Περιγραφή Συστημάτων με Εξισώσεις Διαφορών

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζης
Δρ. Επιστήμης Η/Υ Πανεπιστημίου Κρήτης
Δρ. Επεξεργασίας Σήματος Πανεπιστημίου Rennes 1

1 Οκτωβρίου 2015

1 Εξισώσεις Διαφορών

Έχουμε δει ως τώρα οτι η συνέλιξη εκφράζει την έξοδο ενός ΓΧΑ συστηματος ως συνάρτηση των τιμών εισόδου $x[n]$. Για παράδειγμα, ένα σύστημα με μοναδιαία απόκριση $h[n] = a^n u[n]$ περιγράφεται με τη σχέση

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x[n-k] \tag{1}$$

Αν και η παραπάνω εξίσωση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την έξοδο $y[n]$ για μια είσοδο $x[n]$, από υπολογιστικής πλευράς δεν είναι και τόσο αποτελεσματική. Σε μερικές περιπτώσεις, μπορει να ειναι δυνατό να εκφράσουμε την έξοδο με όρους των προηγούμενων τιμών της εισόδου και της εξόδου. Το παραπάνω σύστημα, για παράδειγμα, μπορει να γραφεί ως

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \tag{2}$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται *γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές*. Η γενική μορφή τέτοιων εξισώσεων διαφορών δίνεται ως

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \tag{3}$$

όπου a_k, b_k είναι σταθερές που ορίζουν το σύστημα. Αν $a_k = 0$, για κάθε k, τότε η εξίσωση λέγεται μη αναδρομική, διαφορετικά λέγεται αναδρομική. Όμως για να μπορούμε να λύσουμε αυτές τις εξισώσεις, χρειαζόμαστε κάποιες τιμές που λέγονται *αρχικές συνθήκες*. Για παράδειγμα, για μια είσοδο $x[n]$ που ξεκινάει τη χρονική στιγμή $n = 0$ (δηλ. είναι μηδενική για $n \leq -1$), η λύση στη Σχέση (3) τη στιγμή $n = 0$ εξαρτάται από τις τιμές εξόδου $y[-1], y[-2], \cdots, y[-N]$. Έτσι, βλέπετε ότι αυτές οι αρχικές συνθήκες πρέπει να καθοριστούν πρώτα πριν λύσουμε την εξίσωση για $n \geq 0$. Όταν οι αρχικές συνθήκες αυτές είναι όλες μηδεν, τοτε λέμε οτι το σύστημα είναι *σε ηρεμία*.

Για μη αναδρομικά συστήματα, η εξίσωση διαφορών δίνεται ως

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{4}$$

και η έξοδος, όπως βλέπετε, είναι απλά το άθροισμα των τιμών της εισόδου, με βάρη b_k. Ως αποτέλεσμα, αφού η εξίσωση είναι γραμμένη με τη μορφή συνέλιξης, η μοναδιαία απόκριση βρίσκεται αντικαθιστώντας το $x[n]$ με το $\delta[n]$, και είναι απλά

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] \tag{5}$$

Έτσι, το $h[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας και λέγεται *finite impulse response - FIR* σύστημα. Αν όμως $a_k \neq 0$, η μοναδιαία απόκριση ειναι, εν γενει, άπειρη σε διάρκεια, και το σύστημα λέγεται *infinite impulse response - IIR* σύστημα.

Προτού εξειδικεύσουμε περισσότερο σε ΓΧΑ συστήματα, ας αναφέρουμε ότι υπάρχουν πολλοί τροποι να λύσει κανείς μια εξίσωση διαφορών για μια είσοδο $x[n]$. Ο πρώτος τροπος είναι να υπολογίσουμε αναλυτικά για όλες τις τιμές της εξόδου, αλλά αυτό ειναι βολικό μόνο αν χρειαζόμαστε λίγες τιμές της εξόδου. Ένας άλλος τρόπος είναι με χρήση μετασχ. Z, αλλά αυτόν θα τον δούμε αργότερα. :-) Ο τρίτος τροπος είναι να βρούμε την *ομογενή* και την *ειδική* λύση, όπως θα δείξουμε παρακάτω.

