Αναπαράσταση Σημάτων και Συστημάτων στο Χώρο της Συχνότητας
Ο Μετασχηματισμός Fourier

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζης
Δρ. Επιστήμης Η/Υ Πανεπιστημίου Κρήτης
Δρ. Επεξεργασίας Σήματος Πανεπιστημίου Rennes 1

3 Νοεμβρίου 2015

1 Εισαγωγή

Ένα από τα πλεονεκτήματα της αναπαράστασης σε συχνότητα των ΓΧΑ συστημάτων είναι ότι μας δίνουν μια άλλη οπτική για τη συμπεριφορά του συστήματος, βασισμένη στο χώρο της συχνότητας. Θα μιλήσουμε περισσότερο γι΄ αυτά στο μέλλον. Σε αυτό το σημείο, ας συζητήσουμε για το πως μπορούμε να αναπαριστούμε οποιοδήποτε σήμα σε μορφή μιγαδικών εκθετικών σημάτων.

2 Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Θα ήταν ενδιαφέρον λοιπόν, μετά από τόση συζήτηση :-) - να δούμε πως μοιάζει ένα σήμα (ή σύστημα) όχι στο χρόνο, αλλά στη συχνότητα. Το βασικότερο εργαλείο για αυτή τη δουλειά είναι ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT), που είναι μια μαθηματική σχέση που μας "περνάει"από το πεδίο του (διακριτού) χρόνου n στο πεδίο της συχνότητας ω. Ο DTFT ορίζεται ως:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{1}$$

και ο αντίστροφός του (δηλ. το μαθηματικό εργαλείο που μας κάνει την αντίστροφη δουλειά, δηλ. μας πάει από το χώρο της συχνότητας στο χώρο του χρόνου) ορίζεται ως:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega. \tag{2}$$

Επίσης, δείτε ότι ο DTFT είναι περιοδικό σήμα ως προς ω, δηλ. $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$ [1]. Προσέξετε ότι στο μετασχ. Fourier συνεχούς χρόνου, μια τέτοια περιοδικότητα δεν υπήρχε[2].

Μας είναι βολικό να ενδιαφερόμαστε για το φάσμα του DTFT στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, σε μια περίοδο δηλαδή του μετασχηματισμού[3]. Θεωρούμε ότι εκτός αυτού του διαστήματος, το σήμα επαναλαμβάνεται

[1] Φυσικά, ήταν αναμενόμενο, μια και ο μετασχ. Fourier ενός σήματος διακριτού χρόνου δεν είναι τίποτα άλλο από το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος, που όπως γνωρίζετε, είναι περιοδικό με περίοδο ω_s. Χμ... και πώς από το $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ ξαφνικά εδώ έχουμε περιοδικότητα ανά 2π; Γιατί φυσικά δεν προέρχονται όλα τα σήματα διακριτού χρόνου από δειγματοληψία αντίστοιχων σημάτων συνεχούς χρόνου. Ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να οριστεί κατ΄ ευθείαν στο διακριτό χρόνο, χωρίς να υποθέσουμε οτιδήποτε για κάποια δειγματοληψία του.

[2] Προφανώς, γιατί $X(\omega) \neq X(\omega + 2\pi)$, γιατί φυσικά $e^{j\omega t} \neq e^{j(\omega+2\pi)t} = e^{j\omega t}e^{j2\pi t}$

[3] Το γιατί, το συζητήσαμε διεξοδικά :-)

περιοδικά. Παρατηρήστε ότι για να συνθέσουμε το σήμα στο χρόνο από τον DTFT του, μας αρκεί μια περίοδος (2π) του φάσματός του, όπως υποδηλώνει το ολοκλήρωμα της Σχέσης (2). Επίσης, προσέξτε ότι η Σχέση (2) μας αναπαριστά ένα σήμα στο χρόνο $x[n]$ ως υπέρθεση απειροστά μικρών μιγαδικών εκθετικών της μορφής

$$\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{3}$$

με τη μεταβλητή ω να ορίζεται σε ένα διάστημα διάρκειας 2π, και το $X(e^{j\omega})$ να δηλώνει το ''βάρος - συντελεστή'' καθενός μιγαδικού εκθετικού.

Ο DTFT είναι εν γένει μιγαδικό σήμα. Άρα μπορεί να χωριστεί σε πραγματικό, $\Re\{X(e^{j\omega})\}$, και φανταστικό, $\Im\{X(e^{j\omega})\}$, μέρος, όπως επίσης και να γραφεί σε μορφή μέτρου-φάσης:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})} \tag{4}$$

με

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{\Re\{X(e^{j\omega})\} + \Im\{X(e^{j\omega})\}} \tag{5}$$

και

$$\angle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{\Im\{\mathrm{X}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\}}{\Re\{\mathrm{X}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\}} \tag{6}$$

Το μέτρο, $|X(e^{j\omega})|$, του μετασχ. Fourier, καθώς και η γραφική του παράσταση, συχνά ονομάζεται *φάσμα πλάτους - magnitude spectrum*, ενώ η φάση, $\angle X(e^{j\omega})$, του μετασχηματισμού ονομάζεται *φάσμα φάσης - phase spectrum.*

2.1 Ύπαρξη του Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

Για να υπάρχει ο DTFT, θα πρέπει να συγκλίνει το άθροισμα που υπάρχει στον ορισμό του, δηλ.

$$|X(e^{j\omega})| < \infty \Longleftrightarrow \Big|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\Big| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]||e^{-j\omega n}| < \infty \tag{7}$$

Όμως, ξέρουμε ότι $|e^{-j\omega n}| = 1$, άρα αρκεί

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \tag{8}$$

δηλ. το σήμα πρέπει να είναι απολύτως αθροίσιμο. Η παραπάνω συνθήκη εγγυάται ταυτόχρονα και την ομοιόμορφη σύγκλιση του αθροίσματος. Αυτή η συνθήκη όμως είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία. Για παράδειγμα, το σήμα $x[n] = \dfrac{\sin(n)}{n}$ δεν ικανοποιεί τη Σχέση (8), αλλά υπάρχει ο DTFT του. Έτσι, πολλά σήματα δεν είναι απολύτως αθροίσιμα, αλλά είναι αθροίσιμα με την τετραγωνική έννοια, δηλ.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty \tag{9}$$

Τέτοια σήματα μπορούν να παρασταθούν με τον DTFT, αν είμαστε πρόθυμοι να ''χαλαρώσουμε'' λίγο τη συνθήκη της ομοιόμορφης σύγκλισης :-) . Συγκεκριμένα, για τη *μέση τετραγωνική σύγκλιση*, ισχύει ότι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{10}$$

και

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} x[n]e^{-j\omega n} \tag{11}$$

τότε

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0 \tag{12}$$

Με άλλα λόγια, το σφάλμα $|X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|$ μπορεί να μη συγκλίνει στο μηδέν για κάθε ω όσο το $M \to \infty$, αλλά η συνολική ''ενέργεια'' του σφάλματος τείνει στο μηδέν.

