Εισαγωγη στα Σήματα και τα Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζης
Δρ. Επιστήμης Η/Υ Πανεπιστημίου Κρήτης
Δρ. Επεξεργασίας Σήματος Πανεπιστημίου Rennes 1

29 Σεπτεμβρίου 2015

1 Σήματα και Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Ως τώρα, τα σήματα που μελετήσατε σε προηγούμενα μαθήματα ηταν ολα συνεχούς χρόνου. Σε αυτήν την παράγραφο, ξεκινάμε τη μελέτη μας σχετικά με την επεξεργασία σημάτων διακριτού χρόνου αναπτύσσοντας πρώτα τις ιδέες του *σήματος διακριτού χρόνου* και του *συστήματος διακριτού χρόνου*. Θα επικεντρωθούμε σε προβλήματα που σχετίζονται με την αναπαράσταση σημάτων, πράξεις με σήματα, ιδιότητες σημάτων, ιδιότητες συστημάτων και ταξινόμηση αυτών.

Τα σήματα διακριτού χρόνου ουσιαστικά βρίσκονται ένα βήμα πριν τα *ψηφιακά σήματα*. Πολλές φορές η σχετική βιβλιογραφία τιτλοφορείται *Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος*, αντί *Επεξεργασία Σήματος Διακριτού Χρόνου*. Σίγουρα έχετε ακούσει για τα πλεονεκτήματα των ψηφιακών συστημάτων. Αυτά μπορούν να συνοψισθούν στα παρακάτω:

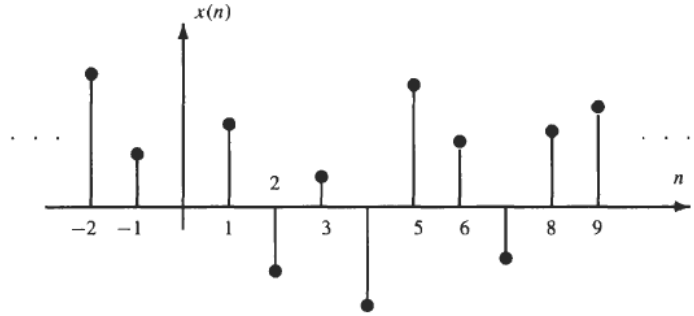
1. Τα ψηφιακά συστήματα έχουν μεγαλύτερη ακρίβεια και σταθερότητα, ενώ είναι πιο ευέλικτα (τα χαρακτηριστικά τους μπορούν εύκολα να αλλάξουν).
2. Μεγαλύτερη ποικιλία συστημάτων μπορούν να πραγματοποιηθούν στον ‘‘ψηφιακό’’ χώρο.
3. Τα ψηφιακά σήματα μπορούν να αποθηκευτούν εύκολα σε ένα δίσκο χωρίς αλλοίωση της ποιότητάς τους.
4. Για την επεξεργασία ψηφιακών σημάτων έχουν αναπτυχθεί πιο εξελιγμένοι αλγόριθμοι.
5. Τα ψηφιακά συστήματα μπορούν να κατασκευαστούν με χρήση ολοκληρωμένων κυκλωμάτων, παρέχοντας χαμηλή κατανάλωση ισχύος.

Ελπίζοντας να σας πείσαμε για τη χρησιμότητά τους, ας προχωρήσουμε. :-)

2 Σήματα Διακριτού Χρόνου

Ένα *σήμα διακριτού χρόνου* είναι μια διατεταγμένη ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών τιμών. Έτσι, ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι μια συνάρτηση της ακέραιας μεταβλητής n, που συμβολίζεται ως $x[n]$. Το σήμα διακριτού χρόνου δεν ορίζεται για μη ακέραιες τιμές του n. Έτσι, ένα πραγματικό σήμα $x[n]$ αναπαρίσταται γραφικά οπως στο Σχημα (1). Τα σήματα διακριτού χρόνου συχνά προέρχονται από δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου, όπως η φωνή. Μπορείτε να φρεσκάρετε τη δειγματοληψία διαβάζοντας το εισαγωγικό κεφάλαιο. Για παράδειγμα, ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x_a(t)$ δειγματοληπτείται με ρυθμό $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ rad/sec, και παράγει ένα δειγματοληπτημένο σήμα $x[n]$, που σχετίζεται με το $x_a(t)$ ως

$$x[n] = x_a(nT_s) \tag{1}$$



Σχήμα 1: Σήμα Διακριτού Χρόνου

Όμως, υπάρχουν και σήματα που δεν προήλθαν κατ΄ αυτόν τον τρόπο. Κάποια σήματα θεωρούμε ότι υφίστανται εξ΄ αρχής στο διακριτό χρόνο, όπως για παράδειγμα οι ημερίσιες τιμές των μετοχών, τα ετήσια στατιστικά πληθυσμών, το πλήθος των δρομολογίων ενός λεωφορείου ανά ημέρα, κλπ.

2.1 Μιγαδικές Ακολουθίες

Εν γένει, ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορει να ειναι μιγαδικό, και μάλιστα υπάρχουν πολλές σημαντικές εφαρμογές, όπως οι ψηφιακές επικοινωνίες, όπου τα μιγαδικά σήματα έρχονται στο προσκήνιο πολύ εύκολα. Ένα μιγαδικό σήμα μπορει να εκφραστεί είτε ως άθροισμα του πραγματικού και του φανταστικού του μέρους

$$z[n] = a[n] + jb[n] = \Re\{z[n]\} + j\Im\{z[n]\} \tag{2}$$

είτε σε πολική μορφή, με όρους πλάτους και φάσης ως

$$z[n] = |z[n]|e^{j\angle z[n]} = |z[n]|e^{j\angle\{z[n]\}} \tag{3}$$

όπου $j = \sqrt{-1}$. Το πλάτος δίνεται από την έκφραση

$$|z[n]| = \sqrt{\Re^2\{z[n]\} + \Im^2\{z[n]\}} \tag{4}$$

ενώ η φάση από τη σχέση

$$\angle z[n] = \tan^{-1}\frac{\Im\{z[n]\}}{\Re\{z[n]\}} \tag{5}$$

η οποία είναι επιθυμητό να εκφράζεται στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Γνωστά πράγματα κι από το συνεχή χρόνο! :-)

Αν η $z[n]$ είναι μιγαδική ακολουθία, η συζυγής της είναι η $z^*[n]$, και μπορει να υπολογιστεί απλά αλλάζοντας το πρόσημο του φανταστικού μέρους της $z[n]$:

$$z^*[n] = \Re\{z[n]\} - j\Im\{z[n]\} = |z[n]|e^{-j\angle\{z[n]\}} \tag{6}$$

2.2 Μερικές Βασικές Ακολουθίες

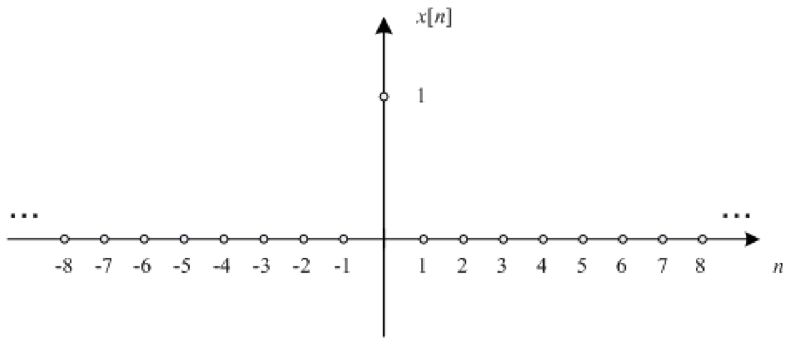
Αν και τα περισσότερα σήματα που θα συναντήσουμε στην πράξη μοιάζουν πολύπλοκες συναρτήσεις του χρόνου, υπάρχουν τρια απλά αλλά πολύ σημαντικά σήματα διακριτού χρόνου που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στην περιγραφη και αναπαράσταση πιο περίπλοκων σημάτων.

Αυτά τα σήματα είναι η διακριτή συνάρτηση Δέλτα, η διακριτή βηματική συνάρτηση, και η εκθετική συνάρτηση.[1]

Η διακριτή συνάρτηση Δέλτα, που συμβολίζεται με $\delta[n]$, ορίζεται ως

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{7}$$

και παιζει τον ίδιο ρολο στην επεξεργασία σήματος διακριτού χρόνου με τη συνάρτηση Δέλτα $\delta(t)$ που έχουμε δει στο συνεχή χρόνο, με τη διαφορά ότι εδώ είναι σημαντικά πιο απλή στη χρήση και στον ορισμό της[2] Η συνάρτηση αυτή φαίνεται στο Σχήμα (2).



Σχήμα 2: Η συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου.