Δεδομένης μιας εξίσωσης διαφορών, η γενική λύση δίνεται από το άθροισμα δυο όρων,

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] \tag{6}$$

όπου $y_h[n]$ είναι γνωστή ως η *ομογενής λύση* και $y_p[n]$ η *ειδική λύση*. Η ομογενής λύση ειναι η απόκριση του συστήματος στις αρχικές συνθήκες, θεωρώντας ότι η είσοδος ειναι μηδέν, δηλ. $x[n] = 0$. Η ειδική λύση είναι η απόκριση του συστήματος, θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, στην είσοδο $x[n]$.

Η ομογενής λύση υπολογίζεται από την ομογενή εξίσωση διαφορών

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = 0 \tag{7}$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης μπορει να υπολογιστει θεωρώντας ότι είναι της μορφης

$$y_h[n] = z^n \tag{8}$$

Με αντικατάσταση, έχουμε την πολυωνυμική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{n-k} = 0 \tag{9}$$

ή

$$z^{n-N}(z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \cdots + a_{N-1} z + a_N) = 0 \tag{10}$$

Το πολυώνυμο στην παρενθεση λέγεται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο*. Επειδή ειναι βαθμού N, θα έχει N ρίζες, πραγματικές η μιγαδικές. Αν οι συντελεστές a_k είναι πραγματικοί, αυτές οι ρίζες θα έρχονται σε συζυγή ζεύγη. Αν έχουμε N διακριτές ρίζες z_i, $z_i \neq z_k$, για $k \neq i$, η γενική λύση στην ομογενή εξίσωση διαφορών είναι η

$$y_h[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k z_k^n \tag{11}$$

όπου A_k επιλέγονται έτσι ώστε να ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες.

Για πολλαπλές ρίζες, η λύση πρεπει να τροποποιηθεί. Αν z_1 είναι μια πολλαπλή ριζα, πολλαπλότητας m, και οι υπόλοιπες ριζες είναι διακριτές, η ομογενής λύση γράφεται ως

$$y_h[n] = (A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_m n^{m-1}) z_1^n + \sum_{k=m+1}^{N} A_k z_k^n \tag{12}$$

Για την ειδική λύση, είναι απαραιτητο να βρούμε την ακολουθία $y_p[n]$ που ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών για δεδομένο $x[n]$. Εν γένει, η ειδική λύση απαιτεί μια κάποια... δημιουργικότητα και φαντασία. :-) Όμως, για πολλές συνήθεις εισόδους που μας ενδιαφέρουνμ η ειδική λύση είναι ίδιας μορφής με την είσοδο. Ο Πίνακας (1) συνοψίζει τις ειδικές λύσεις για τα συνηθέστερα σήματα εισόδου.

Όροι του $x[n]$	Ειδική Λύση $y_p[n]$
C	C_1
Cn	$C_1 n + C_2$
Ca^n	$C_1 a^n$
$C\cos(n\omega_0)$	$C_1\cos(n\omega_0) + C_2\sin(n\omega_0)$
$C\sin(n\omega_0)$	$C_1\cos(n\omega_0) + C_2\sin(n\omega_0)$
$Ca^n\cos(n\omega_0)$	$C_1 a^n\cos(n\omega_0) + C_2 a^n\sin(n\omega_0)$
$C\delta[n]$	Zero

Πίνακας 1: Ειδικές Λύσεις σε Εξισώσεις Διαφορών με Σταθερούς Συντελεστές για διάφορες μορφές εισόδου

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα, η ειδική λύση για είσοδο $x[n] = C\delta[n]$ είναι μηδενική, και έτσι η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι μόνο η $y_h[n]$. Με άλλα λόγια, για ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται με εξισώσεις διαφορών, η μοναδιαία απόκριση $h[n]$ μπορει να υπολογιστεί λύνοντας την εξίσωση διαφορών για $x[n] = \delta[n]$, θεωρώντας αρχική ηρεμία στο σύστημά μας.

