Γεώργιος Δ. Ακρίβης
Τμήμα Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

(*πανεπιστημιακές παραδόσεις*)

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2003

Πρόλογος

Η Γραμμική Άλγεβρα αποτελεί, μαζί με την Ανάλυση, το θεμέλιο των μαθηματικών σπουδών. Στις ανά χείρας σημειώσεις μελετώνται οι βασικές έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας, οι οποίες είναι απαραίτητες για τις σπουδές στα Μαθηματικά. Παράλληλα υπάρχουν πολλές εφαρμογές της Γραμμικής Άλγεβρας. Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων με τη βοήθεια υπολογιστών οδηγεί, κατά κανόνα, στην επίλυση γραμμικών συστημάτων. Αυτά τα θέματα αποτελούν το αντικείμενο της Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας, ενός κλάδου της Αριθμητικής Ανάλυσης, και δεν θα μας απασχολήσουν εδώ παρά μόνο ευκαιριακά.

Αντικείμενο της Γραμμικής Άλγεβρας αποτελούν οι γραμμικοί χώροι και, προ παντός, οι γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ γραμμικών χώρων.

Ουσιαστικές διαφορές μεταξύ των διαφόρων κλάδων των Μαθηματικών δεν υπάρχουν. Τα εισαγωγικά μαθήματα χωρίζονται συνήθως σε δύο μέρη: τον Απειροστικό Λογισμό και τη Γραμμική Άλγεβρα. Ο διαχωρισμός είναι τεχνητός και έχει εκπαιδευτικό χαρακτήρα. Η βασική διαφορά μεταξύ Γραμμικής Άλγεβρας και Απειροστικού Λογισμού συνίσταται στο ότι στη Γραμμική Άλγεβρα δεν γίνεται χρήση της έννοιας του ορίου, ενώ αυτή ακριβώς η έννοια παίζει τον πρωταγωνιστικό ρόλο στον Απειροστικό Λογισμό.

Σε πιο προχωρημένα μαθήματα οι βασικές έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας και του Απειροστικού Λογισμού, δηλαδή οι γραμμικοί χώροι και οι γραμμικές απεικονίσεις αφ' ενός και τα όρια αφ' ετέρου, συναπαντώνται, παίζουν φερ' ειπείν πρωταρχικό ρόλο στη Συναρτησιακή Ανάλυση, αλλά εμφανίζονται ακόμη και στην Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα κ.λπ.

Μία πρώτη μορφή των σημειώσεων αυτών γράφτηκε το 1984, για τους πρωτοετείς φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Έκτοτε οι σημειώσεις χρησιμοποιήθηκαν, κατά καιρούς, από διάφορους συναδέλφους στα μαθήματά τους, κυρίως στο Πανεπιστήμιο Κρήτης. Στην παρούσα μορφή οι σημειώσεις γράφτηκαν για τους πρωτοετείς φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών και Στατιστικής του Πανεπιστημίου Κύπρου.

Οι σημειώσεις προέκυψαν από τη διδασκαλία του εισαγωγικού μαθήματος Γραμμικής Άλγεβρας και γράφτηκαν για έναν συγκεκριμένο σκοπό, για να διευκολύνουν τους πρωτοετείς φοιτητές στην κατανόηση των πλέον βασικών στοιχείων της Γραμμικής Άλγεβρας. Δεν ήταν φιλοδοξία μας να δώσουμε ένα πλήρες σύγγραμμα Γραμμικής Άλγεβρας και δεν συμπεριλάβαμε πολλά, ιδιαίτερα σημαντικά, θέματα Γραμμικής Άλγεβρας.

Οι σημειώσεις περιλαμβάνουν εννέα κεφάλαια. Στο πρώτο, προκαταρκτικής φύσεως, κεφάλαιο εισάγουμε συμβολισμό, κυρίως για σύνολα και απεικονίσεις, καθώς και την έννοια του σώματος, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στη συνέχεια. Το δεύτερο και το τρίτο κεφάλαιο αφιερώνονται στους γραμμικούς χώρους και τις γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ των, αντίστοιχα, το βασικό αντικείμενο μελέτης της Γραμμικής Άλγεβρας. Στο τέταρτο κεφάλαιο δίνουμε διάφορες ιδιότητες πινάκων, του σημαντικότερου ίσως εργαλείου της Γραμμικής Άλγεβρας, και στο πέμπτο κεφάλαιο μελετάμε τις σχέσεις μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων. Το έκτο κεφάλαιο αφορά τα γραμμικά συστήματα, δηλαδή τη μελέτη γραμμικών “εξισώσεων" σε γραμμικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης. Στο έβδομο κεφάλαιο εισάγεται ένα άλλο χρήσιμο εργαλείο, η ορίζουσα, και μελετώνται διάφορες ιδιότητές της. Το όγδοο κεφάλαιο αφιερώνεται σε γραμμικούς χώρους με εσωτερικό γινόμενο, και, τέλος, το ένατο και τελευταίο στις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων.

Σεπτέμβριος 2001

Γ. Ακρίβης

Περιεχόμενα

1. Προκαταρκτικά: Σύνολα, Απεικονίσεις, Σώματα

Στο προκαταρκτικής φύσεως αυτό κεφάλαιο θα εισαγάγουμε συμβολισμό και θα αναφερθούμε σε μερικές θεμελιώδεις έννοιες των σύγχρονων Μαθηματικών· συγκεκριμένα, θα θυμηθούμε ορισμένα σύνολα και θα ορίσουμε τις έννοιες της απεικόνισης, της ομάδας και του σώματος. Οι γραμμικοί χώροι, που αποτελούν τη βάση στη μελέτη της Γραμμικής Άλγεβρας, ορίζονται με τη βοήθεια σωμάτων. Τα σώματα που παίζουν σημαντικό ρόλο στις εφαρμογές είναι δύο, το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ και το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμό.

1.1. Σύνολα

Αυτή η ενότητα αναφέρεται σε μία έννοια, η οποία παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στα σύγχρονα Μαθηματικά, την έννοια του συνόλου. Εδώ θα εισαγάγουμε απλώς συμβολισμό και θα ορίσουμε ορισμένες βασικές έννοιες, οι οποίες σχετίζονται με σύνολα.

Ένας απλός και ακριβής τρόπος εισαγωγής του όρου *σύνολο* (*set*) στα Μαθηματικά δεν είναι δυστυχώς γνωστός. Ένας ακριβής ορισμός, με τα σημερινά δεδομένα, είναι σκόπιμος μόνο σε ένα προχωρημένο στάδιο των μαθηματικών σπουδών. Για τη Γραμμική Άλγεβρα και τις εφαρμογές της αρκούν, ευτυχώς, μερικά παραδείγματα συνόλων, με τη βοήθεια των οποίων μπορούν να σχηματιστούν νέα σύνολα. Τα πεπερασμένα σύνολα, δηλαδή τα σύνολα με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, μπορούν θεωρητικά να δοθούν αναγράφοντας τα στοιχεία τους. Συμβολίζουμε παραδείγματος χάριν με $\{x_1, \ldots, x_n\}$, για κάποιον φυσικό αριθμό n, το σύνολο με στοιχεία $x_1, \ldots, x_n$, τα οποία δεν είναι κατ' ανάγκην διαφορετικά μεταξύ τους. Το πιό απλό *μη πεπερασμένο* σύνολο είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}.$$

Αναφέρουμε ακόμη το σύνολο των φυσικών αριθμών μαζί με το μηδέν $\mathbb{N}_0$,

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\},$$

το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

και το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$,

$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : \ p, q \quad \text{ακέραιοι}, \quad q \neq 0\}.$$

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με $\mathbb{C}$.

Συμβολισμοί:

Έστω X ένα σύνολο. Το $x \in X$ σημαίνει ότι το x είναι στοιχείο του X. Έστω P μία ιδιότητα· τότε $\exists x \in X \ P(x)$ σημαίνει ότι υπάρχει ένα στοιχείο x του συνόλου X το οποίο έχει την ιδιότητα P. Αντίστοιχα $\forall x \in X \ P(x)$ σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του συνόλου X, συνεπώς όλα τα στοιχεία του X, έχουν την ιδιότητα P. Τα σύμβολα $\exists$ και $\forall$ λέγονται *ποσοδείκτες*, το $\exists$ *υπαρξιακός* ποσοδείκτης και το $\forall$ *καθολικός* ποσοδείκτης.

Αν κάθε στοιχείο ενός συνόλου Y είναι και στοιχείο του συνόλου X, τότε το Y λέγεται *υποσύνολο* του X, συμβολισμός $Y \subset X$. Αν το Y είναι υποσύνολο του X, $Y \subset X$, και, επί πλέον, υπάρχει κάποιο στοιχείο του X που δεν ανήκει στο Y, τότε το Y λέγεται *γνήσιο υποσύνολο* του X, συμβολισμός $Y \subsetneqq X$.

Διαγραφή των ανωτέρω συμβόλων δηλώνει άρνηση, παραδείγματος χάριν το $5 \notin X$ σημαίνει ότι το 5 δεν είναι στοιχείο του X.

Έστω I ένα σύνολο (σύνολο δεικτών), και για κάθε $i \in I$ ένα σύνολο X_i. Τότε ορίζουμε την *ένωση* των συνόλων $X_i, i \in I$, ως το σύνολο με στοιχεία όλα τα στοιχεία όλων των X_i, δηλαδή ως εξής

$$\bigcup_{i \in I} X_i := \{x \ : \ \exists j \in I \ \ x \in X_j\},$$

και την *τομή* των συνόλων $X_i, i \in I$, ως το σύνολο με στοιχεία τα κοινά στοιχεία όλων των X_i, δηλαδή ως εξής

$$\bigcap_{i \in I} X_i := \{x \ : \ \forall j \in I \ \ x \in X_j\}.$$

Στην περίπτωση που το I είναι πεπερασμένο, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, χρησιμοποιούμε επίσης τους συμβολισμούς

$$X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n := \bigcup_{i=1}^{n} X_i := \bigcup_{i\in I} X_i,$$

και

$$X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n := \bigcap_{i=1}^{n} X_i := \bigcap_{i\in I} X_i.$$

Έστω τώρα δύο σύνολα X, Y. Η *διαφορά* του συνόλου Y από το σύνολο X ορίζεται ως

$$X \setminus Y := \{x \in X : x \notin Y\},$$

αποτελείται δηλαδή από όλα τα στοιχεία του X τα οποία δεν είναι στοιχεία του Y.

Το σύνολο

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\},$$

των *διατεταγμένων ζευγών* λέγεται *καρτεσιανό γινόμενο* του X επί Y. Η χαρακτηριστική ιδιότητα των διατεταγμένων ζευγών είναι ότι τα (x, y) και (x', y') είναι τότε και μόνο τότε ίσα, αν ισχύει συγχρόνως $x = x'$ και $y = y'$. (Ακριβής ορισμός με τη βοήθεια συνόλων $(x, y) := \{x, \{x, y\}\}$.) Ανάλογα ορίζεται και το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $X_1, X_2, \ldots, X_n$,

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in X_i, i = 1, \ldots, n\},$$

ως το σύνολο των διατεταγμένων νυάδων. Στην ειδική περίπτωση $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, όταν δηλαδή όλα τα σύνολα είναι ίσα μεταξύ των, γράφουμε επίσης X^n αντί για $X \times X \times \cdots \times X$.

Σημειώνουμε ότι ένα σύνολο περιγράφεται πλήρως από τα στοιχεία τα οποία περιέχει, αλλά ακόμη και ένα *μονοσύνολο*, δηλαδή ένα σύνολο που περιέχει ένα μόνο στοιχείο, δεν ταυτίζεται με το στοιχείο το οποίο περιέχει· φερ' ειπείν το 0 και το $\{0\}$ είναι διαφορετικά πράγματα.

Τέλος, το κενό σύνολο, δηλαδή το σύνολο που δεν έχει στοιχεία, το συμβολίζουμε με $\emptyset$.

1.2. Απεικονίσεις

Μία άλλη βασική έννοια των Μαθηματικών, η έννοια της απεικόνισης, είναι το αντικείμενο αυτής της ενότητας. Θα εισαγάγουμε απεικονίσεις και θα δούμε ορισμένες ειδικότερες περιπτώσεις απεικονίσεων.

Έστω X και Y σύνολα. Μία προδιαγραφή f, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο x του X *ακριβώς ένα* στοιχείο του Y, το οποίο και συμβολίζουμε με $f(x)$, λέγεται *απεικόνιση* (*map*) από το X στο Y. Χάριν συντομίας γράφουμε

$$\begin{aligned} f\ :X &\longrightarrow Y, \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Μία απεικόνιση από το X στο Y είναι λοιπόν, για να ακριβολογούμε, ένα υποσύνολο του $X \times Y$, το οποίο για κάθε $x \in X$ περιέχει ένα ζεύγος με πρώτο στοιχείο το x, και δεν περιέχει ζεύγη με το ίδιο πρώτο στοιχείο και διαφορετικά δεύτερα στοιχεία.

Το $f(x)$ λέγεται *εικόνα* του x μέσω της f. Το X λέγεται *πεδίο ορισμού* και το Y *πεδίο τιμών* της απεικόνισης f.

Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μία απεικόνιση και M, N υποσύνολα των X, Y, αντίστοιχα. Το σύνολο

$$f(M) := \{y \in Y : \exists x \in M \ y = f(x)\},$$

το οποίο είναι φυσικά υποσύνολο του Y, καλείται *εικόνα* του M μέσω της f, και το σύνολο

$$\overset{-1}{f}(N) := \{x \in X : f(x) \in N\},$$

λέγεται *αντίστροφη εικόνα* του N μέσω της f, και είναι προφανώς υποσύνολο του X.

Για απεικονίσεις με ιδιαίτερα σημαντικές ιδιότητες χρησιμοποιούμε ειδικούς όρους. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μία απεικόνιση. Η f λέγεται *έφεση* (*απεικόνιση επί, surjection*), αν η εικόνα του X μέσω της f είναι το Y, δηλαδή $f(X) = Y$, οπότε για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ το οποίο η f απεικονίζει στο y, δηλαδή είναι τέτοιο ώστε $y = f(x)$.

Η f λέγεται *ένεση* (*ένα προς ένα, injection*), αν από $x, x' \in X$ και $f(x) = f(x')$ έπεται $x = x'$, με άλλα λόγια αν x και x' είναι διαφορετικά στοιχεία του X, τότε και τα $f(x)$ και $f(x')$ είναι διαφορετικά στοιχεία του Y.

Η f λέγεται *αμφιμονοσήμαντη* (*αμφίεση, bijection*), αν είναι συγχρόνως ένεση και έφεση, δηλαδή ένα προς ένα και επί.

Αν η απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε για κάθε $y \in Y$ το σύνολο $\overset{-1}{f}(\{y\})$, δηλαδή η αντίστροφη εικόνα του συνόλου $\{y\}$, έχει ακριβώς ένα στοιχείο, το οποίο συμβολίζουμε με $f^{-1}(y)$. Κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται μία απεικόνιση

$$\begin{aligned} f^{-1} &: Y \longrightarrow X, \\ & y \longmapsto f^{-1}(y), \end{aligned}$$

η οποία καλείται *αντίστροφη* της f.

Παρατήρηση 1.1 Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μία απεικόνιση και $y \in Y$. Το σύνολο $\overset{-1}{f}(\{y\})$ έχει έννοια για κάθε f και είναι υποσύνολο του X. Το $f^{-1}(y)$ ορίζεται μόνο αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη, και είναι στοιχείο του X. Χάριν συντομίας γράφουμε πολλές φορές $\overset{-1}{f}(y)$ αντί για $\overset{-1}{f}(\{y\})$.

Έστω $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Z$. Η απεικόνιση

$$\begin{aligned} g \circ f &: X \longrightarrow Z, \\ & x \longmapsto g(f(x)), \end{aligned}$$

λέγεται *σύνθεση* των f και g. Παρατηρήστε ότι για να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$ ζητάμε το πεδίο ορισμού της g να είναι το πεδίο τιμών της f. Σημειώνουμε ακόμα ότι πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι το πεδίο ορισμού της f, ενώ πεδίο τιμών της είναι το πεδίο τιμών της g.

Παραδείγματα 1.1

1. Η απεικόνιση id_X,

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_X &: X \longrightarrow X, \\ & x \longmapsto x, \end{aligned}$$

λέγεται *ταυτοτική* απεικόνιση του X, ή *ταυτότητα* στο X.

2. Την απεικόνιση $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 1$, αν x ρητός, και $f(x) := 0$, αν x άρρητος, δεν μπορούμε να την παραστήσουμε γραφικά.

3. Η προδιαγραφή

$$\begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow [-1, 1], \\ x &\longmapsto \pm\sqrt{x}, \end{aligned}$$

δεν είναι απεικόνιση, γιατί, δεδομένου ενός $x \neq 0$, το $\pm\sqrt{x}$ δεν ορίζεται μονοσήμαντα.

Αντίθετα, η προδιαγραφή

$$[0,1] \longrightarrow [0,1],$$
$$x \longmapsto \sqrt{x},$$

είναι απεικόνιση, και μάλιστα είναι η αντίστροφη της απεικονίσεως

$$[0,1] \longrightarrow [0,1],$$
$$x \longmapsto x^2.$$

Θεωρούμε μία απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ και ένα υποσύνολο M του X. Η απεικόνιση

$$g \;:\; M \longrightarrow Y,$$
$$x \longmapsto f(x),$$

λέγεται *περιορισμός* της f στο M και συμβολίζεται με $f\ |_M$. Οι απεικονίσεις f και g διαφέρουν μόνο ως προς το πεδίο ορισμού των, εκεί που ορίζονται και οι δύο λαμβάνουν τις ίδιες τιμές.

Έστω $g : M \longrightarrow Y$, $M \subset X$, και $f : X \longrightarrow Y$ δύο απεικονίσεις. Αν για κάθε $x \in M$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε η f λέγεται *επέκταση* της g.

1.3. Σώματα

Ο όρος *σώμα* έχει θεμελιώδη σημασία για τον ορισμό ενός γραμμικού χώρου. Πριν ορίσουμε το σώμα, εισάγουμε την έννοια της *ομάδας*.

Ορισμός 1.1 Μία *ομάδα* (*group*) είναι ένα ζεύγος $(G, \cdot)$ αποτελούμενο από ένα μη κενό σύνολο G και μία πράξη $\cdot$ στο G, δηλαδή μία απεικόνιση

$$\cdot\ : G \times G \longrightarrow G,$$
$$(a,b) \longmapsto a \cdot b,$$

με τις εξής ιδιότητες (αξιώματα ομάδας):

(O_1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ για κάθε $a, b, c \in G$ (προσεταιριστικός νόμος).

(O_2) Υπάρχει ένα στοιχείο $e \in G$ (*ουδέτερο* στοιχείο του G), τέτοιο ώστε

(O_{2a}) $e \cdot a = a$ για κάθε $a \in G$,

(O_{2b}) για κάθε $a \in G$ υπάρχει $a' \in G$ (*αντίστροφο* του a), τέτοιο ώστε να ισχύει $a' \cdot a = e$.

Μία ομάδα $(G, \cdot)$ λέγεται *αβελιανή* (προς τιμήν του διάσημου Νορβηγού μαθηματικού Niels Henrik Abel), αν για κάθε $a, b \in G$ ισχύει

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{(αντιμεταθετικός νόμος).}$$

Αν σε μία ομάδα $(G, \cdot)$ η πράξη $\cdot$ είναι προφανής ή άνευ σημασίας, τότε γράφουμε απλούστερα G αντί για $(G, \cdot)$, και ab αντί για $a \cdot b$.

Θα δούμε τώρα μερικές απλές ιδιότητες ομάδων. Συγκεκριμένα, θα δούμε ότι αν το a' είναι αντίστροφο του a, τότε και το a είναι αντίστροφο του a', ότι το αντίστροφο ενός στοιχείου ορίζεται μονοσήμαντα, ότι υπάρχει ακριβώς ένα ουδέτερο στοιχείο, και ότι για το ουδέτερο στοιχείο εκτός του $ea = a$ ισχύει και $ae = a$ για κάθε στοιχείο a της ομάδας.

Λήμμα 1.1 *Έστω G μία ομάδα. Τότε ισχύουν*:
1. *Αν $a' \in G$ είναι αντίστροφο στοιχείο του a, τότε ισχύει και $aa' = e$.*
2. *Για ένα ουδέτερο στοιχείο $e \in G$ ισχύει $ae = a$ για κάθε $a \in G$.*
3. *Υπάρχει ακριβώς ένα ουδέτερο στοιχείο $e \in G$.*
4. *Για κάθε $a \in G$ υπάρχει ακριβώς ένα αντίστροφο στοιχείο $a' \in G$, το οποίο συμβολίζουμε με a^{-1}.*

Απόδειξη.
1. Έστω a'' ένα αντίστροφο του a' (το οποίο υπάρχει σύμφωνα με την (O_{2b})). Τότε φυσικά θα ισχύει $a''a' = e$, και επομένως

$$\begin{aligned} aa' &= e(aa') = (a''a')(aa') = a''(a'(aa')) \\ &= a''((a'a)a') = a''(ea') = a''a' = e, \end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η προτελευταία ισότητα ισχύουν λόγω της (O_{2a}), η δεύτερη και η τελευταία λόγω της $a''a' = e$, η τρίτη και η τέταρτη λόγω της (O_1), και, τέλος, η πέμπτη λόγω του γεγονότος ότι $a'a = e$.
2. Έχουμε

$$ae = a(a'a) = (aa')a = ea = a,$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει λόγω του γεγονότος ότι $a'a = e$, η δεύτερη λόγω της (O_1), η τρίτη και η τέταρτη λόγω του 1. το οποίο μόλις αποδείξαμε, και, τέλος, η τελευταία λόγω της (O_{2a}).