2.2 Χρήσιμες Σχέσεις

Στις περιπτώσεις που μας ζητείται να υπολογίσουμε τον DTFT με τον ορισμό, πολύ χρήσιμες θα μας φανούν οι Σχέσεις του Πίνακα (1), τις οποίες έχουμε ξαναδεί σε προηγούμενο κεφάλαιο και απλά τις υπενθυμίζουμε εδώ.

Χρήσιμα Αθροίσματα (Σειρές)	
$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a},\ \|a\| < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2},\ \|a\| < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$	$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$
$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$	

Πίνακας 1: Χρήσιμα Αθροίσματα.

2.3 Μερικά Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x[n] = a^n u[n]$, με a πραγματικός αριθμός με $|a| < 1$.

   Λύση:
   Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} \tag{13}$$

   Επειδή η $u[n]$, η γνωστή βηματική συνάρτηση, είναι μη μηδενική και ίση με 1 για $n \geq 0$, μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω άθροισμα ως:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n \tag{14}$$

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την κατάλληλη από τις δυο παραπάνω σχέσεις (5),(6) που γράψαμε, όπου $\alpha = (ae^{-j\omega})$. Άρα θα έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{+\infty}(ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \tag{15}$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι ο DTFT. Όπως φαίνεται, είναι μια μιγαδική συνάρτηση του ω. Δυστυχώς, δε γίνεται να σχεδιαστεί αυτή η συνάρτηση στο χαρτί. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να σχεδιάσουμε το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος της, ξεχωριστά, ή ακόμα και το μέτρο ή τη φάση της συνάρτησης.

Το μέτρο λοιπόν του DTFT θα είναι

$$\begin{aligned}
|X(e^{j\omega})| &= \left|\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right| = \left|\frac{1}{1-a\cos(\omega)+ja\sin(\omega)}\right| &(16)\\
&= \frac{1}{|1-a\cos(\omega)+ja\sin(\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{(1-a\cos(\omega))^2+(a\sin(\omega))^2}} &(17)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos(\omega)}} &(18)
\end{aligned}$$

ενώ για τη φάση του DTFT θα πρέπει να γράψουμε τον DTFT σε μορφή μέτρου-φάσης, πολλαπλασιάζοντας με το συζυγή του παρονομαστή:

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1-ae^{j\omega}}{|1-ae^{-j\omega}|^2} = \frac{1-a\cos(\omega)-ja\sin(\omega)}{|1-ae^{-j\omega}|^2} &(19)\\
&= \frac{1-a\cos(\omega)}{1-2a\cos(\omega)+a^2} - j\frac{a\sin(\omega)}{1-2a\cos(\omega)+a^2} &(20)\\
&= \Re\{X(e^{j\omega})\} + j\Im\{X(e^{j\omega})\} &(21)
\end{aligned}$$

Άρα τελικά,

$$\angle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{-\alpha\sin(\omega)}{1-\alpha\cos(\omega)} = -\tan^{-1}\frac{\alpha\sin(\omega)}{1-\alpha\cos(\omega)} \tag{22}$$

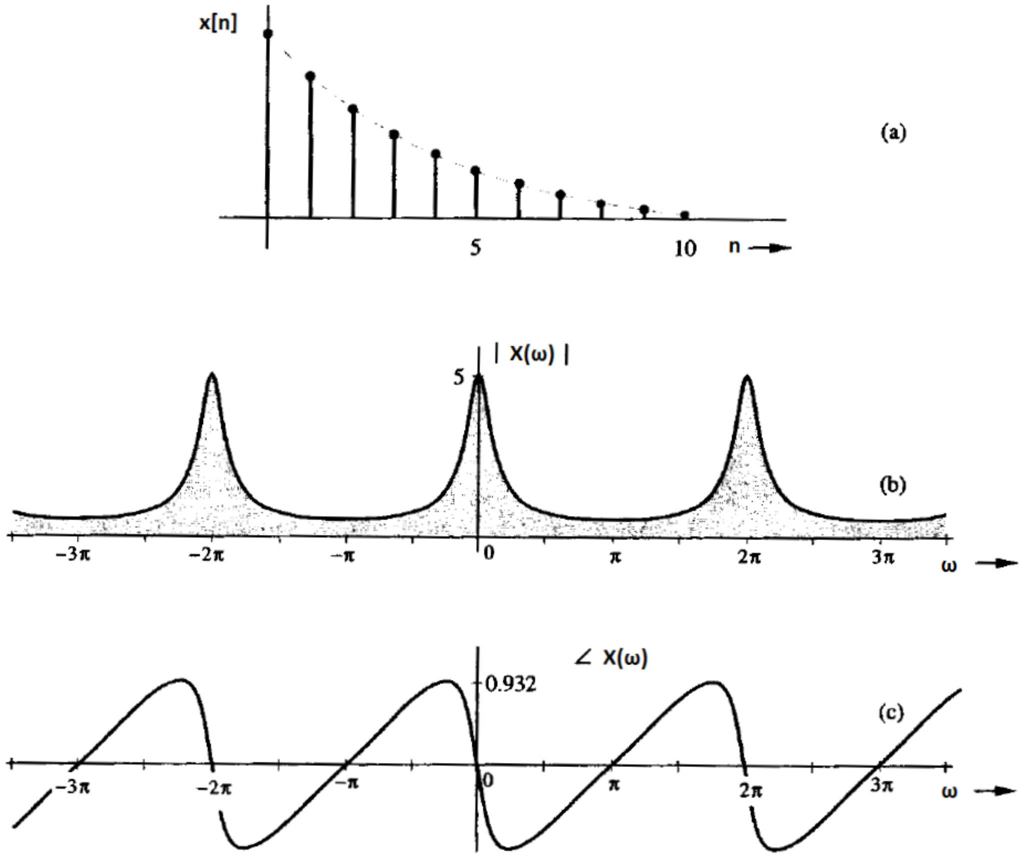
επειδή η συνάρτηση $\tan^{-1}(\cdot)$ είναι περιττή.