Αφού η $y_h[n]$ έχει N άγνωστους συντελεστές, απαιτείται ένα σύνολο από N αρχικές συνθήκες για να ορίσουμε μοναδικά την έξοδο $y[n]$ για δεδομένη είσοδο $x[n]$. Αυτές οι αρχικές συνθήκες μπορεί να υπάρχουν με τη μορφή τιμών για την έξοδο $y[n]$ σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, όπως π.χ. $y[-1], y[-2], \cdots, y[-N]$, και μετά να λυθεί ένα σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους.

Εναλλακτικά, αν οι αρχικές συνθήκες είναι της μορφής αρχικών τιμών της εξόδου $y[n]$, τότε οι άλλες τιμές της εξόδου μπορούν να υπολογιστούν αναδρομικά, γράφοντας την εξίσωση διαφορών ως

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k] \tag{13}$$

Αν η είσοδος $x[n]$ και οι αρχικές συνθήκες της εξόδου είναι διαθέσιμες, τότε το $y[0]$ μπορεί να υπολογιστεί από τη Σχέση (13). Έχοντας το $y[0]$ και τις αρχικές συνθήκες ως την $y[-N+1]$, μπορούμε ξανά να υπολογίσουμε το $y[1]$, πάλι από τη Σχέση (13), κ.ο.κ. Παρόμοια, για να υπολογίσουμε τιμές της εξόδου $y[n]$ για $n < -N$, έχοντας δεδομένες τις αρχικές συνθήκες ως τιμές της εξόδου για $n = -1, \cdots, -N$, αναδιατάσσουμε τη Σχέση (13) ως

$$y[n-N] = -\sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_N} x[n-k] \tag{14}$$

από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε αναδρομικά τις τιμές $y[-N-1], y[-N-2]$, κ.ο.κ. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

<u>Παράδειγμα:</u>
Δίνεται η εξίσωση διαφορών ως

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \tag{15}$$

Θεωρήστε την είσοδο $x[n] = K\delta[n]$, όπου K μια σταθερά, και την αρχική συνθήκη $y[-1] = c$. Υπολογίστε την έξοδο για κάθε τιμή του n.

<u>Λύση:</u>
Αφού μας δίνεται η $y[-1] = c$, μπορούμε να υπολογίσουμε το $y[0]$ ως

$$y[0] = ay[-1] + K\delta[0] = ac + K \tag{16}$$

Συνεχίζοντας για τις επόμενες θετικές χρονικές στιγμές, έχουμε

$$\begin{aligned}
y[1] &= ay[0] + K\delta[1] = ay[0] + 0 = a(ac + K) = a^2c + aK && (17)\\
y[2] &= ay[1] + K\delta[2] = ay[1] + 0 = a(a^2c + aK) = a^3c + a^2K && (18)\\
y[3] &= ay[2] + K\delta[3] = ay[2] + 0 = a(a^3c + a^2K) = a^4c + a^3K && (19)\\
\vdots &= \vdots && (20)\\
& && (21)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα ''μοτίβο''. Κι αυτό δεν είναι άλλο από το

$$y[n] = a^{n+1}c + Ka^n,\ \ n \geq 0 \tag{22}$$

που μπορεί να γραφεί ως

$$y[n] = a^{n+1}cu[n] + Ka^nu[n] \tag{23}$$

Για να βρούμε τώρα την έξοδο για $n < 0$, θα γράψουμε την εξίσωση διαφορών ως

$$y[n-1] = a^{-1}(y[n] - x[n]) \tag{24}$$

ή αλλιώς

$$y[n] = a^{-1}(y[n+1] - x[n+1]) \tag{25}$$

Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}
y[-2] &= a^{-1}(y[-1] - x[-1]) = a^{-1}c && (26)\\
y[-3] &= a^{-1}(y[-2] - x[-2]) = a^{-1}a^{-1}c = a^{-2}c && (27)\\
y[-4] &= a^{-1}(y[-3] - x[-3]) = a^{-1}a^{-2}c = a^{-3}c && (28)\\
\vdots &= \vdots && (29)\\
& && (30)
\end{aligned}$$