3. Έστω $e, e' \in G$ δύο ουδέτερα στοιχεία. Τότε έχουμε

$$e' = ee' = e'e = e,$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει επειδή το e είναι ουδέτερο στοιχείο, η δεύτερη προκύπτει χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το e είναι, σύμφωνα με την πρώτη σχέση, αντίστροφο του e' και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το 1. που αποδείξαμε προηγουμένως, και η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή το e' είναι ουδέτερο στοιχείο.
4. Έστω $a', a'' \in G$ αντίστροφα του a. Τότε θα έχουμε

$$a'' = a''e = a''(aa') = (a''a)a' = ea' = a',$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει λόγω του 2. που αποδείξαμε προηγουμένως, η δεύτερη λόγω της $aa' = e$, η τρίτη λόγω της (O_1), η προτελευταία λόγω της $a''a = e$, και, τέλος, η τελευταία λόγω της (O_{2a}). $\square$

Στη συνέχεια θα δούμε ότι το (O_2) στον ορισμό μίας ομάδας είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι εξισώσεις μίας συγκεκριμένης μορφής έχουν πάντα μία λύση. Ακόμη θα δούμε ότι αυτές οι λύσεις είναι μοναδικές.

Λήμμα 1.2 *Έστω G ένα μη κενό σύνολο, $G \neq \emptyset$, και $\cdot$ μία πράξη στο G. Τότε το $(G, \cdot)$ είναι ομάδα, αν και μόνο αν ισχύει το (O_1) και για κάθε $a, b \in G$ οι εξισώσεις*

$$xa = b, \quad ay = b, \tag{1.1}$$

έχουν λύσεις $x, y \in G$. Επί πλέον σε αυτή την περίπτωση οι λύσεις x, y είναι μονοσήμαντα ορισμένες.

Απόδειξη. Θα υποθέσουμε κατ' αρχήν ότι το $(G, \cdot)$ είναι ομάδα και θα αποδείξουμε ότι οι εξισώσεις (1.1) έχουν μία ακριβώς λύση. Πραγματικά, με $x := ba^{-1}$ και $y = a^{-1}b$ έχουμε

$$xa = (ba^{-1})a = b(a^{-1}a) = be = b,$$

και

$$ay = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b,$$

επομένως κάθε μία από τις εξισώσεις μας έχει τουλάχιστον μία λύση. Έστω τώρα και $x', y' \in G$ λύσεις, δηλαδή $x'a = b, \quad ay' = b$. Θα αποδείξουμε ότι $x = x'$ και $y = y'$. Πραγματικά έχουμε

$$x' = x'e = x'(aa^{-1}) = (x'a)a^{-1} = ba^{-1} = x,$$

και

$$y' = ey' = (a^{-1}a)y' = a^{-1}(ay') = a^{-1}b = y.$$

Προχωρούμε τώρα στο αντίστροφο· θα υποθέσουμε ότι οι εξισώσεις (1.1) έχουν λύσεις για κάθε $a, b \in G$ και θα αποδείξουμε ότι το $(G, \cdot)$ είναι ομάδα. Έστω a ένα στοιχείο του G. Τότε, σύμφωνα με την υπόθεσή μας, υπάρχει ένα στοιχείο e του G τέτοιο ώστε $ea = a$ (η λύση της εξίσωσης $xa = a$). Επί πλέον, για κάθε $b \in G$ υπάρχει $y \in G$ τέτοιο ώστε $ay = b$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$eb = e(ay) = (ea)y = ay = b,$$

οπότε το e είναι ουδέτερο στοιχείο, δηλαδή ισχύει η (O_{2a}). Επίσης, αφού η εξίσωση $xa = e$ έχει λύση, έστω a', υπάρχει το αντίστροφο στοιχείο του a, για κάθε $a \in G$. Συνεπώς ισχύει και η (O_{2b}). Συνολικά αυτό μας λέει ότι το $(G, \cdot)$ είναι ομάδα. $\square$

Δίνουμε τώρα ορισμένα παραδείγματα ομάδων. Οι αποδείξεις είναι απλές και αφήνονται ως ασκήσεις.

Παραδείγματα 1.2

1. Το $(\mathbb{Z}, +)$, όπου το $+$ συμβολίζει την πρόσθεση, είναι αβελιανή ομάδα. Ουδέτερο στοιχείο είναι το μηδέν, "αντίστροφος" του ακεραίου n είναι ο $-n$. Επίσης τα $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ είναι αβελιανές ομάδες, ενώ το $(\mathbb{N}, +)$ δεν είναι ομάδα, αφού δεν ικανοποιεί την (O_2).

2. Έστω $\mathbb{Q}^\star := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^\star := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$, $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Τα ζεύγη $(\mathbb{Q}^\star, \cdot)$, $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$, $(\mathbb{R}^\star, \cdot)$, και $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ με τον συνήθη πολλαπλασιασμό είναι αβελιανές ομάδες.

Τα ζεύγη $(\mathbb{Z}^\star, \cdot)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, με $\mathbb{Z}^\star := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, δεν είναι ομάδες.

Προχωρούμε τώρα στον ορισμό του *σώματος*. Στον ορισμό του σώματος χρειαζόμαστε δύο πράξεις (ενώ στην ομάδα αρκούσε μία), και τρία αξιώματα, τα δύο πρώτα αναφέρονται σε κάθε μία πράξη ξεχωριστά, ενώ το τρίτο και στις δύο πράξεις.

Ορισμός 1.2 Ένα *σώμα* (*field*) είναι μία τριάδα $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ αποτελούμενη από ένα σύνολο $\mathbb{K}$ και δύο πράξεις $+$ και $\cdot$ στο $\mathbb{K}$, δηλαδή δύο απεικονίσεις

$$\begin{aligned} + \ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K}, \\ (a, b) &\longmapsto a + b, \end{aligned}$$

και

$$\cdot\ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},$$
$$(a, b) \longmapsto a \cdot b,$$

με τις εξής ιδιότητες (αξιώματα σώματος):

(Σ_1) Το $(\mathbb{K}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.

(Το ουδέτερο στοιχείο το συμβολίζουμε με 0, το αντίστροφο ενός στοιχείου $a \in \mathbb{K}$ ως προς την πράξη $+$ με $-a$, και θα το αποκαλούμε στη συνέχεια *αντίθετο* του a.)

(Σ_2) Το $(\mathbb{K}^\star, \cdot)$, με $\mathbb{K}^\star := \mathbb{K} \setminus \{0\}$, είναι αβελιανή ομάδα.

(Το ουδέτερο στοιχείο το συμβολίζουμε με 1, το αντίστροφο ενός στοιχείου $a \in \mathbb{K}$ ως προς την πράξη $\cdot$ με a^{-1}.)

(Σ_3) Για $a, b, c \in \mathbb{K}$ ζητούμε να ισχύουν

$$a(b + c) = (ab) + (ac)$$

και

$$(a + b)c = (ac) + (bc)$$

(επιμεριστικοί νόμοι).

Σημειώνουμε ότι, όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως, αν ισχύει ένας από τους επιμεριστικούς νόμους, τότε ισχύει και ο άλλος.

Για να απλουστεύσουμε το συμβολισμό αποφεύγοντας τις πολλές παρενθέσεις, συμφωνούμε ότι ο πολλαπλασιασμός συνδέει ισχυρότερα από την πρόσθεση. Έτσι οι επιμεριστικοί νόμοι γράφονται στη μορφή

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Επίσης γράφουμε $a - b$ αντί για $a + (-b)$, και $\frac{a}{b}$ αντί για ab^{-1}.

Θα δούμε τώρα μερικές απλές ιδιότητες σωμάτων. Συγκεκριμένα θα δούμε ότι το γινόμενο δύο στοιχείων ενός σώματος μηδενίζεται, αν και μόνο αν τουλάχιστον ένας από τους παράγοντες είναι μηδέν, και ακόμη ότι $a(-b) = (-a)b = -ab$.

Λήμμα 1.3 *Για τον πολλαπλασιασμό σε ένα σώμα $\mathbb{K}$ ισχύουν*:

1. *Για κάθε $a \in \mathbb{K}$ έχουμε $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$, δηλαδή το γινόμενο του μηδενός με κάθε στοιχείο είναι μηδέν.*

2. *Αν $a, b \in \mathbb{K}$ και $ab = 0$, τότε είτε $a = 0$ είτε $b = 0$.*

3. *Για* $a, b \in \mathbb{K}$ *ισχύει* $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.

Απόδειξη.
1. Κατ' αρχήν έχουμε

$$0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a,$$

και με βάση το Λήμμα 1.2 συμπεραίνουμε ότι $0 \cdot a = 0$. Το $a \cdot 0 = 0$ αποδεικνύεται ανάλογα (έπεται όμως και από το ήδη αποδειχθέν, επειδή η ομάδα είναι αβελιανή.)
2. Αν υποθέσουμε ότι $a \neq 0$ και $b \neq 0$, τότε σύμφωνα με το (Σ_2) συμπεραίνουμε ότι θα ισχύει και $ab \neq 0$, άτοπο.
3. Έχουμε

$$ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a(b - b) = a \cdot 0 = 0,$$

και συμπεραίνουμε ότι $a(-b) = -(ab)$. Αντίστοιχα

$$ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0 \cdot b = 0,$$

επομένως $(-a)b = -(ab)$. $\square$

Παραδείγματα 1.3

Τα $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ και $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμό είναι σώματα. Το $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ δεν είναι σώμα, αφού το $(\mathbb{Z}^\star, \cdot)$ δεν είναι ομάδα.

1.4. Ασκήσεις

1.1. Προσδιορίστε το σύνολο με στοιχεία τις λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 5x + 6 = 0$.

1.2. Έστω X ένα σύνολο. Προσδιορίστε το καρτεσιανό γινόμενο $X \times \emptyset$.

1.3. Γιατί δεν υπάρχει το "σύνολο" όλων των συνόλων; [Αν συμβολίσουμε αυτό το "σύνολο" με X, και με Y το υποσύνολό του, το οποίο αποτελείται από όλα τα σύνολα που δεν περιέχουν τον εαυτό τους ως στοιχείο, δείξτε ότι ισχύει συγχρόνως $Y \in Y$ και $Y \notin Y$.]

1.4. Θεωρούμε τη *συνάρτηση*, δηλαδή απεικόνιση με πραγματικές τιμές, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της, το πεδίο τιμών της, και ποια η εικόνα της, δηλαδή η εικόνα του $\mathbb{R}$ μέσω της f;

1.5. Έστω $\mathbb{Q}^\star := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^\star := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$, $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Αποδείξτε ότι τα ζεύγη $(\mathbb{Q}^\star, \cdot)$, $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$, $(\mathbb{R}^\star, \cdot)$, και $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ με τον συνήθη πολλαπλασιασμό είναι αβελιανές ομάδες, ενώ τα ζεύγη $(\mathbb{Z}^\star, \cdot)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, με $\mathbb{Z}^\star := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, δεν είναι ομάδες.

1.6. Αποδείξτε ότι τα $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ και $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμό είναι σώματα, ενώ το $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ δεν είναι σώμα.

1.7. Έστω $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ένα σώμα. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{K}$ περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

2. Γραμμικοί Χώροι

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισαγάγουμε μία βασική έννοια της Γραμμικής Άλγεβρας, την έννοια του *γραμμικού χώρου*, θα δούμε μερικές απλές ιδιότητες γραμμικών χώρων, θα εισαγάγουμε ορισμένες θεμελιώδεις έννοιες σε γραμμικούς χώρους, τις έννοιες της γραμμικής εξάρτησης, της βάσης και της διάστασης, καθώς και την έννοια του υποχώρου ενός γραμμικού χώρου και του αθροίσματος γραμμικών χώρων. Θα γνωρίσουμε επίσης ορισμένες βασικές ιδιότητες γραμμικών χώρων και θα δώσουμε μερικά παραδείγματα γραμμικών χώρων.

Οι γραμμικοί χώροι παίζουν καθοριστικό ρόλο γενικότερα στα Μαθηματικά, η χρήση τους δεν περιορίζεται κατά κανένα τρόπο μόνο στη Γραμμική Άλγεβρα.

2.1. Η έννοια του γραμμικού χώρου

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε την έννοια του γραμμικού χώρου και του υποχώρου ενός γραμμικού χώρου, θα δούμε ορισμένα παραδείγματα γραμμικών χώρων και θα γνωρίσουμε μερικές βασικές ιδιότητες γραμμικών χώρων.

Ορισμός 2.1 Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα. Ένας $\mathbb{K}-$*γραμμικός χώρος*, ή *γραμμικός χώρος πάνω στο* $\mathbb{K}$, είναι μία τριάδα $(X,+,\cdot)$ αποτελούμενη από ένα σύνολο X, μία πράξη $+$ στο X (πρόσθεση)

$$\begin{aligned} + \ : X \times X &\longrightarrow X, \\ (x,y) &\longmapsto x+y, \end{aligned}$$

και μία πράξη $\cdot$ (πολλαπλασιασμός με στοιχεία του $\mathbb{K}$)

$$\begin{aligned} \cdot \ : \mathbb{K} \times X &\longrightarrow X, \\ (\lambda,x) &\longmapsto \lambda\cdot x, \end{aligned}$$

με τις εξής ιδιότητες (αξιώματα γραμμικού χώρου):

(ΓΧ1) Το $(X,+)$ είναι αβελιανή ομάδα.

(Το ουδέτερο στοιχείο 0 λέγεται *μηδενικό* διάνυσμα.)

(ΓΧ2) Για $x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ισχύουν

(a)
$$(\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x)$$

(b)
$$\lambda \cdot (x + y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y)$$

(c)
$$(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$$

(d)
$$1 \cdot x = x.$$

Συνώνυμα με το γραμμικό χώρο χρησιμοποιείται και ο όρος *διανυσματικός χώρος* (linear space, vector space). Εφιστούμε την προσοχή του αναγνώστη στη χρήση του ιδίου συμβόλου, του 0, τόσο για το ουδέτερο στοιχείο του σώματος $\mathbb{K}$, όσο και για το μηδενικό διάνυσμα του X, καθώς και του συμβόλου $+$ για την πρόσθεση τόσο στο $\mathbb{K}$ όσο και στον X. Η εμπειρία έχει δείξει ότι μικρή μόνο εξάσκηση αρκεί για να αποκλείσει κάθε σύγχυση που ενδεχομένως προκαλεί αυτός ο συμβολισμός στους μη εξοικειωμένους αναγνώστες.

Αν οι πράξεις $+$ και $\cdot$ είναι προφανείς ή άνευ σημασίας, τότε συχνά γράφουμε X αντί για $(X, +, \cdot)$. Επίσης αντί για $\lambda \cdot x$, με $\lambda \in \mathbb{K}, x \in X$, συνήθως γράφουμε λx.

Για να αποφεύγουμε τις πολλές παρενθέσεις, συμφωνούμε ότι ο πολλαπλασιασμός ενός στοιχείου του $\mathbb{K}$ με ένα στοιχείο του X συνδέει ισχυρότερα από την πρόσθεση στο X, δηλαδή πρώτα γίνονται τέτοιοι πολλαπλασιασμοί και έπονται οι προσθέσεις στοιχείων του γραμμικού χώρου, το $\lambda x + y$ σημαίνει $(\lambda x) + y$.

Στις εφαρμογές οι γραμμικοί χώροι ορίζονται σχεδόν πάντα είτε πάνω στο σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είτε στο σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Για το λόγο αυτόν και επειδή τα αποτελέσματα μπορούν πολύ εύκολα να γενικευθούν, σε αυτές τις σημειώσεις θα ασχοληθούμε μόνο με πραγματικούς γραμμικούς χώρους (δηλαδή τέτοιους ώστε $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) είτε με μιγαδικούς γραμμικούς χώρους ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Όταν στη συνέχεια θα μιλάμε για γραμμικούς χώρους, θα εννοούμε πραγματικούς γραμμικούς χώρους· στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε μιγαδικούς γραμμικούς χώρους θα το τονίζουμε ώστε να καθίσταται σαφές.

Παρατήρηση 2.1 Τα στοιχεία ενός γραμμικού χώρου λέγονται *διανύσματα* ή *σημεία* του γραμμικού χώρου. Εξ ορισμού, λοιπόν, ένα διάνυσμα είναι ένα στοιχείο ενός διανυσματικού χώρου.

Παραδείγματα 2.1

1. Έστω n ένας φυσικός αριθμός. Το κλασσικό παράδειγμα για έναν γραμμικό χώρο είναι ο χώρος $\mathbb{R}^n$ των διατεταγμένων νυάδων πραγματικών αριθμών, στον οποίο η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός με πραγματικούς αριθμούς ορίζονται ως εξής

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

και

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Σημειώνουμε ότι τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ θα τα γράφουμε είτε ως γραμμές είτε ως στήλες, ανάλογα με το τι κάθε φορά διευκολύνει το συμβολισμό.

2. Έστω a και b δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a < b$. Συμβολίζουμε με $C[a, b]$ το σύνολο τον συνεχών συναρτήσεων, που ορίζονται στο διάστημα $[a, b]$ και παίρνουν πραγματικές τιμές, $C[a, b] := \{x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; x \text{ συνεχής}\}$. (Το C σε αυτόν το συμβολισμό προέρχεται από τον αντίστοιχο αγγλικό όρο "continuous" που σημαίνει "συνεχής".) Με τις πράξεις

$$x, y \in C[a, b] \quad (x + y)(s) := x(s) + y(s),\ s \in [a, b],$$

και

$$\lambda \in \mathbb{R}\ \ x \in C[a, b] \quad (\lambda x)(s) := \lambda x(s),\ s \in [a, b],$$

ο $C[a, b]$ είναι γραμμικός χώρος. Έτσι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$ είναι και διάνυσμα, ως στοιχείο του γραμμικού χώρου $C[a, b]$! Δηλαδή, διανύσματα δεν είναι μόνο αυτά που μαθαίνουμε στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Στο επόμενο Λήμμα θα δούμε ότι το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού με ένα διάνυσμα μηδενίζεται, αν και μόνο αν ο πραγματικός αριθμός ή το διάνυσμα (ή αμφότερα) είναι μηδέν. Επίσης θα δούμε ότι το $(-1)x$ είναι αντίθετο του x.

Λήμμα 2.1 *Έστω $(X, +, \cdot)$ ένας πραγματικός γραμμικός χώρος. Τότε ισχύουν:*
1. *Το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού με ένα διάνυσμα είναι το μηδενικό διάνυσμα, αν και μόνο αν είτε ο αριθμός είναι μηδέν είτε το διάνυσμα είναι το μηδενικό, δηλαδή*

(i)
$$\forall x \in X \quad 0 \cdot x = 0$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot 0 = 0$$

και, αντίστροφα,

(ii) $$(\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in X, \quad \lambda x = 0) \quad \Longrightarrow \quad (\lambda = 0 \text{ ή } x = 0).$$

2. *Το γινόμενο του αριθμού* -1 *με ένα διάνυσμα* x *είναι το αντίθετο του* x, *δηλαδή το* $-x$,

$$\forall x \in X \quad (-1)x = -x.$$

Απόδειξη.
1. (i) Έστω $x \in X$. Τότε θα έχουμε αφ' ενός $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, δηλαδή

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x,$$

και αφ' ετέρου

$$0 \cdot x = 0 + 0 \cdot x.$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει, σύμφωνα με το Λήμμα 1.2, $0 \cdot x = 0$, επειδή το $(X, +)$ είναι ομάδα.

Ακριβώς ανάλογα έχουμε $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0+0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$ και $\lambda \cdot 0 = 0 + \lambda \cdot 0$, και οδηγούμαστε στο συμπέρασμα $\lambda \cdot 0 = 0$.
(ii) Αντίστροφα τώρα, υποθέτοντας ότι $\lambda \neq 0$ και $\lambda \cdot x = 0$, έχουμε $x = 1 \cdot x = (\lambda^{-1}\lambda)x = \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} \cdot 0 = 0$.
2. Τώρα έχουμε

$$x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1)x = (1 + (-1))x = (1-1)x = 0 \cdot x = 0,$$

οπότε, σύμφωνα με το Λήμμα 1.2, ισχύει $(-1)x = -x$. $\square$

Η επόμενη βασική έννοια που θέλουμε να εισαγάγουμε είναι αυτή του *υποχώρου*.

Ορισμός 2.2 Έστω $(X, +, \cdot)$ ένας γραμμικός χώρος και Y ένα μη κενό υποσύνολο του X, $Y \subset X$. Το Y λέγεται *υπόχωρος* του X, αν ισχύουν:

(ΥΧ1) Το Y είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, δηλαδή αν προσθέσουμε δύο στοιχεία του παίρνουμε ξανά στοιχείο του,

$$\forall x, y \in Y \quad x + y \in Y.$$

(ΥΧ2) Το Y είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή, αν πολλαπλασιάσουμε έναν πραγματικό αριθμό με ένα στοιχείο του Y, παίρνουμε ξανά στοιχείο του Y,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall x \in Y \quad \lambda x \in Y.$$

Φυσικά, αν ο γραμμικός χώρος έχει ορισθεί πάνω σε ένα σώμα $\mathbb{K}$, τότε το ρόλο των πραγματικών αριθμών στον προηγούμενο ορισμό παίζουν τα στοιχεία του $\mathbb{K}$.

Λήμμα 2.2 *Έστω $(X, +, \cdot)$ ένας γραμμικός χώρος και Y ένας υπόχωρος του X. Τότε ο $(Y, +, \cdot)$, με πράξεις τους περιορισμούς των πράξεων στον X σε στοιχεία του Y, είναι γραμμικός χώρος.*

Απόδειξη. Το αξίωμα (ΓΧ2) ισχύει προφανώς στον Y, αφού ισχύει στον X. Ο αντιμεταθετικός και ο προσεταιριστικός νόμος ισχύουν στον Y, αφού ισχύουν στον X. Αφού το Y είναι μη κενό, έχει ένα στοιχείο $y \in Y$. Επομένως το μηδενικό διάνυσμα, $0 = 0 \cdot y$, ανήκει λόγω του (ΥΧ2) στο Y. Έστω τώρα $y \in Y$. Πάλι λόγω του (ΥΧ2) έχουμε $-y = (-1)y \in Y$. Σημειώνουμε ότι σε αυτή την απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 2.1. □

Δίνουμε τώρα ορισμένα παραδείγματα υποχώρων. Οι αποδείξεις είναι εύκολες και παραλείπονται. Συνιστάται στους φοιτητές να σκεφτούν τι παριστάνει ο υπόχωρος στο δεύτερο παράδειγμα, και να δώσουν συγκεκριμένα παραδείγματα για την τρίτη περίπτωση, όταν ο γραμμικός χώρος είναι φερ' ειπείν ο $\mathbb{R}^2$.