Έτσι, το σήμα στο διακριτό χρόνο, το φάσμα πλάτους, και το φάσμα φάσης φαίνεται στο Σχήμα (1). Παρατηρήστε ότι το φάσμα πλάτους είναι άρτιο, ενώ το φάσμα φάσης είναι περιττό, όπως αναμενόταν, αφού το $x[n]$ είναι πραγματικό. Επίσης, παρατηρήστε ότι τα φάσματα είναι περιοδικά με περίοδο 2π, όπως επίσης αναμενόταν. Θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε αυτό το σήμα ως χαμηλοπερατό φίλτρο, μια και όπως φαίνεται στο φάσμα πλάτους, κρατά τις χαμηλές συχνότητες και εξασθενεί τις υψηλές συχνότητες (γύρω απ'το π).

2. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$, με a πραγματικός αριθμός με $|a| > 1$.

Λύση:
Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1]e^{-j\omega n} \tag{23}$$



Σχήμα 1: Εκθετικό $a^n u[n]$, με $a = 0.8$.

Επειδή η $u[-n-1]$ είναι μη μηδενική για $n \leq -1$, μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω άθροισμα ως:

$$X(e^{j\omega}) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n e^{-j\omega n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (ae^{-j\omega})^n \tag{24}$$

Εδώ που φτάσαμε, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αμέσως κάποια από τις σχέσεις του Πίνακα (1), γιατί τα όρια στο παραπάνω άθροισμα δεν είναι ίδια με κάποια από τις σχέσεις του Πίνακα. Πρέπει να κάνουμε ένα βήμα ακόμα. Κι αυτό δεν είναι άλλο από το να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε

$$k = -n \Longrightarrow -k = n$$

και τότε το άθροισμά μας γίνεται:

$$X(e^{j\omega}) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (ae^{-j\omega})^n = -\sum_{k=\infty}^{1} (a^{-1}e^{j\omega})^k = -\sum_{k=1}^{+\infty} (a^{-1}e^{j\omega})^k = -\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} (a^{-1}e^{j\omega})^k - 1\Big) \tag{25}$$

Πώς κάναμε το παραπάνω; Καταλήξαμε αρχικά σε ένα άθροισμα από $k = 1$ ως $+\infty$ μετά την αλλαγή μεταβλητής. Όμως οι σχέσεις του Πίνακα (1) είναι για αθροίσματα από 0 ως αριθμό ή ως $+\infty$. Οπότε πρέπει να αλλάξουμε το κάτω όριο του αθροίσματος από $k = 1$ σε $k = 0$.

Αυτό γίνεται εύκολα αν συμπεριλάβουμε την τιμή του $(a^{-1}e^{j\omega})^k$ για $k = 0$ στο άθροισμα, και ταυτόχρονα να την αφαιρέσουμε, για να είμαστε συνεπείς μαθηματικά. Η τιμή για $k = 0$ είναι προφανώς $(a^{-1}e^{-j\omega})^0 = 1$, κι αυτό το 1 είναι αυτό που αφαιρούμε παραπάνω.

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την κατάλληλη από τις σχέσεις του Πίνακα (1). Άρα θα έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = -\sum_{k=0}^{+\infty}(a^{-1}e^{j\omega})^k + 1 = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}e^{j\omega}} \tag{26}$$

$$= \frac{1-a^{-1}e^{j\omega}}{1-a^{-1}e^{j\omega}} - \frac{1}{1-a^{-1}e^{j\omega}} = -\frac{a^{-1}e^{j\omega}}{1-a^{-1}e^{j\omega}} \tag{27}$$

για $|a^{-1}e^{j\omega}| < 1 \Longleftrightarrow |a| > 1$. Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με $ae^{-j\omega}$ έχουμε

$$X(e^{j\omega}) = -\frac{ae^{-j\omega}a^{-1}e^{j\omega}}{ae^{-j\omega} - a^{-1}e^{j\omega}ae^{-j\omega}} = -\frac{1}{ae^{-j\omega}-1} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \tag{28}$$

για $|a| > 1$.

Εξασκηθείτε στις πράξεις δείχνοντας ότι το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης για το παραπάνω σήμα δίνονται από τις σχέσεις

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos(\omega)+a^2}} \tag{29}$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\tan^{-1}\frac{\alpha\sin(\omega)}{1-\alpha\cos(\omega)} \tag{30}$$

Παρατηρήτε κάποια ομοιότητα με το πρώτο παράδειγμα; ;-)

3. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x[n] = \delta[n]$.

Λύση:
Ας βρούμε και τον DTFT της πολύ σημαντικής συνάρτησης αυτής. Είναι:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]e^{-j\omega n} \tag{31}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι η συνάρτηση δέλτα $\delta[n]$ ορίζεται μόνο στη θέση $n = 0$ κι έχει πλάτος 1. Παντού αλλού είναι μηδέν. Άρα το παραπάνω άθροισμα θα γίνει:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]e^{-j\omega n} = 1e^{-j\omega 0} = 1 \tag{32}$$

Θυμηθείτε ότι και στο συνεχή χρόνο, είχαμε

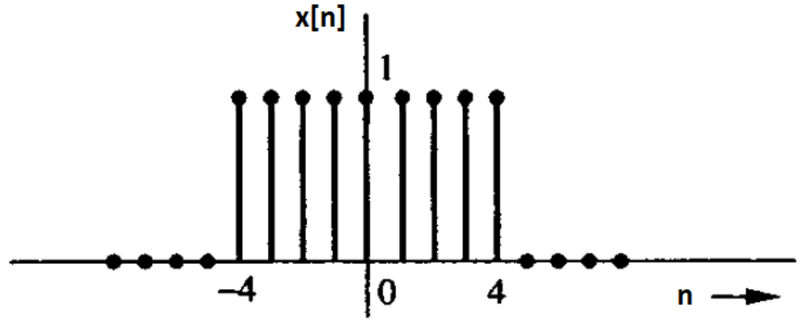
$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \tag{33}$$

μόνο που τότε χρησιμοποιήσαμε ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα συνεχούς χρόνου, ενώ εδώ τα πράγματα ήταν πιο απλά. Άρα ο DTFT της συνάρτησης δέλτα $\delta[n]$ είναι απλά η μονάδα. Αυτό τι σημαίνει; Ότι ένα σήμα που αποτελείται μόνο από μια συνάρτηση δέλτα στη θέση $n = 0$ έχει μετασχηματισμό Fourier μονάδα, δηλ. ΟΛΕΣ οι συχνότητες ω έχουν πλάτος 1. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα σήμα που περιέχει όλες τις συχνότητες με ίση ''δύναμη'', αφού όλες έχουν μοναδιαίο πλάτος.

