώσεις

$$2z^2 + z + \frac{1}{4} = 0 \longleftrightarrow z = -0.25 + j0.25, z = -0.25 - j0.25 \text{ και} \quad (184)$$

$$z^2 = 0 \longleftrightarrow z = 0, \text{ διπλή ρίζα.} \quad (185)$$

Άρα έχουμε δυο μηδενικά στις θέσεις $z = -0.25 + j0.25, z = -0.25 - j0.25$ και δυο πόλους στη θέση $z = 0$. Όσοι πόλοι, τόσα μηδενικά, όλα OK. Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται στο Σχήμα 25.

5. Έστω η συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$. Βρείτε τους πόλους και τα μηδενικά.

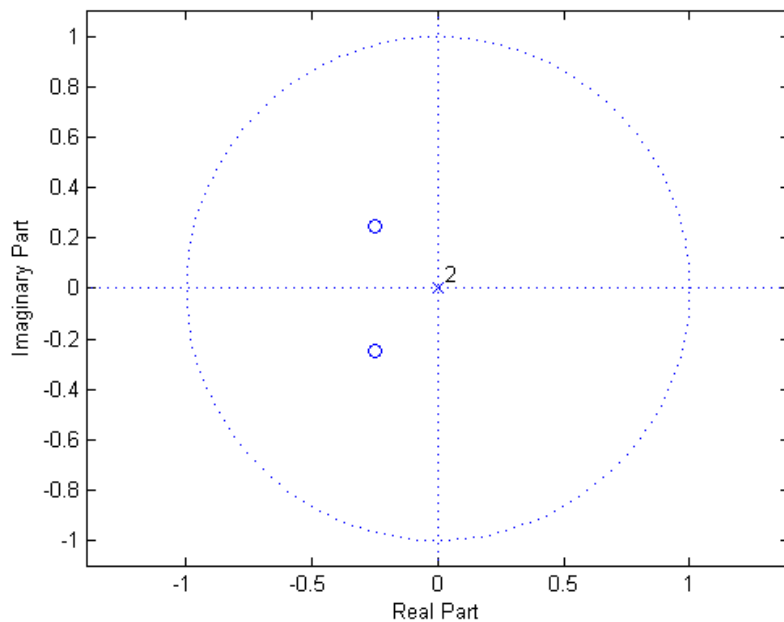
Λύση:

Η $H(z)$ γράφεται ως

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^2 - 2z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z(z - 2)}{z^2 + 3z + 2} \quad (186)$$

Προφανώς τα μηδενικά είναι στις θέσεις $z = 0, z = 2$, ενώ οι πόλοι είναι στις θέσεις $z = -2, z = -1$.

6. Έστω η συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = z^{-2}$. Βρείτε τους πόλους και τα μηδενικά της, και εκφράστε το αιτιατό σύστημα στο οποίο αντιστοιχεί με εξίσωση διαφορών.



Σχήμα 25: Διάγραμμα Πόλων Μηδενικών - Παράδειγμα 4

Λύση:

Η $H(z)$ γράφεται ως

$$H(z) = z^{-2} = \frac{1}{z^2} \quad (187)$$

Άρα το $H(z)$ μηδενίζεται όταν $z \rightarrow \pm\infty$, άρα έχει δυο μηδενικά στο ∞ . Επίσης, το $H(z)$ απειρίζεται όταν $z \rightarrow 0$, άρα έχει δυο πόλους στο $z = 0$.

Για την έκφραση σε εξίσωση διαφορών, θα έχουμε

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = z^{-2} \iff Y(z) = z^{-2}X(z) \iff y[n] = x[n - 2] \quad (188)$$

Προσέξτε ότι αν χρησιμοποιούσαμε την έκφραση

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^2} \iff Y(z) = z^2X(z) \iff y[n] = x[n + 2] \quad (189)$$

θα καταλήγαμε σε μη αιτιατό σύστημα.