Η διακριτή βηματική συνάρτηση, που συμβολίζεται με $u[n]$, ορίζεται ως

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{10}$$

και σχετίζεται με τη διακριτή συνάρτηση Δέλτα ως

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \tag{11}$$

αλλά και ως

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] \tag{12}$$

Η συνάρτηση αυτή φαίνεται στο Σχήμα (3). Όμοια, η διακριτή συνάρτηση Δέλτα μπορει να γραφεί ως η διαφορά δυο βηματικών που διαφέρουν κατά ένα δείγμα:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{13}$$

Τέλος, η εκθετική συνάρτηση ορίζεται ως

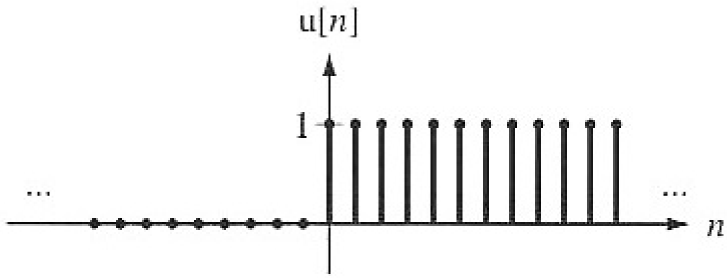
$$x[n] = a^n \tag{14}$$

[1] Μας θυμίζουν κάτι, έτσι δεν είναι; :-)

[2] Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση Δέλτα συνεχούς χρόνου, $\delta(t)$, είναι κατανομή - ή αλλιώς γενικευμένη συνάρτηση - και ορίζεται από τις εξής ιδιότητες:

$$\delta(t) = 0, \ t \neq 0, \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{9}$$



Σχήμα 3: Η βηματική συνάρτηση διακριτού χρόνου.

όπου a ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός. Γενικότερα, μας ενδιαφέρουν εκθετικά του τύπου

$$x[n] = Aa^n \tag{15}$$

με A, a μιγαδικά. Τότε, αναλύοντας τα A, a σε μέτρο-φάση, θα έχουμε

$$A = |A|e^{j\phi_A} \tag{16}$$

και

$$a = |a|^n e^{j\phi_a n} \tag{17}$$

έχουμε

$$x[n] = Aa^n = |A|e^{j\phi_A}|a|^n e^{j\phi_a n} = |A||a|^n e^{j(\phi_A+\phi_a)} \tag{18}$$

Επίσης, ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι τα μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$a^n = e^{j\omega_0 n} = \cos(n\omega_0) + j\sin(n\omega_0) \tag{19}$$

με ω_0 πραγματικό αριθμό. Όπως θα δούμε σύντομα, οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις είναι πολύ χρήσιμες στην ανάλυση Fourier των σημάτων διακριτού χρόνου – όσο χρήσιμα ήταν τα αντίστοιχα συνεχή μιγαδικά εκθετικά στην Ανάλυση σημάτων συνεχούς χρόνου :-) . Αν αντικαταστήσσουμε τη Σχέση (19) στη Σχέση (18), θα έχουμε

$$x[n] = Aa^n = |A||a|^n e^{j(\omega_0 n+\phi_A)} = |A||a|^n \cos(\omega_0 n + \phi_A) + j|A||a|^n \sin(\omega_0 n + \phi_A) \tag{20}$$

Αυτή η ακολουθία ταλαντώνεται με αυξανόμενο πλάτος αν $|a| > 1$, ή με φθίνον πλάτος αν $|a| < 1$. Για $|a| = 1$, το σήμα αποτελείται από απλά ημίτονα και συνημίτονα σταθερού πλάτους.

Ακριβώς ανάλογα λοιπόν με το συνεχή χρόνο, ορίζουμε την ποσότητα ω_0 ως *συχνότητα* του σήματος, και την ποσότητα ϕ_A ως *φάση* του σήματος.

2.3 Περιοδικές Ακολουθίες

Ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορει να είναι ειτε περιοδικό είτε απεριοδικό. Ένα σήμα θεωρείται περιοδικό αν, για κάποιο θετικό ακέραιο N, ισχύει οτι

$$x[n] = x[n + N] \tag{21}$$

για κάθε n. Η *περιοδος*, που συμβολίζεται ως N, ειναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί τη σχέση (21). Αν η σχέση αυτή δεν ικανοποιείται για κανένα ακέραιο N, το σήμα λέγεται απεριοδικό.

Αν $x_1[n]$ είναι ένα περιοδικό σημα με περίοδο N_1 και $x_2[n]$ ένα περιοδικό σήμα με περίοδο N_2, τότε το άθροισμα

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \tag{22}$$

θα είναι πάντα περιοδικό και η περιοδός του θα είναι η

$$N = \frac{N_1 N_2}{\text{Μ.Κ.}\Delta\{N_1, N_2\}} \tag{23}$$

όπου Μ.Κ.$\Delta\{N_1, N_2\}$ είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των N_1, N_2, αν αυτός υπάρχει. Εναλλακτικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη σχέση

$$N = \text{Ε.Κ.}\Pi\{N_1, N_2\} \tag{24}$$

Όμοια ισχύει και για το γινόμενο, δηλ. το σημα

$$x[n] = x_1[n]x_2[n] \tag{25}$$

θα είναι περιοδικό με (πιθανή) περίοδο N που δίνεται από τη σχέση (23), αν και η πραγματική (μικρότερη) περιοδος μπορεί να είναι μικρότερη.

Δεδομένης μιας ακολουθίας $x[n]$, ένα περιοδικό σήμα μπορει πάντα να δημιουργηθεί ''αντιγράφοντας '' το $x[n]$ ως

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kN] \tag{26}$$

όπου N ένας θετικός ακέραιος. Σε αυτήν την περιπτωση, το $y[n]$ είναι περιοδικό με περιοδο N.

2.3.1 Ημίτονα Διακριτού Χρόνου

Εδώ είναι καλό να αναφέρουμε ότι υπάρχει μια ''ιδιαιτερότητα'' στα περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου, που τα ξεχωρίζει από αυτά που έχουμε δει στο συνεχή χρόνο. Θυμάστε ότι στο συνεχή χρόνο, ένα ημίτονο συχνότητας ω_0 είναι πάντα περιοδικό με περίοδο $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Στο διακριτό χρόνο όμως, ένα ημίτονο $\cos(\omega_0 n)$ είναι περιοδικό *μόνον αν* η περίοδός του, N, είναι ακέραιος αριθμός. Ας κάνουμε πιο ξεκάθαρα τα πράγματα...

Αν ένα ημίτονο διακριτού χρόνου $\cos(\omega_0 n)$ είναι περιοδικό με περίοδο N, τότε ικανοποιεί τη σχέση

$$\cos(\omega_0 n) = \cos(\omega_0(n + N)) = \cos(\omega_0 n + \omega_0 N) \tag{27}$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι σωστό μόνον αν το $\omega_0 N$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Δηλαδή

$$\omega_0 N = 2\pi m, \;\; m \text{ ακέραιος} \tag{28}$$

ή αλλιώς

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \tag{29}$$

Επειδή και το m και το N είναι ακέραιοι, η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι το ημίτονο που συζητάμε είναι περιοδικό μόνον αν ο αριθμός $\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ είναι ρητός (δηλ. γράφεται ως πηλίκο δυο ακεραίων). Σε αυτήν την περίπτωση, η περίοδος δίνεται από τη σχέση

$$N = m\frac{2\pi}{\omega_0} \tag{30}$$

Για να βρούμε το N, πρέπει να διαλέξουμε το <u>μικρότερο</u> δυνατό m που θα κάνει το $m\frac{2\pi}{\omega_0}$ να είναι ακέραιος. Για παράδειγμα, αν $\omega_0 = \frac{4\pi}{17}$, τότε ο μικρότερος δυνατός ακέραιος m που κάνει τον αριθμό $m\frac{2\pi}{\omega_0} = m\frac{17}{2}$ ακέραιο, είναι προφανώς $m = 2$. Για $m = 2$, η περίοδος είναι $N = 17$ δειγματα.

Η ίδια ακριβώς συζήτηση γίνεται για οποιοδήποτε πιθανώς περιοδικό σήμα, όπως για παράδειγμα το $e^{j\omega_0 n}$ που είδαμε νωρίτερα, αφού αποτελείται από ένα άθροισμα πιθανώς περιοδικών σημάτων συχνότητας ω_0.

