Αναπαράσταση Σημάτων και Συστημάτων στο Χώρο της Συχνότητας
Ιδιοσυνάρτηση - Ιδιοτιμή - Απόκριση σε Συχνότητα

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζης
Δρ. Επιστήμης Η/Υ Πανεπιστημίου Κρήτης
Δρ. Επεξεργασίας Σήματος Πανεπιστημίου Rennes 1

13 Οκτωβρίου 2015

1 Εισαγωγή

Εως τώρα έχουμε συζητήσει μερικά από τα πιο θεμελιώδη ζητήματα σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου. Μιλήσαμε ιδιαίτερα για ΓΧΑ συστήματα, τα οποία όταν δέχονται είσοδο σε μορφή αθροίσματος συναρτήσεων Δέλτα, όπου η καθεμιά έχει ένα συγκεκριμένο πλάτος, τότε η έξοδος δίνεται σε μορφή αθροίσματος της κρουστικής τους απόκρισης με βάρη. Με περισσότερα μαθηματικά, ένα διακριτό σήμα (σήμα, από δω και πέρα), αναπαρίσταται εν γένει ως[1]:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]. \tag{1}$$

Για παράδειγμα, το σήμα

$$x[n] = 2\delta[n] - 4\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-4] \tag{2}$$

είναι ένα σήμα με τρεις συναρτήσεις δέλτα, με τιμές $2, -4, \frac{1}{2}$, και αυτές βρίσκονται στις θέσεις $n = 0, n = 1, n = 4$. Η γραφική παράσταση τέτοιων σημάτων είναι απλά μια γραμμή ανάλογου ύψους σε κάθε θέση, για κάθε συνάρτηση δέλτα. Έχουμε δει κάποια βασικά πράγματα για αυτά τα σήματα.

Όμως είχαμε συζητήσει αρκετά και για μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής $e^{j\omega_0 n}$. Αυτά τα σήματα παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στα ΓΧΑ συστήματα. Το γιατί θα το δούμε αμέσως τώρα.

2 Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ Συστήματος

Τα ΓΧΑ συστήματα, όπως έχουμε πει, δεν είναι τίποτα άλλο από σήματα κι αυτά, και περιγράφονται με δυο τρόπους:
Με μια εξίσωση εισόδου εξόδου, π.χ.

$$y[n] = 2x[n-1] - x[n-2] + x[n-3], \tag{3}$$

ή με την κρουστική απόκρισή τους, $h[n]$, π.χ.

$$h[n] = 2\delta[n-3] - 3\delta[n-4] + 0.6\delta[n-5]. \tag{4}$$

[1] Αυτό διαβάζεται ως: ένα σήμα $x[n]$ ισούται με ένα άπειρο άθροισμα (από $-\infty$ ως $+\infty$) από συναρτήσεις δέλτα, οι οποίες έχουν τιμές (συντελεστές, βάρη) $x[k]$ και βρίσκονται στις θέσεις

$$n = -\infty ... -k, -k+1, ..., -1, 0, 1, ..., k, k+1, ..., \ , +\infty$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος, $y[n]$, συνδέεται με την είσοδο αυτού, $x[n]$, και με την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος, με την πράξη της συνέλιξης:

$$y[n] = x[n] * h[n] \tag{5}$$

Ας δούμε λοιπόν γιατί είναι τόσο χρήσιμη η έκφραση ενός σήματος ως συνάρτηση των μιγαδικών εκθετικών $e^{j\omega n}$. Ο λόγος είναι ότι αυτά τα μιγαδικά εκθετικά αποτελούν *ιδιοσυναρτήσεις* των ΓΧΑ συστημάτων. Ας τα πάρουμε όμως ένα-ένα. Αρχικά, τι ειναι η ιδιοσυνάρτηση;

Ιδιοσυνάρτηση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι ένα σήμα που οταν εφαρμοστει ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα, περνάει αυτούσιο στην έξοδο, με μόνη αλλαγη στο - πιθανώς μιγαδικό - πλάτος του. Πιο μαθηματικά, αν $x[n]$ είναι η είσοδος στο συστημα και αποτελεί ιδιοσυνάρτησή του, η έξοδος θα είναι $y[n] = \lambda x[n]$, όπου λ μια *ιδιοτιμή* του συστήματος. Ας το δούμε λίγο πιο λεπτομερώς.

Σήματα της μορφης

$$x[n] = e^{j\omega n}, \ -\infty < n < \infty \tag{6}$$

όπου ω ειναι σταθερά, αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις (eigenfunctions) ενός ΓΧΑ συστήματος. Ας το δείξουμε:

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] && (7) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\omega} = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} && (8) \end{aligned}$$

Άρα, η ιδιοτιμή (eigenvalue), που συμβολίζουμε με $H(e^{j\omega})$, είναι η

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \tag{9}$$

Επειδή πρόκειται για εν γένει μιγαδική συνάρτηση και εξαρταται από τη συχνότητα ω του εκθετικού, μπορει να γραφεί ως άθροισμα του πραγματικού και φανταστικού μέρους της ως

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) \tag{10}$$

ή με όρους μέτρου-φάσης ως

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)} \tag{11}$$

όπου

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega}) \tag{12}$$

και

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} \tag{13}$$

Συχνά, η φάση συμβολίζεται και ως $\angle H(e^{j\omega})$. Θα χρησιμοποιούμε εναλλάξ αυτούς τους συμβολισμούς, ανάλογα με το πρόβλημα.

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα της απόκρισης σε συχνότητα των ΓΧΑ συστημάτων είναι ότι αν το $h[n]$ είναι πραγματικό, η απόκριση σε συχνότητα ειναι *συζυγής συμμετρική* συνάρτηση της συχνότητας:

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega}) \tag{14}$$

Επίσης, η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται ότι το πραγματικό μέρος της απόκρισης σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$ ενός πραγματικού σήματος $h[n]$ είναι άρτιο, και το φανταστικό ειναι περιττό, δηλ.

$$\begin{aligned} H_R(e^{j\omega}) &= H_R(e^{-j\omega}) && (15)\\ H_I(e^{j\omega}) &= -H_I(e^{-j\omega}) && (16) \end{aligned}$$

Όμοια, το μέτρο της απόκρισης σε συχνότητα είναι άρτια συνάρτηση ως προς ω και η φάση είναι περιττη συνάρτηση ως προς ω, δηλ.