Παρατηρήσεις:

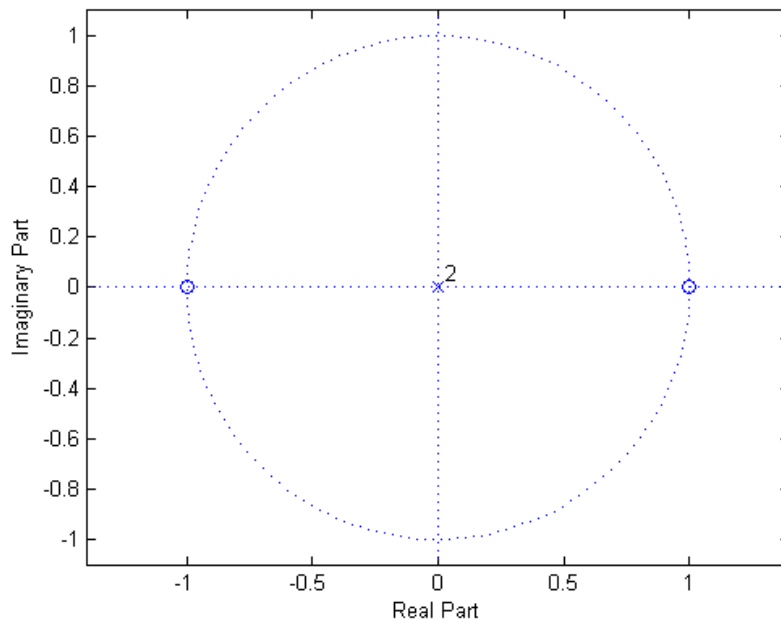
1. Όπως είδατε, το διάγραμμα πόλων-μηδενικών προκύπτει εύκολα αν ξέρεις το μετασχηματισμό Z ενός σήματος. Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών ορίζεται για κάθε σήμα που έχει μετασχηματισμό Z αλλά μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμο όταν μελετάμε συστήματα, καθώς μέσα από αυτό μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια ενός συστήματος, καθώς και για αρκετά άλλα χρήσιμα πράγματα.
2. Η διαδικασία σχεδίασης ενός διαγράμματος πόλων-μηδενικών συνοψίζεται στα εξής βήματα:
 - Βρίσκουμε (αν δε μας δίνεται) το μετασχηματισμό Z του σήματος που μας ενδιαφέρει.

-Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή σε δυνάμεις του z (όχι του z^{-1}), για να ελέγξουμε αν υπάρχουν έξτρα πόλοι ή μηδενικά. Σε μορφή παραγοντων του z , θα πρέπει να μπορείτε να βρείτε εύκολα όλα τα μηδενικά και τους πόλους. Αν σε αυτή τη μορφή, δεν έχουμε ίσο αριθμό πόλων και μηδενικών, τότε υπάρχουν επιπλέον πόλοι ή μηδενικά στο άπειρο.

3. Με όλη την παραπάνω ανάλυση, ίσως αναρωτηθήκατε αν μπορεί να γίνει η αντίστροφη διαδικασία, δηλ. αν από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών μπορούμε να βρούμε την $H(z)$ από την οποία προέρχεται. Η αλήθεια είναι ότι μπορούμε αλλά όχι μονοσήμαντα. Δηλ. ένα συγκεκριμένο διάγραμμα πόλων-μηδενικών μπορεί να μας δώσει την $H(z)$ αλλά όχι μόνο μια, αλλά άπειρες! :-) Ας δούμε γιατί... ας πάμε σε ένα παράδειγμα, το οποίο έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2}$$

και έχει το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του σχήματος 26.



Σχήμα 26: Διάγραμμα Πόλων Μηδενικών - Είναι μοναδικό;

Ας πάμε τώρα αντίστροφα. Μπορούμε να πούμε ότι το παραπάνω διάγραμμα πόλων-μηδενικών αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2}$$

και MONO σε αυτή; Η απάντηση είναι όχι. Γιατί; Βρείτε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών της συνάρτησης

$$H(z) = 4 \frac{z^2 - 1}{z^2}$$

Θα δείτε ότι είναι το ίδιο με το παραπάνω! Άρα συμπεραίνουμε ότι το διάγραμμα πόλων-μηδενικών μας δίνει τη συνάρτηση $H(z)$ από την οποία προήλθε, εκτός από μια σταθερά A , δηλ. μας δίνει τις συναρτήσεις $H'(z) = AH(z)$, με A μια σταθερά. Όλες αυτές οι συναρτήσεις $H'(z)$ έχουν ίδιο