Εναλλακτικά, μπορείτε να διαβάσετε αυτό το αποτέλεσμα ως εξής: για να συνθέσουμε το σήμα $x[n] = \delta[n]$ στο χρόνο, χρειαζόμαστε ΟΛΕΣ τις (άπειρες το πλήθος) συχνότητες ω με το ίδιο ''βάρος

'' η καθεμία, τη μονάδα! Ενδιαφέρον![4] :-)

4. Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος που φαίνεται στο Σχήμα (2), το οποίο είναι ο τετρα-



Σχήμα 2: Τετραγωνικός παλμός διάρκειας 9 δειγμάτων.

γωνικός παλμός διάρκειας $M = 9$ δειγμάτων.

Λύση:
Ας υποθέσουμε ότι ο παλμός είναι διάρκειας M δειγμάτων, για περισσότερη γενικότητα. Είναι

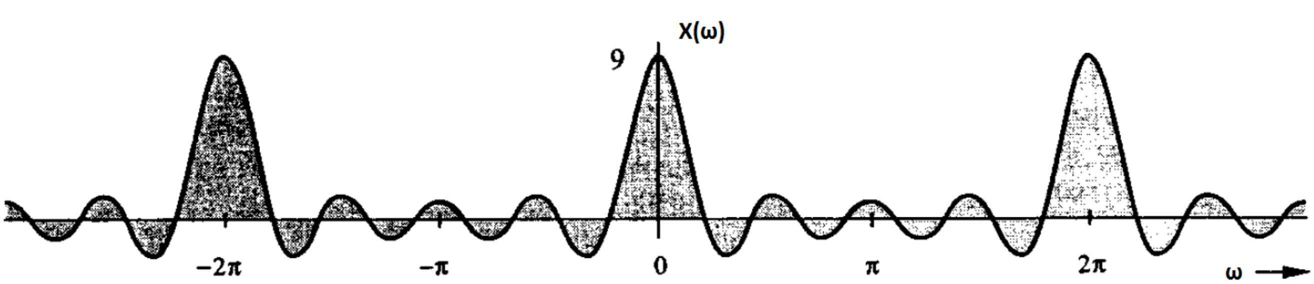
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} 1e^{j\omega n} \tag{34}$$

$$= \frac{e^{-j\frac{M+1}{2}\omega} - e^{-j\frac{M-1}{2}\omega}}{e^{-j\omega} - 1} \tag{35}$$

$$= \frac{e^{-j\omega/2}\left(e^{-jM\omega/2} - e^{jM\omega/2}\right)}{e^{-j\omega/2}(e^{-j\omega/2} - e^{j\omega/2})} \tag{36}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{M\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \tag{37}$$

Το φάσμα του σήματος φαίνεται στο Σχήμα (3). Προσέξτε, εδώ φαίνεται το φάσμα του σήματος (ο



Σχήμα 3: Φάσμα τετραγωνικού παλμού διάρκειας 9 δειγμάτων.

ίδιος ο μετασχ. Fourier δηλαδή), που είναι πραγματικό για κάθε ω. Το σήμα αυτό ειναι το σήμα

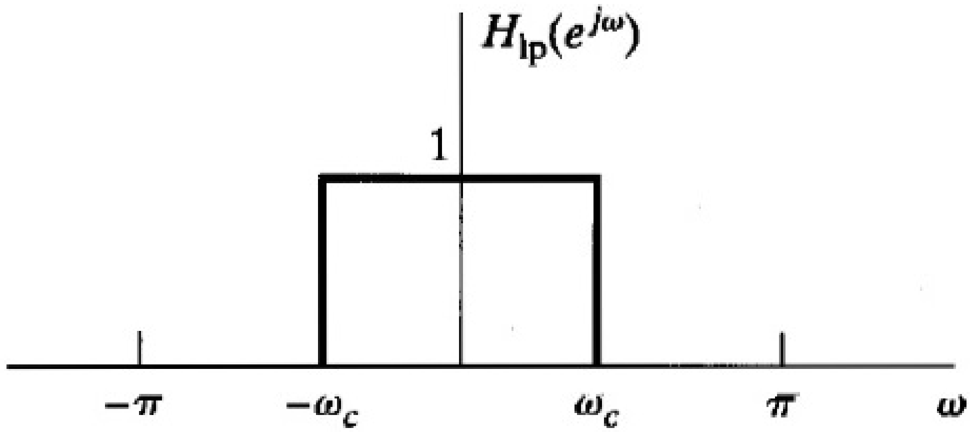
[4] Το ίδιο φυσικά συνέβαινε και στο συνεχή χρόνο...

κυλιόμενης μέσης τιμής (moving average) που έχουμε ήδη δει, μόνο που εδώ είναι στη μη-αιτιατή μορφή του. Το μέτρο της φασματικής απόκρισης είναι

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right| \tag{38}$$

και προφανώς είναι ίδιο με αυτό του Σχήματος (3), με τη διαφορά ότι οι αρνητικές τιμές του φάσματος θα έχουν γίνει θετικές. Βρείτε εσείς τα σημεία μηδενισμού αριθμητή και παρονομαστή, και υπολογίστε το φάσμα φάσης! :-)

5. Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου που γνωρίζετε, και φαίνεται στο Σχήμα (4).



Σχήμα 4: Ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο.