Κι εδώ βλέπουμε ότι υπάρχει ένα μοτίβο, που είναι το

$$y[n] = a^{n+1}c,\ \ n \leq -1 \tag{31}$$

δηλ.

$$y[n] = a^{n+1}cu[-n-1] \tag{32}$$

Αθροίζοντας για κάθε n, έχουμε ότι η έξοδος είναι της μορφής

$$\begin{aligned}
y[n] &= a^{n+1}cu[n] + Ka^nu[n] + a^{n+1}u[-n-1] && (33)\\
&= a^{n+1}c(u[n] + u[-n-1]) + Ka^nu[n] && (34)\\
&= a^{n+1}c + Ka^nu[n] && (35)
\end{aligned}$$

Το βασικό μας ενδιαφέρον σε αυτό το μάθημα αποτελούν τα ΓΧΑ συστήματα που περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές. Ως τέτοια, πρέπει οι αρχικές τους συνθήκες να είναι συνεπείς με αυτές τις προδιαγραφές (γραμμικότητα, χρονική αμεταβλητότητα). Εάν λοιπόν ένα σύστημα που χαρακτηρίζεται από εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές έχει τις επιπλέον ιδιότητες της γραμμικότητας, χρονικής αμεταβλητότητας, και *αιτιατότητας*[1] τότε η λύση του είναι μοναδική. Σε αυτήν

[1] Θυμίζεται ότι ένα σύστημα λέγεται αιτιατό, όταν

$$h[n] = 0, n < 0 \tag{36}$$

την περίπτωση, οι αρχικές συνθήκες ονομάζονται *συνθήκες αρχικής ηρεμίας* (initial-rest conditions). Με άλλα λόγια, η αρχική πληροοφρία του συστήματος είναι ότι αν η είσοδος $x[n]$ είναι μηδενική για $n < n_0$, τότε και η έξοδος $y[n]$ θα είναι μηδέν για $n < n_0$. Αυτό αποτελεί ικανή συνθήκη για τον υπολογισμό του $y[n]$ για $n \geq n_0$, με τον αναδρομικό τρόπο που είδαμε.

Συνοψίζοντας, για έναν σύστημα που περιγράφεται με εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

- Η έξοδος για μια δεδομένη είσοδο δεν είναι μοναδική. Απαιτούνται επιπλέον αρχικές συνθήκες.
- Αν οι αρχικές συνθήκες είναι σε μορφή N τιμών της εξόδου, οι διάφορες τιμές της εξόδου βρίσκονται με αναδρομικό τρόπο, αναδιατάσσοντας κατάλληλα την εξίσωση διαφορών του συστήματος.
- Οι ιδιότητες της γραμμικότητας, χρονικής αμεταβλητότητας, και αιτιατότητας, εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες. Αν οι αρχικές συνθήκες είναι αρχικής ηρεμίας, τότε το σύστημα θα είναι ΓΧΑ και αιτιατό.

Έχοντας τα παραπάνω υπόψη, ας ξαναδούμε το παράδειγμα με την αναδρομική σχέση, αλλά αυτή τη φορά με συνθήκες αρχικής ηρεμίας. Με $x[n] = K\delta[n]$, η $y[-1] = 0$, αφού $x[n] = 0$, $n < 0$. Κατά συνέπεια, θα είχαμε από τη Σχέση (35)

$$y[n] = Ka^n u[n] \tag{37}$$

Αν η είσοδος ήταν $x[n] = K\delta[n - n_0]$, ξανά με συνθήκες αρχικής ηρεμίας, τότε η αναδρομική λύση θα προχωρούσε με $y[n] = 0$, $n < n_0$. Προσέξτε ότι για $n_0 < 0$, η αρχική ηρεμία υπονοεί ότι $y[-1] \neq 0$. Δηλαδή, αρχική ηρεμία ΔΕΝ σημαίνει πάντα ότι

$$y[-1] = y[-2] = \cdots = y[-N] = 0 \tag{38}$$

Όμως σημαίνει ΠΑΝΤΑ ότι

$$y[n_0 - 1] = y[n_0 - 2] = \cdots = y[n_0 - N] = 0 \tag{39}$$

αν $x[n] = 0$, $n < n_0$. Σημειώστε ότι στο παράδειγμά μας η κρουστική απόκριση είναι η $h[n] = a^n u[n]$, δηλ. είναι μηδενική για $n < 0$, που είναι συνεπές με την αιτιατότητα που συνεπάγεται η υπόθεση της αρχικής ηρεμίας.