2.3.2 Μιγαδικά Εκθετικά Διακριτού Χρόνου

Το μιγαδικό εκθετικό σήμα $x_d(t) = e^{j\omega_0 n}$ έχει επίσης μια ιδιαιτερότητα σε σχέση με το αντίστοιχο του συνεχούς χρόνου, $x_a(t) = e^{j\omega_0 t}$. Αυτή η ιδιαιτερότητα είναι ότι το $x_d(t)$ είναι **πάντα** περιοδικό στο <u>χώρο της συχνότητας</u> με περίοδο 2π, γιατί

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n} \tag{31}$$

αφού

$$e^{j2\pi n} = 1, \forall n \in Z \tag{32}$$

Αυτό σημαίνει ότι για να καταλάβουμε - αργότερα - πώς συμπεριφέρεται ένα μιγαδικό εκθετικό αυτής της μορφής στο χώρο της συχνότητας, αρκεί να το παρατηρήσουμε σε διάστημα μιας περιόδου 2π, αφού εκτός αυτής επαναλαμβάνεται. Συνήθως προτιμούμε το διάστημα $(-\pi, \pi]$. Φυσικά εξακολουθούν να ισχύουν οι σχέσεις του Euler και για τα μιγαδικά εκθετικά διακριτού χρόνου.[3] Αυτή η περιοδικότητα στο χώρο της συχνότητας μας λέει πρακτικά ότι οι συχνότητες ω_0 και $\omega_0 + 2\pi k$ είναι ουσιαστικά ίδιες. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με όσα ξέρατε από το συνεχή χρόνο, ότι δηλαδή όσο αυξάνουμε τη συχνότητα, τόσο πιο γρήγορα ταλαντώνεται ένα σήμα. Για παράδειγμα, το σήμα συνεχούς χρόνου

$$x(t) = A\cos(\Omega_0 t) \tag{36}$$

ταλαντώνεται όλο και πιο γρήγορα αν αυξάνουμε συνεχώς τη συχνότητα Ω_0. Για ένα ημίτονο διακριτού χρόνου

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n) \tag{37}$$

όσο αυξάνουμε τη συχνότητα ω_0 από το $\omega_0 = 0$ ως το $\omega_0 = \pi$, τότε πράγματι οι ταλαντώσεις του γίνονται όλο και πιο γρήγορες. Όμως, όταν αυξήσουμε το ω_0 από $\omega_0 = \pi$ ως $\omega_0 = 2\pi$, τότε οι ταλαντώσεις του γίνονται όλο και πιο αργές! Το ίδιο μοτίβο επαναλαμβάνεται και μετά το $\omega_0 = 2\pi$, ξεκινώντας από γρήγορες ταλαντώσες γύρω από το 2π, φτάνοντας σε πιο αργές γύρω από το 3π, και ξανά σε πιο γρήγορες γύρω από το $\omega_0 = 4\pi$.

Αντίστοιχα, στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, οι γρήγορες ταλαντώσεις γίνονται γύρω από τις συχνότητες $\omega_0 = \pm\pi$, ενώ οι πιο αργές (προφανώς) γύρω από τη συχνότητα $\omega_0 = 0$. Για ένα οπτικό παράδειγμα, δείτε το Σχήμα (4).

Εν γένει λοιπόν, οι συχνότητες γύρω από περιοχές κοντά στη συχνότητα $\omega_0 = 2\pi k$, για $k \in Z$, αναφέρονται ως *χαμηλές* συχνότητες, ενώ οι αντίστοιχες γύρω από περιοχές της μορφής $\omega_0 = \pi + 2\pi k$, για $k \in Z$, λέγονται *υψηλές* συχνότητες.

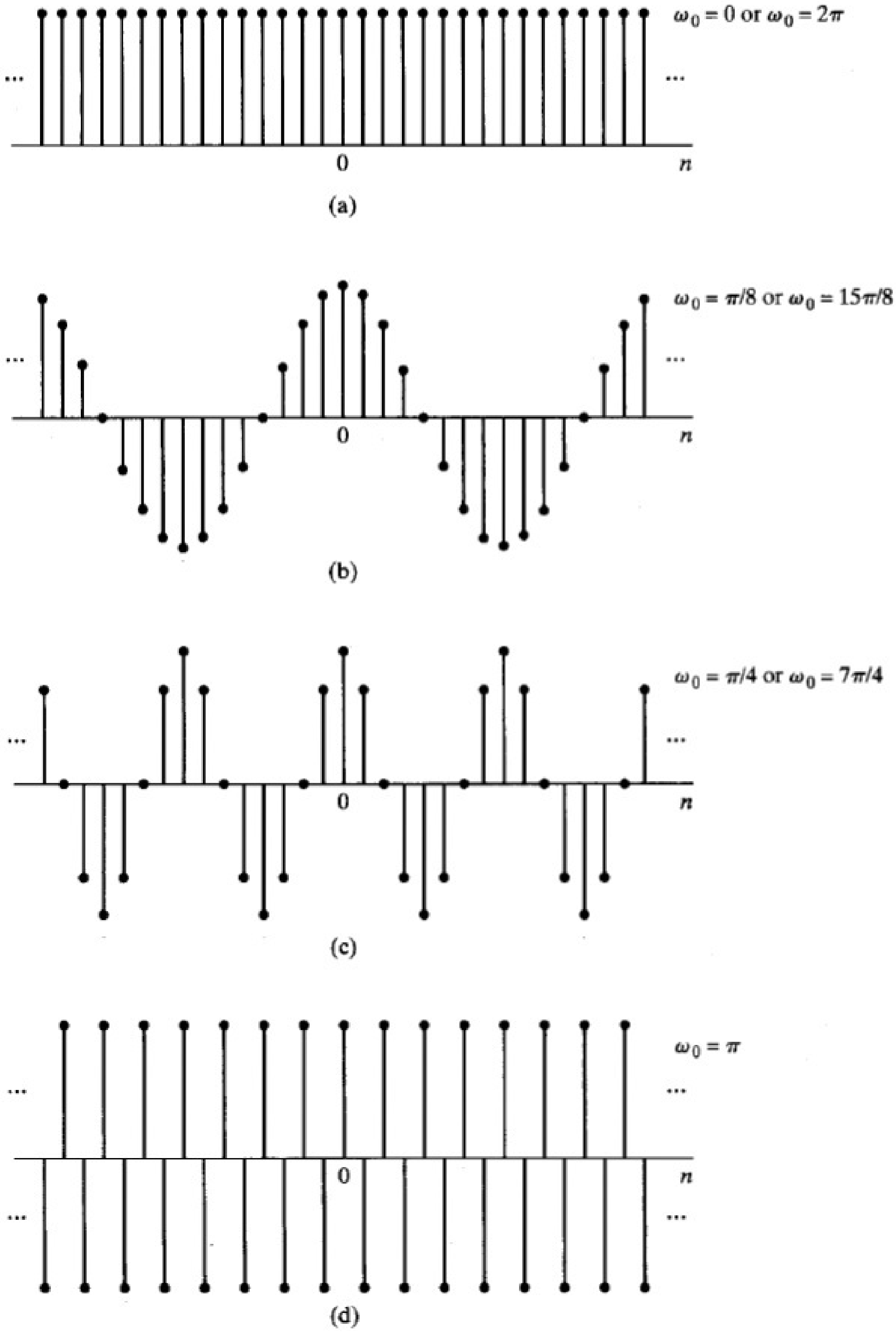
---

[3] Ντροπή, αλλά τις υπενθυμίζουμε :)

$$\cos(\theta n) = \frac{e^{j\theta n} + e^{-j\theta n}}{2} \tag{33}$$

$$\sin(\theta n) = \frac{e^{j\theta n} - e^{-j\theta n}}{2j} \tag{34}$$

$$\tag{35}$$



Σχήμα 4: Το σήμα $\cos(\omega_0 n)$ για διάφορες τιμές του ω_0. Όσο το ω_0 αυξάνεται από το μηδέν προς το π (σχήματα $(a-d)$), τόσο γρηγορότερα ταλαντώνεται το σήμα. Όσο το ω_0 αυξάνεται από το π προς το 2π (σχήματα $(d-a)$), τόσο πιο αργές γίνονται οι ταλαντώσεις του.

2.4 Συμμετρικές Ακολουθίες

Ένα σήμα διακριτού χρόνου συχνά έχει μερικές μορφές συμμετριας που μπορούμε να εκμεταλλευτούμε. Δυο ειδών συμμετρίες μας είναι ενδιαφερουσες. Ένα πραγματικό σήμα λέγεται ότι είναι *άρτιο* αν, για κάθε

n, ισχύει ότι

$$x[n] = x[-n] \tag{38}$$

ενώ ένα σήμα λέγεται ότι είναι *περιττό* αν, για κάθε n, ισχύει ότι

$$x[n] = -x[-n] \tag{39}$$

Κάθε σήμα $x[n]$ μπορει να γραφει ως το άθροισμα του άρτιου μέρους του, $x_e[n]$, και του περιττού μέρους του, $x_o[n]$, ως

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \tag{40}$$

με

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \tag{41}$$

και

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \tag{42}$$

Για μιγαδικά σήματα, οι συμμετρίες είναι ελαφρά διαφορετικές. Ένα μιγαδικό σημα λέγεται ότι είναι *συζυγές συμμετρικό* (ή αλλιώς *ερμητιανό*) αν, για κάθε n, ισχύει ότι

$$x[n] = x^*[-n] \tag{43}$$

και λέγεται *συζυγές αντισυμμετρικό* αν, για κάθε n, ισχύει

$$x[n] = -x^*[-n] \tag{44}$$

2.5 Πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή

Συχνά, θέλουμε να τροποποιήσουμε τα σήματα μέσω του δεικτη τους, n. Δηλ. θέλουμε να κάνουμε ένα μετασχηματισμό της μορφης

$$y[n] = x[f[n]] \tag{45}$$

με $f[n]$ μια συνάρτηση του n. Οι πιο συχνοί μετασχηματισμοί περιλαμβάνουν την *ολίσθηση-μετακίνηση*, την *αναστροφή*, την *χρονική κλιμάκωση*[4], οι οποίες ορίζονται ως

- *Ολίσθηση:* Η ολίσθηση οριζεται ως ο μετασχηματισμός $f[n] = n - n_0$. Αν $y[n] = x[n - n_0]$, το $x[n]$ μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά n_0 δείγματα, αν το n_0 είναι θετικός (αναφερεται ως καθυστέρηση), ενώ μετατοπίζεται προς τα αριστερά κατά n_0 δειγματα, αν το n_0 είναι αρνητικό (αναφέρεται ως προήγηση-προπόρευση).