Λύση:
Μας ζητείται ο αντίστροφος μετασχ. Fourier του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου, δηλ. το σήμα στο χρόνο από το οποίο προέρχεται αυτό το φίλτρο. Εφαρμόζοντας τον ορισμό, θα έχουμε

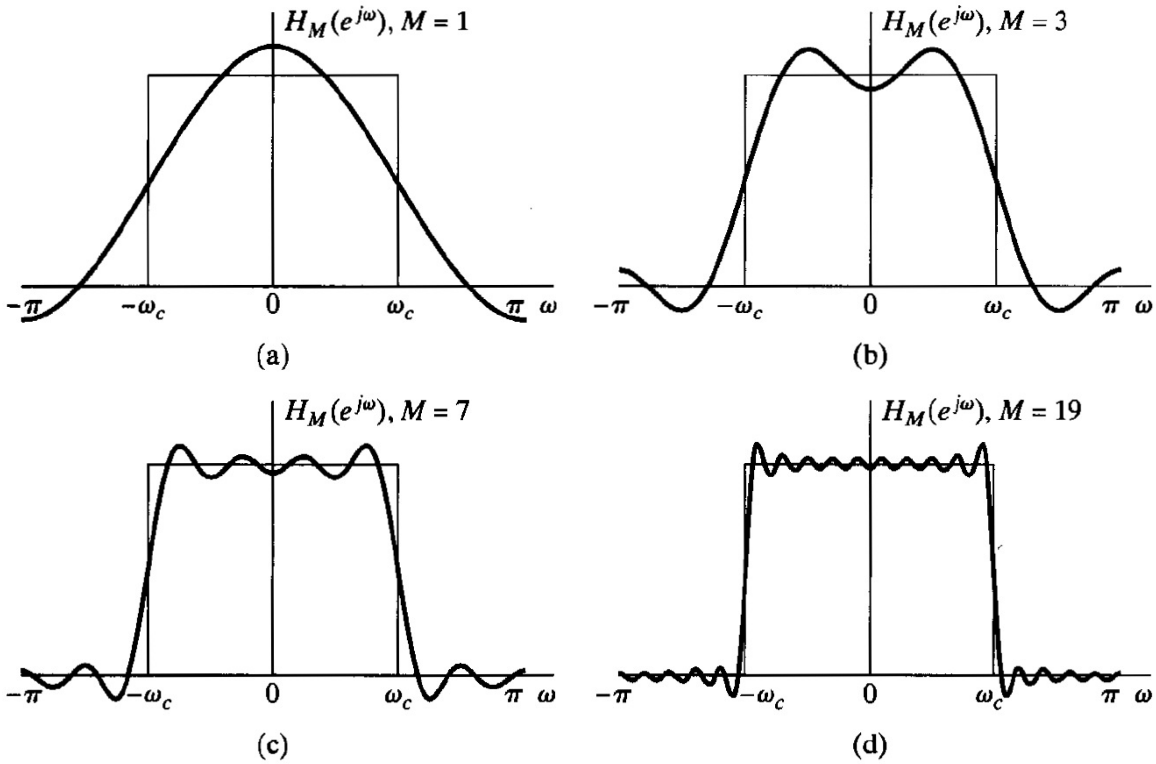
$$\begin{aligned} h_{lp}[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{lp}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1\cdot e^{j\omega n}d\omega && (39)\\ &= \frac{1}{2\pi}(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n})\frac{1}{jn} = \frac{1}{2j\pi n}2j\sin(\omega_c n) && (40)\\ &= \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} && (41) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η κρουστική απόκριση ενός τέτοιου φίλτρου είναι άπειρης διάρκειας, άρα μη πραγματοποιήσιμη! Ακόμα κι αν ήταν όμως πραγματοποιήσιμη, παρατηρήστε ότι δεν είναι αιτιατή (έχει τιμές για $n < 0$)! Η μη-αιτιατότητα βέβαια μπορεί να αρθεί εύκολα με μια μετατόπιση, αλλά η άπειρη διάρκεια παραμένει ό,τι και να κάνουμε. Με άλλα λόγια, το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο είναι μη πραγματοποιήσιμο![5] Ο λόγος για αυτή τη μη πραγματοποιησιμότητα του φίλτρου είναι αυτές οι ασυνέχειες του φίλτρου στις συχνότητες $\omega = \pm\omega_c$.

Αυτό που μπορούμε να κάνουμε στην πράξη είναι να φτιάξουμε μερικά δείγματα της κρουστικής απόκρισης του h_{lp}. Αυτά τα δείγματα όμως, όταν τα μετασχηματίσουμε κατά Fourier, δε θα μας

[5] Γι΄ αυτό λέγεται και ιδανικό :-) ...

δώσουν το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο αλλά μια προσέγγισή του. Το πόσο καλή θα είναι αυτή η προσέγγιση, εξαρτάται από τό πόσα δείγματα της κρουστικής απόκρισης θα δημιουργήσουμε. Δείτε το Σχήμα (5), όπου δημιουργούμε $2M+1$ δείγματα της κρουστικής απόκρισης για διάφορες τιμές του M. Παρατηρήστε ότι όσο αυξάνουμε το M, τόσο πιο κοντά πλησιάζουμε στο ιδανικό χαμηλοπερατό



Σχήμα 5: Προσεγγίσεις ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου.

φίλτρο.

3 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Αποδεικνύονται κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες σχετικά με τον DTFT, οι οποίες φαίνονται στον Πίνακα (2).

4 Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

Στον Πίνακα (3), θα βρείτε μερικά χρήσιμα ζευγάρια μετασχ. Fourier που χρησιμοποιούνται συχνά. Τα παρακάτω ορίζονται για $\omega \in \Re$. Για μετασχηματισμούς σε μια περίοδο, δηλ. στο $[-\pi, \pi]$, θέτουμε $k = 0$ στους παρακάτω τύπους όπου χρειάζεται.

5 Συμμετρίες Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

Κάποιες γνωστές και χρήσιμες στην απλούστευση πορβλημάτων σχέσεις συμμετρίας μεταξύ σημάτων και των μετασχηματισμών Fourier τους παρατίθενται στον Πίνακα (4). Οι περισσότερες αποδεικνύονται εύκολα με χρήση του ορισμού του μετασχηματισμού.

Χρήσιμες ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου	
Ακολουθία	**Μετασχ. Fourier**
$ax[n]+by[n]$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
$x[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$, ή $X^*(e^{j\omega})$ αν $x[n]$ είναι πραγματικό.
$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
$nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
$x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
$x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x[n]\rvert^2$ - Θεώρημα Parseval	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]y^*[n]$ - Θεώρημα Parseval γενική μορφή	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$

Πίνακας 2: Χρήσιμες Ιδιότητες Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου.