Παραδείγματα 2.2

1. Έστω X ένας γραμμικός χώρος και 0 το μηδενικό διάνυσμα του X. Το $Y = \{0\}$ είναι ο *μηδενικός* υπόχωρος του X.

2. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Το σύνολο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \lambda x\}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

3. Έστω Y_1, Y_2 δύο υπόχωροι του X. Η τομή τους $Y_1 \cap Y_2$ είναι επίσης υπόχωρος του X, ενώ αντίθετα η ένωσή τους $Y_1 \cup Y_2$ δεν είναι γενικά υπόχωρος του X.

Εύκολα μπορεί κανείς να δώσει παραδείγματα υποσυνόλων γραμμικών χώρων τα οποία έχουν την ιδιότητα (ΥΧ1) αλλά όχι την (ΥΧ2), ή αντίστροφα, συνεπώς δεν είναι υπόχωροι ενός χώρου X, βλ. Άσκηση 2.2.

2.2. Γραμμική εξάρτηση, βάση, διάσταση

Σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι η εισαγωγή του όρου *διάσταση*, ενός μέτρου για το "μέγεθος" ενός γραμμικού χώρου. Πριν μπορέσουμε να εισαγάγουμε αυτή την έννοια, θα μιλήσουμε για γραμμική εξάρτηση ή ανεξαρτησία διανυσμάτων, θα γνωρίσουμε διάφορες συνθήκες για αυτές, και θα εισαγάγουμε την έννοια της βάσης ενός γραμμικού χώρου.

Ορισμός 2.2 Έστω X ένας γραμμικός χώρος, $x_1, \dots, x_m \in X$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Μία έκφραση της μορφής

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m \ (= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i)$$

λέγεται *γραμμικός συνδυασμός* των διανυσμάτων $x_1, \dots, x_m$.

Ορισμός 2.3 Έστω X ένας γραμμικός χώρος και $x_1, \dots, x_m \in X$.
i. Τα διανύσματα $x_1, \dots, x_m$ λέγονται *γραμμικά εξαρτημένα*, αν υπάρχει μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός τους που είναι μηδέν, δηλαδή αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, εκ των οποίων τουλάχιστον ένας δεν είναι μηδέν, τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0.$$

ii. Τα διανύσματα $x_1, \dots, x_m$ λέγονται *γραμμικά ανεξάρτητα*, αν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή αν η ισότητα $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0$ ισχύει μόνο για $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$, ή

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$$

Δίνουμε τώρα έναν εύκολο μεν χρήσιμο δε χαρακτηρισμό γραμμικής εξάρτησης.

Πρόταση 2.1 *Τα διανύσματα $x_1, \dots, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αν και μόνο αν τουλάχιστον ένα από αυτά μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι τα $x_1, \dots, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τότε θα υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0. \tag{2.1}$$

Επομένως υπάρχει $j \in \{1, \dots, m\}$ τέτοιο ώστε $\lambda_j \neq 0$. Γράφουμε την (2.1) στη μορφή

$$\lambda_j x_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \lambda_i x_i$$

και πολλαπλασιάζουμε αυτή τη σχέση με $1/\lambda_j$ για να οδηγηθούμε στην

$$x_j = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} x_i,$$

στην οποία φυσικά το x_j εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων διανυσμάτων.

Αντίστροφα τώρα, αν υποθέσουμε ότι, για κάποιο $j \in \{1, \dots, m\}$, το x_j γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων διανυσμάτων, θα έχουμε

$$x_j = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} \mu_i x_i,$$

οπότε με $\mu_j := 1$ λαμβάνουμε τη σχέση

$$\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_m x_m = 0,$$

σύμφωνα με την οποία, λόγω του ότι $\mu_j \neq 0$, τα $x_1, \dots, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. $\square$

Προσοχή! Αν κάποια διανύσματα $x_1, \dots, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αυτό δεν σημαίνει κατ' ανάγκην ότι καθένα από αυτά μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Στον $\mathbb{R}^2$, παραδείγματος χάριν, τα διανύσματα x_1, x_2, x_3 με $x_1 = (1, 0), x_2 = (2, 0)$ και $x_3 = (0, 1)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, το x_3 όμως δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των x_1 και x_2.

Παραδείγματα 2.3

1. Τα διανύσματα $x, y, 2x + y$ οποιουδήποτε πραγματικού γραμμικού χώρου X είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού

$$2x + y + (-1)(2x + y) = 0.$$

2. Ιδιαίτερο ρόλο στη συνέχεια θα παίξουν τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, τα οποία έχουν όλες τις συνιστώσες τους ίσες με το μηδέν, πλην μίας η οποία ισούται με τη μονάδα. Για $j \in \{1, \dots, n\}$, συμβολίζουμε με e_j το διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ του οποίου η συνιστώσα στη θέση j είναι μονάδα και όλες οι υπόλοιπες είναι μηδέν, $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ και η μονάδα είναι στη θέση j.

Τα διανύσματα $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πραγματικά η σχέση

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$$

γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \in \mathbb{R}^n,$$

η οποία φυσικά μας δίνει αμέσως $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Για να γράψουμε τις συνιστώσες ενός διανύσματος e_j κομψότερα, εισαγάγουμε ένα σύμβολο το οποίο είναι χρήσιμο γενικότερα στα Μαθηματικά και λέγεται *σύμβολο του Kronecker* ή *δέλτα του Kronecker*. Για δύο τυχόντες ακεραίους i και j το δ_{ij} ισούται με τη μονάδα αν $i = j$ και με μηδέν διαφορετικά, δηλαδή

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad i = j, \\ 0, & \text{αν} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Με αυτόν το συμβολισμό μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα $e_j \in \mathbb{R}^n$ στη μορφή $e_j = (\delta_{1j}, \dots, \delta_{nj})$.

3. Για έναν φυσικό αριθμό n, συμβολίζουμε με $\mathbb{P}_n$ το σύνολο των πολυωνύμων μίας μεταβλητής βαθμού το πολύ n,

$$\mathbb{P}_n := \{p \ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ p \text{ πολυώνυμο βαθμού το πολύ } n\}.$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας γνωρίζουμε ότι ένα πολυώνυμο βαθμού n έχει ακριβώς n ρίζες, οι οποίες είναι γενικά μιγαδικές και στην αρίθμηση λαμβάνουμε υπ' όψιν και την πολλαπλότητα των ριζών.

Θα δούμε τώρα ότι τα πολυώνυμα $p_i, p_i(t) := t^i, i = 0, \dots, m$, με $m \leq n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον $\mathbb{P}_n$. Πραγματικά, κατ' αρχήν λόγω του ότι $m \leq n$ έχουμε $p_i \in \mathbb{P}_n, i = 0, \dots, m$. Αν τώρα υποθέσουμε ότι ένας γραμμικός συνδυασμός q των p_i, $q = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_m p_m$, είναι μηδέν, $q = 0$, τότε συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Για να το δούμε αυτό, υποθέτουμε προς το παρόν ότι κάποιο λ_i είναι διάφορο του μηδενός, οπότε το q θα έχει, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας, το πολύ m ρίζες, άτοπο αφού $q = 0$, δηλαδή $q(t) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, οπότε το q έχει άπειρες ρίζες.

Ορισμός 2.4 Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Λέμε ότι τα διανύσματα $x_1, \dots, x_m \in X$ *παράγουν* το χώρο $< x_1, \dots, x_m >$ με

$$< x_1, \dots, x_m > := \{x \in X \ : \ x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \ \lambda_i \in \mathbb{R}\},$$

ο οποίος βέβαια αποτελεί υπόχωρο του X.

Θα δούμε τώρα έναν ακόμη χρήσιμο χαρακτηρισμό γραμμικής ανεξαρτησίας.

Πρόταση 2.2 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος και $x_1, \dots, x_m$ διανύσματα του X. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
i. *Τα $x_1, \dots, x_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*
ii. *Κάθε $x \in < x_1, \dots, x_m >$ μπορεί να γραφεί κατά έναν και μόνο τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \dots, x_m$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι ισχύει το i. και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και το ii. Αν δεν ισχύει το ii., τότε κάποιο $x \in < x_1, \dots, x_m >$ θα μπορεί να γραφεί κατά δύο τουλάχιστον τρόπους ως γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \dots, x_m$, οπότε θα έχουμε

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i \tag{2.2}$$

με $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (\mu_1, \dots, \mu_m)$. Από τη (2.2) όμως έπεται

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0,$$

και λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $x_1, \dots, x_m$ οδηγούμαστε στο συμπέρασμα $\lambda_i - \mu_i = 0, i = 0, \dots, m$, δηλαδή $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, άτοπο. Επομένως το ii. ισχύει.

Αντίστροφα τώρα υποθέτουμε ότι ισχύει το ii. και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και το i. Κατ' αρχήν βέβαια έχουμε

$$0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_m = 0.$$

Αν υποθέσουμε προς το παρόν ότι τα $x_1, \dots, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, οπότε θα υπάρχει $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq 0 \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0,$$

δηλαδή το μηδενικό διάνυσμα μπορεί να γραφεί κατά δύο τρόπους ως γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \ldots, x_m$, το οποίο είναι σύμφωνα με το ii. άτοπο. Άρα ισχύει και το i. $\square$

Ιδιαίτερη σημασία έχουν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα τα οποία παράγουν έναν γραμμικό χώρο. Κάθε τέτοιο σύνολο διανυσμάτων αποτελεί μία *βάση* του χώρου.

Ορισμός 2.5 Ένα σύνολο $\{x_1, \ldots, x_m\}$ διανυσμάτων ενός γραμμικού χώρου X λέγεται *βάση* του, αν ισχύουν:

(B1) $$X =< x_1, \ldots, x_m >$$

και

(B2) $$(B2) \quad \text{τα } x_1, \ldots, x_m \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.}$$

Θα δώσουμε τώρα ορισμένα παραδείγματα βάσεων γραμμικών χώρων. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό που εισαγάγαμε στα Παραδείγματα 2.3.

Παραδείγματα 2.4

1. Το σύνολο $\{e_1, \ldots, e_n\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^n$. Πραγματικά έχουμε ήδη δει ότι τα $e_1, \ldots, e_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επίσης, κάθε $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ γράφεται, όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως, στη μορφή

$$a = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n.$$

Στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχουν πολλές βάσεις. Αυτή που αναφέρεται εδώ έχει ιδιαίτερη σημασία και καλείται *κανονική* βάση του $\mathbb{R}^n$.

2. Το σύνολο $\{p_0, \ldots, p_n\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{P}_n$. Πραγματικά, τη γραμμική ανεξαρτησία των $p_0, \ldots, p_n$ την έχουμε ήδη δείξει, και επί πλέον κάθε πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n, $p \in \mathbb{P}_n$,

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$$

γράφεται στη μορφή

$$p = \sum_{i=0}^{n} a_i p_i.$$

Δίνουμε στη συνέχεια ορισμένους χαρακτηρισμούς για να αποτελεί ένα σύνολο βάση ενός χώρου.

Πρόταση 2.3 *Έστω X ένας μη μηδενικός γραμμικός χώρος, $X \neq \{0\}$, και $x_1, \ldots, x_m$ διανύσματα του X. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
i. $\{x_1, \ldots, x_m\}$ *είναι βάση του* X.
ii. *Τα $x_1, \ldots, x_m$ παράγουν τον X, ενώ, αν αφαιρέσουμε ένα από αυτά, όσα απομένουν δεν παράγουν τον X, δηλαδή $< x_1, \ldots, x_m >= X$ και για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$ ισχύει*

$$< x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m >\neq X.$$

iii. *Τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αν συμπεριλάβουμε σε αυτά ένα οποιοδήποτε άλλο στοιχείο του X προκύπτουν γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα, δηλαδή για οποιοδήποτε υποσύνολο $\{y_1, \ldots, y_n\}$ του X το οποίο είναι γνήσιο υπερσύνολο του $\{x_1, \ldots, x_m\}$, τα $y_1, \ldots, y_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.*
iv. *Τα $x_1, \ldots, x_m$ παράγουν τον X, και κάθε $x \in X$ μπορεί να γραφεί κατά έναν μόνο τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \ldots, x_m$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι το ii. έπεται από το i., το iii. έπεται από το ii., το iv. έπεται από το iii., και το i. έπεται από το iv. Αυτό αποδεικνύει την ισοδυναμία που θέλουμε, γιατί ακολουθώντας κυκλική τροχιά μπορούμε από οποιοδήποτε από αυτά να οδηγηθούμε σε οποιοδήποτε άλλο.

Υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι ισχύει το i. και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και το ii. Υποθέτουμε προς το παρόν ότι το ii. δεν ισχύει και σκοπός μας είναι να οδηγηθούμε σε άτοπο. Φυσικά, αν δεν ισχύει το ii., θα υπάρχει $j \in \{1, \ldots, m\}$ τέτοιο ώστε

$$< x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m >= X.$$

Τώρα το x_j ως στοιχείο του X θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m$, δηλαδή

$$x_j = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \lambda_i x_i.$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, άρα το $\{x_1, \ldots, x_m\}$ δεν είναι βάση του X, το οποίο αντίκειται στο i. που υποθέσαμε ότι ισχύει, και έτσι οδηγηθήκαμε σε άτοπο.

Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει το ii. και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και το iii. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν $m = 1$, αυτό είναι προφανές, αφού, λόγω του ότι $X \neq \{0\}$, θα έχουμε $x_1 \neq 0$. Έστω λοιπόν ότι $m \geq 2$. Αν τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, θα υπάρχει, σύμφωνα με την Πρόταση 2.1, ένα $j \in \{1, \ldots, m\}$ τέτοιο ώστε το x_j να είναι γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m$, οπότε θα ίσχυε και

$$< x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m >=< x_1, \ldots, x_m >= X,$$

άτοπο.

Έστω τώρα $y_j \notin \{x_1, \ldots, x_m\}$. Επειδή τα $x_1, \ldots, x_m$ παράγουν τον X, θα υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ τέτοιοι ώστε

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i.$$

Επομένως τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_m, y_j$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, οπότε και τα $y_1, \ldots, y_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού $\{x_1, \ldots, x_m, y_j\} \subset \{y_1, \ldots, y_n\}$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι ισχύει το iii. και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και το iv. Έστω Y ο χώρος τον οποίον παράγουν τα $x_1, \ldots, x_m$, $Y :=< x_1, \ldots, x_m >$. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι $X = Y$. Προφανώς ισχύει $Y \subset X$. Για να οδηγηθούμε στο συμπέρασμά μας αρκεί συνεπώς να αποδείξουμε ότι $X \subset Y$. Έστω λοιπόν $x \in X$, $x \neq 0$. Αν $x \in \{x_1, \ldots, x_m\}$ τότε θα ισχύει φυσικά και $x \in Y$. Αν $x \notin \{x_1, \ldots, x_m\}$, τότε τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_m, x$ θα είναι γραμμικά εξαρτημένα, θα ισχύει δηλαδή

$$\lambda x + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = 0, \quad (\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq 0. \tag{2.3}$$

Αν τώρα $\lambda = 0$, τότε η (2.3) δίνει

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = 0, \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq 0,$$

δηλαδή ότι τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, άτοπο. Επομένως $\lambda \neq 0$, και σύμφωνα με τη (2.3) θα ισχύει

$$x = \sum_{i=1}^{m} (-\frac{\lambda_i}{\lambda}) x_i,$$

δηλαδή $x \in Y$. Άρα $X = Y$.

Επί πλέον, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2, κάθε $x \in X$ γράφεται κατά έναν το πολύ τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $x_1, \ldots, x_m$, αφού αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αλλά, αφού τα $x_1, \ldots, x_m$ παράγουν τον X, κάθε $x \in X$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός τους. Συμπερασματικά, κάθε $x \in X$ γράφεται κατά έναν ακριβώς τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $x_1, \ldots, x_m$.

Τέλος, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2, το i. έπεται από το iv., και κατ' αυτόν τον τρόπο ολοκληρώνεται ο κύκλος. $\square$

Ως μία απλή συνέπεια του προηγουμένου Θεωρήματος, θα δούμε τώρα ότι από ένα σύνολο διανυσμάτων που παράγουν έναν χώρο μπορούμε να επιλέξουμε ορισμένα που αποτελούν βάση του.

Πόρισμα 2.1 *Έστω X ένας μη μηδενικός γραμμικός χώρος, $X \neq \{0\}$, και $x_1, \ldots, x_m \in X$ διανύσματα που παράγουν το χώρο X. Τότε υπάρχει ένα υποσύνολο $\{i_1, \ldots, i_n\}$ του $\{1, \ldots, m\}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ να είναι βάση του X.*

Απόδειξη. Αν τα $x_1, \ldots, x_m \in X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε το $\{x_1, \ldots, x_m\}$ αποτελεί βάση του X.

Αν τα $x_1, \ldots, x_m \in X$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε τουλάχιστον ένα εξ αυτών γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να δεχθούμε ότι το x_m είναι γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \ldots, x_{m-1}$, γιατί αυτό επιτυγχάνεται πάντα με αλλαγή της αρίθμησης. Τότε τα $x_1, \ldots, x_{m-1}$ θα παράγουν φυσικά τον X, $< x_1, \ldots, x_{m-1} >= X$. Επαναλαμβάνουμε τώρα την ίδια διαδικασία. Αυτό μπορεί να επαναληφθεί το πολύ $m-1$ φορές, γιατί υποθέσαμε ότι ο X είναι μη μηδενικός γραμμικός χώρος, οπότε σε κάποιο στάδιο θα οδηγηθούμε σε γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ τα οποία επιπρόσθετα θα παράγουν τον X, οπότε το σύνολο $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ θα είναι βάση του X. $\square$

Η βασική έννοια που θέλουμε να εισαγάγουμε στη συνέχεια είναι αυτή της *διάστασης* ενός γραμμικού χώρου, η οποία αποτελεί ένα μέτρο του "μεγέθους" ενός χώρου. Η διάσταση είναι το πλήθος των στοιχείων μίας βάσης του χώρου, για να μπορεί όμως να ορισθεί πρέπει να αποδείξουμε πρώτα ότι όλες οι βάσεις ενός γραμμικού χώρου έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Θα προχωρήσουμε σε τρία βήματα. Τα πρώτα δύο θα μας δώσουν προκαταρκτικά αποτελέσματα, τα οποία εν συνεχεία θα μας οδηγήσουν εύκολα στο επιθυμητό αποτέλεσμα ότι πράγματι όλες οι βάσεις ενός γραμμικού χώρου έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Σύμφωνα με το πρώτο προκαταρκτικό αποτέλεσμα, ξεκινώντας από μία βάση και αντικαθιστώντας ένα στοιχείο της με έναν γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης στον οποίον το αρχικό στοιχείο της βάσης συνεισφέρει ουσιαστικά, με έννοια που γίνεται σαφής στό Λήμμα που ακολουθεί, οδηγούμαστε πάλι σε βάση του χώρου μας. Στο δεύτερο προκαταρκτικό αποτέλεσμα θα δούμε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε περισσότερα στοιχεία μιας βάσης με κατάλληλα άλλα στοιχεία και να ξαναπάρουμε βάση. Αυτό το τελευταίο αποτέλεσμα αποτελεί το ουσιαστικό βήμα στην προσπάθειά μας, άμεση συνέπειά του είναι μετά το γεγονός ότι οι βάσεις έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Λήμμα 2.3 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος και $\{x_1, \ldots, x_m\}$ μία βάση του X. Έστω $y \in X$,*

$$y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m. \tag{2.4}$$

Αν $\lambda_j \neq 0$ στην παράσταση (2.4), *για κάποιο $j \in \{1, \ldots, m\}$, τότε και το σύνολο που προκύπτει από τη βάση αντικαθιστώντας το x_j με το y, δηλαδή το $\{x_1, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_m\}$, αποτελεί ξανά βάση του X.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να δεχθούμε ότι $j = 1$, γιατί αυτό επιτυγχάνεται πάντα με αλλαγή της αρίθμησης. Δεχόμαστε λοιπόν ότι $\lambda_1 \neq 0$, και θέλουμε να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{y, x_2, \ldots, x_m\}$ αποτελεί βάση του X. Κατ' αρχήν η (2.4) δίνει τώρα

$$x_1 = \frac{1}{\lambda_1} y + \sum_{i=2}^{m} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) x_i. \tag{2.5}$$

Έστω $x \in X$. Τότε φυσικά το x γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \ldots,$ x_m,

$$x = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_m x_m. \tag{2.6}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.5) στην (2.6) λαμβάνουμε

$$x = \frac{\mu_1}{\lambda_1} y + \sum_{i=2}^{m} (\mu_i - \mu_1 \frac{\lambda_i}{\lambda_1}) x_i, \tag{2.7}$$

και συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα $y, x_2, \dots, x_m$ παράγουν τον X, $< y, x_2, \dots, x_m >= X$.