- *Αναστροφή:* Αυτός ο μετασχηματισμός δίνεται από τη σχέση $f[n] = -n$, και απλά ειναι η αναστροφή του σηματος στο χρόνο, ως προς n.

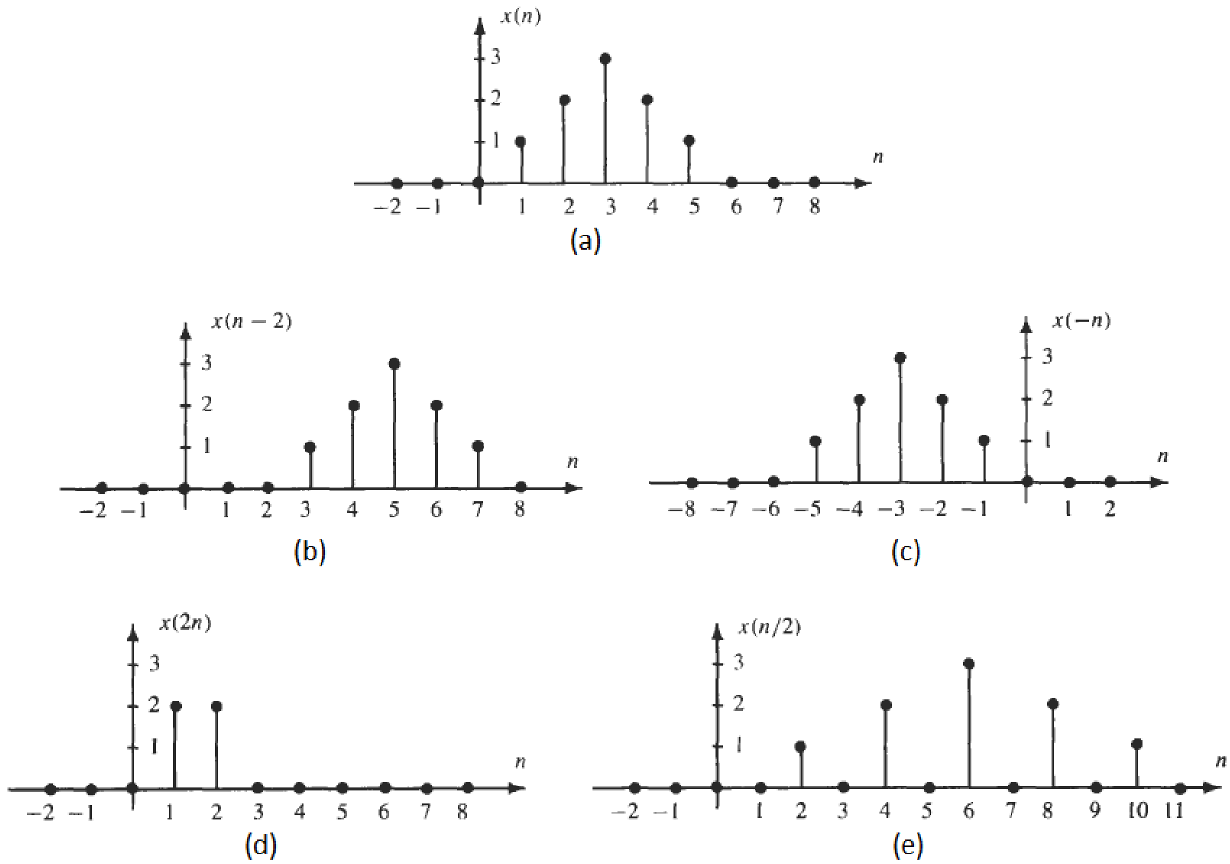
- *Κλιμάκωση στο χρόνο:* Αυτός ο μετασχηματισμός ορίζεται ως $f[n] = Mn$ ή $f[n] = n/N$, όπου M, N είναι θετικοί ακέραιοι. Στην πρώτη περιπτωση, η ακολουθία $x[Mn]$ σχηματίζεται παίρνοντας κάθε M-οστο δείγμα από τη $x[n]$ (αυτή η πράξη λέγεται *υποδειγματοληψία - downsampling*). Με $f[n] = n/N$, η ακολουθία $y[n] = x[f[n]]$ ορίζεται ως

  $$y[n] = \begin{cases} x[n/N], & n = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{46}$$

  (η πράξη αυτή ειναι γνωστη ως *υπερδειγματοληψία - upsampling*).

Παραδείγματα ολίσθησης, αναστροφής, και κλιμάκωσης στο χρόνο φαίνονται στο Σχήμα (5). Προσέξτε, οι πράξεις αυτές εξαρτώνται από τη σειρά που θα τις εφαρμόσετε (ειναι δηλαδή order-dependent).

[4]Τις οποίες γνωρίζετε ήδη από το συνεχή χρόνο! :-)



Σχήμα 5: (α) Σήμα Διακριτού Χρονου, (β) Καθυστέρηση κατά $n_0 = 2$, (γ) Αναστροφή, (δ) Υποδειγματοληψία κατά 2, (ε) Υπερδειγματοληψία κατά 2

2.6 Πράξεις με σήματα

Πρέπει να σας ειναι προφανές ότι οι συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού μεταξύ σημάτων, και ο πολλαπλασιασμός σηματος με σταθερα, δε χρειάζονται ιδιαίτερες εξηγήσεις, οπότε δε θα επεκταθούμε. :-) Απλά τονίζεται ότι η πρόσθεση γίνεται δείγμα με δείγμα, όπως και ο πολλαπλασιασμός μεταξύ σημάτων, και ο πολλαπλασιασμός με σταθερά πολλαπλασιάζει κάθε δείγμα του σήματος με αυτή τη σταθερά.

2.7 Ανάλυση Σήματος

Η διακριτή συνάρτηση $\delta[n]$ μπορει να χρησιμοποιηθεί για να αναλύσει ένα σήμα σε ένα άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα με κατάλληλα βαρη και μετατοπίσεις ως

$$x[n] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots \tag{47}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{48}$$

όπου κάθε όρος του αθροίσματος, $x[k]\delta[n-k]$, είναι ένα σήμα που έχει πλάτος $x[k]$ τη χρονική στιγμή $n = k$ και ειναι μηδέν όλες τις άλλες χρονικές στιγμές.

Παράδειγμα:
Εκφράστε το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 3, & n = 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{49}$$

ώς ένα άρθοισμα κατάλληλα μετατοπισμένων συναρτήσεων Δέλτα.

Λύση:
Θα πούμε ότι

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] \tag{50}$$

Μπορούμε να προχωρήσουμε περαιτέρω αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{51}$$

έχουμε

$$x[n] = u[n] - u[n-1] + 2(u[n-1] - u[n-2]) + 3(u[n-2] - u[n-3]) \tag{52}$$

που δίνει

$$x[n] = u[n] + u[n-1] + u[n-2] - 3u[n-3] \tag{53}$$

3 Ενέργεια και Ισχύς Σήματος Διακριτού Χρόνου

Ακολουθώντας παρόμοιο σκεπτικό με αυτό που κάναμε όταν δουλεύαμε στο συνεχή χρόνο, η ενέργεια ενός σήματος διακριτού χρόνου είναι

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \tag{54}$$

Για να έχει νόημα αυτή η μετρική, θα πρέπει, όπως φαντάζεστε, να είναι πεπερασμένη (να μην απειρίζεται δηλαδή). Μια αναγκαία συνθήκη για να ισχύει αυτό είναι ότι το πλάτος του σήματος πρέπει να φθίνει στο μηδέν όσο $n \to \pm\infty$. Φυσικά, οποιοδήποτε σήμα πεπερασμένης διάρκειας είναι σήμα ενέργειας (ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη). Ένα σήμα που η ενέργειά του είναι πεπερασμένη λέγεται *σήμα ενέργειας*.

Σε περιπτώσεις όπου το πλάτος του σήματος δε φθίνει στο μηδέν όταν $n \to \pm\infty$, χρειαζόμαστε μια εναλλακτική μετρική. Αυτή δεν είναι άλλη από την ισχύ του σήματος, που ορίζεται ως

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \tag{55}$$

Αν η P_x είναι πεπερασμένη (και μη μηδενική), τότε το σήμα λέγεται *σήμα ισχύος*. Όπως και στο συνεχή χρόνο, ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να είναι είτε σήμα ενέργειας είτε σήμα ισχύος, αλλά όχι και τα δυο ταυτόχρονα. Επίσης, μπορεί να μην είναι ούτε ενέργειας ούτε ισχύος (όπως π.χ. το $2^n u[n]$).