6 ΓΧΑ Συστηματα στο Χώρο του Μετασχ. Fourier

Πιο γενικά όμως, και για οποιαδήποτε σήματα, η σχέση που συνδέει την είσοδο, $x[n]$, με την έξοδο, $y[n]$, ενός ΓΧΑ συστήματος, $h[n]$, εκφράζεται μέσω της πράξης της συνέλιξης:

$$y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{42}$$

Όμως ένα από τα σημαντικότερα πορίσματα της Ανάλυσης Fourier είναι ότι *η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται πολλαπλασιασμός στη συχνότητα*, και το αντίστροφο (Πίνακας 2). Άρα η ίδια Σχέση (42) που περιγράφει το σύστημα μπορεί να γραφεί και ως:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \tag{43}$$

Ένα σύστημα $h[n]$ με απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$ μπορεί να υπολογιστεί πιο εύκολα – συνήθως :-) – στο χώρο των συχνοτήτων απ' ότι στο χώρο του χρόνου. Πώς; Προφανώς από τη σχέση

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \tag{44}$$

Βλέπετε ότι, εν γένει, η απόκριση σε συχνότητα είναι μια ρητή συνάρτηση της συχνότητας ω. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{N(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})} \tag{45}$$

όπου $N(e^{j\omega}), D(e^{j\omega})$ ο αριθμητής και ο παρονομαστής, αντίστοιχα, της απόκρισης σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$, με όποιες απλοποιήσεις μπορεί να γίνουν στο κλάσμα. Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια ρητή συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε μικρότερα κλάσματα μέσα από τη γνωστή σας διαδικασία της ''Αναπτυξης σε Μερικά Κλάσματα''. Εν συντομία, το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα λέει ότι μια τέτοια ρητή συνάρτηση, εν

Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου	
Ακολουθία	**Μετασχ. Fourier**
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$a^n u[n],\ \|a\|<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$-a^n u[-n-1],\ \|a\|>1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
$(n+1)a^n u[n],\ \|a\|<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
$a^{\|n\|},\ \|a\|<1,$	$\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$
$\frac{r^n \sin(\omega_c(n+1))}{\sin(\omega_c)} u[n],\ \|r\|<1$	$\frac{1}{1-2r\cos(\omega_c)e^{-j\omega}+r^2 e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \|\omega\|<\omega_c \\ 0, & \omega_c<\|\omega\|\leq\pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0\leq n\leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega_c(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -j[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)-\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

Πίνακας 3: Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχ. Fourier.

γένει, μπορεί να γραφεί ως

$$H(e^{j\omega}) = \frac{N(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})} = \sum_{k=1}^{M} \frac{A_k}{1-a_k e^{-j\omega}} + \sum_{l=1}^{L} \frac{B_l}{1-b_l e^{-j\omega}} \tag{46}$$

με $|a_k|<1$ και $|b_k|>1$, στην απλή περίπτωση που οι ρίζες του παρονομαστή $D(e^{j\omega})$ είναι απλές. Σύμφωνα με τον πίνακα με τα ζεύγη Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου (Πίνακας 3), μπορούμε, έχοντας την Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα, να βρούμε την $h[n]$, ως

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^{M} \frac{A_k}{1-a_k e^{-j\omega}} + \sum_{l=1}^{L} \frac{B_l}{1-b_l e^{-j\omega}} \longleftrightarrow h[n] = \sum_{k=1}^{M} A_k (a_k)^n u[n] - \sum_{l=1}^{L} B_l (b_l)^n u[-n-1] \tag{47}$$

Συμμετρίες μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου	
Ακολουθία	**Μετασχ. Fourier**
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
$\Re\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$, συζυγές συμμετρικό μέρος του DTFT
$j\Im\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$, συζυγές αντισυμμετρικό μέρος του DTFT
$x_e[n]$, συζυγές συμμετρικό μέρος του σήματος	$X_R(e^{j\omega}) = \Re\{X(e^{j\omega})\}$
$x_o[n]$, συζυγές αντισυμμετρικό μέρος του σήματος	$jX_I(e^{j\omega}) = j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
Τα παρακάτω ισχύουν μόνο για πραγματικά σήματα $x[n]$	
$x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
$x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$
$x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$
$x[n]$	$\lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert$
$x[n]$	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$
$x_e[n]$, άρτιο μέρος	$X_R(e^{j\omega})$
$x_o[n]$, περιττό μέρος	$jX_I(e^{j\omega})$

Πίνακας 4: Συμμετρίες Μετασχ. Fourier.

αφού $|a_k| < 1$ και $|b_k| > 1$. Φυσικά η διαδικασία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί και το $x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$, αφού και το $X(e^{j\omega})$ εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} \tag{48}$$

Πολλή θεωρία... Ας δούμε μερικά παραδείγματα πάνω σε αυτά, που είναι πολύ σημαντικά. :-)

Παράδειγμα 1:
Έστω το σύστημα

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \tag{49}$$

Στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \tag{50}$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος $y[n]$.

Λύση:
Αυτό που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τη συνέλιξη της εισόδου με το σύστημα, με τον κλασικό τρόπο του αθροίσματος. Όμως, αν μεταφερθούμε στο πεδίο της συχνότητας, συμβουλευόμενοι

τον Πίνακα (3), έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
y[n] = x[n] * h[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \Big(\frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\Big)\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \\
&= \frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})} + \frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})} \\
&= \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{C}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{D}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \longleftrightarrow \\
y[n] &= A\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] + (B+D)\Big(\frac{1}{3}\Big)^n u[n] + C\Big(\frac{1}{4}\Big)^n u[n] \qquad (51)
\end{aligned}
$$

με

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{2}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}\Big|_{e^{-j\omega}=2} = 6 \qquad (52) \\
B &= \frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=3} = \frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})}\Big|_{e^{-j\omega}=3} = -4 \qquad (53) \\
C &= \frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=4} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}\Big|_{e^{j\omega}=4} = -3 \qquad (54) \\
D &= \frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=3} = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}\Big|_{e^{j\omega}=3} = 4 \qquad (55) \\
& \qquad (56)
\end{aligned}
$$

και άρα

$$
y[n] = 6\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] - 3\Big(\frac{1}{4}\Big)^n u[n] \qquad (57)
$$

Επίσης, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε την είσοδο $x[n]$, αν μας δίνεται το σύστημα και η έξοδος του. Δείτε:

Παράδειγμα 2:
Έστω ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$
H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1+3e^{-j\omega}} \qquad (58)
$$

Στην είσοδό του, βρίσκεται ένα σήμα $x[n]$, το οποίο δίνει έξοδο

$$
y[n] = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] - \Big(\frac{3}{2}\Big)^n u[-n-1] \qquad (59)
$$

Βρείτε την είσοδο, $x[n]$.