το διάγραμμα πόλων-μηδενικών με την $H(z)$ που είδαμε πιο πάνω! Άρα δεν υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοίχιση μεταξύ ενός διαγράμματος πόλων-μηδενικών και ενός συγκεκριμένου μετασχηματισμού Z . Ενδιαφέρον. :-)

7.3 Ευστάθεια στο χώρο του Z και Περιοχή Σύγκλισης

Ας μιλήσουμε λίγο τώρα για την ευστάθεια ενός συστήματος στο χώρο του Μετασχ. Z . Για να είναι ένα σύστημα ευσταθές, πρέπει για φραγμένη είσοδο, να έχουμε φραγμένη έξοδο, δηλ.

$$|x[n]| < M_x \implies |y[n]| < M_y, \quad M_x, M_y \in \mathfrak{R} \quad (190)$$

Αν πάρουμε το άθροισμα της συνέλιξης, θα έχουμε

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]h[n-k]| \quad (191)$$

Όμως $|x[n]| < M_x$, άρα

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]h[n-k]| < \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M_x |h[n-k]| = M_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| \quad (192)$$

Άρα για να είναι φραγμένη η έξοδος πρέπει να ισχύει

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty \quad (193)$$

Όμως αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχει ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου της κρουστικής απόκρισης $h[n]$. Όμως είπαμε ότι ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου ορίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο! Άρα τι σημαίνει αυτό; Σημαίνει ότι πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z !

Στα παραπάνω παραδείγματα, αν υποθέσουμε ότι αντιπροσωπεύουν αιτιατά συστήματα, το ROC τους θα είναι:

Παράδειγμα 1: ο μακρινότερος από το μηδέν πόλος είναι στο $z = 2$, άρα το ROC είναι το $|z| > 2$, δεν περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, άρα δεν είναι ευσταθές.

Παράδειγμα 2: ο μακρινότερος από το μηδέν πόλος είναι στο $z = 0.3$, άρα το ROC είναι το $|z| > 0.3$, περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, άρα είναι ευσταθές.

Παράδειγμα 3: ο μακρινότερος από το μηδέν πόλος είναι στο $z = 0.9$, άρα το ROC είναι το $|z| > 0.9$, περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, άρα είναι ευσταθές.

Παράδειγμα 4: ο μακρινότερος από το μηδέν πόλος είναι στο $z = 0$, άρα το ROC είναι το $|z| > 0$, περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, άρα είναι ευσταθές.

Τονίζεται ότι τα παραπάνω ισχύουν για αιτιατά συστήματα. Για αντι-αιτιατά συστήματα, το πεδίο σύγκλισης θα είναι εσωστρεφές, με όριό του τον μικρότερο, κατά μέτρο, πόλο. Τέλος, για μη αιτιατά συστήματα, το πεδίο σύγκλισης είναι, όπως έχουμε δει, ένας δακτύλιος που φράσσεται από πόλους.

Ας δούμε ένα παράδειγμα που συνοψίζει όλα τα παραπάνω.

Παράδειγμα:

Έστω το σήμα $x[n]$ με μετασχ. Z

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \quad (194)$$

Βρείτε το $x[n]$ για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης, και χαρακτηρίστε το ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα.

Λύση:

Αν γράψουμε το $X(z)$ σε μορφή δυνάμεων του z , θα έχουμε

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 3z^{-1})} = \frac{z^2(z + 1)}{(z - 1)(z - \frac{1}{2})(z + 3)} \quad (195)$$

και βλέπουμε ότι έχει 3 πόλους, στις θέσεις $p_0 = 1, p_1 = 1/2, p_2 = -3$. Επίσης, βλέπουμε ότι έχει 3 μηδενικά, στις θέσεις $z_0 = -1, z_1 = z_2 = 0$. Οπότε τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι

$$(\alpha') |z| > 3$$

$$(\beta') |z| < \frac{1}{2}$$

$$(\gamma') \frac{1}{2} < |z| < 1$$

$$(\delta') 1 < |z| < 3$$

Ο μετασχ. Z μπορεί να αναπτυχθεί με τη γνωστή σας διαδικασία του Αναπτύγματος σε Μερικά Κλάσματα (βλ. Παράρτημα 8). Έχουμε