Στον υπολογισμό τέτοιων αθροισμάτων μας - αλλά και γενικότερα - είναι ΠΟΛΥ χρήσιμες οι σχέσεις του Πίνακα (1).

Παράδειγμα:
Έστω το σήμα

$$x[n] = \left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n] \tag{56}$$

Χρήσιμα Αθροίσματα (Σειρές)	
$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \ \ \|a\| < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}, \ \ \|a\| < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$	$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$
$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$	

Πίνακας 1: Χρήσιμα Αθροίσματα.

(α΄) Υπολογίστε το

$$A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]$$

(β΄) Υπολογίστε την ενέργεια του $x[n]$,

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n]$$

<u>Λύση:</u>

(α΄) Θα είναι

$$A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n] = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{3}{2}\right)^n \tag{57}$$

Με αλλαγή μεταβλητής, $k \leftarrow (-n)$, έχουμε

$$A = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \tag{58}$$

και με χρήση του Πίνακα (1), έχουμε

$$A = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3 \tag{59}$$

(β΄) Είναι

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)^2 u^2[-n] = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} \tag{60}$$

Ξανά με αλλαγή μεταβλητής, $k \leftarrow -n$, έχουμε

$$E = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5} \tag{61}$$

ξανά με χρήση του Πίνακα (1).

4 Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Όπως είδαμε και στο συνεχή χρόνο, ένα συστημα διακριτού χρόνου είναι, θεωρητικά, ένας μαθηματικός τελεστης ή μια αντιστοίχιση που μετασχηματίζει ένα σήμα (την είσοδο) σε ένα άλλο σήμα (την έξοδο), μέσω ενός καθορισμένου συνόλου από πράξεις. Η σημειογραφεία $T[\cdot]$ χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει εν γένει ένα σύστημα. Οι ιδιότητες εισόδου-εξόδου ενός συστήματος μπορούν να καθοριστούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Η σχέση εισόδου-εξόδου μπορεί, για παράδειγμα, να εκφραστει ως

$$y[n] = x^2[n] \tag{62}$$

ή

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] \tag{63}$$

Είναι επίσης δυνατόν να περιγραφει ένα σύστημα με αλγοριθμικούς όρους, που αποτελείται από εντολές ή πράξεις που εφαρμόζονται σε ενα σήμα εισόδου, όπως οι

$$\begin{aligned}
y_1[n] &= \frac{1}{2}y_1[n-1] + \frac{1}{4}x[n] && (64)\\
y_2[n] &= \frac{1}{4}y_2[n-1] + \frac{1}{2}x[n] && (65)\\
y_3[n] &= \frac{4}{10}y_3[n=1] + \frac{1}{2}x[n] && (66)\\
y[n] &= y_1[n] + y_2[n] + y_3[n] && (67)
\end{aligned}$$

Τέλος, ένα σύστημα μπορεί να εκφραστεί ως ένα σήμα $h_k[n]$, που λέγεται *κρουστική απόκριση*, και ορίζεται ως η έξοδος του συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανιστεί η διακριτή συνάρτηση Δέλτα, $\delta[n-k]$, όμοια ακριβώς με το συνεχή χρόνο.

Τα συστηματα διακριτού χρονου μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με τις ιδιότητες που έχουν, όπως ακριβώς αυτά του συνεχούς χρόνου! Οι πιο συνήθεις ιδιότητες που μας ενδιαφερουν είναι η *γραμμικότητα*, η *η χρονική αμεταβλητικότητα*, η *αιτιατότητα*, η *ευστάθεια*, και η *αντιστρεψιμότητα*. Αυτές οι ιδιότητες, μαζι με μερικές ακόμα, περιγράφονται παρακάτω.

4.1 Κατηγορίες Συστημάτων

1. **Σύστημα με Μνήμη:** Η πρώτη κατηγορία αφορά το αν ένα σύστημα έχει ή όχι μνήμη. Ένα σύστημα λέμε οτι είναι *χωρίς μνήμη* αν η έξοδος σε μια χρονική στιγμή $n = n_0$ εξαρτάται μόνο από την είσοδο τη χρονική στιγμή $n = n_0$. Με άλλα λόγια, ένα σύστημα είναι χωρίς μνήμη αν, για κάθε n_0, μπορούμε να βρούμε την τιμή $y[n_0]$ δεδομένης μόνο της τιμής $x[n_0]$.

   Παραδειγμα:
   Το σύστημα $y[n] = x^2[n]$ ειναι χωρίς μνήμη γιατι το $y[n_0]$ εξαρτάται μόνο από την τιμή $x[n_0]$. Αντίθετα, το συστημα $y[n] = x[n] + x[n-1]$ είναι με μνήμη, γιατι για τον υπολογισμό του $y[n_0]$ χρειαζόμαστε και την τιμή $x[n_0-1]$, εκτος απ᾽ την $x[n_0]$.

2. Ένα σύστημα λέγεται *αθροιστικό* αν ισχύει

$$T[x_1[n] + x_2[n]] = T[x_1[n]] + T[x_2[n]] \tag{68}$$

   για οποιαδήποτε σήματα $x_1[n]$ και $x_2[n]$.

3. Ένα σύστημα λέμε ότι είναι *ομογενές* αν η κλιμάκωση της εισόδου με μια σταθερά έχει ως αποτέλεσμα την κλιμάκωση της εξόδου με την ίδια σταθερά. Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι αν

$$T[cx[n]] = cT[x[n]] \tag{69}$$

για οποιαδήποτε μιγαδική σταθερά c για κάθε σήμα εισόδου $x[n]$.

Παράδειγμα:
Το σύστημα που ορίζεται ως

$$y[n] = \frac{x^2[n]}{x[n-1]} \tag{70}$$

δεν είναι αθροιστικό γιατί

$$T[x_1[n] + x_2[n]] = \frac{(x_1[n] + x_2[n])^2}{x_1[n-1] + x_2[n-1]} \tag{71}$$

που δεν είναι το ίδιο με το

$$T[x_1[n]] + T[x_2[n]] = \frac{x_1^2[n]}{x_1[n-1]} + \frac{x_2^2[n]}{x_2[n-1]} \tag{72}$$

Το σύστημα, όμως, είναι ομογενές, γιατί για είσοδο $cx[n]$, η έξοδος

$$T[cx[n]] = \frac{(cx[n])^2}{cx[n-1]} = c\frac{x^2[n]}{x[n-1]} = cT[x[n]] \tag{73}$$

Από την άλλη μεριά, το σύστημα που ορίζεται από τη σχέση

$$y[n] = x[n] + x^*[n-1] \tag{74}$$

είναι αθροιστικό (δείξτε το! :-)) αλλά δεν είναι ομογενές, γιατι

$$T[cx[n]] = cx[n] + c^*x^*[n-1] \neq cT[x[n]] = cx[n] + cx^*[n-1] \tag{75}$$

4. **Γραμμικότητα:** Ένα συστημα λέγεται *γραμμικό* αν είναι αθροιστικό και ομογενές. Δηλ. ένα σύστημα είναι γραμμικό αν

$$T[a_1x_1[n] + a_2x_2[n]] = a_1T[x_1[n]] + a_2T[x_2[n]] \tag{76}$$

για δυο εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ για δυο οποιεσδηποτε σταθερές a_1, a_2.

Παράδειγμα:
Το σύστημα

$$y[n] = 2x[n-1] + x[n] \tag{77}$$

είναι γραμμικό. Γιατί:
Για είσοδο $x_1[n]$, η έξοδος θα είναι

$$y_1[n] = 2x_1[n-1] + x_1[n] \tag{78}$$

Για είσοδο $x_2[n]$, η έξοδος θα είναι

$$y_2[n] = 2x_2[n-1] + x_2[n] \tag{79}$$

Τέλος, για είσοδο $a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$, η έξοδος θα είναι

$$\begin{aligned} y_3[n] &= 2(a_1x_1[n-1]+a_2x_2[n-1])+(a_1x_1[n]+a_2x_2[n]) && (80)\\ &= 2a_1x_1[n-1]+2a_2x_2[n-1]+a_1x_1[n]+a_2x_2[n] && (81)\\ &= 2a_1x_1[n-1]+a_1x_1[n]+2a_2x_2[n-1]+a_2x_2[n] && (82)\\ &= a_1(2x_1[n-1]+x_1[n-1])+a_2(2x_2[n-1]+x_2[n]) && (83)\\ &= a_1T[x_1[n]]+a_2T[x_2[n]]=a_1y_1[n]+a_2y_2[n] && (84) \end{aligned}$$

Παράδεγιμα:
Τα συστήματα

$$\begin{aligned} y[n] &= \log_{10}(|x[n]|) && (85)\\ y[n] &= x^2[n-2] && (86)\\ y[n] &= \frac{1}{x[n]},\quad x[n]\neq 0,\forall n && (87) \end{aligned}$$

είναι μη γραμμικά. Επιβεβαιώστε το! :-)

Η γραμμικότητα απλοποιεί πάρα πολύ την απόκριση ενός συστηματος σε μια δεδομένη είσοδο. Για παράδειγμα, η εξοδος ενός συστηματος για είσοδο όπως η Σχέση (48), είναι

$$y[n]=T[x[n]]=T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}T[x[k]\delta[n-k]] \tag{88}$$

Επειδή οι τιμές $x[k]$ είναι αριθμοί, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της ομογένειας και να έχουμε

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}T[x[k]\delta[n-k]]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]T[\delta[n-k]] \tag{89}$$

Αν ορίσουμε ότι $h_k[n]$ την απόκριση του συστήματος σε μια συνάρτηση Δέλτα τη χρονική στιγμή $n=k$, δηλ.

$$h_k[n]=T[\delta[n-k]] \tag{90}$$

και άρα θα έχουμε

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h_k[n] \tag{91}$$

το οποίο και είναι γνωστο ως *υπέρθεση*.