Απομένει τώρα να αποδείξουμε τη γραμμική ανεξαρτησία των $y, x_2, \dots, x_m$. Έστω ότι

$$\alpha y + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = 0. \tag{2.8}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.4) στην (2.8) λαμβάνουμε

$$\alpha\lambda_1 x_1 + \sum_{i=2}^{m} (\alpha\lambda_i + \alpha_i) x_i = 0. \tag{2.9}$$

Λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $x_1, \dots, x_m$, η (2.9) δίνει $\alpha\lambda_1 = 0$ και $\alpha\lambda_i + \alpha_i = 0, i = 2, \dots, m$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την υπόθεσή μας $\lambda_1 \neq 0$, συμπεραίνουμε αμέσως ότι $\alpha = 0, \alpha_i = 0, i = 2, \dots, m$, δηλαδή τα $y, x_2, \dots, x_m$ είναι πράγματι γραμμικά ανεξάρτητα. □

Ακολουθεί το δεύτερο και ουσιαστικό προκαταρκτικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.1 *Έστω $\{x_1, \dots, x_n\}$ μία βάση ενός γραμμικού χώρου X, και $y_1, \dots, y_m \in X$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Τότε ισχύει $m \leq n$, και υπάρχουν $j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε αντικαθιστώντας στη βάση το x_{j_1} με το y_1, και ούτω καθ' εξής, και το x_{j_m} με το y_m, προκύπτει ξανά μία βάση του X. Αλλάζοντας κατάλληλα την αρίθμηση, αν χρειάζεται, έτσι ώστε $j_1 = 1, \dots, j_m = m$, παίρνουμε τη βάση $\{y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$ του X.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα δοθεί επαγωγικά ως προς m. Για $m = 1$ το αποτέλεσμα αποδείχθηκε στο Λήμμα 2.3. Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $m-1$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για m. Τα διανύσματα $y_1, \dots, y_{m-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, σύμφωνα με την υπόθεση, και με κατάλληλη αρίθμηση των διανυσμάτων $x_1, \dots, x_n$ το σύνολο $\{y_1, \dots, y_{m-1}, x_m, \dots, x_n\}$ αποτελεί βάση του X, και φυσικά ισχύει $m - 1 \leq n$.

Αν τώρα ίσχυε $m - 1 = n$, τότε το σύνολο $\{y_1, \dots, y_{m-1}\}$ θα ήταν βάση του X, και, σύμφωνα με την Πρόταση 2.3 iii., τα διανύσματα $y_1, \dots, y_m$ θα ήταν γραμμικά εξαρτημένα. Αυτό όμως αντίκειται στην υπόθεσή μας, άρα είναι άτοπο, οπότε $m - 1 < n$, συνεπώς $m \leq n$.

Αφού τώρα $< y_1, \ldots, y_{m-1}, x_m, \ldots, x_n >= X$, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ_1, $\ldots, \lambda_n$ τέτοιοι ώστε

$$y_m = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_{m-1} y_{m-1} + \lambda_m x_m + \cdots + \lambda_n x_n. \tag{2.10}$$

Στη (2.10) δεν μπορεί να ισχύει $\lambda_m = \cdots = \lambda_n = 0$, αφού τα $y_1, \ldots, y_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Με κατάλληλη αρίθμηση των $x_m, \ldots, x_n$ μπορούμε να επιτύχουμε $\lambda_m \neq 0$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.3 μπορούμε τώρα να αντικαταστήσουμε το x_m με το y_m και το $\{y_1, \ldots, y_m, x_{m+1}, \ldots, x_n\}$ να αποτελεί βάση του X, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε ότι δύο βάσεις ενός γραμμικού χώρου έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Πόρισμα 2.2 *Έστω* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *και* $\{y_1, \ldots, y_m\}$ *δύο βάσεις ενός γραμμικού χώρου* X. *Τότε ισχύει* $m = n$.

Απόδειξη. Αφού το σύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι βάση του X και τα $y_1, \ldots, y_m \in X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 θα ισχύει $m \leq n$. Ακριβώς αντίστοιχα θα ισχύει και $n \leq m$, οπότε $m = n$. □

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 και το Πόρισμα 2.2, είναι προφανές ότι, αν σε έναν γραμμικό χώρο X υπάρχει μία βάση $\{x_1, \ldots, x_n\}$, τότε όλες οι βάσεις του X έχουν n στοιχεία, και στον X δεν υπάρχουν $n + 1$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Με βάση αυτά τα αποτελέσματα μπορούμε τώρα να εισαγάγουμε την έννοια της διάστασης.

Ορισμός 2.6 Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Τότε το $\dim X$,

$$\dim X := \begin{cases} 0, & \text{αν} \quad X = \{0\} \\ n, & \text{αν υπάρχει μία βάση του } X \text{ με } n \text{ στοιχεία,} \\ \infty, & \text{αν για κάθε } m \in \mathbb{N} \text{ υπάρχουν } m \\ & \text{γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του } X, \end{cases}$$

λέγεται *διάσταση* (*dimension*) του γραμμικού χώρου X. Στην περίπτωση που η διάσταση ενός γραμμικού χώρου είναι μηδέν ή ένας φυσικός αριθμός, λέμε ότι ο χώρος είναι *πεπερασμένης* διάστασης, διαφορετικά ο χώρος λέγεται *απειροδιάστατος*.

Όπως είδαμε στα Παραδείγματα 2.4, για $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\{e_1, \ldots, e_n\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^n$. Επομένως η διάσταση του $\mathbb{R}^n$ είναι n, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.1 είναι και το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.2 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Αν $y_1, \ldots, y_m \in X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε υπάρχει βάση του X η οποία περιέχει τα $y_1, \ldots, y_m$.* $\square$

Η εύκολη απόδειξη του επομένου αποτελέσματος αφήνεται ως άσκηση, βλ. την Άσκηση 2.7.

Λήμμα 2.4 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος διάστασης n. Τότε ισχύουν*:
1. *Αν $y_1, \ldots, y_n \in X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε $\{y_1, \ldots, y_n\}$ είναι βάση του X.*
2. *Έστω Y ένας υπόχωρος του X. Τότε*:
   i. $\dim Y \leq \dim X$.
   ii. *Αν* $\dim Y = \dim X$, *τότε* $Y = X$. $\square$

Προσοχή! Σε περίπτωση απειροδιάστατου χώρου X, το ii. στο δεύτερο μέρος του Λήμματος 2.4 δεν ισχύει. Δηλαδή υπάρχουν γνήσιοι υπόχωροι Y του X τέτοιοι ώστε $\dim Y = \dim X = \infty$.

2.3. Άθροισμα και ευθύ άθροισμα γραμμικών χώρων

Σε αυτή την ενότητα θα εισαγάγουμε τις έννοιες του *αθροίσματος* και του *ευθέος αθροίσματος*, και θα δούμε ορισμένες σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων των αντίστοιχων γραμμικών χώρων.

Ορισμός 2.7 Έστω X ένας γραμμικός χώρος, και Y, Z υπόχωροι του X. Ο χώρος $Y+Z$,

$$Y + Z := \{x \in X \ : \ x = y + z \ \text{ με } \ y \in Y \ \text{ και } \ z \in Z\},$$

λέγεται *άθροισμα* των Y και Z. Ο $Y + Z$ είναι προφανώς υπόχωρος του X.

Προσοχή! Το άθροισμα δύο γραμμικών χώρων δεν πρέπει να συγχέεται με την ένωση $Y \cup Z$. Το $Y \cup Z$ δεν είναι γενικά γραμμικός χώρος, βλ. Άσκηση 2.3.

Όσον αφορά τη διάσταση του αθροίσματος γραμμικών χώρων, έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

Πρόταση 2.4 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, και Y, Z υπόχωροι του X. Τότε ισχύει*

$$\dim(Y + Z) = \dim Y + \dim Z - \dim(Y \cap Z).$$

Απόδειξη. Έστω ότι τα σύνολα Y και Z έχουν μη μηδενική τομή, $Y \cap Z \neq \{0\}$, και έστω $\{x_1, \ldots, x_n\}$ μια βάση του $Y \cap Z$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 υπάρχουν $y_1, \ldots, y_\ell \in Y$ και $z_1, \ldots, z_m \in Z$ τέτοια ώστε τα σύνολα $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_\ell\}$ και $\{x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m\}$ να αποτελούν βάσεις των Y και Z, αντίστοιχα.

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι το σύνολο

$$\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_\ell, z_1, \ldots, z_m\}$$

αποτελεί βάση του $Y + Z$, γιατί τότε θα έχουμε προφανώς

$$\dim(Y + Z) = n + \ell + m = (\ell + n) + (m + n) - n = \dim Y + \dim Z - \dim(Y \cap Z).$$

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι

$$Y + Z \subset < x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_\ell, z_1, \ldots, z_m > .$$

Έστω λοιπόν ένα $x \in Y + Z$. Τότε το x θα γράφεται στη μορφή $x = y + z$, με $y \in Y$ και $z \in Z$, οπότε αν

$$y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_\ell y_\ell$$

και

$$z = \lambda'_1 x_1 + \cdots + \lambda'_n x_n + \mu'_1 z_1 + \cdots + \mu'_m z_m,$$

θα έχουμε

$$x = (\lambda_1 + \lambda'_1)x_1 + \cdots + (\lambda_n + \lambda'_n)x_n + \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_\ell y_\ell + \mu'_1 z_1 + \cdots + \mu'_m z_m,$$

επομένως $x \in < x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_\ell, z_1, \ldots, z_m > .$

Μένει τώρα να αποδείξουμε ότι τα $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_\ell, z_1, \dots, z_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω λοιπόν ότι

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_\ell y_\ell + \mu_1' z_1 + \cdots + \mu_m' z_m = 0.$$

Θέτοντας

$$y := \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_\ell y_\ell, \tag{2.11}$$

η προηγούμενη σχέση μας δίνει

$$y = -(\mu_1' z_1 + \cdots + \mu_m' z_m). \tag{2.12}$$

Οι (2.11) και (2.12) δίνουν $y \in Y$ και $y \in Z$, αντίστοιχα, οπότε φυσικά $y \in Y \cap Z$. Συνεπώς υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1', \dots, \lambda_n'$ τέτοιοι ώστε

$$y = \lambda_1' x_1 + \cdots + \lambda_n' x_n. \tag{2.13}$$

Λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_\ell$, το y γράφεται, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2., κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους, και επομένως οι (2.11) και (2.13) δίνουν

$$\lambda_i = \lambda_i', \quad i = 1, \dots, n, \qquad \text{και} \qquad \mu_i = 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \tag{2.14}$$

Αντίστοιχα, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m$, από τις (2.12) και (2.13) λαμβάνουμε

$$\lambda_1' = \cdots = \lambda_n' = \mu_1' = \cdots = \mu_m' = 0. \tag{2.15}$$

Οι (2.14) και (2.15) μας δίνουν τη γραμμική ανεξαρτησία των $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_\ell, z_1, \dots, z_m$.

Στην περίπτωση $Y \cap Z = \{0\}$ η απόδειξη είναι ανάλογη. □

Ορισμός 2.8 Έστω X ένας γραμμικός χώρος, και Y, Z υπόχωροι του X. Αν η τομή των Y και Z είναι μηδενική, $Y \cap Z = \{0\}$, τότε το άθροισμα των Y και Z λέγεται *ευθύ άθροισμα* και συμβολίζεται με $Y \oplus Z$.

Στη συνέχεια θα δούμε έναν χαρακτηρισμό για να είναι ένα άθροισμα ευθύ. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι ένα άθροισμα είναι ευθύ, αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του αθροίσματος γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ώς άθροισμα στοιχείων των χώρων που προσθέτουμε.

Πρόταση 2.5 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος και Y, Z υπόχωροι του X. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
i. $X = Y \oplus Z$.
ii. *Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακριβώς ένα $y \in Y$ και ακριβώς ένα $z \in Z$ τέτοια ώστε* $x = y + z$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι ισχύει το i. και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και το ii. Υποθέτουμε δηλαδή ότι $Y \cap Z = \{0\}$. Έστω λοιπόν $x \in X$. Η ύπαρξη $y \in Y$ και $z \in Z$ τέτοιων ώστε $x = y + z$ έπεται από τον ορισμό του αθροίσματος. Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχουν και $y' \in Y$ και $z' \in Z$ τέτοια ώστε $x = y' + z'$. Τότε φυσικά θα έχουμε $y + z = y' + z'$, επομένως

$$y - y' = z' - z. \tag{2.16}$$

Στο αριστερό μέλος της (2.16) έχουμε προφανώς ένα στοιχείο του Y και στο δεξιό της μέλος ένα στοιχείο του Z, συνεπώς και στα δύο μέλη της έχουμε ένα στοιχείο της τομής των Y και Z, $Y \cap Z$. Επειδή η εν λόγω τομή περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, συμπεραίνουμε ότι $y - y' = z' - z = 0$, οπότε $y = y'$ και $z = z'$, γεγονός που αποδεικνύει το ii.

Αντίστροφα τώρα υποθέτουμε ότι ισχύει το ii. και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και το i. Αν το άθροισμα δεν ήταν ευθύ, η τομή των Y και Z θα περιείχε ένα μη μηδενικό στοιχείο $x, x \in Y \cap Z$. Τότε όμως $0 = 0 + 0$ και $0 = x - x$, το οποίο αντίκειται στο ii., άρα είναι άτοπο. Επομένως $Y \cap Z = \{0\}$, οπότε το άθροισμα είναι ευθύ. □

Η απόδειξη του επομένου αποτελέσματος έπεται αμέσως συνδυάζοντας τις Προτάσεις 2.4 και 2.5, και γιαυτό παραλείπεται.

Πρόταση 2.6 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος πεπερασμένης διαστάσεως και Y, Z υπόχωροι του X. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
i. $X = Y \oplus Z$.
ii. $X = Y + Z$ *και* $\dim X = \dim Y + \dim Z$.
iii. $Y \cap Z = \{0\}$ *και* $\dim X = \dim Y + \dim Z$. □

Θα δούμε τώρα ότι αν X είναι ένας γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και Y ένας υπόχωρός του, τότε υπάρχει υπόχωρος Z του X τέτοιος ώστε το X να γράφεται ως ευθύ άθροισμα των Y και Z. Πάρτε ως X τον $\mathbb{R}^2$ και έναν κατάλληλο Y για να πειστείτε ότι ο Z δεν ορίζεται μονοσήμαντα.

Πρόταση 2.7 *Έστω Y ένας υπόχωρος ενός γραμμικού χώρου X πεπερασμένης διάστασης. Τότε υπάρχει υπόχωρος Z του X τέτοιος ώστε $X = Y \oplus Z$.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_1, \ldots, x_m\}$ μία βάση του Y. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, υπάρχουν $x_{m+1}, \ldots, x_n$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\}$ να αποτελεί βάση του X. Επιλέγοντας $Z :=< x_{m+1}, \ldots, x_n >$ διαπιστώνουμε αμέσως ότι ισχύει το αποτέλεσμα. □

2.4. Ασκήσεις

2.1. Έστω X ένας γραμμικός χώρος και $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in X$. Αποδείξτε ότι:
(α) Αν ένα από τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι μηδέν, τότε τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
(β) Αν δύο από τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι ίδια, τότε τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
(γ) Αν τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε και τα $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

2.2. Έστω λ, λ_1 και λ_2 τρεις μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Στον $\mathbb{R}^2$, θεωρούμε τα σύνολα $X_1 := \{(x, y) \ : \ x > 0, y = \lambda x\}$ και $X_2 := \{(x, y) \ : \ x \in \mathbb{R}, y = \lambda_1 x$ ή $y = \lambda_2 x\}$. Αποδείξτε ότι τα X_1 και X_2 ικανοποιούν τα (ΥΧ1) και (ΥΧ2), αντίστοιχα, βλ. τον Ορισμό 2.2, αλλά δεν είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$.

2.3. Έστω X_1 και X_2 υπόχωροι ενός γραμμικού χώρου X. Αν η ένωσή τους, $X_1 \cup X_2$, είναι υπόχωρος του X, αποδείξτε ότι είτε $X_1 \subset X_2$ είτε $X_2 \subset X_1$.

2.4. Έστω X ένας γραμμικός χώρος και $\{x_1, \ldots, x_m\}$ μία βάση του. Αν ένα διάνυσμα y ανήκει στο χώρο που παράγεται από τα $x_1, \ldots, x_{m-1}$, $y \in< x_1, \ldots, x_{m-1} >$, αποδείξτε ότι ο χώρος που παράγουν τα $x_1, \ldots, x_{m-1}, y$ είναι γνήσιος υπόχωρος του X, δηλαδή υπόχωρος και γνήσιο υποσύνολο του X, $< x_1, \ldots, x_{m-1}, y > \neq X$.

2.5. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{(1, 3), (5, 7)\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^2$, ενώ τα διανύσματα $(1, 3), (5, 7), (2, 3)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

2.6. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $x, y, \ x(s) := s, y(s) := \mathrm{e}^s$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες στον $C[1, 2]$.

2.7. Έστω X ένας γραμμικός χώρος διάστασης $n, \dim X = n$. Τότε ισχύουν:

1. Αν $y_1, \ldots, y_n \in X$ είναι n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του X, τότε το σύνολο $\{y_1, \ldots, y_n\}$ είναι βάση του X.

2. Έστω Y ένας υπόχωρος του X. Τότε:

(α) Η διάσταση του Y δεν υπερβαίνει τη διάσταση του X.

(β) Αν οι X και Y έχουν την ίδια διάσταση, $\dim Y = \dim X$, τότε ταυτίζονται, $Y = X$.

2.8. Αποδείξτε το Θεώρημα 2.2.

2.9. Αποδείξτε την Πρόταση 2.6.

3. Γραμμικές Απεικονίσεις

Ένας από τους σημαντικότερους λόγους, για τους οποίους οι γραμμικοί χώροι είναι χρήσιμοι, είναι το γεγονός ότι μεταξύ τους μπορούν να ορισθούν γραμμικές απεικονίσεις. Η μελέτη των γραμμικών απεικονίσεων είναι πολύ πιο εύκολη από εκείνη μη γραμμικών απεικονίσεων, και, συνεπώς, η θεωρία τους είναι πολύ πιο πλούσια και ολοκληρωμένη. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισαγάγουμε την έννοια της γραμμικής απεικονίσεως και θα γνωρίσουμε ορισμένες ιδιότητες γραμμικών απεικονίσεων.

3.1. Η έννοια της γραμμικής απεικονίσεως

Σε αυτή την ενότητα θα γνωρίσουμε την έννοια της γραμμικής απεικονίσεως, θα δούμε ότι η διάσταση της εικόνας γραμμικών απεικονίσεων δεν υπερβαίνει τη διάσταση του πεδίου ορισμού των, καθώς και ότι μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης περιγράφεται πλήρως από τις τιμές της στα στοιχεία μιας βάσεως του πεδίου ορισμού της.

Ορισμός 3.1 Έστω X, Y δύο πραγματικοί γραμμικοί χώροι. Μία απεικόνιση $L : X \longrightarrow Y$ λέγεται *γραμμική*, αν για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν

$$\begin{cases} L(x+y) = Lx + Ly \\ L(\lambda x) = \lambda Lx. \end{cases}$$

Οι δύο συνθήκες στον Ορισμό 3.1 μπορούν να γραφούν ισοδύναμα στη μορφή

$$L(\lambda x + y) = \lambda Lx + Ly.$$

Σημειώνουμε επίσης ότι για γραμμικές απεικονίσεις γράφουμε συνήθως Lx αντί για $L(x)$.

Παρατήρηση 3.1 Στον Ορισμό 3.1 είναι σημαντικό να ισχύουν και οι δύο συνθήκες που θέσαμε, για να είναι μία απεικόνιση γραμμική.

Φερ' ειπείν, αμέσως διαπιστώνει κανείς ότι η απεικόνιση $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x) := \frac{x_1}{x_2}\, x$ για $x_2 \neq 0$ και $L(x) := 0$ για $x_2 = 0$, $x = (x_1, x_2)$, ικανοποιεί τη δεύτερη σχέση, δηλαδή $L(\lambda x) = \lambda L(x)$ για $\lambda \in \mathbb{R}$, αλλά όχι την πρώτη, αφού, παραδείγματος χάριν, για $x = (1, 2)$ και $y = (2, 1)$ έχουμε $L(x + y) = (3, 3)$ και $L(x) + L(y) = (4.5, 3)$.

Για να δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα μη γραμμικής απεικόνισης που ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη στον Ορισμό 3.1, θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $L(x) := a - \mathrm{i}b$, όπου a και b είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του x, αντίστοιχα. Πραγματικά, για $x, y \in \mathbb{C}$, $x = a + \mathrm{i}b$ και $y = c + \mathrm{i}d$, έχουμε

$$L(x + y) = L(a + c + \mathrm{i}(b + d)) = a + c - \mathrm{i}(b + d) = (a - \mathrm{i}b) + (c - \mathrm{i}d) = L(x) + L(y),$$

ενώ, π.χ., $L(\mathrm{i}x) = L(-b + \mathrm{i}a) = -b - \mathrm{i}a$ και $\mathrm{i}L(x) = \mathrm{i}(a - \mathrm{i}b) = b + \mathrm{i}a$, δηλαδή $L(\mathrm{i}x) \neq \mathrm{i}L(x)$, για $x \neq 0$.

Στο Λήμμα που ακολουθεί δίνουμε μερικές βασικές ιδιότητες γραμμικών απεικονίσεων, οι οποίες είναι άμεση απόρροια του ορισμού των και γιαυτό η απόδειξη θα δοθεί συνοπτικά. Τονίζουμε ιδιαίτερα τη σημαντική ιδιότητα ότι η διάσταση της εικόνας μιας γραμμικής απεικόνισης δεν μπορεί να υπερβαίνει τη διάσταση του πεδίου ορισμού της. Στη συνέχεια μάλιστα θα δούμε μία ακριβέστερη σχέση που συνδέει αυτές τις διαστάσεις, τον λεγόμενο *τύπο των διαστάσεων*, ένα από τα βασικότερα αποτελέσματα της Γραμμικής Άλγεβρας.

Λήμμα 3.1 *Έστω X, Y δύο πραγματικοί γραμμικοί χώροι και $L : X \longrightarrow Y$ μία γραμμική απεικόνιση. Τότε ισχύουν:*
i. $L0 = 0$ *και για κάθε* $x, y \in X \quad L(x - y) = Lx - Ly$.
ii. *Έστω $x_1, \dots, x_n \in X$. Αν τα $x_1, \dots, x_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε και τα $Lx_1, \dots, Lx_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Αν τα $Lx_1, \dots, Lx_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε και τα $x_1, \dots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*
iii. *Αν $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ είναι υπόχωροι των X και Y, αντίστοιχα, τότε και οι $L(\tilde{X})$ και $\overset{-1}{L}(\tilde{Y})$ είναι υπόχωροι των Y και X, αντίστοιχα.*
iv. $\dim L(X) \leq \dim X$.