Λύση:
Με παρόμοιο τρόπο έχουμε

$$
y[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\dfrac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{1-\dfrac{3}{2}e^{j\omega}} \qquad (60)
$$

Προφανώς ισχύει

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \Longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} = \frac{\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \dfrac{1}{1-\frac{3}{2}e^{-j\omega}}}{\dfrac{1}{1+3e^{-j\omega}}} \tag{61}$$

$$= \frac{\dfrac{-e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{3}{2}e^{-j\omega}\right)}}{\dfrac{1}{1+3e^{-j\omega}}} \tag{62}$$

$$= \frac{-(1+3e^{-j\omega})e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{3}{2}e^{-j\omega})} \tag{63}$$

$$= \left(\frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{3}{2}e^{-j\omega}}\right)e^{-j\omega} \tag{64}$$

με

$$A = \frac{-1-3e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{3}{2}e^{-j\omega})}\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{-1-3e^{-j\omega}}{1-\frac{3}{2}e^{-j\omega}}\Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{7}{2} \tag{65}$$

$$B = \frac{-1-3e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{3}{2}e^{-j\omega})}\left(1-\frac{3}{2}e^{-j\omega}\right)\Big|_{e^{-j\omega}=2/3} = \frac{-1-3e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\Big|_{e^{-j\omega}=2/3} = -\frac{9}{2} \tag{66}$$

και άρα, συμβουλευόμενοι τον Πίνακα (3), τελικά η είσοδος θα είναι

$$x[n] = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1] + \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}u[-(n-1)-1] = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1] + \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}u[-n] \tag{67}$$

Μερικές παρατηρήσεις...

1. Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε το σύστημα $h[n]$ αν μας δίνεται η είσοδος και η έξοδος, $x[n], y[n]$, αντίστοιχα. Κάντε το σε όλα τα παραδείγματα! :-)

2. Φυσικά για τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το άθροισμα της συνέλιξης, αν σας βολεύει. Το πώς θα καταλαβαίνετε ποιός τρόπος είναι πιο εύκολος ή σύντομος, απαιτεί εμπειρία και τριβή σε ασκήσεις. Πολλές φορές μάλιστα δεν είναι εμφανές με το μάτι κάτι τέτοιο, και αναγκαστικά δουλεύετε όπως νομίζετε εσείς, μέχρι να επιβεβαιωθείτε ή να διαψευστείτε. :-)

3. Η ανάλυση σε μερικά κλάσματα εφαρμόζεται ΜΟΝΟΝ όταν η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι γνήσια μικρότερη από αυτή του παρονομαστή, ειδάλλως πρέπει να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων. Στο Παράδειγμα 1, αυτό ήταν αληθές, αλλά όχι και στο Παράδειγμα 2. Είδατε όμως πως αποφύγαμε να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων, θεωρώντας τον όρο $e^{-j\omega}$ του αριθμητή ως καθυστέρηση.

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος $\mathbf{h[n] \longleftrightarrow H(e^{j\omega})}$ ειναι της μορφής
$$\mathbf{x[n] = Aa^n u[n],\ |a| < 1 \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = A\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}},$$
τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως
$$\mathbf{Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})},$$
και κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί τελικά η έξοδος $\mathbf{y[n]}$.

Αν η είσοδος περιέχει την αντίστροφη βηματική, τότε

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος $\mathbf{h[n] \longleftrightarrow H(e^{j\omega})}$ ειναι της μορφής

$$\mathbf{x[n] = -Aa^n u[-n-1],\ \ |a| > 1 \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = A\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}},$$

τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως

$$\mathbf{Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})},$$

και κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί τελικά η έξοδος $\mathbf{y[n]}$.

Προφανώς τα παραπάνω μπορούν να γενικευτούν για αθροισμα τέτοιων σημάτων ως:

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος $\mathbf{h[n] \longleftrightarrow H(e^{j\omega})}$ ειναι της μορφής

$$\mathbf{x[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k (a_k)^n u[n] - \sum_{l=1}^{M} B_l (b_l)^n u[-n-1] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^{N} A_k \frac{1}{1 - a_k e^{-j\omega}} + \sum_{l=1}^{M} B_l \frac{1}{1 - b_l e^{-j\omega}}},$$

με $\mathbf{|a_k| < 1}$ και $\mathbf{|b_l| > 1}$, τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως

$$\mathbf{Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})},$$

και κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί τελικά η έξοδος $\mathbf{y[n]}$.

Τέλος, πολλά συστήματα εκφράζονται ως ένα απλό άθροισμα Διακριτών Συναρτήσεων Δέλτα, όπως για παράδειγμα το

$$h[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1] \tag{68}$$

Αυτή η περίπτωση είναι η πιο εύκολη, καθώς μπορούμε να δουλέψουμε στο πεδίο του χρόνου, αντί αυτό της συχνότητας[6], εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα της Συνάρτησης Δέλτα που λέει ότι

$$x[n] * \delta[n \pm n_0] = x[n \pm n_0] \tag{69}$$

Τι είπαμε ότι σημαίνει αυτό; Σημαίνει ότι όταν κάνουμε συνέλιξη ενός σήματος με μια Συνάρτηση Δέλτα η οποία βρίσκεται στη χρονική στιγμή $n = \pm n_0$, τότε το αποτέλεσμα είναι απλά το ίδιο το σήμα $x[n]$ μετατοπισμένο στη θέση $n = \pm n_0$!

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα:</u>
Έστω το ΓΧΑ σύστημα $h[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1]$. Στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα

$$x[n] = -2\Big(\frac{5}{4}\Big)^n u[-n-1]$$

Βρείτε την έξοδο.