5. **Χρονική Αμεταβλητότητα:** Ένα σύστημα λέμε οτι ειναι *χρονικά αμετάβλητο* αν μια καθυστέρηση στην είσοδο κατά n_0 δείγματα έχει ως αποτέλεσμα την καθυστέρηση της εξόδου κατά n_0 δείγματα. Πιο ‘‘μαθηματικά’’ :-), έστω $y[n]$ η έξοδος ενός συστήματος για μια εισοδο $x[n]$. Το σύστημα λέμε ότι είναι χρονικά αμετάβλητο αν για κάθε καθυστέρηση n_0, η απόκριση στην είσοδο $x[n-n_0]$ ειναι η $y[n-n_0]$.

   Για να ελέγξουμε αν ένα σύστημα ειναι χρονικά αμετάβλητο, πρέπει να συγκρινουμε τα σήματα $y[n-n_0]$ και $T[x[n-n_0]]$. Αν είναι ίδια, τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. Εναλλακτικά, μπορούμε να ελέγξουμε τους συντελεστές της εισόδου $x[n]$ στην αναπαράσταση $y[n]=T\{x[n]\}$. Αν είναι σταθεροί, τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. Αν όχι, αν δηλαδή οι συντελεστές εξαρτώνται από το χρόνο n, τότε το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

Παράδειγμα:
Το σύστημα που ορίζεται ως

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{92}$$

και λέγεται *αθροιστής*, είναι χρονικά αμετάβλητο. Ας το δείξουμε. Έστω η είσοδος $x_1[n] = x[n-n_0]$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε την έξοδο $y_1[n]$ για την είσοδο αυτή, καθώς και το σήμα $y[n-n_0]$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y_1[n] &= T[x_1[n]] && (93) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] && (94) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0] && (95) \end{aligned}$$

Με αλλαγή μεταβλητής $u \leftarrow k - n_0$, θα έχουμε

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0] = \sum_{u=-\infty}^{n-n_0} x[u] \tag{96}$$

Ας υπολογιίσουμε και το $y[n-n_0]$. Είναι

$$y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k] \tag{97}$$

Προφανώς οι Σχέσεις (96),(97) είναι ισοδύναμες (τα u, k είναι μεταβλητές με τον ίδιο ρόλο και στις δυο σχέσεις). Άρα ισχύει $y_1[n] = y[n-n_0]$. Άρα το σύστημά μας είναι χρονικά αμετάβλητο.

Παράδειγμα:
Το σύστημα που ορίζεται ως

$$y[n] = x^2[n] \tag{98}$$

ειναι χρονικά αμετάβλητο. Η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x_1[n] = x[n-n_0]$, είναι $y_1[n] = [x[n-n_0]]^2 = x^2[n-n_0]$. Όμως, προφανώς ισχύει ότι $y_1[n] = y[n-n_0]$, άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Παράδειγμα:
Το σύστημα

$$y[n] = nx[n] \tag{99}$$

είναι χρονικά μεταβλητό. Η έξοδος του συστήματος, $y_1[n]$, για είσοδο $x_1[n] = x[n-n_0]$ είναι $y_1[n] = nx[n-n_0]$. Όμως, η $y[n-n_0]$ ισούται με $y[n-n_0] = (n-n_0)x[n-n_0]$, που προφανώς είναι διαφορετική από την $y_1[n]$. Άρα το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.

Μπορεί κανείς να αποδείξει τη χρονική μεταβλητότητα με κάποιο αντιπαράδειγμα.

6. **Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο Σύστημα (ΓΧΑ):** Ένα σύστημα είναι και γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο, και αναφέρεται ως ΓΧΑ σύστημα, αν ισχύει ότι αν $h[n]$ είναι η απόκριση του

συστηματος στην είσοδο $\delta[n]$, τότε η απόκριση του συστήματος για είσοδο $\delta[n-k]$, είναι $h[n-k]$. Έτσι, η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \tag{100}$$

όπου $*$ συμβολίζει τον τελεστη της *συνέλιξης*, η οποία ορίζεται ως το παραπάνω άθροισμα. Το σήμα $h[n]$ αναφέρεται ως *μοναδιαία ή κρουστική απόκριση* και χαρακτηρίζει πλήρως το ΓΧΑ σύστημα. Με άλλα λόγια, μπορούμε να βρούμε την απόκριση του συστήματος για κάθε είσοδο $x[n]$, αν γνωρίζουμε το $h[n]$.

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύεται αν χρησιμοποιήσουμε το συνδυασμό της γραμμικότητας και της χρονικής αμεταβλητότητας όπως τις ορίσαμε παραπάνω. Έχουμε ήδη πει ότι ένα οποιοδήποτε διακριτό σήμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{101}$$

Η έξοδος ενός συστήματος για την παραπάνω είσοδο θα είναι

$$y[n] = T[x[n]] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x[k]\delta[n-k]] \tag{102}$$

με την τελευταία ισότητα να ισχύει λόγω γραμμικότητας. Όπως είπαμε και νωρίτερα, επειδή οι τιμές $x[k]$ είναι αριθμοί, έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x[k]\delta[n-k]] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T[\delta[n-k]] \tag{103}$$

Η χρονική αμεταβλητότητα υποδηλώνει ότι αν ορίσουμε ότι η απόκριση του συστήματος, $h_k[n]$, σε μια συνάρτηση Δέλτα τη χρονική στιγμή $n = k$, δηλ.

$$h_k[n] = T[\delta[n-k]] \tag{104}$$

μπορεί να γραφεί ως

$$h_k[n] = h[n-k] \tag{105}$$

είναι δηλαδή μια απλή μετατόπιση της κρουστικής απόκρισης! Έτσι,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{106}$$

7. **Αιτιατότητα:** Μια ιδιότητα ιδιαίτερα σημαντική για πραγματικές εφαρμογές είναι η *αιτιατότητα*, η οποία λέει ότι η απόκριση ενός συστηματος τη χρονική στιγμή n_0 εξαρταται μόνο από τις χρονικές στιγμές ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ τη χρονική στιγμή $n = n_0$. Για ένα αιτιατο σύστημα, οι αλλαγές στην έξοδο δεν μπορεί να προηγούνται από αλλαγές στην είσοδο. Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει την ιδιότητα οτι $h[n] = 0,\ n < 0$.

Παράδειγμα:
Το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση $y[n] = x[n] + x[n-1]$ είναι αιτιατο γιατι η τιμή της εξόδου τη χρονική στιγμή $n = n_0$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές εισόδου $x[n]$ στις χρονικές στιγμές n_0 και $n_0 - 1$. Αντίθετα, το σύστημα $y[n] = x[n] + x[n+1]$ δεν είναι αιτιατό, γιατι η έξοδος τη χρονική στιγμή n_0 εξαρτάται από την τιμή της εισόδου τις χρονικές στιγμές n_0 και $n_0 + 1$.

8. **Ευστάθεια:** Ένα σύστημα λέγεται *ευσταθές*, αν ισχύει ότι για φραγμένη είσοδο, $|x[n]| < B_x$, η έξοδος είναι επίσης φραγμένη, $|y[n]| < B_y$, με B_x, B_y πραγματικούς αριθμούς. Για ενα ΓΧΑ σύστημα, η ευστάθεια ισχύει αν ισχυει η σχέση

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \tag{107}$$

Παράδειγμα:
Ο αθροιστής προηγούμενου παραδείγματος ΔΕΝ είναι ευσταθές σύστημα, γιατί αν η είσοδος είναι φραγμένη, $|x[n]| < B_x$, τότε η έξοδος είναι

$$|y[n]| = \Big|\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\Big| \leq \sum_{k=-\infty}^{n} |x[k]| < \sum_{k=-\infty}^{n} B_x \to \infty \tag{108}$$

Αντίθετα, το σύστημα

$$y[n] = x^2[n] + \sin(x[n]) \tag{109}$$

είναι ευσταθές, γιατί αν $|x[n]| < B_x$, τότε

$$|y[n]| = |x^2[n] + \sin(x[n])| \leq |x^2[n]| + |\sin(x[n])| < B_x^2 + 1 \tag{110}$$

αφού $|\sin(\theta)| \leq 1$.