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= |H(e^{-j\omega})| && (17)\\ \phi(\omega) &= -\phi(-\omega) && (18) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $H(e^{j\omega})$ είναι πολύ χρήσιμη και σημαντική για τα ΓΧΑ συστήματα, και ονομάζεται *απόκριση σε συχνότητα* ή *φασματική απόκριση*[2]. Η απόκριση σε συχνότητα ορίζει το πως αλλάζει ένα μιγαδικό εκθετικό (στο μιγαδικό πλάτος του, οπως είδαμε) όταν περνάει από ένα ΓΧΑ σύστημα. Επίσης, ειναι πολύ χρησιμη στην ανάλυση ενός σήματος εισόδου ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών. Για παράδειγμα, η απόκριση ενός ΓΧΑ συστηματος στην είσοδο

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{j\omega_k n} \tag{19}$$

θα είναι

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n} \tag{20}$$

όπου $H(e^{j\omega_k})$ είναι η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος στη συχνότητα ω_k.

Γενικότερα, λόγω της γραμμικότητας του συστήματος, μπορούμε να παρατηρήσουμε οτι:

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος ειναι της μορφής $\mathbf{x[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\theta)}}$,
τότε η έξοδος θα είναι της μορφής
$$\mathbf{y[n] = AH(e^{j\omega_0})e^{j(\omega_0 n+\theta)}},$$
όπου $\mathbf{H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

και ότι

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος ειναι της μορφής $\mathbf{x[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{j(\omega_k n+\theta_k)}}$,
τότε η έξοδος θα είναι της μορφής
$$\mathbf{y[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k H(e^{j\omega_k})e^{j(\omega_k n+\theta_k)}},$$
όπου $\mathbf{H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

[2] Δεν πρέπει να σας εκπλήσσει! :-)

Ας δούμε τώρα τι θα συμβεί - σε ένα παράδειγμα - αν στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος παρουσιαστεί ένα ημίτονο συχνότητας ω_0. Θυμηθείτε ότι η σχέση του Euler αναλύει ένα ημίτονο σε μιγαδικά εκθετικά, τα οποία είδαμε ότι αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις ενός ΓΧΑ συστήματος.

Παράδειγμα:
Έστω ένα ημίτονο της μορφής

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi) \tag{21}$$

Βρείτε την έξοδό ενός ΓΧΑ συστήματος με αυτό το ημίτονο στην είσοδό του.

Λύση:
Ξέρουμε ότι

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\omega_0 n}e^{j\phi} + \frac{A}{2}e^{-j\omega_0 n}e^{-j\phi} \tag{22}$$

Επειδή το σύστημα είναι γραμμικό, η έξοδος για την παραπάνω είσοδο ισούται με το άθροισμα των εξόδων για είσοδο κάθε ένα από τα παραπάνω μιγαδικά εκθετικά. Άρα

$$y[n] = \frac{A}{2}H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}e^{j\phi} + \frac{A}{2}H(e^{-j\omega_0})e^{-j\omega_0 n}e^{-j\phi} \tag{23}$$

Στην ειδική περίπτωση που το ΓΧΑ σύστημα είναι πραγματικό, είπαμε ότι ισχύει

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega}) \tag{24}$$

και αν το αναλύσουμε σε μορφή μέτρου-φάσης, η παραπάνω έξοδος θα γίνει

$$\begin{aligned}
y[n] &= \frac{A}{2}H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}e^{j\phi} + \frac{A}{2}H^*(e^{j\omega_0})e^{-j\omega_0 n}e^{-j\phi} && (25)\\
&= \frac{A}{2}|H(e^{j\omega_0})|e^{j\angle H(e^{j\omega_0})}e^{j\omega_0 n}e^{j\phi} + \frac{A}{2}|H(e^{j\omega_0})|e^{-j\angle H(e^{j\omega_0})}e^{-j\omega_0 n}e^{-j\phi} && (26)\\
&= \frac{A}{2}|H(e^{j\omega_0})|\Big(e^{j\angle H(e^{j\omega_0})}e^{j\omega_0 n}e^{j\phi} + e^{-j\angle H(e^{j\omega_0})}e^{-j\omega_0 n}e^{-j\phi}\Big) && (27)\\
&= \frac{A}{2}|H(e^{j\omega_0})|2\cos(\omega_0 n + \phi + \angle H(e^{j\omega_0})) && (28)\\
&= A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n + \phi + \angle H(e^{j\omega_0})) && (29)
\end{aligned}$$

Άρα μπορούμε να πούμε ότι:

Αν η είσοδος ενός <u>πραγματικού</u> ΓΧΑ συστήματος ειναι της μορφής

$$\mathbf{x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta)},$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$\mathbf{y[n] = A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n + \theta + \phi(\omega_0))},$$

όπου $\mathbf{H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

και προφανώς το παραπάνω μπορει να γενικευτεί ως

Αν η είσοδος ενός <u>πραγματικού</u> ΓΧΑ συστήματος ειναι της μορφής

$$\mathbf{x[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k n + \theta_k)},$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$\mathbf{y[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k |H(e^{j\omega_k})| \cos(\omega_k n + \theta_k + \phi(\omega_k))},$$

όπου $\mathbf{H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)}}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

Παρατηρήστε ότι

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j(\omega+2\pi)n}) = H(e^{j\omega}) \tag{30}$$