<u>Λύση:</u>
Ας δούμε και τις δυο λύσεις (χρόνος και συχνότητα).

[6] Χωρίς να σημαίνει ότι αν πάτε στο χώρο της συχνότητας δε θα βγάλετε αποτέλεσμα :-)

- Θα έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n]*h[n] = -2\Big(\frac{5}{4}\Big)^n u[-n-1]*(2\delta[n]-\delta[n-1]) && (70)\\ &= -2\Big(\frac{5}{4}\Big)^n u[-n-1]*2\delta[n] + 2\Big(\frac{5}{4}\Big)^n u[-n-1]*\delta[n-1] && (71)\\ &= -4\Big(\frac{5}{4}\Big)^n u[-n-1] + 2\Big(\frac{5}{4}\Big)^{n-1} u[-(n-1)-1] && (72)\\ &= -4\Big(\frac{5}{4}\Big)^n u[-n-1] + 2\Big(\frac{5}{4}\Big)^{n-1} u[-n] && (73) \end{aligned}$$

- Μέσω συχνότητας, η συνέλιξη γίνεται γινόμενο, και μέσω μετασχ. Fourier και ιδιοτήτων, θα είναι

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1-\frac{5}{4}e^{-j\omega}}(2-e^{-j\omega}) && (74)\\ &= \frac{4}{1-\frac{5}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1-\frac{5}{4}e^{-j\omega}}e^{-j\omega} \longleftrightarrow && (75)\\ y[n] &= -4\Big(\frac{5}{4}\Big)^n u[-n-1] + 2\Big(\frac{5}{4}\Big)^{n-1} u[-(n-1)-1] && (76)\\ &= -4\Big(\frac{5}{4}\Big)^n u[-n-1] + 2\Big(\frac{5}{4}\Big)^{n-1} u[-n] && (77) \end{aligned}$$

Για να δούμε και μερικά παραδείγματα με εξισώσεις διαφορών, για να κλείσουμε τη συζήτηση γύρω από το μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου, και να δούμε πόσο πιο εύκολη γίνεται η δουλειά όταν περνάμε στο χώρο της συχνότητας.

Παράδειγμα 1:
Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \qquad (78)$$

Λύση:
Θυμηθείτε τι κάναμε όταν αντιμετωπίζαμε τέτοιες καταστάσεις πριν μάθουμε για το μετασχ. Fourier. Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, και θεωρούμε ότι τότε $y[n] = h[n]$. Οπότε η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] \qquad (79)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και η ρίζα του είναι

$$z - \frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow z = 1/2 \qquad (80)$$

Άρα η κρουστική απόκρισή του είναι

$$h[n] = A\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] \qquad (81)$$

Από την εξίσωση διαφορών έχουμε ότι

$$h[0] - \frac{1}{2}h[-1] = \delta[0] = 1 \qquad (82)$$

και άρα

$$h[0] = A\Big(\frac{1}{2}\Big)^0 u[0] = A = 1 \qquad (83)$$

Οπότε η κρουστική απόκριση είναι

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \tag{84}$$

Αν τώρα γράψουμε την εξίσωση διαφορών στο χώρο της συχνότητας, με χρήση ιδιοτήτων θα έχουμε

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = X(e^{j\omega}) \tag{85}$$

Διαιρώντας με $X(e^{j\omega})$ έχουμε

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{86}$$

Από τον Πίνακα (3) βλέπουμε εύκολα ότι

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \tag{87}$$

που είναι και το ζητούμενο.

Παράδειγμα 2:
Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] = x[n-1] \tag{88}$$

Λύση:
Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, και θεωρούμε ότι τότε $y[n] = h[n]$. Οπότε η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$h[n] - \frac{3}{4}h[n-1] = \delta[n-1] \tag{89}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και η ρίζα του είναι

$$z - \frac{3}{4} = 0 \Longrightarrow z = \frac{3}{4} \tag{90}$$

Άρα η κρουστική απόκρισή του είναι

$$h[n] = A\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}, \ n \geq 1 \tag{91}$$

Από την εξίσωση διαφορών έχουμε ότι

$$h[0] - \frac{3}{4}h[-1] = \delta[-1] = 0 \Longleftrightarrow h[0] = 0 \tag{92}$$

$$h[1] - \frac{3}{4}h[0] = \delta[0] = 1 \Longleftrightarrow h[1] = 1 \tag{93}$$

και άρα

$$h[1] = A = 1 \tag{94}$$

Οπότε η κρουστική απόκριση είναι

$$h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \tag{95}$$

Αν τώρα γράψουμε την εξίσωση διαφορών στο χώρο της συχνότητας, με χρήση ιδιοτήτων θα έχουμε

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] = x[n-1] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = X(e^{j\omega})e^{-j\omega} \tag{96}$$

Διαιρώντας με $X(e^{j\omega})$ έχουμε

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}} \tag{97}$$

Από τους Πίνακες (3,2) βλέπουμε εύκολα ότι

$$h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \tag{98}$$

που είναι και το ζητούμενο.

Παράδειγμα 3:
Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] \tag{99}$$

Λύση:
Ας δούμε το πεδίο του χρόνου πρώτα. Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, και θεωρούμε ότι τότε $y[n] = h[n]$. Οπότε η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1] \tag{100}$$

Εδώ όμως η τάξη της εισόδου και της εξόδου είναι ίδιες ($1^{ης}$ τάξης), οπότε θέλει μια προσοχή. Αν θεωρήσουμε το σύστημα

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] \tag{101}$$

τότε η κρουστική απόκρισή του είναι (Παράδειγμα 1, προηγουμένως)

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] \tag{102}$$

Το σύστημα είναι ΓΧΑ, άρα η απόκρισή του στην είσοδο $-\frac{1}{4}\delta[n-1]$ θα είναι

$$h_2[n] = -\frac{1}{4}h_1[n-1] = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \tag{103}$$

Άρα, η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \tag{104}$$

Ας πάμε στο χώρο της συχνότητας τώρα. Έχουμε

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}X(e^{j\omega})e^{-j\omega} \tag{105}$$

και σχηματίζοντας το λόγο $\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega})$, θα έχουμε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{4}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}e^{-j\omega} \tag{106}$$

Από τους Πίνακες (3,2) έχουμε ότι

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \tag{107}$$