9. **Αντιστρεψιμότητα:** Ένα σύστημα λέγεται *αντιστρεψιμο* αν η είσοδος σε ένα σύστημα μπορει να οριστεί μονοσήμαντα από την έξοδο. Με άλλα λόγια, για να είναι ένα σύστημα αντιστρέψιμο, ειναι απαραίτητο διαφορετικές είσοδοι να δίνουν διαφορετικές εξόδους. Με άλλα άλλα :-) λόγια, δεδομένων δυο εισόδων $x_1[n], x_2[n]$, με $x_1[n] \neq x_2[n]$, πρέπει να ισχύει ότι $y_1[n] \neq y_2[n]$.

Παρ΄ ότι θα ασχοληθούμε σχεδόν αποκλειστικά με γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα και αιτιατά συστήματα, αυτό δε σημαίνει ότι όσα δεν πληρούν τις παραπάνω συνθήκες είναι "άχρηστα". Ένα πολύ χρήσιμο στην πράξη σύστημα είναι το παρακάτω:

$$y[n] = x^2[n] - x[n-1]x[n+1] \tag{111}$$

Το σύστημα αυτό είναι ΜΗ γραμμικό, είναι χρονικά αμετάβλητο, αλλά και ΜΗ αιτιατό, γιατί η χρονική στιγμή n της εξόδου χρειάζεται τη χρονική στιγμή $n+1$ της εισόδου. Παρ΄ ότι αυτό το σύστημα δεν είναι γραμμικό, ούτε και αιτιατό, είναι αρκετά χρήσιμο και διαδεδομένο. Η πράξη που περιγράφεται από το σύστημα αυτό λέγεται **τελεστής Teager-Kaiser**, και οι ιδιότητές της την καθιστούν πολύ χρήσιμη σε ΠΑΡΑ πολλές εφαρμογές (εικόνες, ήχος, βιολογικά σήματα, κλπ).

5 Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα (ΓΧΑ) Συστήματα και Ιδιότητες

Όπως προείπαμε, μια πολύ σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι αυτά που έχουν την ιδιότητα της γραμμικότητας και της χρονικής αμεταβλητότητας, τα λεγόμενα *Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα*. Ας μιλήσουμε λίγο περισσότερο για αυτά.

Είπαμε νωρίτερα, όταν πρωτοπαρουσιάσαμε τα ΓΧΑ συστήματα, ότι γι΄ αυτά η σχέση εισόδου-εξόδου δίνεται ως

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \tag{112}$$

πράξη την οποία ονομάσαμε *συνέλιξη*. Ο τελεστής $*$ για τη συνέλιξη είναι βολικός και εύκολος, αλλά θέλει προσοχή. Για παράδειγμα, θεωρήστε την έξοδο $y[n-n_0]$. Από τη Σχέση (112), βλέπουμε ότι

$$y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-n_0-k] \tag{113}$$

και με το συμβολισμό που εισάγαμε νωρίτερα, είναι

$$y[n-n_0] = x[n] * h[n-n_0] \tag{114}$$

Θα μπορούσε να μπει κανείς στον πειρασμό και να πει ότι

$$y[n-n_0] = x[n-n_0] * h[n-n_0] \tag{115}$$

αλλά αυτό δεν είναι σωστό![5]

Αφού λοιπόν ξεκαθαρίσαμε ότι ο συμβολισμός $*$ θέλει προσοχή, ας δούμε λίγο πιο κοντά το άθροισμα της συνέλιξης. Η Σχέση (112) μας λέει ότι το δείγμα εισόδου τη χρονική στιγμή $n=k$, που αναπαρίσταται από ως $x[k]\delta[n-k]$, μετασχηματίζεται από το σύστημα σε μια ακολουθία εξόδου $x[k]h[n-k]$, για $-\infty < n < +\infty$, και για κάθε k, αυτές οι ακολουθίες προστίθενται η μια με την άλλη για να δώσουν την τελική έξοδο-ακολουθία.

Ένα πολύ χρήσιμο οπτικό παράδειγμα του υπολογισμού της συνέλιξης βλέπετε στο Σχήμα (6). Στη γραμμή (a) του Σχήματος, βλέπετε αριστερά την είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος, το σήμα $x[n]$, το οποίο είναι πεπερασμένης διάρκειας, μια και έχει μόλις τρια μη μηδενικά δείγματα. Η διάρκειά του όμως είναι $N=6$ δείγματα, από το πρώτο μη μηδενικό ως το τελευταίο. Δεξιά, στην ίδια γραμμή, βλέπετε την κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος, $h[n]$, η οποία είναι κι αυτή πεπερασμένης διάρκειας $M=3$. Θέλουμε να βρούμε το αποτέλεσμα της συνέλιξης των δυο αυτών σημάτων, ή αλλιώς, την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n]$ όταν στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα $x[n]$.

Σύμφωνα με την ανάλυση που κάναμε νωρίτερα, το δείγμα εισόδου τη χρονική στιγμή $n=k$, που αναπαρίσταται από ως $x[k]\delta[n-k]$, μετασχηματίζεται από το σύστημα σε μια ακολουθία εξόδου $x[k]h[n-k]$, για $-\infty < n < +\infty$. Όταν μετασχηματιστούν όλα τα δείγματα της εισόδου, τότε τα επιμέρους σήματα εξόδου προστίθενται για να μας δώσουν το τελικό αποτέλεσμα.

- Η γραμμή (b) δείχνει αριστερά το πρώτο δείγμα του σήματος εισόδου, το οποίο συμβολίζεται ως το σήμα $x_{-2}[n]$, και δεξιά την έξοδο του συστήματος, $y_{-2}[n] = x[-2]h[n+2]$, όταν στην είσοδό του παρουσιαστεί το σήμα $x_{-2}[n]$. Βλέπετε ότι το $h[n]$ έχει μετατοπιστεί από το $n=0$ στο $n=-2$.

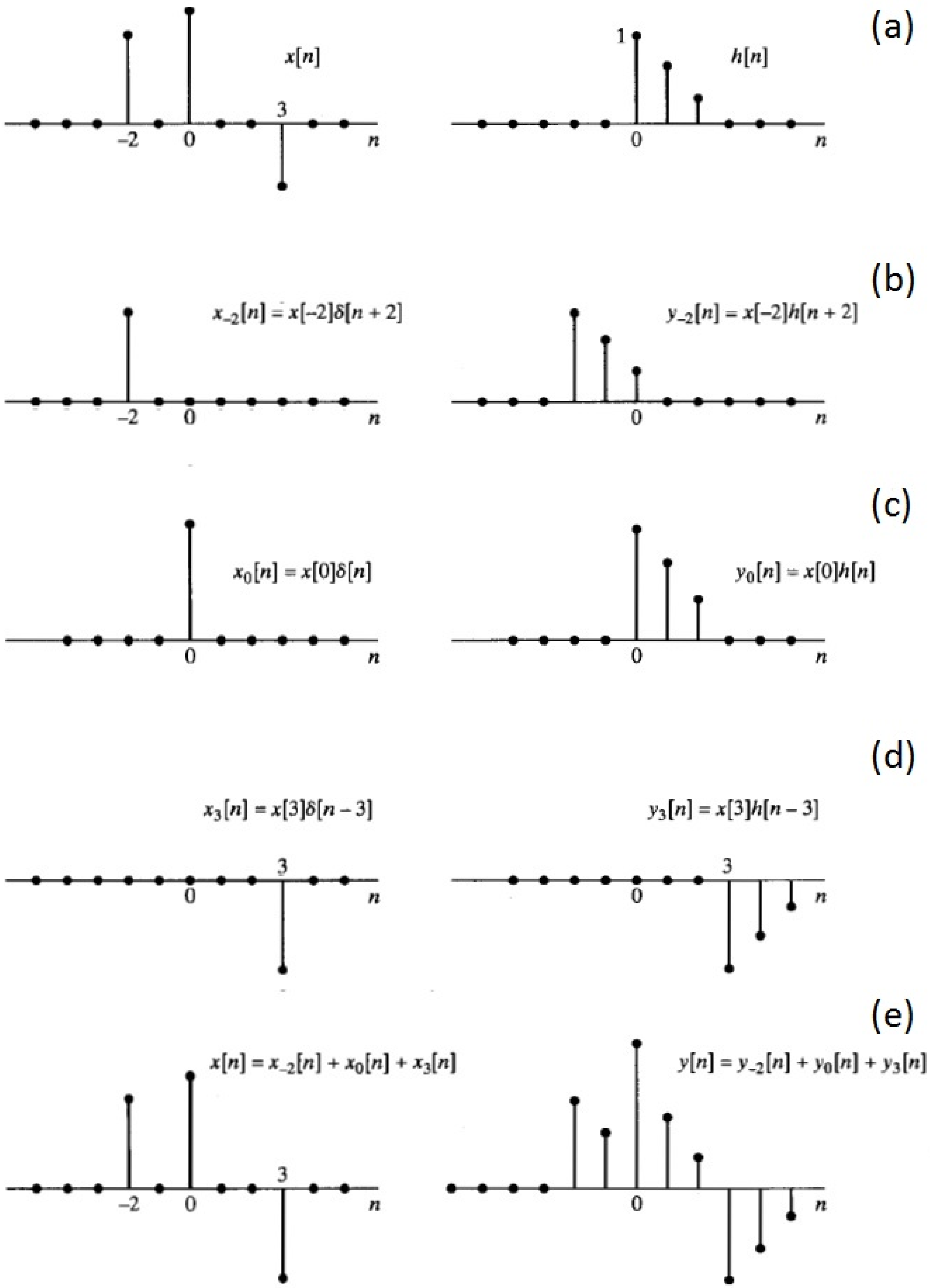
- Στη γραμμή (c), αριστερά βλέπουμε το δεύτερο (μη μηδενικό) δείγμα του σήματος εισόδου, που συμβολίζουμε με $x_0[n] = x[0]\delta[n]$. Δεξιά, παρατηρήστε το αποτέλεσμα της εξόδου, $y_0[n] = x[0]h[n]$, όταν στην είσοδο του ΓΧΑ συστήματος παρουσιαστεί το $x_0[n]$.