γιατί $e^{j2\pi n} = 1$, για κάθε n. Γενικότερα,

$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}) \tag{31}$$

Με άλλα λόγια, η απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$ είναι περιοδική με περίοδο 2π. Εδώ λοιπόν είναι ευκαιρία να επαναλάβουμε τη συζήτηση που είχαμε κάνει όταν μελετούσαμε τα μιγαδικά εκθετικά $e^{j\omega_0 n}$ και τη συμπεριφορά τους στο χώρο της συχνότητας, για να αιτιολογήσουμε και την περιοδικότητα της $H(e^{j\omega})$. Είχαμε πει τότε ότι λόγω της 2π-περιοδικότητας στη συχνότητα ενός μιγαδικού εκθετικού $e^{j\omega_0 n}$, όσο αυξάνουμε τη συχνότητα ω_0 από το $\omega_0 = 0$ ως το $\omega_0 = \pi$, τότε οι ταλαντώσεις του σήματος γίνονται όλο και πιο γρήγορες. Όμως, όταν αυξήσουμε το ω_0 από $\omega_0 = \pi$ ως $\omega_0 = 2\pi$, τότε οι ταλαντώσεις του γίνονται όλο και πιο αργές! Το ίδιο μοτίβο επαναλαμβάνεται και μετά το $\omega_0 = 2\pi$, ξεκινώντας από γρήγορες ταλαντώσεις γύρω από το 2π, φτάνοντας σε πιο αργές γύρω από το 3π, και ξανά σε πιο γρήγορες γύρω από το $\omega_0 = 4\pi$. Αντίστοιχα, στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, οι γρήγορες ταλαντώσεις γίνονται γύρω από τις συχνότητες $\omega_0 = \pm\pi$, ενώ οι πιο αργές (προφανώς) γύρω από τη συχνότητα $\omega_0 = 0$.

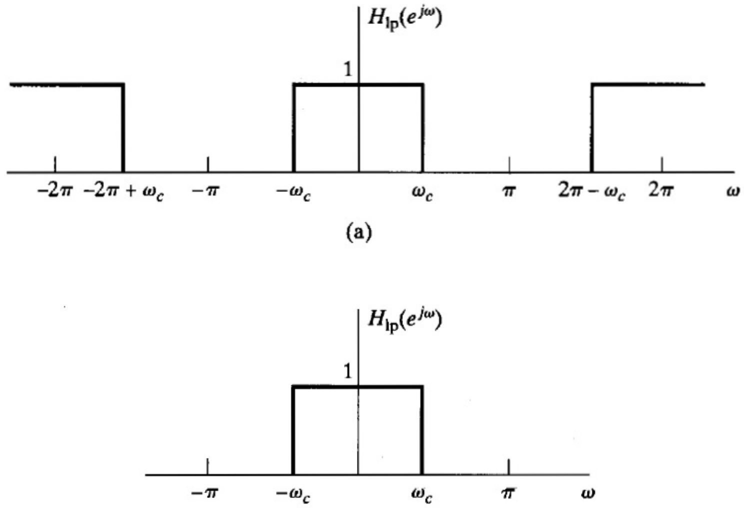
Αφού λοιπόν η απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$ είναι ένα άθροισμα από μιγαδικά εκθετικά σήματα (περιοδικά στη συχνότητα, όπως είπαμε), περιμένει κανείς να είναι κι αυτή περιοδική στο χώρο της συχνότητας με περίοδο 2π. Ένας άλλος τρόπος να εξαχθεί αυτό το συμπέρασμα είναι ότι αφού τα σήματα $e^{j\omega_0 n}$ και $e^{j(\omega_0+2\pi)n}$, για $-\infty < n < +\infty$, είναι ακριβώς τα ίδια, τότε ένα σύστημα θα πρέπει να αποκρίνεται το ίδιο σε αυτά τα δυο σήματα. Άρα θα πρέπει να είναι κι αυτό περιοδικό στη συχνότητα.

Για τους παραπάνω λόγους, αρκεί να "βλέπουμε" μια απόκριση $H(e^{j\omega})$ σε ένα διάστημα διάρκειας 2π. Προτιμούμε το διάστημα $-\pi < \omega \leq \pi$ ως "παράθυρο" στο χώρο της συχνότητας. Έτσι, οι "υψηλές " συχνότητας βρίσκονται γύρω από τις συχνότητες $\omega_0 = \pm\pi$, ενώ οι "χαμηλές " γύρω από τη συχνότητα $\omega_0 = 0$.

3 Ιδανικά Φίλτρα

Μια σημαντική κατηγορία ΓΧΑ συστημάτων περιλαμβάνουν αυτά τα συστήματα για τα οποία η απόκριση σε συχνότητα είναι ίση με τη μονάδα σε ένα συγκεκριμένο εύος συχνοτήτων και μηδενική στις υπόλοιπες συχνότητες. Αυτά τα συστήματα ονομάζονται *ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας - ιδεαλ φρεχυενςψ-σελεςτιε φιλτερς*. Η απόκριση σε συχνότητα ενός ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου φαίνεται στο Σχήμα (1).

Ο όρος ''χαμηλοπερατό'' προέρχεται από το γεγονός ότι το φίλτρο αυτό αφήνει κάποιες χαμηλές συχνότητες ανέπαφες, μικρότερες από ω_c, ενώ ''κόβει'' (μηδενίζει, καταστέλλει) τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από ω_c. Να θυμάστε ότι η απόκριση σε συχνότητα είναι περιοδική, γι΄ αυτό και υπάρχουν επαναλήψεις του



Σχήμα 1: Ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο.

γύρω από τα πολλαπλάσια του 2π. Λόγω ακριβώς αυτής της περιοδικότητας, η απόκριση σε συχνότητα ορίζεται πλήρως από τη συμπεριφορά της σε ένα διάστημα $(-\pi, \pi]$, οπότε μια πιο συνήθης μορφή της παρουσιάζεται στο Σχήμα (1β), όπου θεωρούμε ότι επαναλαμβάνεται ανά 2π, χωρίς απαραίτητα να τη σχεδιάζουμε.

Τα ιδανικά *υψιπερατά - highpass*, *ζωνοπερατά - bandpass*, και *ζωνοφρακτικά - bandstop* φίλτρα φαίνονται στο Σχήμα (2).

Ας δούμε δυο παραδείγματα συστημάτων και υπολογισμού απόκρισης σε συχνότητα.