Απόδειξη.
i. Κατ' αρχήν, προφανώς,

$$L0 = L(0 \cdot 0) = 0 \cdot L0 = 0.$$

(Στα μέλη αυτής της ισότητας στα οποία εμφανίζεται δύο φορές το 0, την πρώτη φορά είναι ο πραγματικός αριθμός μηδέν και τη δεύτερη το μηδενικό διάνυσμα.)

Επίσης, για $x, y \in X$ έχουμε

$$L(x-y) = L(x+(-1)y) = Lx + (-1)Ly = Lx - Ly.$$

ii. Έστω ότι $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$. Τότε, προφανώς, $L(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = L0 = 0$, άρα $\lambda_1 Lx_1 + \cdots + \lambda_n Lx_n = 0$, επομένως αν τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε και τα $Lx_1, \ldots, Lx_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Το υπόλοιπο μέρος του ισχυρισμού είναι λογικά ισοδύναμο με το ήδη αποδειχθέν.

iii. Προφανώς $0 \in \tilde{X}$, επομένως $0 = L0 \in L(\tilde{X})$. Έστω τώρα $y, y' \in L(\tilde{X})$. Τότε θα υπάρχουν $x, x' \in \tilde{X}$ τέτοια ώστε $Lx = y$ και $Lx' = y'$. Συνεπώς $y + y' = Lx + Lx' = L(x + x') \in L(\tilde{X})$, αφού προφανώς $x + x' \in \tilde{X}$. Επί πλέον, για $\lambda \in \mathbb{R}$ και $y \in Y$ έχουμε $\lambda y = \lambda Lx = L(\lambda x) \in L(\tilde{X})$, επειδή $\lambda x \in \tilde{X}$.

Το ότι ο $\overset{-1}{L}(\tilde{Y})$ είναι υπόχωρος του X αφήνεται ως άσκηση, βλ. Άσκηση 3.1.

iv. Το αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια των ii. και iii. Πραγματικά, κατ' αρχήν, σύμφωνα με το ii., ο $L(X)$ είναι γραμμικός χώρος. Στις περιπτώσεις $X = \{0\}$ ή $\dim X = \infty$ δεν υπάρχει κάτι προς απόδειξη. Έστω, λοιπόν, $\{y_1, \ldots, y_m\}$ μία βάση του $L(X)$. Έστω $x_1, \ldots, x_m \in X$ τέτοια ώστε $Lx_i = y_i,\ i = 1, \ldots, m$. Σύμφωνα με το iii., τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε

$$\dim L(X) = m \leq \dim X. \quad \square$$

Δίνουμε τώρα μερικά παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων.

Παραδείγματα 3.1

1. Έστω X ένας γραμμικός χώρος και λ ένας πραγματικός αριθμός. Οι απεικονίσεις

(i) $$0 \,:\, X \longrightarrow \{0\},$$

(ii) $$\begin{cases} \mathrm{id}_X \ : X \longrightarrow X, \\ \qquad\quad x \longmapsto x, \end{cases}$$

(iii) $$\begin{cases} X \longrightarrow X, \\ x \longmapsto \lambda x, \end{cases}$$

είναι γραμμικές.

Έστω $x_0 \in X, \quad x_0 \neq 0$. Η απεικόνιση

$$X \longrightarrow X,$$

$$x \longmapsto x_0,$$

δεν είναι γραμμική.

2. Έστω $a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$. Η απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$,

$$Lx := L(x_1, \dots, x_n) := (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j),$$

όπου $x_1, \dots, x_n$ είναι οι συνιστώσες του $x,\ x = (x_1, \dots, x_n)$, είναι γραμμική. Τέτοιας μορφής γραμμικές απεικονίσεις θα μελετήσουμε λεπτομερώς στα επόμενα κεφάλαια.

Στο ακόλουθο αποτέλεσμα θα δούμε ότι αν X είναι ένας γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, τότε υπάρχει ακριβώς μία γραμμική απεικόνιση $L : X \longrightarrow Y$, η οποία απεικονίζει τα στοιχεία μίας δοθείσης βάσης του X σε προκαθορισμένα στοιχεία του Y. Επίσης θα γνωρίσουμε ορισμένες ιδιότητες τέτοιων απεικονίσεων.

Πρόταση 3.1 *Έστω X και Y δύο γραμμικοί χώροι, $\{x_1, \dots, x_n\}$ μία βάση του X και $y_1, \dots, y_n \in Y$. Τότε υπάρχει ακριβώς μία γραμμική απεικόνιση $L : X \longrightarrow Y$ τέτοια ώστε $Lx_i = y_i, \quad i = 1, \dots, n$. Επίσης η εικόνα $L(X)$ του X μέσω της L παράγεται από τα διανύσματα $y_1, \dots, y_n$, $L(X) =< y_1, \dots, y_n >$. Ακόμη η L είναι ένεση (δηλαδή ένα προς ένα), ακριβώς τότε, αν τα $y_1, \dots, y_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Κατ' αρχήν θα αποδείξουμε ότι υπάρχει το πολύ μία τέτοια απεικόνιση. Έστω λοιπόν $x \in X$. Τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ τέτοιοι ώστε $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$. Επομένως θα έχουμε $Lx = \lambda_1 Lx_1 + \dots + \lambda_n Lx_n$ ή $Lx = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n$. Συνεπώς για κάθε $x \in X$ το $Lx \in Y$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο, οπότε φυσικά δεν μπορούν να υπάρχουν δύο διαφορετικές απεικονίσεις με αυτές τις ιδότητες.

Θα αποδείξουμε τώρα ύπαρξη μιας τέτοιας απεικόνισης. Για $x \in X$, $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, ορίζουμε

$$Lx = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n.$$

Η απεικόνιση αυτή είναι προφανώς γραμμική και ικανοποιεί τις σχέσεις $Lx_i = y_i, \quad i = 1, \dots, n$.

Έστω τώρα $\tilde{Y} =< y_1, \ldots, y_n >$. Προφανώς $L(X) \subset \tilde{Y}$, αφού κάθε $x \in X$ γράφεται στη μορφή $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, οπότε $Lx = \lambda_1 Lx_1 + \cdots + \lambda_n Lx_n = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n$. Εξ άλλου, αν $y \in \tilde{Y}$, τότε $y = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n$, οπότε $y = \lambda_1 Lx_1 + \cdots + \lambda_n Lx_n$ ή $y = L(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)$, δηλαδή $y \in L(X)$. Άρα $\tilde{Y} \subset L(X)$, οπότε συνολικά έχουμε $L(X) = \tilde{Y}$.

Έστω τώρα $x, x' \in X$, $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, $x' = \lambda_1' x_1 + \cdots + \lambda_n' x_n$. Τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα,

$$Lx - Lx' = (\lambda_1 - \lambda_1')y_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_n')y_n, \tag{3.1}$$

και αμέσως διαπιστώνουμε ότι αν τα $y_1, \ldots, y_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $x \neq x'$, τότε και $Lx \neq Lx'$. Αντίστροφα, αν υπάρχουν $x, x' \in X,\ x \neq x'$, τέτοια ώστε $Lx = Lx'$, τότε με βάση την (3.1) διαπιστώνουμε αμέσως ότι τα $y_1, \ldots, y_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. $\square$

3.2. Πυρήνας και εικόνα

Σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι να εισαγάγουμε δύο βασικές έννοιες για γραμμικές απεικονίσεις, την έννοια του *πυρήνα* και την έννοια της *εικόνας* μιας γραμμικής απεικόνισης. Ο πυρήνας αποτελείται από τα στοιχεία του πεδίου ορισμού, τα οποία η γραμμική απεικόνιση απεικονίζει στο μηδενικό διάνυσμα, και η εικόνα αποτελείται από τα στοιχεία του πεδίου τιμών της γραμμικής απεικόνισης, στα οποία απεικονίζεται κάποιο στοιχείο του πεδίου ορισμού της. Ακόμα, θα γνωρίσουμε τον τύπο των διαστάσεων, ένα από τα βασικότερα αποτελέσματα της Γραμμικής Άλγεβρας, σύμφωνα με τον οποίο το άθροισμα των διαστάσεων του πυρήνα και της εικόνας μιας γραμμικής απεικονίσεως, μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης, ισούται με τη διάσταση του πεδίου ορισμού της.

Ορισμός 3.2 Έστω X και Y δύο γραμμικοί χώροι και $L : X \longrightarrow Y$ μία γραμμική απεικόνιση. Το σύνολο $\operatorname{Ker} L := \overset{-1}{L}(0)$ $(= \{x \in X \ : \ Lx = 0\})$ λέγεται *πυρήνας* (*kernel*) της γραμμικής απεικόνισης L. Το σύνολο $\operatorname{Im} L := L(X)$ $(= \{y \in Y \ : \ \exists x \in X \quad Lx = y\})$ λέγεται *εικόνα* (*image*) της L.

Τόσο ο πυρήνας όσο και η εικόνα μιας γραμμικής απεικόνισης είναι γραμμικοί χώροι, ο πρώτος υπόχωρος του πεδίου ορισμού της και η δεύτερη υπόχωρος του πεδίου τιμών της. Για την εικόνα έχουμε ήδη δώσει την απόδειξη στο Λήμμα 3.1, για τον πυρήνα ας θεωρήσουμε έναν πραγματικό αριθμό λ και δύο διανύσματα x_1, x_2 του πυρήνα της L, $x_1, x_2 \in \operatorname{Ker} L$. Τότε θα έχουμε $L(\lambda x_1 + x_2) = \lambda L x_1 + L x_2 = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$, συνεπώς και το $\lambda x_1 + x_2$ είναι στοιχείο του $\operatorname{Ker} L$, γεγονός που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Στο ακόλουθο αποτέλεσμα θα δούμε ότι μία γραμμική απεικόνιση είναι ένα προς ένα, αν και μόνο αν ο πυρήνας της περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα.

Πρόταση 3.2 *Έστω X και Y δύο γραμμικοί χώροι και $L : X \longrightarrow Y$ μία γραμμική απεικόνιση. Τότε η L είναι ένα προς ένα, αν και μόνο αν* $\operatorname{Ker} L = \{0\}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι η L είναι ένα προς ένα. Αν $x \in \operatorname{Ker} L$, τότε φυσικά $Lx = 0$, και, επειδή πάντα $L0 = 0$, συμπεραίνουμε ότι $x = 0$.

Έστω τώρα, αντίστροφα, ότι $\operatorname{Ker} L = \{0\}$. Αν $x_1, x_2 \in X$ είναι τέτοια ώστε $Lx_1 = Lx_2$, τότε θα έχουμε $L(x_1 - x_2) = 0$, συνεπώς $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} L$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεσή μας συμπεραίνουμε ότι $x_1 = x_2$, δηλαδή ότι η L είναι ένα προς ένα. $\square$

Παράδειγμα 3.2

Έστω y ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση

$$L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
$$\lambda \longmapsto \lambda y,$$

είναι προφανώς γραμμική. Στην περίπτωση $y = 0$ έχουμε $\operatorname{Ker} L = \mathbb{R}$ και $\operatorname{Im} L = \{0\}$, ενώ στην περίπτωση $y \neq 0$ έχουμε $\operatorname{Ker} L = \{0\}$ και $\operatorname{Im} L = \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ z = \alpha y, \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$, όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως.

Σύμφωνα με το τελευταίο αποτέλεσμα του Λήματος 3.1, η διάσταση της εικόνας μιας γραμμικής απεικόνισης δεν υπερβαίνει τη διάσταση του πεδίου ορισμού της, δηλαδή $\dim X - \dim \operatorname{Im} L \geq 0$. Στο επόμενο Θεώρημα, στην περίπτωση που ο χώρος X είναι πεπερασμένης διάστασης, δίνεται ακριβής πληροφορία για αυτή τη διαφορά των διαστάσεων· συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι η εν λόγω διαφορά ισούται με τη διάσταση του πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης. Με άλλα λόγια, δεδομένου του πεδίου ορισμού μιας γραμμικής απεικόνισης, αυτή έχει τόσο πιο μεγάλη εικόνα όσο πιο μικρός είναι ο πυρήνας της. Αυτή η σχέση είναι ένα κεντρικό αποτέλεσμα της Γραμμικής Άλγεβρας και είναι γνωστή ως *τύπος των διαστάσεων*. Σημειώνουμε ακόμη ότι ο πυρήνας μιας γραμμικής απεικόνισης L αποτελείται από τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Lx = 0$, και η γνώση της διάστασής του παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Θεώρημα 3.1 *Έστω* X *και* Y *δύο γραμμικοί χώροι,* $\dim X < \infty$, *και* $L : X \longrightarrow Y$ *μία γραμμική απεικόνιση. Τότε ισχύει ο εξής τύπος των διαστάσεων*

$$\dim X = \dim \operatorname{\mathbf{Ker}} L + \dim \operatorname{\mathbf{Im}} L. \tag{3.2}$$

Απόδειξη. Όπως αναφέραμε ήδη, σύμφωνα με το Λήμμα 3.1, ισχύει $\dim \operatorname{\mathbf{Im}} L \leq \dim X$. Έστω $\{x_1, \dots, x_\ell\}$ μια βάση του $\operatorname{\mathbf{Ker}} L$, και $\{y_1, \dots, y_m\}$ μια βάση της $\operatorname{\mathbf{Im}} L$. Θεωρούμε τώρα $x_{\ell+1}, \dots, x_{\ell+m} \in X$ τέτοια ώστε $Lx_{\ell+i} = y_i, \quad i = 1, \dots, m$. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{x_1, \dots, x_{\ell+m}\}$ αποτελεί βάση του X, γεγονός από το οποίο έπεται αμέσως ο τύπος των διαστάσεων.

Κατ' αρχήν θα αποδείξουμε ότι τα $x_1, \dots, x_{\ell+m}$ παράγουν τον X. Έστω λοιπόν $x \in X$. Τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ τέτοιοι ώστε $Lx = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_m y_m$ ή

$$Lx = L(\lambda_1 x_{\ell+1} + \cdots + \lambda_m x_{\ell+m}).$$

Από αυτή τη σχέση συμπεραίνουμε ότι το $x - (\lambda_1 x_{\ell+1} + \cdots + \lambda_m x_{\ell+m})$ είναι στοιχείο του πυρήνα της L, και συνεπώς υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\mu_1, \dots, \mu_\ell$ τέτοιοι ώστε

$$x - (\lambda_1 x_{\ell+1} + \cdots + \lambda_m x_{\ell+m}) = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_\ell x_\ell,$$

επομένως $X \subset < x_1, \dots, x_{\ell+m} >$. Αλλά τα $x_1, \dots, x_{\ell+m}$ είναι στοιχεία του X, οπότε από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι $X = < x_1, \dots, x_{\ell+m} >$.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, μένει να αποδείξουμε ότι τα $x_1, \dots, x_{\ell+m}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω λοιπόν ότι

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{\ell+m} x_{\ell+m} = 0. \tag{3.3}$$

Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\lambda_{\ell+1} y_1 + \cdots + \lambda_{\ell+m} y_m = & \\
&= \lambda_{\ell+1}\, Lx_{\ell+1} + \cdots + \lambda_{\ell+m}\, Lx_{\ell+m} \\
&= L(\lambda_{\ell+1} x_{\ell+1} + \cdots + \lambda_{\ell+m} x_{\ell+m}) \\
&= L(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{\ell+m} x_{\ell+m}) \\
&= L0 = 0,
\end{aligned}$$

όπου στην προπροτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $L(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_\ell x_\ell) = 0$. Έχουμε επομένως $\lambda_{\ell+1} y_1 + \cdots + \lambda_{\ell+m} y_m = 0$, οπότε λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $y_1, \ldots, y_m$ οδηγούμαστε στο συμπέρασμα $\lambda_{\ell+1} = \cdots = \lambda_{\ell+m} = 0$.

Τώρα η (3.3) λαμβάνει τη μορφή $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_\ell x_\ell = 0$, και η γραμμική ανεξαρτησία των $x_1, \ldots, x_\ell$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\lambda_1 = \cdots = \lambda_\ell = 0$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Έστω τώρα ότι έχουμε δύο γραμμικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης X και Y. Μία άμεση συνέπεια του τύπου των διαστάσεων είναι τα εξής: Αν υπάρχει μία γραμμική απεικόνιση από τον X στον Y η οποία είναι επί, τότε $\dim Y \le \dim X$. Αν επί πλέον η απεικόνιση είναι ένα προς ένα, οπότε συνολικά θα είναι αμφιμονοσήμαντη, ο πυρήνας της θα αποτελείται μόνο από το μηδενικό διάνυσμα, θα έχει δηλαδή διάσταση μηδέν, οπότε $\dim Y = \dim X$.

Επίσης, αντίστροφα, αν $\dim Y = \dim X$, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.1, υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη γραμμική απεικόνιση από τον X στον Y.

Διατυπώνουμε στη συνέχεια αυτά τα αποτελέσματα υπό μορφή Πορίσματος.

Πόρισμα 3.1 *Μεταξύ δύο γραμμικών χώρων X και Y πεπερασμένης διάστασης υπάρχει τότε και μόνο τότε μία αμφιμονοσήμαντη γραμμική απεικόνιση, αν οι χώροι έχουν την ίδια διάσταση,* $\dim X = \dim Y$. $\square$

3.3. Ασκήσεις

3.1. Έστω X και Y δύο γραμμικοί χώροι και $L : X \longrightarrow Y$ μία γραμμική απεικόνιση. Αποδείξτε ότι αν Y' είναι ένας υπόχωρος του Y, τότε ο $\overset{-1}{L}(Y')$ είναι υπόχωρος του X.

3.2. Έστω X και Y δύο γραμμικοί χώροι, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ μία βάση του X και $y_1, \ldots, y_n \in Y$. Τότε υπάρχει ακριβώς μία γραμμική απεικόνιση $L : X \longrightarrow Y$ τέτοια ώστε $L(x_i) = y_i,\ i = 1, \ldots, n$. Αποδείξτε ότι η L είναι ακριβώς τότε ένεση, δηλαδή ένα προς ένα, αν τα $y_1, \ldots, y_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

3.3. Εξετάστε κατά πόσον οι ακόλουθες απεικονίσεις είναι γραμμικές

(i)
$$\begin{cases} L_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 x_2, x_2 x_1), \end{cases}$$

(ii)
$$\begin{cases} L_2 \ : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_{2n}, \\ \qquad x \longmapsto x \cdot x', \end{cases}$$

(iii)
$$\begin{cases} L_3 \ : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n, \\ \qquad x \longmapsto x'', \end{cases}$$

όπου x' και x'' είναι η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης x, αντίστοιχα.

3.4. Έστω $C^2[0,1] := \{x \ : \ [0,1] \ \longrightarrow \ \mathbb{R} \ / \ x$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0,1]\}$. Αν $a, b \in C[0,1]$, είναι η απεικόνιση

$$\begin{cases} L \ : C^2[0,1] \longrightarrow C[0,1], \\ \qquad x \longmapsto x'' - ax' + bx, \end{cases}$$

γραμμική;

3.5. Προσδιορίστε μία βάση του γραμμικού χώρου $L(\mathbb{R}^5)$, όταν η γραμμική απεικόνιση $L \ : \ \mathbb{R}^5 \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^5$ ορίζεται ως εξής: $L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) := (2x_2 + 4x_4, x_3 + x_5 - x_4, x_2 - x_1, x_4 + 3x_5 - x_2, x_1 + x_4 - 3x_2)$.

4. Πίνακες

Οι πίνακες αποτελούν το σημαντικότερο ίσως εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικής Άλγεβρας. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε ορισμένα βασικά πράγματα για πίνακες, θα ορίσουμε το βαθμό πινάκων ως προς τις γραμμές τους και ως προς τις στήλες τους, θα μιλήσουμε για κλιμακωτούς πίνακες, θα δούμε έναν τρόπο για να ελέγχουμε πότε n διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ αποτελούν βάση του, και θα εισαγάγουμε πράξεις μεταξύ κατάλληλων πινάκων.

4.1. Γενικά για πίνακες

Σε αυτή την ενότητα θα εισαγάγουμε πίνακες, θα μιλήσουμε για στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών πινάκων, θα ορίσουμε το βαθμό ενός πίνακα ως προς τις γραμμές του, θα αναφερθούμε σε κλιμακωτούς πίνακες, και θα δούμε πώς, με τη βοήθεια πινάκων, μπορούμε να ελέγξουμε, κατά πόσον n διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ αποτελούν βάση του.

Έστω m και n δύο φυσικοί αριθμοί. Ένα ορθογώνιο μητρώο της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

με $a_{ij} \in \mathbb{R}$, ή γενικότερα $a_{ij} \in \mathbb{K}$, όπου $\mathbb{K}$ ένα σώμα, $i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$, λέγεται *πίνακας* (*matrix*). Τα a_{ij} λέγονται *στοιχεία* του πίνακα.

Τα $a_i := (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots m$, λέγονται *γραμμές* του πίνακα και τα

$$a^j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n,$$

στήλες του.

Ένας πίνακας A με m γραμμές και n στήλες θα λέμε ότι είναι ένας $m\times n$ πίνακας, συμβολισμός $A\in\mathbb{R}^{m,n}$. Χάριν συντομίας θα γράφουμε συχνά $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$.

Στην περίπτωση $m=n$ μιλάμε για *τετραγωνικούς* πίνακες, και τότε το διάνυσμα $(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})$ λέγεται *διαγώνιος* του πίνακα A. Αν όλα τα μη διαγώνια στοιχεία του A είναι μηδέν, $a_{ij}=0$, για $i\neq j$, ο πίνακας λέγεται *διαγώνιος*.