- Όμοια ακριβώς είναι τα πράγματα και στη γραμμή (d), όπου το τελευταίο δείγμα εμφανίζεται στην είσοδο του συστήματος, με αποτέλεσμα την έξοδο $y_3[n]$.

- Το τελικό αποτέλεσμα, δηλ. η έξοδος $y[n]$ του συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα $x[n]$, δίνεται από την υπέρθεση των επιμέρους εξόδων, $y_{-2}[n], y_0[n], y3[n]$, όπως το βλέπετε στη γραμμή (e).

Περισσότερα για τη συνέλιξη και τον υπολογισμό της θα δούμε σε ακόλουθο κεφάλαιο.

[5] Στην πραγματικότητα, αυτό μας δίνει $y[n-2n_0]$.



Σχήμα 6: Αναπαράσταση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος ως η υπέρθεση αποκρίσεων σε ξεχωριστά δείγματα εισόδου.

5.1 Ιδιότητες ΓΧΑ συστημάτων

Μπορούμε να εξάγουμε κάποιες γενικές ιδιότητες των ΓΧΑ συστημάτων αν ερευνήσουμε λίγο τον ορισμό της συνέλιξης. Για παράδειγμα, ο τελεστής της συνέλιξης είναι *αντιμεταθετικός*:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \tag{116}$$

Αποδείξτε το ως εξάσκηση! :) Άλλη μια σημαντική ιδιότητα είναι η *επιμεριστικότητα* ως προς την πρόσθεση:

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \tag{117}$$

Επίσης, η συνέλιξη ικανοποιεί την *προσεταιριστική* ιδιότητα:

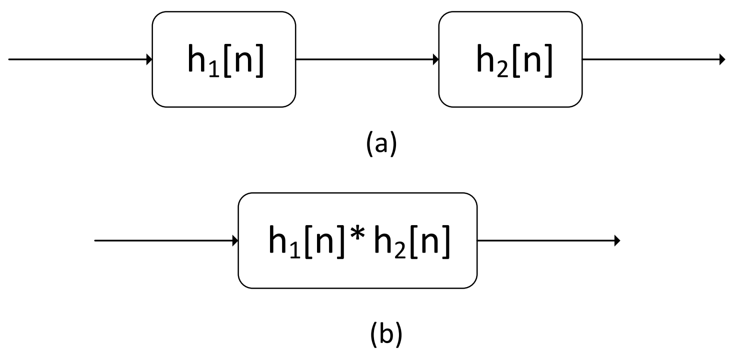
$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) \tag{118}$$

η οποία, λόγω αντιμεταθετικότητας, μπορεί να γραφεί και ως

$$y[n] = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n] = x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) \tag{119}$$

Οι προαναφερθείσες ιδιότητες μας οδηγούν σε δυο χρήσιμες κατηγορίες διατάξεων. Όπως και στο συνεχή χρόνο, έτσι και στο διακριτό, όταν έχουμε ΓΧΑ συστήματα σε σειρά, όπως στο Σχήμα (7)(a), η έξοδος του $h_1[n]$ περνάει ως είσοδος στο $h_2[n]$. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι τα συστήματα αυτά αποτελούν ΕΝΑ μεγαλύτερο σύστημα, το οποίο και αποτελεί τη *συνέλιξη* των επιμέρους συστημάτων στο πεδίο του χρόνου, όπως στο Σχήμα (7)(b).

Άλλες φορές, μας βολεύει να βάζουμε πολλά ΓΧΑ συστήματα *παράλληλα* μεταξύ τους, δημιουργώντας



Σχήμα 7: Συστήματα σε Σειρά στο χρόνο: (a) Δυο συστήματα σε σειρά, (b) Συνολικό σύστημα

ένα μεγαλύτερο σύστημα που εκτελεί επεξεργασία στην είσοδό του. Σε αυτήν την περίπτωση, όπως στο Σχήμα (8)(a), η αρχική είσοδος περνάει και στο $h_1[n]$ και στο $h_2[n]$. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι τα συστήματα αυτά αποτελούν ΕΝΑ μεγαλύτερο σύστημα, το οποίο και αποτελεί το *άθροισμα* των επιμέρους συστημάτων στο πεδίο του χρόνου, όπως στο Σχήμα (8)(b).

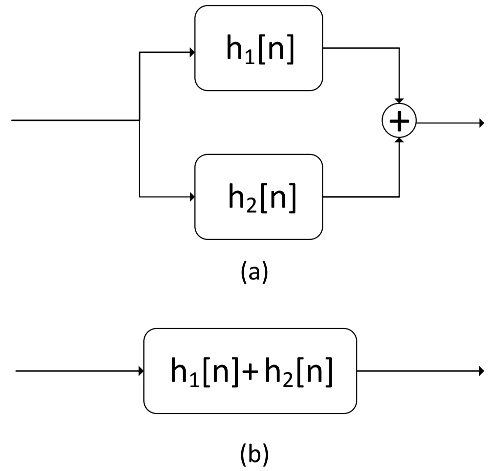
Όταν μιλήσουμε για το χώρο της συχνότητας στα διακριτού χρόνου σήματα, θα δούμε πώς αναλύονται αυτές οι διατάξεις, αν και πρέπει ήδη να έχετε μια ιδέα για το τι πρόκειται να συμβεί. :-)

Ο περιορισμός της γραμμικότητας και της χρονικής αμεταβλητότητας ορίζουν ένα σύνολο συστημάτων με πολύ ειδικές ιδιότητες. Η ευστάθεια και η αιτιατότητα προσδίδουν επιπλέον ιδιότητες, και είναι σημαντικό να γνωρίζει κανείς πότε ένα σύστημα είναι ευσταθές και πότε είναι αιτιατό. Θυμηθείτε ότι ένα σύστημα είναι *ευσταθές* εαν για φραγμένη είσοδο $|x[n]| < B_x$ παράγει πάντα φραγμένη έξοδο $|y[n]| < B_y$. Τα ΓΧΑ συστήματα είναι ευσταθή αν και μόνον αν η κρουστική τους απόκριση $h[n]$ είναι απολύτως αθροίσιμη:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \tag{120}$$

Αυτό αποδεικνύεται εύκολα αν φράξουμε την έξοδο $y[n]$ σύμφωνα με τον ορισμό της συνέλιξης, δηλαδή

$$|y[n]| = \Big| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \Big| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]x[n-k]| \tag{121}$$



Σχήμα 8: Συστήματα σε Παραλληλία στο χρόνο: (a) Δυο συστήματα σε παραλληλία, (b) Συνολικό σύστημα

κι αφού η είσοδος είναι φραγμένη, θα είναι

$$|y[n]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \tag{122}$$

η οποία είναι πεπερασμένη μόνο αν ισχύει η Σχέση (120), για την οποία δείξαμε ότι είναι ικανή για ευστάθεια. Για να δείξουμε ότι είναι και αναγκαία, πρέπει να δείξουμε ότι αν $B_h = \infty$, τότε μια φραγμένη είσοδο θα παράξει μη-φραγμένη έξοδο. Ας θεωρήσουμε την είσοδο

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[n] \neq 0 \\ 0, & h[n] = 0 \end{cases} \tag{123}$$

Προφανώς αυτή η είσοδος είναι φραγμένη από τη μονάδα. Ας υπολογίσουμε την έξοδο $y[0]$.

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|} = B_h = \infty \tag{124}$$

Οπότε το σύστημα δεν είναι ευσταθές. Άρα η Σχέση (120) είναι ικανή και αναγκαία για την ευστάθεια του συστήματος.

Το σύνολο των συστημάτων που ικανοποιούν την *αιτιατότητα* είναι επίσης πολύ σημαντικό. Υπενθυμίζεται ότι ένα σύστημα λέγεται αιτιατό όταν η έξοδός του εξαρτάται μόνο από παρελθοντικές τιμές της εισόδου. Από τη σχέση της συνέλιξης για ένα ΓΧΑ σύστημα, εύκολα συνεπάγεται ότι ένα αιτιατό σύστημα ικανοποιεί τη σχέση

$$h[n] = 0, \ \ n < 0 \tag{125}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να αναφέρεται σε οποιοδήποτε σήμα (όχι απαραίτητα σύστημα), και να το χαρακτηρίζει ως *αιτιατό*.