Παράδειγμα:
Έστω το απλό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών ως

$$y[n] = x[n - n_d] \tag{32}$$

που δεν είναι τίποτε περισσότερο από ένα σύστημα που καθυστερεί την είσοδό του κατά n_d δείγματα. Έστω η είσοδος $x[n] = e^{j\omega n}$, τότε η έξοδος θα είναι

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n} \tag{33}$$

Άρα η απόκριση σε συχνότητα είναι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \tag{34}$$

Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της απόκρισης σε συχότητα είναι

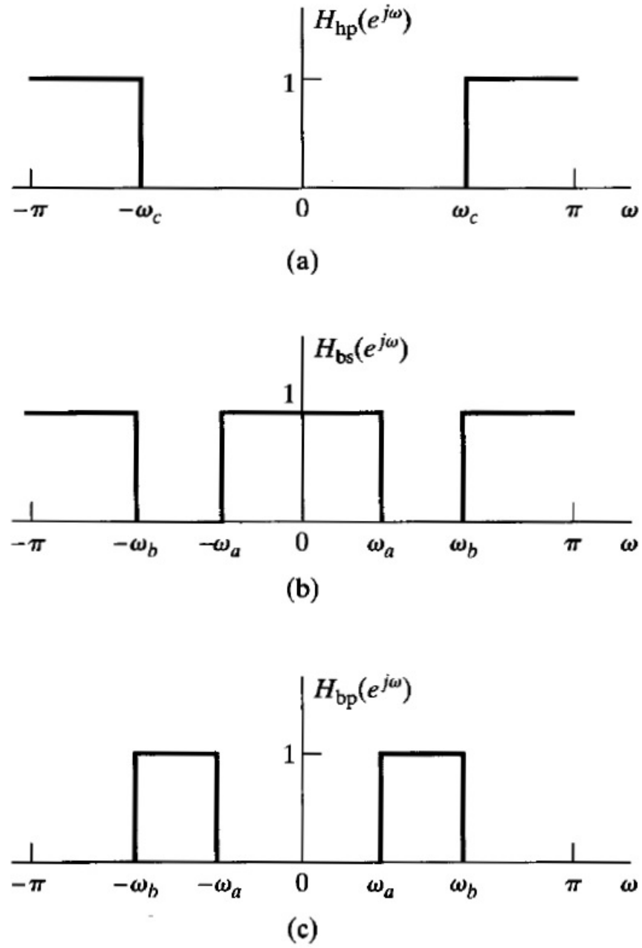
$$H_R(e^{j\omega n}) = \cos(\omega n_d) \tag{35}$$

και

$$H_I(e^{j\omega n}) = -\sin(\omega n_d) \tag{36}$$

αντίστοιχα. Το μέτρο και η φάση της είναι

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \tag{37}$$



Σχήμα 2: Ιδανικό φίλτρα επιλογής συχνότητας.

και

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d \tag{38}$$

αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι η καθυστέρηση n_d μεταφράζεται ως φάση στην απόκριση σε συχνότητα του συστήματος! Πολύ σημαντική παρατήρηση!

Παράδειγμα:
Έστω η κρουστική απόκριση

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{39}$$

η οποία περιγράφει ένα σύστημα εξομάλυνσης (moving-average). Ας θεωρήσουμε ότι το σύστημα είναι αιταιτό, κι έτσι $M_1 = 0$. Τότε, η απόκριση σε συχνότητα θα είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{n=0}^{M_2} e^{-j\omega n} \tag{40}$$

Κάνοντας πράξεις, έχουμε

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M_2+1}\Big(\frac{1-e^{-j\omega(M_2+1)}}{1-e^{-j\omega}}\Big) && (41)\\
&= \frac{1}{M_2+1}\frac{e^{-j\omega(M_2+1)/2}\big(e^{j\omega(M_2+1)/2}-e^{-j\omega(M_2+1)/2}\big)}{e^{-j\omega/2}\big(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}\big)} && (42)\\
&= \frac{1}{M_2+1}\frac{\sin\Big(\omega(M_2+1)/2\Big)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega M_2/2} && (43)
\end{aligned}
$$

Ας δούμε τώρα αυτό το σύστημα λίγο πιο λεπτομερώς. Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής μηδενίζεται όταν

$$\sin\Big(\omega(M_2+1)/2\Big)=0 \Longleftrightarrow \frac{\omega(M_2+1)}{2}=k\pi,\ \ k\in Z \Longleftrightarrow \omega=\frac{2k\pi}{M_2+1},\ \ k\in Z \tag{44}$$

και ο παρονομαστής όταν

$$\sin(\omega/2)=0 \Longleftrightarrow \omega=2l\pi,\ \ l\in Z \tag{45}$$

Άρα όταν μηδενίζεται ο παρονομαστής, μηδενίζεται και ο αριθμητής. Άρα τι συμβαίνει στα πολλαπλάσια του 2π; Υπάρχει κάποια απροσδιοριστία. Όμως ξέρουμε ότι

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin(\lambda\omega)}{\sin(\omega)}=\lambda \tag{46}$$

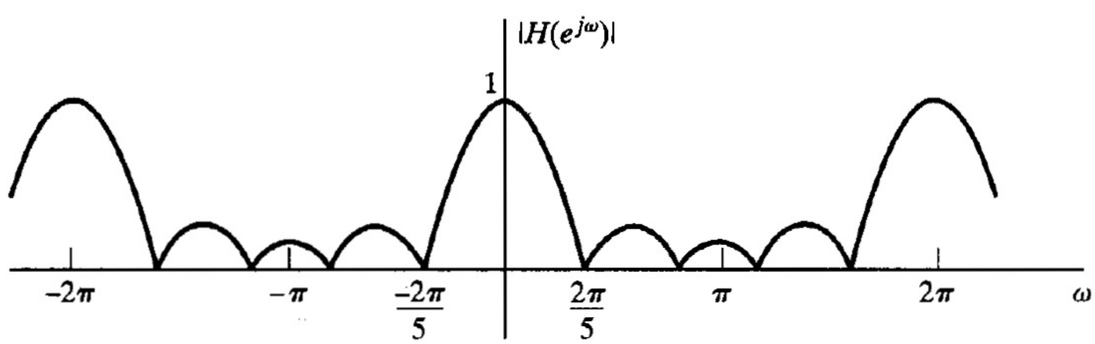
και άρα στα σημεία μηδενισμού του παρονομαστή (και ταυτόχρονα του αριθμητή), η απόκριση σε συχνότητα έχει τιμή