Ορισμός 4.1 Έστω ένας πίνακας $A\in\mathbb{R}^{m,n}$. Οι ακόλουθες ανακατατάξεις γραμμών του A λέγονται *στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών* του A:
i. Για έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό λ και κάποιο $i\in\{1,\ldots,m\}$, αντικαθιστούμε την $i-$στή γραμμή του A, $(a_{i1},\ldots,a_{in})$, με $(\lambda a_{i1},\ldots,\lambda a_{in})$, συμβολικά

$$\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ \vdots\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}\vdots\\ \lambda a_i\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

ii. Αντικαθιστούμε την $i-$στή γραμμή του A με το άθροισμα της $i-$στής και της $j-$στής γραμμής του,

$$\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_j\\ \vdots\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i+a_j\\ \vdots\\ a_j\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

iii. Αντικαθιστούμε την $i-$στή γραμμή του A με το άθροισμα της $i-$στής και του πολλαπλάσιου της $j-$στής γραμμής του επί έναν πραγματικό αριθμό λ,

$$\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_j\\ \vdots\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i+\lambda a_j\\ \vdots\\ a_j\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

iv. Ανταλλάσσουμε την $i-$στή και τη $j-$στή γραμμή του A,

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Σημειώνουμε ότι οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών iii. και iv. στον προηγούμενο ορισμό προκύπτουν με επανειλημμένη εφαρμογή μετασχηματισμών της μορφής i. και ii., όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε, βλ. Άσκηση 4.1.

Ορισμός 4.2 Θεωρούμε έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Ο γραμμικός χώρος που παράγεται από τις γραμμές του, $< a_1, \dots, a_m >$, λέγεται *χώρος των γραμμών* του A και θα τον συμβολίζουμε με ΓΧΓ(A). Αντίστοιχα ο ΓΧΣ(A), ΓΧΣ(A):=$< a^1, \dots, a^n >$, λέγεται *χώρος των στηλών* του A. Η διάσταση του ΓΧΓ(A) λέγεται *βαθμός του A ως προς τις γραμμές*, ΒΓ(A), η διάσταση του ΓΧΣ(A) λέγεται *βαθμός του A ως προς τις στήλες*, ΒΣ(A).

Στη συνέχεια θα δούμε ότι οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών δεν επηρεάζουν το χώρο γραμμών ενός πίνακα.

Λήμμα 4.1 *Έστω A και B δύο $m \times n$ πίνακες. Αν ο B προκύπτει από τον A μετά από πεπερασμένου πλήθους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, τότε οι χώροι γραμμών των A και B συμπίπτουν,* $\text{ΓΧΓ}(A) = \text{ΓΧΓ}(B)$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τη σημείωση αμέσως μετά τον Ορισμό 4.1, αρκεί να αποδείξουμε τον ισχυρισμό για μετασχηματισμούς γραμμών της μορφής i. και ii. Επίσης, προφανώς, αρκεί να αποδείξουμε το αποτέλεσμα για έναν μετασχηματισμό, και επανειλημμένη εφαρμογή αυτού μας δίνει μετά το γενικότερο αποτέλεσμα.

Έστω κατ' αρχήν ότι ο B προκύπτει από τον A με έναν μετασχηματισμό της μορφής i. Για $x \in \text{ΓΧΓ}(A)$ υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\mu_1, \dots, \mu_m$ τέτοιοι ώστε $x = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_m a_m$, οπότε προφανώς

$$x = \mu_1 a_1 + \cdots + \frac{\mu_i}{\lambda}(\lambda a_i) + \cdots + \mu_m a_m,$$

επομένως $x \in \Gamma X\Gamma(B)$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι αν $x \in \Gamma X\Gamma(B)$ τότε και $x \in \Gamma X\Gamma(A)$, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη για μετασχηματισμούς της μορφής i.

Έστω τώρα ότι ο B προκύπτει από τον A με έναν μετασχηματισμό της μορφής ii. Για $x \in \Gamma X\Gamma(A)$ υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\mu_1, \ldots, \mu_m$ τέτοιοι ώστε $x = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_i a_i + \cdots + \mu_j a_j + \cdots + \mu_m a_m$, οπότε προφανώς

$$x = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_i(a_i + a_j) + \cdots + (\mu_j - \mu_i)a_j + \cdots + \mu_m a_m,$$

επομένως $x \in \Gamma X\Gamma(B)$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι αν $x \in \Gamma X\Gamma(B)$ τότε και $x \in \Gamma X\Gamma(A)$, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Ορισμός 4.3 Ένας $m \times n$ πίνακας A λέγεται *κλιμακωτός* αν
i. Οι μη μηδενικές γραμμές του εμφανίζονται πριν από τις μηδενικές γραμμές.
ii. Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής εμφανίζεται δεξιότερα του πρώτου μη μηδενικού στοιχείου της προηγούμενης γραμμής.

Μπορούμε πολύ εύκολα να προσδιορίσουμε το βαθμό ενός κλιμακωτού πίνακα ως προς τις γραμμές. Πραγματικά, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 4.1 *Έστω B ένας κλιμακωτός πίνακας και $b_1, \ldots, b_i$ οι μη μηδενικές γραμμές του. Τότε το σύνολο $\{b_1, \ldots, b_i\}$ αποτελεί βάση του χώρου γραμμών του B, $\Gamma X\Gamma(B)$, και συνεπώς ο βαθμός γραμμών του B είναι i.*

Απόδειξη. Προφανώς, αρκεί να αποδείξουμε ότι τα $b_1, \ldots, b_i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω λοιπόν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_i b_i = 0. \tag{4.1}$$

Αν $b_{11} = \cdots = b_{1,j-1} = 0$ και $b_{1j} \neq 0$, για κάποιο j (και τέτοιο j υπάρχει πάντα, εκτός αν ο B είναι ο μηδενικός πίνακας, αλλά σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει κάτι προς απόδειξη), τότε θα ισχύει και $b_{\ell 1} = \cdots = b_{\ell j} = 0,\ \ell = 2, \ldots, i$, οπότε από την (4.1) συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1 b_{1j} = 0$, δηλαδή $\lambda_1 = 0$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι $\lambda_2 = \cdots = \lambda_i = 0$. □

Ορισμός 4.4 Δύο $m \times n$ πίνακες A και B λέγονται *γραμμοϊσοδύναμοι*, αν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλον με πεπερασμένου πλήθους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι κάθε $m \times n$ πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν κλιμακωτό πίνακα. Η διαδικασία με την οποία θα οδηγηθούμε σε αυτό το αποτέλεσμα αποτελεί το πρώτο στάδιο, τη λεγόμενη *τριγωνοποίηση*, σε μία πολύ χρήσιμη μέθοδο για την επίλυση γραμμικών συστημάτων, τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss, μέθοδο στην οποία θα επανέλθουμε στο έκτο Κεφάλαιο.

Πρόταση 4.2 *Κάθε $m \times n$ πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν κλιμακωτό $m \times n$ πίνακα.*

Απόδειξη. Για μεγαλύτερη σαφήνεια στους συμβολισμούς θέτουμε $A^{(1)} := A$,

$$A^{(1)} = \left(a_{ij}^{(1)}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} .$$

Αν ο πίνακας A είναι ο μηδενικός, δηλαδή αν όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν, τότε δεν χρειάζεται να κάνουμε κάτι. Διαφορετικά, η διαδικασία προχωράει σε διάφορα βήματα. Στο πρώτο βήμα προσδιορίζουμε κατ' αρχήν την πρώτη μη μηδενική στήλη του A, έστω ότι αυτή είναι η $\ell-$στή, και, με κατάλληλες εναλλαγές γραμμών, φέρνουμε στην πρώτη γραμμή, δηλαδή στη θέση $(1,\ell)$, ένα μη μηδενικό στοιχείο της. Υποθέτοντας, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι $a_{1\ell}^{(1)} \neq 0$, στο πρώτο βήμα μετατρέπουμε, με κατάλληλους μετασχηματισμούς γραμμών, όλα τα στοιχεία της $\ell-$στής στήλης εκτός από το πρώτο σε μηδενικά. Αυτό γίνεται ως εξής: Ορίζουμε κατ' αρχήν τους *πολλαπλασιαστές* $m_{i\ell}$, $i = 2,\dots,m$, ως

$$m_{i\ell} := \frac{a_{i\ell}^{(1)}}{a_{1\ell}^{(1)}} , \qquad i = 2,\dots,m . \tag{4.2}$$

Κατόπιν πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του πίνακα επί $m_{i\ell}$, αφαιρούμε το αποτέλεσμα από την $i-$στή γραμμή του και αντικαθιστούμε την $i-$στή γραμμή με εκείνη που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο. Αυτό γίνεται για $i = 2,\dots,m$. Με αυτήν τη διαδικασία μετά το πρώτο βήμα οδηγούμαστε στον γραμμοϊσοδύναμο του $A^{(1)}$ πίνακα $A^{(2)}$ με

$$A^{(2)} := \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1\ell}^{(1)} & a_{1,\ell+1}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,\ell+1}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{m,\ell+1}^{(2)} & \dots & a_{mn}^{(2)} \end{pmatrix},$$

του οποίου οι πρώτες $\ell - 1$ στήλες είναι, όπως και εκείνες του $A^{(1)}$, μηδενικές και

$$a_{ij}^{(2)} := a_{ij}^{(1)} - m_{i\ell}\, a_{1j}^{(1)} , \qquad i = 2, \dots, m,\ j = \ell, \dots, n .$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο "απαλείφουμε" τα στοιχεία $a_{i\ell}, i = 2, \dots, m$, της $\ell-$στής στήλης του πίνακα A, γιαυτό και η μέθοδος αναφέρεται ως μέθοδος απαλοιφής.

Προχωρούμε τώρα στο δεύτερο βήμα. Εξετάζουμε τον $(m-1) \times (n-1)$ υποπίνακα $\tilde{A}^{(2)}$ του $A^{(2)}$ με στοιχεία

$$\tilde{A}_{ij}^{(2)} := a_{ij}^{(2)} , \qquad i = 2, \dots, m,\ j = 2, \dots, n .$$

Στο δεύτερο βήμα κάνουμε ακριβώς τα ίδια πράγματα που κάναμε στο πρώτο βήμα, αυτή τη φορά όμως στον πίνακα $\tilde{A}^{(2)}$. Κατ' αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε σε έναν πίνακα $A^{(3)}$ της μορφής

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \end{pmatrix},$$

όπου οι δύο πρώτες γραμμές του $A^{(3)}$ είναι οι ίδιες με τις δύο πρώτες γραμμές του $A^{(2)}$, η δεύτερη στην περίπτωση που δεν απαιτείται εναλλαγή γραμμών στο δεύτερο βήμα.

Η διαδικασία προχωρεί κατά τον ίδιον ακριβώς τρόπο. Το επαγωγικό βήμα έχει ως εξής: Κατά το βήμα r, $1 \le r \le \min(m,n)-1$, έχουμε έναν πίνακα $A^{(r)}$, γραμμοϊσοδύναμο του A, της μορφής

$$A^{(r)} := \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & . & . & . & . & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & . & . & . & . & a_{2n}^{(2)} \\ . & 0 & & & & & . \\ & & & & & & . \\ . & & & a_{r-1\,r-1}^{(r-1)} & & & . \\ . & & & 0 & a_{rr}^{(r)} & \dots & a_{rn}^{(r)} \\ . & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & a_{mr}^{(r)} & \dots & a_{mn}^{(r)} \end{pmatrix} .$$

Θεωρούμε τον υποπίνακα

$$\tilde{A}^{(r)} = \left(a_{ij}^{(r)}\right)_{\substack{i=r,\dots,m \\ j=r,\dots,n}} .$$

Αν ο πίνακας $\tilde{A}^{(r)}$ είναι μηδενικός, η διαδικασία τελειώνει σε αυτό το σημείο. Διαφορετικά, έστω $\tilde{\ell}$ η πρώτη μη μηδενική στήλη του $\tilde{A}^{(r)}$. Με κατάλληλες εναλλαγές γραμμών του πίνακα $\tilde{A}^{(r)}$ φέρνουμε στη θέση $(r,\tilde{\ell})$ ένα μη μηδενικό στοιχείο. Έστω, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι $a_{r\tilde{\ell}}^{(r)} \neq 0$. Τώρα για κάθε i, $r+1 \le i \le m$, πολλαπλασιάζουμε την $r-$στή γραμμή του $A^{(r)}$ επί τον πολλαπλασιαστή $m_{i\tilde{\ell}}$,

$$m_{i\tilde{\ell}} := \frac{a_{i\tilde{\ell}}^{(r)}}{a_{r\tilde{\ell}}^{(r)}} , \qquad r+1 \le i \le m , \tag{4.3}$$

αφαιρούμε το αποτέλεσμα από την $i-$στή γραμμή του, και αντικαθιστούμε την $i-$στή γραμμή με τη νέα που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο.

Καταλήγουμε έτσι στο νέο πίνακα $A^{(r+1)}$, πάντα γραμμοϊσοδύναμο του αρχικού, όπου οι πρώτες r γραμμές του $A^{(r+1)}$ ταυτίζονται με τις αντίστοιχες του $A^{(r)}$, και επί πλέον

$$
(4.4) \qquad \begin{cases} a_{ij}^{(r+1)} = 0 \ , & r+1 \le i \le m \,, \quad 1 \le j \le \tilde{\ell}, \\ a_{ij}^{(r+1)} = \, a_{ij}^{(r)} - m_{i\tilde{\ell}} \, a_{rj}^{(r)} \ , & r+1 \le i \le m, \quad \tilde{\ell}+1 \le j \le n \,. \end{cases}
$$

Εδώ τελειώνει το $r-$στό βήμα. Μετά από το πολύ $r = \min(m, n) - 1$ βήματα, ο γραμμοϊσοδύναμος του αρχικού πίνακας $A^{(r+1)}$ είναι κλιμακωτός. □

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.1 και την Πρόταση 4.2 μπορούμε να δώσουμε έναν τρόπο για να ελέγχουμε κατά πόσο δεδομένα διανύσματα $x_1, \dots, x_n$ του $\mathbb{R}^n$ αποτελούν βάση του, ή ακόμη και να προσδιορίζουμε βάση του χώρου που παράγουν. Παραθέτουμε το πρώτο αποτέλεσμα ως Πόρισμα, και για τον προσδιορισμό βάσεων παραπέμπουμε στις Ασκήσεις, βλ. Ασκήσεις 4.2, 4.3, 4.4. Ειδικότερα, μπορούμε να προσδιορίσουμε μια βάση της εικόνας μιας γραμμικής απεικονίσεως από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$, βλ. Άσκηση 4.5.

Πόρισμα 4.1 *Έστω $x_1, \dots, x_n$ διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο $\{x_1, \dots, x_n\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^n$, αν και μόνο αν ο $n \times n$ πίνακας με γραμμές τα $x_1, \dots, x_n$,*

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},
$$

είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα

$$
\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix},
$$

δηλαδή τέτοιον ώστε $x_{ij}' = 0$ για $i > j$, του οποίου όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι μη μηδενικά. □

4.2. Πράξεις με πίνακες

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε πράξεις μεταξύ κατάλληλων πινάκων, καθώς και τον πολλαπλασισμό αριθμού επί πίνακα.

Έστω m και n φυσικοί αριθμοί. Ο $\mathbb{R}^{m,n}$ είναι ο χώρος των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Στον $\mathbb{R}^{m,n}$ ορίζουμε την πρόσθεση καθώς και τον πολλαπλασιασμό με πραγματικούς αριθμούς ως εξής

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, \qquad \lambda A := (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}},$$

όπου $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Με αυτές τις πράξεις ο $\mathbb{R}^{m,n}$ είναι γραμμικός χώρος. Εκτός από τη διαφορετική παράθεση των στοιχείων τους, οι χώροι $\mathbb{R}^{m,n}$ και $\mathbb{R}^{mn}$ είναι ίδιοι, η γραμμική απεικόνιση

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn})$$

είναι αμφιμονοσήμαντη. Το μηδενικό στοιχείο του $R^{m,n}$ είναι ο $m \times n$ πίνακας με μηδενικά στοιχεία, αντίθετος του $A = (a_{ij})$ είναι ο $-A = (-a_{ij})$. Το σύνολο $\{I_{ij} \in \mathbb{R}^{m,n} : \ i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n\}$, όπου ο πίνακας I_{ij} έχει όλα τα στοιχεία του μηδενικά, εκτός από μία μονάδα στη θέση (i, j), δηλαδή στην "τομή" της $i-$στής γραμμής και της $j-$στής στήλης, αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^{m,n}$.

Ο πίνακας $A^T := (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,m}$ με $b_{ij} := a_{ji}$ λέγεται *ανάστροφος* του πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$. Αμέσως διαπιστώνει κανείς ότι για τους ανάστροφους πίνακες ισχύουν

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T, \quad (A^T)^T = A.$$

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Γενικά σε διανυσματικούς χώρους δεν ορίζεται το γινόμενο διανυσμάτων ως στοιχείο του χώρου. Ορίζεται όμως ο πολλαπλασιασμός μεταξύ πινάκων ορισμένης μορφής.

Θεωρούμε δύο πίνακες $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ και $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,\ell}$, όπου ο δεύτερος έχει το ίδιο πλήθος γραμμών με το πλήθος στηλών του πρώτου. Ο $m \times \ell$ πίνακας C με στοιχεία c_{ij}, $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$, καλείται *γινόμενο* των πινάκων A και B και συμβολίζεται με AB. Εφιστούμε την προσοχή του αναγνώστη στο γεγονός ότι έχει σημασία η σειρά με την οποία αναφέρουμε τους πίνακες στο σχηματισμό του γινομένου τους· γενικά το BA μπορεί να μην ορίζεται (και δεν ορίζεται αν οι πίνακες δεν είναι τετραγωνικοί) αλλά, ακόμη και στην περίπτωση που ορίζεται, μπορεί να είναι διαφορετικό του AB. Φερ' ειπείν έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \text{ενώ} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Τονίζουμε ακόμη, όπως φαίνεται και από το τελευταίο παράδειγμα, ότι το γινόμενο δύο μη μηδενικών πινάκων μπορεί να είναι ο μηδενικός πίνακας.

Λήμμα 4.2 *Έστω* $A, A' \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B, B' \in \mathbb{R}^{n,\ell}$, $C, C' \in \mathbb{R}^{\ell,r}$ *και* λ *ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύουν*:

i. *Οι επιμεριστικοί νόμοι*

$$A(B + B') = AB + AB'$$

$$(A + A')B = AB + A'B.$$

ii. $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.

iii. $A(BC) = (AB)C$ (*προσεταιριστικός νόμος*).

iv. $(AB)^T = B^T A^T$.

Απόδειξη. Τα i. και ii. είναι προφανή.

iii. Έστω $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$. Τότε $AB = (c'_{ij})$, με

$$c'_{ij} := \sum_{\mu=1}^{n} a_{i\mu} b_{\mu j},$$

και $(AB)C = (d_{ij})$, με

$$d_{ij} := \sum_{\nu=1}^{\ell} c'_{i\nu} c_{\nu j} = \sum_{\nu=1}^{\ell} \Big(\sum_{\mu=1}^{n} a_{i\mu} b_{\mu\nu} \Big) c_{\nu j} .$$

Επίσης ισχύει $BC = (c''_{ij})$, με

$$c''_{ij} := \sum_{\nu=1}^{\ell} b_{i\nu} c_{\nu j},$$

και $A(BC) = (d'_{ij})$, με

$$d'_{ij} := \sum_{\mu=1}^{n} a_{i\mu} c''_{\mu j} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{i\mu} \Big(\sum_{\nu=1}^{\ell} b_{\mu\nu} c_{\nu j} \Big) .$$

Συνεπώς $(AB)C = A(BC)$.

iv. Έστω $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$. Τότε $AB = (c_{ij})$, με

$$c_{ij} := \sum_{\mu=1}^{n} a_{i\mu} b_{\mu j},$$

επομένως και $(AB)^T = (c'_{ji})$, με $c'_{ji} = c_{ij}$.

Επίσης ισχύει $B^T = (b'_{ij})$, με $b'_{ij} = b_{ji}$ και $A^T = (a'_{ij})$, με $a'_{ij} = a_{ji}$, άρα $B^T A^T = (d_{ij})$ με

$$d_{ij} := \sum_{\nu=1}^{n} b'_{i\nu} a'_{\nu j} \ = \ \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu i} a_{j\nu} \ = \ \sum_{\nu=1}^{n} a_{j\nu} b_{\nu i} \ = c_{ji} = c'_{ij},$$

συνεπώς $(AB)^T = B^T A^T$. $\square$

4.3. Ασκήσεις

4.1. Αποδείξτε ότι οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών της μορφής iii. και iv. προκύπτουν δια επανειλημμένης εφαρμογής μετασχηματισμών της μορφής i. και ii., βλ. τον Ορισμό 4.1.

4.2. Θεωρούμε τα διανύσματα $a_1 := (0, 0, 1, 2, 0), a_2 := (1, 3, 0, 2, 5), a_3 := (2, 6, 1, 4, 5)$ και $a_4 := (2, 6, 0, 4, 4)$. Προσδιορίστε τη διάσταση του γραμμικού χώρου, τον οποίο παράγουν τα a_1, a_2, a_3, a_4, $< a_1, a_2, a_3, a_4 >$, καθώς και μία βάση του.

4.3. Έστω $a_1 := (4, 3, 1, 2), a_2 := (5, 7, 0, 1), a_3 := (1, 5, 3, 5)$ και $a_4 := (0, 1, 4, 6)$. Εξετάστε κατά πόσον τα διανύσματα a_1, a_2, a_3, a_4 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

4.4. Θεωρούμε n διανύσματα $a_1, \dots, a_n$ του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{a_1, \dots, a_n\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^n$, αν και μόνο αν ο $n \times n$ πίνακας με γραμμές $a_1, \dots, a_n$,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

μπορεί με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών να μετασχηματισθεί σε έναν άνω τριγωνικό πίνακα A, δηλαδή τέτοιον ώστε $a_{ij} = 0$ για $i > j$, $i, j = 1, \dots, n$, με όλα τα διαγώνια στοιχεία του μη μηδενικά.