Ας δούμε ένα παράδειγμα ακόμα.

<u>Παράδειγμα:</u>
Θεωρηστε το συστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{3}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] + x[n] - x[n-1] \tag{40}$$

1. Βρείτε τη μοναδιαία απόκριση του συστήματος $h[n]$.
2. Βρειτε την έξοδο του συστήματος για είσοδο $x[n] = u[n] - u[n-10]$, με μηδενικές αρχικές συνθήκες.

<u>Λύση:</u>

1. Για να βρούμε την μοναδιαία απόκριση του συστήματος, θέτουμε $x[n] = \delta[n]$ και θεωρούμε συνθήκες αρχικής ηρεμίας. Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8} = (z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4}) \tag{41}$$

Άρα η ομογενής λύση θα ειναι

$$y_h[n] = A_1\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + A_2\Big(\frac{1}{4}\Big)^n,\ n \geq 0\ = \Big(A_1\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + A_2\Big(\frac{1}{4}\Big)^n\Big)u[n] \tag{42}$$

Η ειδική λύση είναι μηδέν όταν η είσοδος στο σύστημα είναι η $x[n] = \delta[n]$, όπως αναφέρει ο Πίνακας (1), άρα η Σχέση (42) αποτελεί τη συνολική λύση για είσοδο $\delta[n]$, και άρα αποτελεί και την κρουστική απόκριση $h[n]$. Για να βρούμε τις σταθερές A_1, A_2, πρέπει να βρούμε τις αρχικές συνθήκες για $n = 0, n = 1$. Λαμβάνοντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας, $y[-1] = y[-2] = 0$, έχουμε

$$y[0] = \frac{3}{4}y[-1] - \frac{1}{8}y[-2] + x[0] - x[-1] = 1 \tag{43}$$

$$y[1] = \frac{3}{4}y[0] - \frac{1}{8}y[-1] + x[1] - x[0] = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4} \tag{44}$$

Άρα θα έχουμε από τη σχέση του $h[n]$ ότι για $n = 0, n = 1$:

$$1 = A_1 + A_2 \tag{45}$$

$$-\frac{1}{4} = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{4}A_2 \tag{46}$$

και άρα $A_1 = -2,\ A_2 = 3$. Έτσι

$$h[n] = \Big(-2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + 3\Big(\frac{1}{4}\Big)^n\Big)u[n]. \tag{47}$$

2. Για να βρούμε την έξοδο του συστήματος στην είσοδο $x[n] = u[n] = u[n-10]$, μπορούμε να ακολουθήσουμε δυο τροπους.

   <u>1ος τροπος:</u>

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{9} h[n-k] \tag{48}$$

   Υπολογίστε το! :-)

   <u>2ος τροπος:</u>

   Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γραμμικότητα της συνέλιξης. Θα είναι

$$y_1[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k] = \sum_{k=0}^{n}\Bigg(-2\Big(\frac{1}{2}\Big)^k + 3\Big(\frac{1}{4}\Big)^k\Bigg) \tag{49}$$

$$= \Bigg(-2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + 3\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\Bigg) = \Bigg(2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1}{4}\Big)^n\Bigg),\ n \geq 0 \tag{50}$$

   Άρα η λύση θα ειναι

$$y[n] = y_1[n] - y_1[n-10] = \Bigg(2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1}{4}\Big)^n\Bigg)u[n] - \Bigg(2\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-10} - \Big(\frac{1}{4}\Big)^{n-10}\Bigg)u[n-10] \tag{51}$$