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{2M_2+1}(2M_2+1)=1 \tag{47}$$

Άρα τελικά, το φάσμα πλάτους της απόκρισης σε συχνότητα για $M_2=4$, είναι

$$|H(e^{j\omega})|=\frac{1}{M_2+1}\left|\frac{\sin\Big(\omega(M_2+1)/2\Big)}{\sin(\omega/2)}\right||e^{-j\omega M_2/2}|=\frac{1}{M_2+1}\left|\frac{\sin\Big(\omega(M_2+1)/2\Big)}{\sin(\omega/2)}\right| \tag{48}$$

και φαίνεται στο Σχήμα (3).



Σχήμα 3: Φάσμα πλάτους απόκρισης σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$ του σήματος εξομάλυνσης για $M_1=0$, $M_2=4$.

Όσον αφορά το φάσμα φάσης, παρατηρούμε ότι η Σχέση (43) έχει μια σταθερή φάση $-\omega M_2/2$, αλλά πρέπει σε αυτή να δούμε αν υπάρχει φάση από το πηλίκο των ημιτόνων. Με άλλα λόγια, να ελέγξουμε αν αυτό το πηλίκο γίνεται αρνητικό, για κάποιο διάστημα συχνότητας ω. Όποτε (και αν) αυτό συμβαίνει, το αρνητικό πρόσημο του πηλίκου μετατρέπεται σε φάση π με τη σχέση του Euler ως

$$e^{j\pi} = -1 \tag{49}$$

και αυτή η φάση προστίθεται στην ήδη υπάρχουσα φάση $-\omega M_2/2$. Έτσι είμαστε βέβαιοι/ες ότι το πηλίκο ημιτόνων είναι πάντα θετικό, όπως ορίζει η αναπαράσταση μέτρου-φάσης που θέλουμε να το γράψουμε. Διαφορετικά, αν δηλαδή το πηλίκο είναι θετικό για κάποιο διάστημα, εκεί η φάση παραμένει ως έχει. Ας το δούμε λοιπόν.

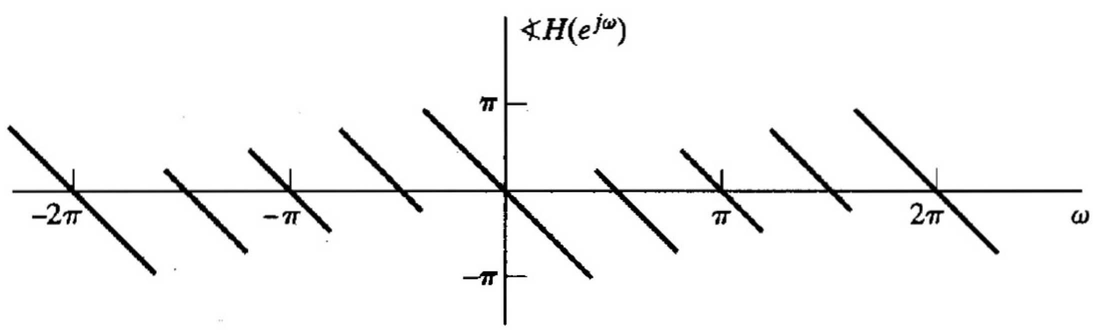
Ο παρονομαστής $\sin(\omega/2)$ είναι πάντα θετικός στο διάστημα $[0, 2\pi)$, άρα πρέπει να δούμε το πρόσημο του αριθμητή. Ο αριθμητής αλλάζει πρόσημο κάθε $\frac{2\pi}{M_2+1}$, ξεκινώντας στο $[0, \frac{2\pi}{M_2+1})$ με θετικές τιμές.

Για $M_2 = 4$, ο αριθμητής είναι αρνητικός στα διαστήματα $[\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5})$ και $[\frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5})$, το αρνητικό πρόσημο του οποίου μπορεί να γραφεί ως φάση $-1 = e^{j\pi}$. Στα ενδιάμεσα διαστήματα, ο αριθμητής (και άρα το πηλίκο) είναι θετικό, οπότε δεν αλλάζει κάτι στη φάση.

Άρα τελικά η φάση μπορεί να γραφεί ως

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -2\omega, & 0 \le \omega < \frac{2\pi}{5} \\ -2\omega + \pi, & \frac{2\pi}{5} \le \omega < \frac{4\pi}{5} \\ -2\omega, & \frac{4\pi}{5} \le \omega < \frac{6\pi}{5} \\ -2\omega + \pi, & \frac{6\pi}{5} \le \omega < \frac{8\pi}{5} \\ -2\omega, & \frac{8\pi}{5} \le \omega < 2\pi \end{cases} \tag{50}$$

Επειδή το σήμα $h[n]$ είναι πραγματικό, θα υπάρχει περιττή συμμετρία στο φάσμα φάσης, και άρα το φάσμα φάσης θα είναι όπως στο Σχήμα (4).



Σχήμα 4: Φάσμα φάσης απόκρισης σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$ του σήματος εξομάλυνσης για $M_1 = 0$, $M_2 = 4$.

Έχοντας λοιπόν αυτήν την ανάλυση σε μέτρο και φάση, μπορούμε να καταλάβουμε τι (περίπου) επίπτωση θα έχει το παραπάνω σύστημα σε ένα, παραδείγματος χάριν, ημίτονο συχνότητας ω_0 που θα εμφανιστεί στην είσοδό του. Ας το δούμε με αριθμητικό παράδειγμα, αλλά κοιτώντας μόνο τα Σχήματα (3, 4).