4.5. Προσδιορίστε μία βάση του χώρου $L(\mathbb{R}^5)$, όπου η γραμμική απεικόνιση $L: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ορίζεται ως εξής: $Lx := (2x_2 + 4x_4, x_3 + x_5 - x_4, x_2 - x_1, 3x_2 - x_3 + x_4)$ για $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.
[*Υπόδειξη*: Προφανώς έχουμε $Lx = x_1(0,0,-1,0) + x_2(2,0,1,3) + x_3(0,1,0,-1)+ x_4(4,-1,0,1)$. Επομένως, ο χώρος $L(\mathbb{R}^5)$ είναι ο $< (0,0,-1,0), (2,0,1,3), (0,1,0,-1), (4,-1,0,1) >$. Αρκεί, συνεπώς, να προσδιορίσουμε μία βάση του χώρου, τον οποίο παράγουν τα διανύσματα $(0,0,-1,0), (2,0,1,3), (0,1,0,-1), (4,-1,0,1)$.]

4.6. Ένας $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ λέγεται *άνω τριγωνικός*, αν τα στοιχεία του κάτω από τη διαγώνιο είναι μηδενικά, δηλαδή $a_{ij} = 0$ για $i > j$. Αποδείξτε ότι το γινόμενο δύο άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων είναι επίσης άνω τριγωνικός πίνακας.

4.7. Ένας $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ λέγεται *διαγώνιος*, αν τα μη διαγώνια στοιχεία είναι μηδενικά, δηλαδή $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$. Έστω B ένας $n \times n$ πίνακας. Τι συμβαίνει, ποιο είναι δηλαδή το αποτέλεσμα, όταν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα B από αριστερά με έναν διαγώνιο πίνακα A και τι όταν τον πολλαπλασιάσουμε από δεξιά;

5. Γραμμικές Απεικονίσεις και Πίνακες

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε σχέσεις μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων. Ιδιαίτερα θα δούμε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση μεταξύ γραμμικών χώρων πεπερασμένης διάστασης μπορεί να περιγραφεί με έναν πίνακα. Σε αυτό το γεγονός οφείλεται, σε σημαντικό βαθμό, η μεγάλη σημασία των πινάκων στη Γραμμική Άλγεβρα.

5.1. Ο πίνακας μιας γραμμικής απεικονίσεως

Θεωρούμε δύο γραμμικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης και δύο τυχούσες, αλλά σταθερές, βάσεις τους. Όπως θα δούμε σε αυτή την ενότητα, κάθε γραμμική απεικόνιση μεταξύ αυτών των χώρων περιγράφεται από έναν πίνακα, και, αντίστροφα, σε κάθε πίνακα, κατάλληλων διαστάσεων, αντιστοιχεί μία τέτοια απεικόνιση. Επίσης θα δούμε ότι ο πίνακας της σύνθεσης δύο γραμμικών απεικονίσεων είναι το γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων.

Έστω X και Y δύο γραμμικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης, $\dim X = n$ και $\dim Y = m$. Θεωρούμε και δύο βάσεις $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ και $\mathcal{B}' = \{y_1, \dots, y_m\}$ των X και Y, αντίστοιχα.

Έστω τώρα L μία γραμμική απεικόνιση από τον X στον Y, $L : X \longrightarrow Y$. Για $j = 1, \dots, n$, έχουμε $Lx_j \in Y$, συνεπώς

$$Lx_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

με μονοσήμαντα ορισμένους πραγματικούς αριθμούς a_{ij}. Ο πίνακας

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

λέγεται *πίνακας της L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$.*

Αντίστροφα, ξεκινώντας από έναν $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, και θέτοντας $\tilde{y}_j := \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2 υπάρχει ακριβώς μία γραμμική απεικόνιση μεταξύ X και Y, την οποία συμβολίζουμε με L_A, τέτοια ώστε $L_A x_j = \tilde{y}_j,\ j = 1, \dots, n$, δηλαδή

$$L_A x_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Όταν λοιπόν σε κάθε έναν από τους γραμμικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης X και Y προκαθορίσουμε μία βάση, τότε σε κάθε γραμμική απεικόνιση $L : X \longrightarrow Y$ αντιστοιχεί ένας $\dim Y \times \dim X$ πίνακας, και σε κάθε $\dim Y \times \dim X$ πίνακα αντιστοιχεί μία γραμμική απεικόνιση $L : X \longrightarrow Y$.

Για διαφορετικές βάσεις, στην ίδια απεικόνιση αντιστοιχούν γενικά διαφορετικοί πίνακες.

Έστω X, Y, Z τρεις γραμμικοί χώροι, $\dim X = n,\ \dim Y = m,\ \dim Z = \ell$, και $\mathcal{B}_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{y_1, \dots, y_m\}$ και $\mathcal{B}_3 = \{z_1, \dots, z_\ell\}$ βάσεις των X, Y και Z, αντίστοιχα. Έστω $L : X \longrightarrow Y$ και $M : Y \longrightarrow Z$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, και $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ο πίνακας της L ως προς $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ και $B \in \mathbb{R}^{\ell,m}$ ο πίνακας της M ως προς $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$. Έστω C ο πίνακας της $M \circ L$ ως προς $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_3$. Τότε, με $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ C = (c_{ij})$, ισχύει:

$$\begin{aligned} Lx_j &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i,\ j = 1, \dots, n, \\ My_i &= \sum_{k=1}^{\ell} b_{ki} z_k,\ i = 1, \dots, m, \\ (M \circ L)x_j &= \sum_{k=1}^{\ell} c_{kj} z_k,\ j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Επιπρόσθετα έχουμε

$$\begin{aligned} (M \circ L)x_j = M(Lx_j) &= M \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} M y_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \big(\sum_{k=1}^{\ell} b_{ki} z_k \big) = \sum_{k=1}^{\ell} \big(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \big) z_k, \end{aligned}$$

συνεπώς $C = BA$.

Παράδειγμα 5.1 Έστω $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ L(x_1, x_2, x_3) := (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_3)$, με $x = (x_1, x_2, x_3)$. Ο πίνακας της γραμμικής απεικονίσεως L ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Έστω τώρα $\mathcal{B} := \{(1,0,-1),(1,1,1),(1,0,0)\}$ και $\mathcal{B}' := \{(1,0),(0,1)\}$ βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$, αντίστοιχα. Τότε

$$\begin{aligned} L(1,0,-1) &= (2,1) = 2(1,0) + (0,1) \\ L(1,1,1) &= (1,3) = (1,0) + 3(0,1) \\ L(1,0,0) &= (1,2) = (1,0) + 2(0,1) \end{aligned}$$

επομένως ο πίνακας της L ως προς $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ είναι

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.2. Βαθμός μιας γραμμικής απεικονίσεως, ισομορφισμοί, αλλαγή βάσεως

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε το βαθμό μιας γραμμικής απεικονίσεως, με πεδίο ορισμού έναν χώρο πεπερασμένης διάστασης, και θα μελετήσουμε ισομορφισμούς, δηλαδή αμφιμονοσήμαντες γραμμικές απεικονίσεις, μεταξύ γραμμικών χώρων. Ακόμη θα μιλήσουμε για αντιστρέψιμους πίνακες, και θα αναφερθούμε στην αλλάγη βάσεως σε έναν χώρο πεπερασμένης διάστασης.

Ορισμός 5.1 Έστω X, Y δύο γραμμικοί χώροι. Μία γραμμική απεικόνιση $L : X \longrightarrow Y$ λέγεται *ισομορφισμός*, αν είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή ένα προς ένα και επί. Αν μεταξύ δύο γραμμικών χώρων X και Y υπάρχει ένας ισομορφισμός, τότε αυτοί λέγονται *ισόμορφοι*.

Ορισμός 5.2 Έστω X, Y δύο γραμμικοί χώροι, $\dim X < \infty$, και $L : X \longrightarrow Y$ μία γραμμική απεικόνιση. *Βαθμός* της L λέγεται η διάσταση της εικόνας της L, βαθμός$(L) = \dim \operatorname{Im} L$.

Μία γραμμική απεικόνιση $L : X \longrightarrow Y, \dim X = \dim Y < \infty$, είναι, προφανώς, ακριβώς τότε ισομορφισμός, αν βαθμός$(L) = \dim Y (= \dim X)$.

Έστω X ένας γραμμικός χώρος και $\{x_1, \dots, x_n\}$ μία βάση του X. Τότε κάθε $x \in X$ μπορεί να γραφεί μονοσήμαντα ως γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \dots, x_n$, $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, με πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Οι αριθμοί $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ λέγονται *συνιστώσες* ή *συντεταγμένες* του x ως προς τα $x_1, \dots, x_n$.

Έστω $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ ένας $m \times n$ πραγματικός πίνακας, και οι γραμμικοί χώροι $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ με τις κανονικές τους βάσεις $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ και $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$. Αν τα διανύσματα των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ τα γράψουμε ως στήλες, τότε για τη γραμμική απεικόνιση L_A που αντιστοιχεί στον πίνακα A ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ ισχύει $L_A x = Ax$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, αφού

$$Ae_j \;=\; \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \;=\; a_{1j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{mj} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Χάριν απλότητος γράφουμε A αντί για L_A, δηλαδή συμβολίζουμε με A τόσο τον $m \times n$ πίνακα όσο και τη γραμμική απεικόνιση $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ x \mapsto Ax$.

Έστω X ένας γραμμικός χώρος και $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.1, υπάρχει ακριβώς μία γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \;&\longrightarrow\; X \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \;&\mapsto\; \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n. \end{aligned}$$

Η γραμμική αυτή απεικόνιση είναι, όπως διαπιστώνει κανείς εύκολα, ισομορφισμός ακριβώς τότε, αν $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι βάση του X.

Έστω X, Y δύο γραμμικοί χώροι, $\dim X = n,\ \dim Y = m$, και $L : X \longrightarrow Y$ μία γραμμική απεικόνιση. Σκοπός μας εδώ είναι να δώσουμε μία μέθοδο προσδιορισμού μιας βάσης της εικόνας της L, $\operatorname{Im} L$. Κατ' αυτόν τον τρόπο προσδιορίζουμε φυσικά και τη διάσταση της εικόνας της L, οπότε, με τη βοήθεια του τύπου των διαστάσεων, και τη διάσταση του πυρήνα της L. Έστω $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ και $\mathcal{B}' = \{y_1, \dots, y_m\}$ βάσεις των X και Y, αντίστοιχα, και $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ο πίνακας της L ως προς $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Τότε ορίζουμε τις γραμμικές απεικονίσεις,

$$\begin{aligned} L_1 \ : X \ &\longrightarrow \ \mathbb{R}^n \\ x_i \ &\mapsto \ e_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ A \ : \mathbb{R}^n \ &\longrightarrow \ \mathbb{R}^m \\ x \ &\mapsto \ Ax, \\ L_2 \ : \mathbb{R}^m \ &\longrightarrow \ Y \\ e'_i \ &\mapsto \ y_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

όπου $\{e_1, \dots, e_n\}$ και $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ οι κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$, αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι μολονότι ορίσαμε την απεικόνιση L_1 μόνο για τα $x_1, \dots, x_n$, αυτή είναι, σύμφωνα με την Πρόταση 3.1, καλώς ορισμένη σε όλον τον X· αντίστοιχα ισχύουν και για την απεικόνιση L_2. Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned} (L_2 \circ A \circ L_1)x_j &= (L_2 \circ A)(L_1 x_j) = (L_2 \circ A)e_j = L_2(Ae_j) \\ &= L_2(a_{1j}e'_1 + \cdots + a_{mj}e'_m) = a_{1j}L_2 e'_1 + \cdots + a_{mj}L_2 e'_m \\ &= a_{1j}y_1 + \cdots + a_{mj}y_m = Lx_j, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

επομένως $L_2 \circ A \circ L_1 = L$.

Επειδή $L_1(X) = \mathbb{R}^n$ και η L_2 είναι ισομορφισμός, αρκεί να υπολογίσουμε μία βάση $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ του $A(\mathbb{R}^m)$, οπότε το σύνολο $\{L_2 v_1, \dots, L_2 v_\ell\}$ θα αποτελεί βάση του $L_1(A(\mathbb{R}^n))$, άρα του $L(X)$. Κατ' αυτόν τον τρόπο επιτύχαμε να αναγάγουμε το πρόβλημά μας στο ακόλουθο ειδικό πρόβλημα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $A \ : \ \mathbb{R}^n \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$. Να προσδιορισθεί μία βάση του $A(\mathbb{R}^n)$.

Για την απεικόνιση A ισχύει, προφανώς, $Ae_j = a^j$, όπου a^j είναι η $j-$στή στήλη του πίνακα A, συνεπώς $< a^1, \dots, a^n > \subset \operatorname{Im} A$. Εξ άλλου, αν $x \in \mathbb{R}^n$, τότε $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, άρα

$$Ax = \lambda_1 Ae_1 + \cdots + \lambda_n Ae_n = \lambda_1 a^1 + \cdots + \lambda_n a^n,$$

δηλαδή $Ax \in < a^1, \dots, a^n >$, επομένως $\operatorname{Im} A \subset < a^1, \dots, a^n >$. Συνολικά δηλαδή έχουμε $\operatorname{Im} A = < a^1, \dots, a^n >$. Μία βάση όμως του γραμμικού χώρου $< a^1, \dots, a^n >$ μπορούμε να προσδιορίσουμε εύκολα με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss, αν την εφαρμόσουμε στον πίνακα A^T.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο βαθμός της γραμμικής απεικονίσεως A είναι ο βαθμός στηλών του πίνακα A, ΒΣ(A), βλ. τον Ορισμό 4.2, τον οποίο καλούμε επίσης *βαθμό του πίνακα* A, βαθμός(A).

Παράδειγμα 5.2 Έστω $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$, $L(x_1, x_2, x_3, x_4) := (0, x_2 - x_3, -2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4, -x_1 - x_3 + 2x_4)$, με $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Ο πίνακας της γραμμικής απεικονίσεως L ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^4$ και $\mathbb{R}^5$ είναι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

και φυσικά έχουμε

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ο A^T είναι γραμμοϊσοδύναμος του

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

και αμέσως συμπεραίνουμε ότι ο βαθμός της L είναι 3, και ότι το σύνολο

$$\{(0, 1, -2, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 2), (0, 0, 0, 0, -5)\}$$

είναι βάση του $L(\mathbb{R}^4)$.

Στο αποτέλεσμα που ακολουθεί δείχνουμε ότι για να είναι ισομορφισμός μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ χώρων της ίδιας πεπερασμένης διάστασης, αρκεί αυτή να είναι είτε ένα προς ένα είτε επί. Υπενθυμίζουμε ότι μεταξύ γραμμικών χώρων διαφορετικής διάστασης δεν υπάρχουν φυσικά ισομορφισμοί. Το αποτέλεσμα αυτό μας δίνει μία δυνατότητα για να ελέγχουμε κατά πόσον μία γραμμική απεικόνιση είναι ισομορφισμός.

Λήμμα 5.1 *Έστω X και Y δύο γραμμικοί χώροι της ίδιας πεπερασμένης διάστασης,* $\dim X = \dim Y < \infty$. *Αν $L : X \longrightarrow Y$ είναι μία γραμμική απεικόνιση, τότε είναι ισοδύναμα:*
i. *Η L είναι ένεση, δηλαδή ένα προς ένα.*
ii. *Η L είναι έφεση, δηλαδή επί.*
iii. *Η L είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του τύπου των διαστάσεων

$$\dim X = \dim \mathbf{Im}\, L + \dim \mathbf{Ker}\, L,$$

βλ. Θεώρημα 3.1, και της Πρότασης 3.2, σύμφωνα με την οποία η L είναι ένεση ακριβώς τότε, αν ο πυρήνας της περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα. □

Σύμφωνα με το προηγούμενο αποτέλεσμα, μία γραμμική απεικόνιση $L : X \longrightarrow Y$ μεταξύ δύο γραμμικών χώρων X και Y, με $\dim X = \dim Y = n$, είναι ισομορφισμός, αν και μόνο αν ο βαθμός του πίνακα της L, δηλαδή ο βαθμός στηλών αυτού του πίνακα, είναι επίσης n.

Παραδείγματα 5.3
1. Μία γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ δεν μπορεί να είναι ισομορφισμός, αφού οι διαστάσεις του πεδίου ορισμού της και του πεδίου τιμών της είναι διαφορετικές.
2. Είναι η απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x_1, x_2, x_3) := (x_1+x_2, 2x_1+4x_3, x_1-x_2+x_3)$, ισομορφισμός;

Η L είναι προφανώς γραμμική απεικόνιση και οι διαστάσεις του πεδίου ορισμού της και του πεδίου τιμών της είναι ίδιες. Επιπρόσθετα, ο πίνακας A της L ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

και φυσικά έχουμε

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο A^T είναι γραμμοϊσοδύναμος των

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

άρα ο βαθμός της L είναι τρία, συμπίπτει δηλαδή με τη διάσταση του $\mathbb{R}^3$, επομένως η L είναι ισομορφισμός.

Ορισμός 5.3 Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ λέγεται *αντιστρέψιμος*, αν υπάρχει πίνακας $A' \in \mathbb{R}^{n,n}$, τέτοιος ώστε να ισχύει $A'A = AA' = I_n$.

Η εύκολη απόδειξη της επόμενης παρατήρησης αφήνεται ως Άσκηση, βλ. Άσκηση 5.4.

Παρατήρηση 5.1 *Το σύνολο $GL_n(\mathbb{R})$ των $n \times n$ αντιστρέψιμων πινάκων, $GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A$ αντιστρέψιμος$\}$ είναι με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων ομάδα.* □

Εύκολα τώρα οδηγούμεθα στο συμπέρασμα ότι ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου πίνακα είναι μονοσήμαντα ορισμένος:

Πόρισμα 5.1 *Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας, τότε υπάρχει ακριβώς ένας πίνακας $A' \in \mathbb{R}^{n,n}$, τέτοιος ώστε να ισχύει $A'A = AA' = I_n$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της Παρατήρησης 5.1 και του Λήμματος 1.1. □

Τον, σύμφωνα με το προηγούμενο αποτέλεσμα, μονοσήμαντα ορισμένο αντίστροφο ενός αντιστρέψιμου πίνακα A θα τον συμβολίζουμε με A^{-1}.

Στην ακόλουθη Πρόταση δίνουμε έναν χαρακτηρισμό για αντιστρέψιμους πίνακες:

Πρόταση 5.1 *Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν ο βαθμός του A ως προς τις στήλες,* ΒΣ(A), *είναι n.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος, και έστω A^{-1} ο αντίστροφός του. Τότε οι απεικονίσεις $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ x \mapsto Ax$, και $A^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ x \mapsto A^{-1}x$, είναι γραμμικές, και οι αντίστοιχοι πίνακές τους ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι A και A^{-1}, αντίστοιχα. Για τη σύνθεση $A^{-1} \circ A$ ισχύει:

$$A^{-1} \circ A \,:\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (A^{-1} \circ A)x = A^{-1}(Ax) = (A^{-1}A)x = I_n x = x,$$

συνεπώς η A είναι ένα προς ένα, οπότε, κατά το Λήμμα 5.1, είναι ισομορφισμός, και επομένως έχουμε ΒΣ$(A) = n$.

Αντίστροφα τώρα, αν ΒΣ$(A) = n$, τότε η απεικόνιση A είναι επί, οπότε, ξανά σύμφωνα με το Λήμμα 5.1, είναι ισομορφισμός. Επομένως υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση της A, η A^{-1}. Ο πίνακας της απεικόνισης $A^{-1} \circ A$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι $A^{-1}A$, και επειδή η $A^{-1} \circ A$ είναι η ταυτότητα στον $\mathbb{R}^n$ θα έχουμε $A^{-1}A = I_n$. Ακριβώς αντίστοιχα αποδεικνύεται και ότι $AA^{-1} = I_n$. $\square$

Στην ακόλουθη Πρόταση δίνουμε μία ικανή συνθήκη για να είναι ένας τετραγωνικός πίνακας αντιστρέψιμος. Το αποτέλεσμα αυτό παρουσιάζει ενδιαφέρον, γιατί τέτοιοι πίνακες εμφανίζονται συχνά στις εφαρμογές. Η εύκολη απόδειξη αφήνεται ως Άσκηση, βλ. Άσκηση 6.2.

Πρόταση 5.2 *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Αν ισχύει*

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n, \tag{5.1}$$

τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. $\square$

Πίνακες που ικανοποιούν την (5.1) λέγονται *διαγώνια υπέρτεροι*· συνώνυμα λέμε ότι έχουν *αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο*.

Έστω X και Y δύο γραμμικοί χώροι της ίδιας διάστασης, $\dim X = \dim Y = n$, και $\mathcal{B}_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$, βάσεις των X και Y, αντίστοιχα. Έστω επίσης $L : X \longrightarrow Y$ μία αμφιμονοσήμαντη γραμμική απεικόνιση. Αν A είναι ο πίνακας της L, τότε, όπως διαπιστώνει κανείς εύκολα, ο πίνακας της L^{-1}, ως προς τις ίδιες βάσεις, είναι ο αντίστροφος του A, A^{-1}.