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \quad (196)$$

$$= A \frac{1}{1 - z^{-1}} + B \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + C \frac{1}{1 + 3z^{-1}} \quad (197)$$

με

$$A = X(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=1} = 1 \quad (198)$$

$$B = X(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=2} = -\frac{3}{7} \quad (199)$$

$$C = X(z)(1 + 3z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=-1/3} = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=-1/3} = \frac{3}{7} \quad (200)$$

Άρα ο μετασχ. Z γράφεται ως

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1 + 3z^{-1}} \quad (201)$$

Για κάθε ένα από τα παραπάνω πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

(α') Το πεδίο σύγκλισης είναι $|z| > 3$, άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι δεξιόπλευρο, οπότε από τον Πίνακα (2)

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1 + 3z^{-1}} \longleftrightarrow \quad (202)$$

$$x[n] = u[n] - \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7} (-3)^n u[n] \quad (203)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στο πεδίο σύγκλισης του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι αιτιατό, από τη μορφή του $x[n]$.

(β') Το πεδίο σύγκλισης είναι $|z| < 1/2$, άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι αριστερόπλευρο, οπότε από τον Πίνακα (2)

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}} \longleftrightarrow \quad (204)$$

$$x[n] = -u[-n-1] + \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1] \quad (205)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στο πεδίο σύγκλισής του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι αντι-αιτιατό, από τη μορφή του $x[n]$.

(γ') Το πεδίο σύγκλισης είναι $1/2 < |z| < 1$, άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι αμφίπλευρο. Για να προκύψει αυτός ο δακτύλιος ως τομή κάποιων επιμέρους πεδίων σύγκλισης που ορίζονται από τους πόλους $p_0 = 1, p_1 = 1/2, p_2 = -3$, θα πρέπει αυτά τα επιμέρους πεδία να είναι τα

$$\{|z| < 3\} \cap \{|z| > 1/2\} \cap \{|z| < 1\} = \{1/2 < |z| < 1\} \quad (206)$$

Οπότε από τον Πίνακα (2) και τα επιμέρους πεδία σύγκλισης παραπάνω, έχουμε

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}} \longleftrightarrow \quad (207)$$

$$x[n] = -u[-n-1] - \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1] \quad (208)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στο πεδίο σύγκλισής του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι μη αιτιατό, από τη μορφή του $x[n]$.

(δ') Το πεδίο σύγκλισης είναι $1 < |z| < 3$, άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι αμφίπλευρο. Για να προκύψει αυτός ο δακτύλιος ως τομή κάποιων επιμέρους πεδίων σύγκλισης που ορίζονται από τους πόλους $p_0 = 1, p_1 = 1/2, p_2 = -3$, θα πρέπει αυτά τα επιμέρους πεδία να είναι τα

$$\{|z| < 3\} \cap \{|z| > 1/2\} \cap \{|z| > 1\} = \{1 < |z| < 3\} \quad (209)$$

Οπότε από τον Πίνακα (2) και τα επιμέρους πεδία σύγκλισης παραπάνω, έχουμε

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}} \longleftrightarrow \quad (210)$$

$$x[n] = u[n] - \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1] \quad (211)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στο πεδίο σύγκλισής του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι μη αιτιατό, από τη μορφή του $x[n]$.

Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι

Ένα αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα έχει μετασχ. Fourier - όταν έχει όλους τους πόλους του εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Ένα αντι-αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα έχει μετασχ. Fourier - όταν έχει όλους τους πόλους του εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

Κριτήριο ευστάθειας (και άρα ύπαρξης του μετασχ. Fourier) για οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα είναι η συμπερίληψη του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z που το περιγράφει.



teaching the 'Z-TRANSFORM'...