Έστω ότι το ημίτονο έχει συχνότητα $\omega_0 = \pi/5$, μέτρο A και φάση θ, είναι δηλαδή της μορφής

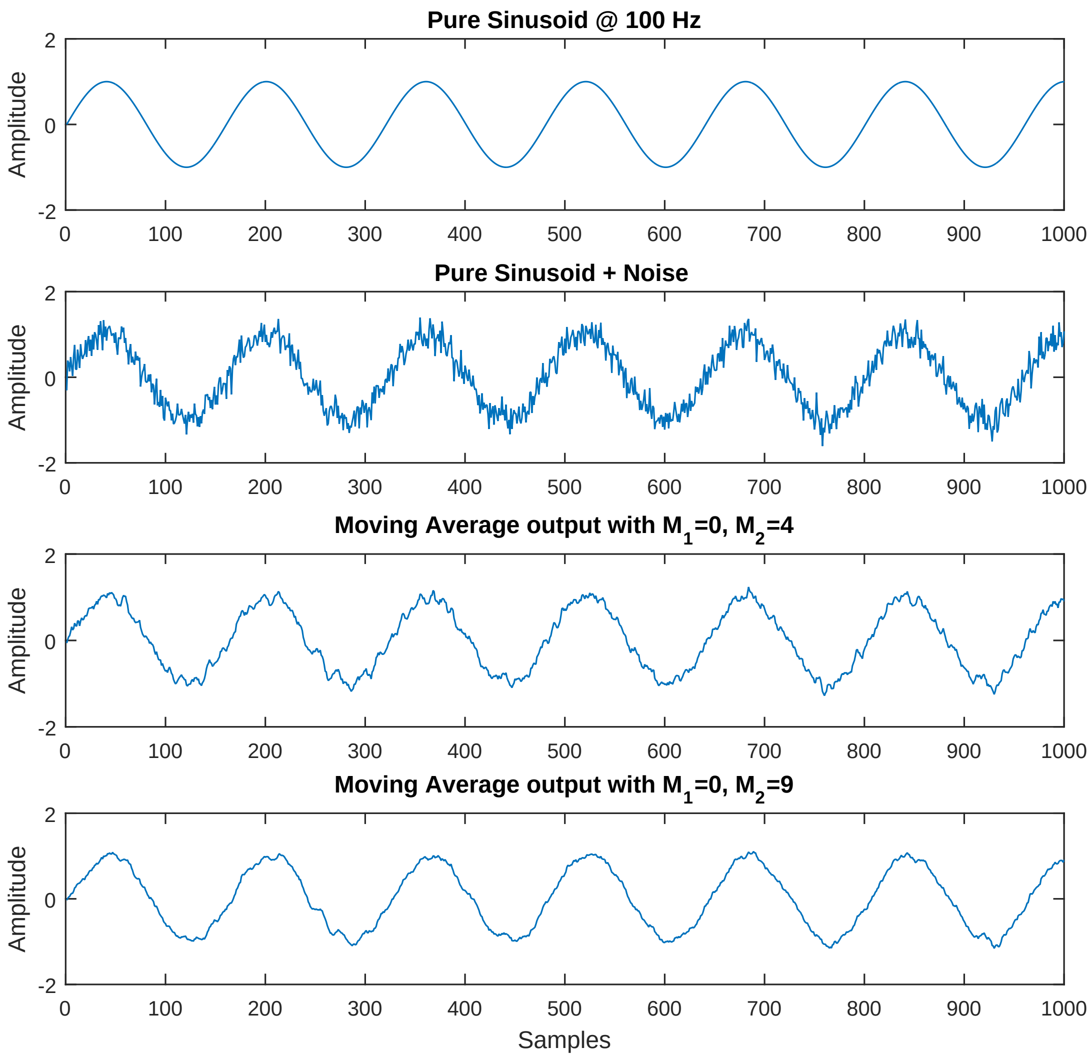
$$x[n] = A\cos(\pi n/5 + \theta) \tag{51}$$

Ξέρουμε από προηγούμενη ανάλυση ότι η έξοδος του συστήματος θα είναι κι αυτή ημιτονοειδούς μορφής, με πιθανώς αλλαγμένο πλάτος και φάση. Κοιτάζοντας το πλάτος της συχνότητας $\omega_0 = \pi/5$ στο φάσμα πλάτους του Σχήματος (3), βλέπουμε ότι στην έξοδο το πλάτος θα μειωθεί περίπου στο μισό, ενώ βλέποντας τη φάση της συχνότητας $\omega_0 = \pi/5$ στο φάσμα φάσης του Σχήματος (4), βλέπουμε ότι στην έξοδο η φάση θα είναι ίση με $(\theta - 2\pi/5)$.

Όμοια, αν η συχνότητα της εισόδου είναι $\omega_0 = \pi/2$, τότε το πλάτος του ημιτόνου θα μειωθεί σημαντικά (περίπου στο 1/3 του), όπως μπορούμε να δούμε από το φάσμα πλάτους στη συχνότητα $\omega_0 = \pi/2$, ενώ η φάση που θα προστεθεί στην αρχική φάση θ είναι μηδέν, γιατί πέφτουμε στο διάστημα $[2\pi/5, 4\pi/5)$, όπου η φάση είναι $-2\omega + \pi$, και άρα για $\omega_0 = \pi/2$ έχουμε φάση συστήματος ίση με μηδέν. Άρα η φάση της εισόδου παραμένει αμετάβλητη.

Πέρα από συγκεκριμένες εισόδους, μπορούμε να πούμε ότι το παραπάνω σύστημα έχει χαρακτηριστικά *βαθυπερατού* φίλτρου, μια και κρατά σχετικά ανέπαφα τα πλάτη που βρίσκονται σε χαμηλές συχνότητες, ενώ αντίθετα αδυνατίζει σημαντικά τα πλάτη μεγαλύτερων συχνοτήτων. Γι΄ αυτό άλλωστε και το χαρακτηρίσαμε ως σύστημα εξομάλυνσης στην αρχή της μελέτης μας.

Κλείνοντας, δείτε ένα πραγματικό παράδειγμα στο Σχήμα (5). Στο πρώτο σχήμα, βλέπετε 1000 δείγματα



Σχήμα 5: Παράδειγμα moving average φίλτρου στο MATLAB.

ενός ημιτόνου στα 100 Hz, δειγματοληπτημένου στα 16000 Hz, άρα με συχνότητα $\omega_0 = \frac{2\pi 100}{16000} = 0.0393$ rad. Στο δεύτερο σχήμα, του προσθέτουμε τυχαίο θόρυβο από κανονική κατανομή και θεωρούμε αυτό ως είσοδο σε ένα σύστημα moving average. Στο τρίτο σχήμα, φαίνεται η έξοδος του συστήματος, για $M_1 = 0, M_2 = 4$, ενώ στο τέταρτο σχήμα, η έξοδος για $M_1 = 0, M_2 = 9$.

Ο κώδικας MATLAB που υλοποιεί το παραπάνω παράδειγμα είναι ο ακόλουθος.

```
% Dhmiourgia 1000 deigmatwn hmitonou sta 100 Hz
x = sin(2*pi*100/16000*[0:1000]);

% Pros8hkh 8orybou
xx = x + 0.2*randn(1,1001);

% Apeikonish
subplot(411); plot(x);
subplot(412); plot(xx);

% Ylopoihsh filtrou
M_1 = 0;
M_2 = 4;
C = 1/(M_1+M_2+1);

% Filtrarisma
y = filter(C*ones(1,M_1+M_2+1), 1, xx);

% Apeikonish
subplot(413); plot(y);

% Ylopoihsh filtrou
M_1 = 0;
M_2 = 9;
C = 1/(M_1+M_2+1);

% Filtrarisma
y = filter(C*ones(1,M_1+M_2+1), 1, xx);

% Apeikonish
subplot(414); plot(y);
```

Μπορείτε να πειραματιστείτε με τον παραπάνω κώδικα για διάφορες εισόδους (αθροίσματα ημιτόνων), διαφορετική ισχύ θορύβου (αλλάξτε το 0.2 στην εντολή randn), και για διάφορες τιμές του M_2.

4 Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ σύστημα

Ως τώρα είδαμε ότι μιγαδικά εκθετικά της μορφής $e^{j\omega n}$, $-\infty < n < \infty$ παράγουν εξόδους της μορφής $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ σε ΓΧΑ συστήματα, αποτελούν δηλαδή ιδιοσυναρτήσεις των ΓΧΑ συστημάτων.

Τέτοιες μορφές εισόδων, μη μηδενικές για κάθε n, μπορεί να σας φαίνονται μη πρακτικά μοντέλα σημάτων. Όμως, όπως θα δούμε τώρα, μοντέλα τέτοιας μορφής είναι κρίσιμα για την μαθηματική αναπαράσταση ενός μεγάλου εύρους σημάτων, ακόμα και αυτών που υπάρχουν μόνο σε πεπερασμένο διάστημα. Έτσι, θα μάθουμε περισσότερα για τη συμπεριφορά ΓΧΑ συστημάτων αν θεωρήσουμε ως εισοδό τους πιο πρακτικά σήματα, όπως το

$$x[n] = e^{j\omega n}u[n] \tag{52}$$

δηλαδή μιγαδικά εκθετικά που εφαρμόζονται ξαφνικά σε μια τυχαία χρονική στιγμή, που για λόγους ευκολίας εδώ θεωρούμε ότι είναι η $n = 0$. Με χρήση του ολοκληρώματος της συνέλιξης, θα έχουμε οτι η έξοδος είναι της μορφής

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^{n} h[k]e^{-j\omega kn}\right)e^{j\omega n}, & n \geq 0 \end{cases} \tag{53}$$

Αν θεωρήσουμε την έξοδο για $n \geq 0$, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega kn}\right)e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega kn}\right)e^{j\omega n} && (54) \\ &= H(e^{j\omega n})e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} && (55) \\ &= y_{ss}[n] + y_t[n] && (56) \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι η έξοδος αποτελείται από δυο όρους. Ο πρώτος όρος, $y_{ss}[n]$, ονομάζεται *steady state response*. Είναι ακριβώς ίδιος με την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος για ένα μιγαδικό εκθετικό που ορίζεται για κάθε n. Ο δεύτερος όρος

$$y_t[n] = -\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} \tag{57}$$

ονομάζεται *transient response*, και μπορεί κανείς να τον δει ως το ''πόσο απέχει'' το αποτέλεσμά μας από το αποτέλεσμα της ιδιοτιμής που είδαμε νωρίτερα. Θα δείξουμε ότι για κάποιες περιπτώσεις η transient response μπορεί να πλησιάζει το μηδέν.

Για να δούμε πότε συμβαίνει αυτό, ας αναζητήσουμε το μέγεθος του δεύτερου αυτού όρου. Το μέτρο του είναι φραγμένο, ως

$$|y_t[n]| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}e^{j\omega n}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]| \tag{58}$$

Με βάση αυτό, διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

1. Αν η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, έτσι ώστε $h[n] \neq 0,\ 0 \leq n \leq M$, και παντού αλλού μηδέν, τότε ο όρος $y_t[n] = 0,\ n > M - 1$. Άρα τότε