Σχήμα 27: Διδάσκοντας τον Μετασχηματισμό Z... :-)

Οι δυο πρώτες παρατηρήσεις ίσως σας φαίνονται περίεργες. Γιατί η αιτιατότητα να έχει να κάνει με τη θέση των πόλων; Αφού μόλις πριν λίγο είπαμε - και γράψαμε μόλις δυο σειρές πιο πάνω - ότι κριτήριο ευστάθειας είναι μόνον η συμπεριληψη του μοναδιαίου κύκλου στο πεδίο σύγκλισης. Πράγματι, έτσι είναι, απλώς οι δυο πρώτες παρατηρήσεις είναι μια επαναδιατύπωση του κριτηρίου αυτού σε σχέση με την αιτιατότητα ή μη ενός συστήματος.

Σκεφτείτε το λίγο.... αν ένα σύστημα είναι αιτιατό, τότε έχει εξωστρεφές πεδίο σύγκλισης, με όριο τον πόλο με το μεγαλύτερο μέτρο, έστω $|a_i|$ αυτός. Άρα το πεδίο σύγκλισης είναι $|z| > |a_i|$. Όμως αν όλοι οι πόλοι είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε και αυτός ο πόλος θα είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου, άρα $|a_i| < 1$, και έτσι το πεδίο σύγκλισης αυτόματα περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Άρα είναι ευσταθές! :-) Με παρόμοια λογική αποδεικνύεται και το αντίστοιχο για τα αντι-αιτιατά συστήματα.

7.4 Διάταξη Συστημάτων

Η διάταξη σε σειρά και σε παραλληλία έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο περί Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου. Συστήματα σε σειρά εκφράζονται ως η συνέλιξη των επιμέρους συστημάτων στο χρόνο (και άρα σε γινόμενο των μετασχ. Z τους), ενώ συστήματα σε παραλληλία εκφράζονται σε άθροισμα των επιμέρους συστημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και σε αυτόν του μετασχ. Z.

8 Παράρτημα: Ανάπτυξη σε Μερικά Κλάσματα

Σε αυτό το παράρτημα θα δούμε μερικά πράγματα σχετικά με την Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα (Partial Fraction Expansion - PFE), που μας είναι χρήσιμη στο μετασχ. Z, αλλά και στη μελέτη σημάτων και συστημάτων γενικότερα. Όπως λέει και το όνομά της, η PFE διασπά μια ρητή συνάρτηση, με συνήθως υψηλής τάξης πολυώνυμα στον αριθμητή και στον παρονομαστή, σε απλά κλάσματα, με πολυώνυμα μικρής τάξης (1 ή 2) στον παρονομαστή.

Η μέθοδος που ακολουθούμε για την PFE είναι πολύ απλή, και απλά χρειάζεται τριβή για να τη συνηθίσετε. Υπάρχουν δυο συνήθειες περιπτώσεις PFE που συναντάμε στην Επεξεργ. Σήματος σχετικά με τη ρητή συνάρτηση που θέλουμε να απλουστεύσουμε.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η PFE εφαρμόζεται ΜΟΝΟΝ όταν η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι γνήσια μικρότερη της τάξης του πολυωνύμου του παρονομαστή. Αν δεν ισχύει αυτό, τότε πρέπει να κάνουμε πρώτα διαίρεση πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή, ώστε να καταλήξουμε σε περίπτωση που μπορούμε να εφαρμόσουμε PFE.

Η γενική μορφή ενός μετασχ. Z είναι

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (212)$$

Αποδεικνύεται ότι

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N A_k \frac{1}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^S C_m \frac{1}{(1 - d_i z^{-1})^m} \quad (213)$$

όπου

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k} \quad (214)$$

$$C_m = \frac{1}{(s-m)! (-d_i)^{s-m}} \left\{ \frac{d^{s-m}}{dz^{s-m}} [(1 - d_i z^{-1})^s X(z)] \right\} \Big|_{z=d_i} \quad (215)$$

και τα B_r προκύπτουν από διαίρεση των πολυωνύμων P, Q , στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερης τάξης του παρονομαστή. Όταν αυτό δεν ισχύει, τότε $B_r = 0, \forall r$. Όμοια, τα C_m είναι μηδενικά όταν όλες οι ρίζες είναι απλές. Αν υπάρχει πολλαπλή ρίζα τάξης s , τότε $C_m \neq 0, m = 1, \dots, s$.