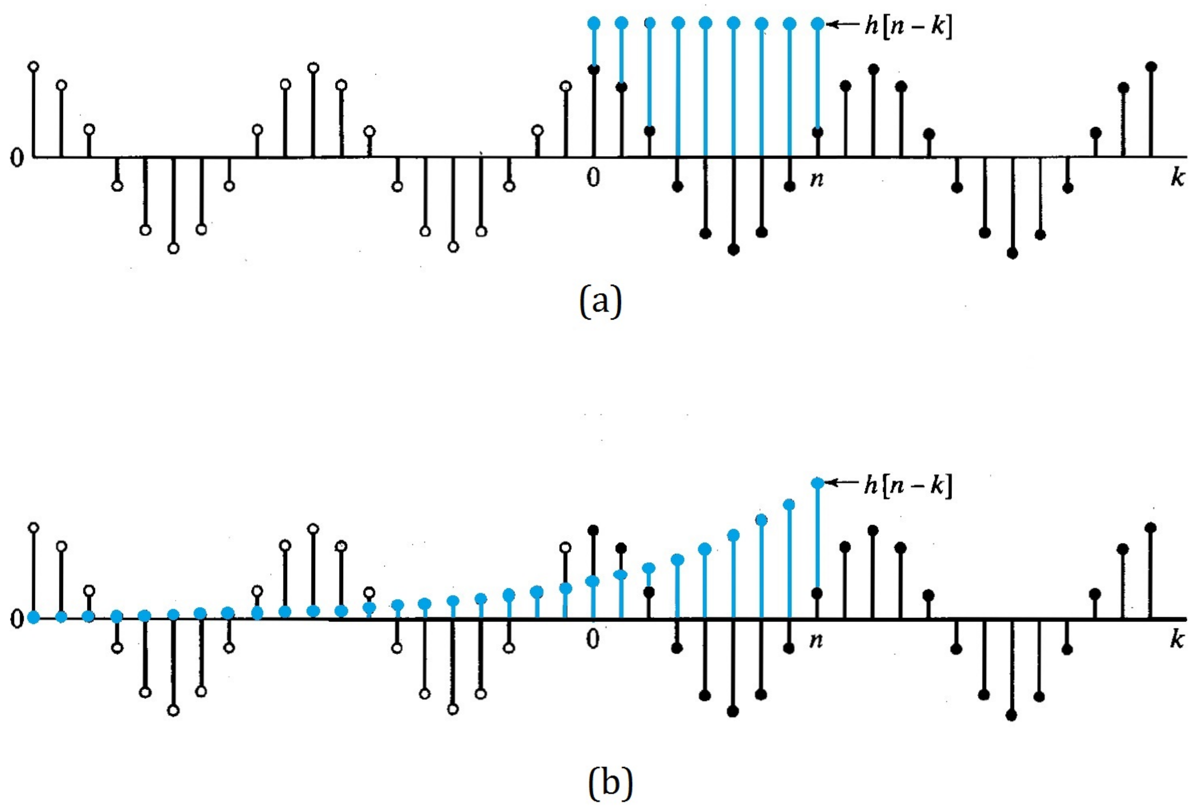
$$y[n] = y_{ss}[n] = H(e^{j\omega n})e^{j\omega n},\ n > M - 1 \tag{59}$$

2. Όταν η κρουστική απόκριση έχει άπειρη διάρκεια, τότε η transient response δεν εξαφανίζεται ακαριαία, αλλά αν οι τιμές της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ πλησιάζουν στο μηδέν όσο αυξάνει το n, τότε και το $y_t[n]$ θα πλησιάζει στο μηδέν! Είδατε στη Σχέση (58) ότι η transient reponse είναι φραγμένη από το άθροισμα των απολύτων τιμών ΟΛΩΝ των δειγμάτων της κρουστικής απόκρισης. Αν λοιπόν το άθροισμα αυτό είναι φραγμένο, έτσι ώστε

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]| < \infty \tag{60}$$

τότε το σύστημα είναι ευσταθές, όπως γνωρίζετε. Από τη Σχέση (58), συνεπάγεται ότι για ευσταθή συστήματα, η transient response πρέπει να φθίνει προς το μηδέν, όσο $n \to \infty$. Έτσι, μια ικανή συνθήκη για να φθίνει η transient response γρήγορα είναι το σύστημα να είναι ευσταθές.

Ας δούμε ένα οπτικό παράδειγμα. Το Σχήμα (6) δείχνει το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού εκθετικού ($\Re\{e^{j\omega n}\} = \cos(\omega n)$) με συχνότητα $\omega = 2\pi/10$. Και στα δυο υπο-σχήματα, οι σκούρες τελείες δείχνουν τα δείγματα του σήματος $\Re\{e^{j\omega n}\}u[n]$, δηλ. ένα σήμα που εμφανίζεται ξαφνικά, ενώ οι λευκές τελείες δείχνουν τα υπόλοιπα δείγματα του $\Re\{e^{j\omega n}\}$, που "λείπουν". Οι μπλέ τελείες δείχνουν τα δείγματα της κρουστικής απόκρισης του συστήματος $h[n]$, που έχει υποστεί ανάκλαση και μετατόπιση, όπως είχαμε δει στη συνέλιξη.



Σχήμα 6: Παράδειγμα ξαφνικής εισόδου σε ΓΧΑ σύστημα όταν (a) η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένη, (b) η κρουστική απόκριση είναι άπειρη.

Στην περίπτωση ($6a$), τα δείγματα της κρουστικής απόκρισης είναι πεπερασμένα, και συγκεκριμένα 9 δείγματα, με $n = 8$ στο $h[n-k]$, όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω. Είναι ξεκάθαρο εδώ ότι η έξοδος θα αποτελείται μόνο από το steady state κομμάτι, για $n \geq 8$, ενώ στην περίπτωση ($6b$), όπου η κρουστική απόκριση είναι άπειρης διάρκειας, είναι ξεκάθαρο ότι τα δείγματα που "λείπουν" από το $\Re\{e^{j\omega n}\}u[n]$, δηλ. αυτά με τις λευκές τελείες, έχουν όλο και λιγότερη επίδραση στην έξοδο όσο το n αυξάνει, λόγω της φθίνουσας μορφής της κρουστικής απόκρισης.

Κλείνοντας, η συνθήκη

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \tag{61}$$

είναι ικανή και αναγκαία για την κυριαρχία του steady state κομματιού της εξόδου. Θυμηθείτε ότι η ίδια συνθήκη είναι ικανή και αναγκαία για την ύπαρξη της απόκρισης σε συχνότητα, αλλά και για την ευστάθεια του συστήματος. Έτσι, ένα μιγαδικό εκθετικό που υπάρχει για κάθε n μπορεί κανείς να το φανταστεί να ξεκινάει από το $n = -\infty$. Η ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης των μιγαδικών εκθετικών εξαρτάται από την ευστάθεια του συστήματος, κι έτσι σε πεπερασμένο n, η transient response θα πρέπει να έχει μηδενιστεί, ώστε να βλέπουμε μόνο τη steady state response $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ για κάθε πεπερασμένο n.