Πρόταση 5.3 *Έστω X και Y δύο γραμμικοί χώροι,* $\dim X = \dim Y = n$, *και $\mathcal{B}_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$, βάσεις των X και Y, αντίστοιχα. Έστω επίσης $L : X \longrightarrow Y$ μία αμφιμονοσήμαντη γραμμική απεικόνιση. Αν A είναι ο πίνακας της L, τότε ο πίνακας της L^{-1}, ως προς τις ίδιες βάσεις, είναι A^{-1}.*

Απόδειξη. Έστω B ο πίνακας της L^{-1}. Τότε, ο πίνακας της απεικόνισης $L \circ L^{-1}$, η οποία είναι φυσικά η ταυτότητα στον X, είναι AB, συνεπώς $AB = I_n$. Ακριβώς αντίστοιχα βλέπει κανείς ότι και $BA = I_n$, οπότε $B = A^{-1}$. $\square$

Αλλαγή βάσεως. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την αλλαγή βάσεως. Συγκεκριμένα, θα μας απασχολήσει το εξής πρόβλημα: Έστω X ένας γραμμικός χώρος, και $\{x_1, \dots, x_n\}$ και $\{y_1, \dots, y_n\}$ βάσεις του X. Αν $x \in X$, $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, τότε ποιες είναι οι συνιστώσες του x ως προς τη βάση $\{y_1, \dots, y_n\}$;

Στην πράξη τα $y_1, \dots, y_n$ δίνονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των $x_1, \dots, x_n$· για αυτόν το λόγο θα ασχοληθούμε με το ανωτέρω πρόβλημα σε αυτή την ειδική περίπτωση. Έστω λοιπόν

$$y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Αν $\beta_1, \dots, \beta_n$ είναι οι (άγνωστες προς το παρόν) συνιστώσες του x ως προς $y_1, \dots, y_n$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^n \beta_j y_j = \sum_{j=1}^n \beta_j \Big(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n \beta_j a_{ij} \Big) x_i = \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij} \beta_j \Big) x_i \,, \end{aligned}$$

συνεπώς, με

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

έχουμε

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} . \tag{5.2}$$

Θέτουμε τώρα

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

με άγνωστον αυτή τη φορά πίνακα B και

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} y_i, \quad j = 1, \dots, n,$$

και, όπως στην (5.2), θα έχουμε

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} . \tag{5.3}$$

Από τις (5.2) και (5.3) λαμβάνουμε αμέσως

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} . \tag{5.4}$$

Λόγω του ότι η (5.4) ισχύει για τυχόντα διανύσματα $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, συμπεραίνουμε ότι $B = A^{-1}$, και η (5.3) γράφεται στη μορφή

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} . \tag{5.5}$$

Για να απαντήσουμε στο αρχικό μας πρόβλημα, λοιπόν, αρκεί να προσδιορίσουμε τον πίνακα A^{-1}. Με αυτό το θέμα θα έχουμε την ευκαιρία να ασχοληθούμε στη συνέχεια.

Σημειώνουμε πάντως ότι η (5.5) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} . \tag{5.6}$$

Η σχέση αυτή είναι πολύ καταλληλότερη για την πράξη, όπως θα δούμε στη συνέχεια, αφού ο υπολογισμός του $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ απαιτεί τώρα μόνο την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, για την οποία παραπέμπουμε στο επόμενο Κεφάλαιο, αλλά όχι την αντιστροφή ενός πίνακα. Αργότερα θα δούμε ότι η αντιστροφή ενός πίνακα είναι πολύ δαπανηρότερη διαδικασία από την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος.

5.3. Ασκήσεις

5.1. Εξετάστε κατά πόσον η απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $L(x_1, x_2, x_3) := (x_1, x_1 + x_2 - x_3, 3x_1 + 5x_2, 4x_2 - 2x_3)$, είναι γραμμική. Προσδιορίστε τον πίνακα της L ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^4$, το βαθμό της και μία βάση του γραμμικού χώρου $L(\mathbb{R}^3)$.

5.2. Έστω L η απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2, x_3) := (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_2 - 2x_3)$, και $\mathcal{B} := \{(1, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Είναι το σύνολο $\mathcal{B}$ βάση του $\mathbb{R}^3$; Προσδιορίστε τον πίνακα της L ως προς $\mathcal{B}$ και την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

5.3. Εξετάστε κατά πόσον η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $L(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + 2x_2 + 4x_3, x_1 + 3x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4, -5x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4)$, είναι ισομορφισμός.

5.4. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ των $n \times n$ αντιστρέψιμων πινάκων, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A \text{ αντιστρέψιμος}\}$ είναι με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων ομάδα.

5.5. Έστω X, Y δύο γραμμικοί χώροι, και έστω ότι μία γραμμική απεικόνιση $L : X \longrightarrow Y$ είναι ισομορφισμός. Αν $x_1, \dots, x_n$ είναι διανύσματα του X, αποδείξτε ότι, αν τα $Lx_1, \dots, Lx_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε και τα $x_1, \dots, x_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

5.6. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x, y, z) := (x + 2y - z, y + 2z, 3x + z)$. Εξετάστε κατά πόσον ισχύουν τα ακόλουθα:
i. Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$, και τα Lx_1, Lx_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε και τα x_1, x_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα.
ii. Αν $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$, και τα Lx_1, Lx_2, Lx_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε και τα x_1, x_2, x_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα.

6. Γραμμικά Συστήματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε γραμμικά συστήματα, δηλαδή γραμμικές "εξισώσεις" μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης. Πέρα από τη θεωρητική τους σημασία, γραμμικά συστήματα εμφανίζονται πολύ συχνά στις εφαρμογές, η προσέγγιση της λύσης πολύπλοκων προβλημάτων ανάγεται, κατά κανόνα, στην επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Έστω m και n δύο φυσικοί αριθμοί, $a_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$, και $b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, m$. Ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \cdots \ + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \cdots \ + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \cdots \ + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{6.1}$$

λέγεται *γραμμικό σύστημα* με αγνώστους $x_1, \dots, x_n$. Ο πίνακας A,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

λέγεται *πίνακας συντελεστών* ή απλώς *πίνακας* του γραμμικού συστήματος (6.1). Το διάνυσμα b,

$$b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

λέγεται *σταθερός όρος* του συστήματος (6.1). Με

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

το σύστημα (6.1) γράφεται στη μορφή

$$Ax = b. \tag{6.1$'$}$$

Ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ λέγεται *λύση* του συστήματος (6.1), αν ισχύει $Ax = b$.

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη γραμμικών συστημάτων, σημειώνουμε ότι το γραμμικό σύστημα (6.1) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Αυτό μας οδηγεί αμέσως σε ένα πολύ εύκολο μεν, σχεδόν ταυτολογία, συμπέρασμα, το οποίο όμως συντελεί ουσιαστικά στην κατανόηση του περιεχομένου αυτού του Κεφαλαίου, δηλαδή στο ότι το γραμμικό σύστημα (6.1) έχει ακριβώς τότε λύση, αν το διάνυσμα b μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A του συστήματος.

6.1. Ομογενή γραμμικά συστήματα

Κατ' αρχήν θα ασχοληθούμε με *ομογενή* γραμμικά συστήματα, δηλαδή με γραμμικά συστήματα με σταθερό όρο μηδέν,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{mn}x_n &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{6.2}$$

Χώρος λύσεων του γραμμικού συστήματος (6.2) λέγεται το σύνολο $\Lambda := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = 0\}$. Σε αυτή την ενότητα θα δούμε διάφορες ιδιότητες του χώρου λύσεων ομογενών γραμμικών συστημάτων.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι ο χώρος λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος (6.2) είναι γραμμικός χώρος, και θα προσδιορίσουμε μία σχέση μεταξύ της διάστασής του και του βαθμού του πίνακα A.

Πρόταση 6.1 *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας. Ο χώρος λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος (6.2), $\Lambda := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = 0\}$, είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, και για τη διάστασή του ισχύει* $\dim \Lambda = n - \text{βαθμός}(A)$.

Απόδειξη. Ο Λ είναι προφανώς ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$. Επομένως ο Λ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, και η ζητούμενη σχέση για τη διάστασή του έπεται από τον τύπο των διαστάσεων, βλ. Θεώρημα 3.1. $\square$

Σκοπός μας τώρα είναι να δώσουμε μία μέθοδο προσδιορισμού όλων των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος. Στην περίπτωση ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος, αρκεί να προσδιορίσουμε μία βάση $\{u_1, \dots, u_\ell\}$ του χώρου λύσεών του Λ, αφού, φυσικά, η βάση καθορίζει πλήρως το γραμμικό χώρο.

Βασικό ρόλο στη διαδικασία επίλυσης γραμμικών συστημάτων παίζει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Λήμμα 6.1 *Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας και S ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας. Τότε τα γραμμικά συστήματα $Ax = 0$ και $(SA)x = 0$ έχουν τους ίδιους χώρους λύσεων.*

Απόδειξη. Έστω x μία λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = 0$. Τότε, $(SA)x = S(Ax) = S0 = 0$, δηλαδή το x είναι λύση και του δεύτερου συστήματος.

Αντίστροφα τώρα, έστω x μία λύση του $(SA)x = 0$. Τότε, $Ax = (S^{-1}S)Ax = S^{-1}(SAx) = S^{-1}0 = 0$, δηλαδή το x είναι λύση και του πρώτου συστήματος. $\square$

Ορισμός 6.1 Δύο γραμμικά συστήματα $Ax = b$ και $Bx = c$ λέγονται *ισοδύναμα*, αν κάθε λύση του ενός είναι και λύση του άλλου.

Αν A ένας $m \times n$ πίνακας και S ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας, τότε, σύμφωνα με το Λήμμα 6.1, τα γραμμικά συστήματα $Ax = 0$ και $SAx = 0$ είναι ισοδύναμα.

Θεωρούμε τώρα πίνακες $S_i(\lambda), Q_i^j \in \mathbb{R}^{m,m}$, $i, j = 1, \dots, m$, $j \neq i$, με $\lambda \neq 0$, της εξής μορφής

$$S_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

δηλαδή έναν διαγώνιο πίνακα με λ στη θέση (i,i) και μονάδες όλα τα άλλα στοιχεία της διαγωνίου, και

$$Q_i^j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

δηλαδή έναν πίνακα με μονάδες στη διαγώνιο και στη θέση (i,j) και μηδενικά όλα τα άλλα στοιχεία του. Αμέσως διαπιστώνουμε ότι οι πίνακες αυτοί είναι αντιστρέψιμοι, και οι αντίστροφοί τους είναι $\big(S_i(\lambda)\big)^{-1} = S_i(\frac{1}{\lambda})$ και

$$\big(Q_i^j\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & -1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Όσον αφορά τη δράση των πινάκων της μορφής (6.3) και (6.4), εύκολα βλέπουμε ότι πολλαπλασιασμός ενός πίνακα A από αριστερά με τον πίνακα $S_i(\lambda)$ σημαίνει πολλαπλασιασμό της $i-$στής γραμμής του A επί λ, ενώ πολλαπλασιασμός με τον πίνακα Q_i^j, για $j \neq i$, σημαίνει πρόσθεση της $j-$στής γραμμής του A στην $i-$στή γραμμή του,

$$S_i(\lambda) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

$$Q_i^j \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο εκφράσαμε λοιπόν τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών της μορφής i. και ii. ως πολλαπλασιασμό από αριστερά με έναν κατάλληλο πίνακα. Επανειλημμένη εφαρμογή μας δίνει, φυσικά, και τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών της μορφής iii. και iv..

Πίνακες της μορφής (6.3) και (6.4) καθώς και οι αντίστροφοί τους καλούνται *στοιχειώδεις*.

Ανάλογα με τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών εισάγουμε τώρα και τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών.

Ορισμός 6.2 Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Οι ακόλουθες ανακατατάξεις στηλών του A λέγονται *στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών* του A:
i. Για έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό λ και κάποιο $j \in \{1, \ldots, m\}$, αντικαθιστούμε την $j-$στή στήλη του A,

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

με

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{1j} \\ \vdots \\ \lambda a_{mj} \end{pmatrix},$$

συμβολικά

$$(\ldots\ a^j\ \ldots) \longmapsto (\ldots\ \lambda a^j\ \ldots).$$

ii. Αντικαθιστούμε την $i-$στή στήλη του A με το άθροισμα της $i-$στής και της $j-$στής στήλης του,

$$(\ldots\ a^i\ \ldots\ a^j\ \ldots) \longmapsto (\ldots\ a^i + a^j\ \ldots\ a^j\ \ldots).$$

iii. Αντικαθιστούμε την $i-$στή στήλη του A με το άθροισμα της $i-$στής και του πολλαπλάσιου της $j-$στής στήλης του επί έναν πραγματικό αριθμό λ,

$$(\dots\ a^i\ \dots\ a^j\ \dots) \longmapsto (\dots\ a^i + \lambda a^j\ \dots\ a^j\ \dots).$$

iv. Ανταλλάσσουμε την $i-$στή και τη $j-$στή στήλη του A,

$$(\dots\ a^i\ \dots\ a^j\ \dots) \longmapsto (\dots\ a^j\ \dots\ a^i\ \dots).$$

Σημειώνουμε ότι, όπως και στην περίπτωση στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών iii. και iv. προκύπτουν με επανειλημμένη εφαρμογή μετασχηματισμών της μορφής i. και ii..

Επίσης, ξανά όπως και στην περίπτωση στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών της μορφής i. και ii. μπορούν να εκφρασθούν ως πολλαπλασιασμός, αυτή τη φορά από δεξιά, με έναν κατάλληλο πίνακα της μορφής (6.3) ή (6.4). Πραγματικά, πολλαπλασιασμός ενός πίνακα A από δεξιά με τον πίνακα $S_i(\lambda)$ σημαίνει πολλαπλασιασμό της $i-$στής στήλης του A επί λ, ενώ πολλαπλασιασμός με τον πίνακα Q^i_j, για $j \neq i$, σημαίνει πρόσθεση της $j-$στής στήλης του A στην $i-$στή στήλη του,

$$(a^1\ \dots\ a^i\ \dots\ a^n)S_i(\lambda) = (a^1\ \dots\ \lambda a^i\ \dots\ a^n),$$

$$(a^1\ \dots\ a^i\ \dots\ a^j\ \dots\ a^n)Q^i_j = (a^1\ \dots\ a^i + a^j\ \dots\ a^j\ \dots\ a^n),$$

όπου σε αυτή την περίπτωση, φυσικά, $S_i(\lambda), Q^i_j \in \mathbb{R}^{n,n}$, $i, j = 1, \dots, n$, $j \neq i$ παρατηρήστε ότι αναφερόμαστε στον πολλαπλασισμό από δεξιά με Q^i_j και όχι με Q^j_i. Επανειλημμένη εφαρμογή μας δίνει, φυσικά, και τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών της μορφής iii. και iv..

Θα δούμε τώρα ότι ο πολλαπλασισμός ενός πίνακα με πίνακες της μορφής (6.3) και (6.4), είτε από αριστερά είτε από δεξιά, αφήνει το βαθμό του πίνακα ως προς τις στήλες αναλλοίωτο.

Πρόταση 6.2 *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας, και $S_i(\lambda), Q^j_i$ πίνακες της μορφής* (6.3) *και* (6.4). *Τότε οι πίνακες $S_i(\lambda)A, AS_i(\lambda), Q^j_iA, AQ^j_i$ έχουν τον ίδιο βαθμό ως προς τις στήλες με τον πίνακα A.*

Απόδειξη. Κατ' αρχήν, πολλαπλασιασμός του A από δεξιά με έναν πίνακα $S_i(\lambda)$ ή Q^j_i έχει ως συνέπεια έναν στοιχειώδη μετασχηματισμό στηλών του A. Επομένως οι διανυσματικοί χώροι τους οποίους παράγουν οι στήλες των πινάκων $AS_i(\lambda), AQ_i^j$ και A συμπίπτουν, συνεπώς και οι διαστάσεις τους είναι ίδιες.

Γενικά για έναν αντιστρέψιμο $m \times m$ πίνακα S, έχουμε, με $A = (a^1 \ldots a^n)$, $SA = (Sa^1 \ldots Sa^n)$, και, επειδή η απεικόνιση $S : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ είναι ισομορφισμός, ισχύει

$$\dim < a^1 \ldots a^n >= \dim < Sa^1 \ldots Sa^n >,$$

γεγονός που αποδεικνύει και το υπόλοιπο μέρος της Πρότασης. □

Θα δούμε τώρα ότι ο βαθμός ενός πίνακα ως προς τις στήλες, συνεπώς και ο βαθμός του πίνακα, και ο βαθμός του ως προς τις γραμμές συμπίπτουν, οπότε στη συνέχεια θα μπορούμε να μιλάμε απλώς για το βαθμό ενός πίνακα.

Πρόταση 6.3 *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε ο βαθμός του A ως προς τις στήλες ισούται με το βαθμό του ως προς τις γραμμές.*

Απόδειξη. Έστω B ένας κλιμακωτός πίνακας, γραμμοϊσοδύναμος του A. Τότε, προφανώς, οι A και B έχουν τον ίδιο βαθμό ως προς τις γραμμές, και, επιπρόσθετα, σύμφωνα με την Πρόταση 6.2, έχουν και τον ίδιο βαθμό ως προς τις στήλες, έστω r. Τον B μπορούμε τότε, με κατάλληλους μετασχηματισμούς στηλών, οι οποίοι βέβαια αφήνουν τον βαθμό του ως προς τις στήλες αναλλοίωτο, να τον γράψουμε στη μορφή

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

και αμέσως συμπεραίνουμε ότι και ο βαθμός του B ως προς τις γραμμές είναι επίσης r. Επομένως, οι βαθμοί του A, τόσο ως προς τις γραμμές όσο και ως προς τις στήλες, είναι r. □

Έστω τώρα ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = 0$ με $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Το σύστημα αυτό είναι ισοδύναμο με ένα σύστημα $Bx = 0$ με B έναν κλιμακωτό πίνακα,

$$B = \begin{pmatrix} b_{1j_1} & \star & & \dots & & & \\ & & b_{2j_2} & \star & & \dots & \\ & & & b_{3j_3} & & \dots & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & b_{rj_r} & \dots \\ & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix},$$

όπου οι πρώτες r γραμμές είναι μη μηδενικές, οι υπόλοιπες μηδενικές, και τα πρώτα $j_i - 1$ στοιχεία της $i-$στής γραμμής είναι επίσης μηδέν, για $i = 1, \dots, r$. Σύμφωνα με τις Προτάσεις 6.1 και 6.3, η διάσταση του χώρου λύσεων Λ του γραμμικού συστήματος $Bx = 0$, ο οποίος είναι, φυσικά, και χώρος λύσεων του $Ax = 0$, είναι $n - r$,

$$\dim \Lambda = n - r. \tag{6.5}$$

Προς απλοποίηση των συμβολισμών, και χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $j_1 = 1, \dots, j_r = r$, αφού αυτό μπορεί να επιτευχθεί με κατάλληλη εναλλαγή στηλών, δηλαδή με κατάλληλη αρίθμηση των αγνώστων. Ο πίνακας B θα είναι τότε της μορφής

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \star & & \dots & & \\ & b_{22} & \star & & \dots & \\ & & b_{33} & & \dots & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & b_{rr} & \dots \\ & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Με $\mu := n - r$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu \in \mathbb{R}$, είναι εύκολο να δούμε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x \in \mathbb{R}^n$ με $x = (x_1, \dots, x_r, \lambda_1, \dots, \lambda_\mu) \in \Lambda$. Πραγματικά, η εξίσωση r του συστήματος $Bx = 0$ είναι $b_{rr}x_r + b_{r,r+1}\lambda_1 + \dots + b_{rn}\lambda_\mu = 0$, και, αφού $b_{rr} \neq 0$, υπάρχει ακριβώς ένα x_r που ικανοποιεί αυτή τη σχέση. Από την εξίσωση $r-1$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα το x_{r-1} και ούτω καθ' εξής, και, τέλος, από την πρώτη εξίσωση προσδιορίζεται μονοσήμαντα το x_1.

Έχουμε δηλαδή μία γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} G \,:\, \mathbb{R}^\mu &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu) &\mapsto (x_1, \ldots, x_r, \lambda_1, \ldots, \lambda_\mu) \end{aligned}$$

η οποία είναι ένα προς ένα και για την οποία ισχύει $G(\mathbb{R}^\mu) \subset \Lambda$. Επειδή η διάσταση του Λ είναι, προφανώς, μ, σύμφωνα με τον τύπο των διαστάσεων θα ισχύει $\dim G(\mathbb{R}^\mu) = \mu$, συνεπώς $G(\mathbb{R}^\mu) = \Lambda$.

Αν λοιπόν $\{e_1, \ldots, e_\mu\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^\mu$, τότε $\{G(e_1), \ldots, G(e_\mu)\}$ είναι μία βάση του Λ.

Παράδειγμα 6.1 Θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$(6.6) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccccccccc} x_2 & & & + & 2x_4 & - & x_5 & - & 4x_6 & & & = & 0 \\ & & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & + & 2x_6 & + & x_7 & = & 0 \\ x_2 & & & + & 2x_4 & + & x_5 & - & 2x_6 & & & = & 0 \\ & & x_3 & - & x_4 & & & + & 2x_6 & - & x_7 & = & 0 \\ x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & + & x_7 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ο πίνακας συντελεστών αυτού του γραμμικού συστήματος είναι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ο οποίος είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον κλιμακωτό πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, η διάσταση του χώρου λύσεων του γραμμικού συστήματος $Ax = 0$ είναι $\mu = 7-$βαθμός$(A) = 7-$βαθμός$(B) = 7 - 4 = 3$. Το σύστημα είναι ισοδύναμο προς το σύστημα $Bx = 0$, δηλαδή προς το

$$(6.7)\qquad \begin{cases} x_2 \quad + 2x_4 - x_5 - 4x_6 \qquad = 0 \\ \quad x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 + x_7 = 0 \\ \qquad\qquad x_5 + x_6 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad x_6 + 2x_7 = 0 \ . \end{cases}$$

Με $x_1 = \lambda_1, x_4 = \lambda_2$ και $x_7 = \lambda_3$ (μνημονικός κανόνας: στην πρώτη, στην τέταρτη και στην έβδομη στήλη του B δεν εμφανίζονται μη μηδενικά στοιχεία στις γωνίες της κλίμακας) έχουμε από αυτό το γραμμικό σύστημα

$$(6.8)\qquad \begin{cases} x_6 = -2x_7 = -2\lambda_3 \\ x_5 = -x_6 = 2\lambda_3 \\ x_3 = x_4 + x_5 - 2x_6 - x_7 = \lambda_2 + 5\lambda_3 \\ x_2 = -2x_4 + x_5 + 4x_6 = -2\lambda_2 - 6\lambda_3 \, . \end{cases}$$

Ο χώρος λύσεων Λ είναι επομένως η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης

$$\begin{aligned} G \ : \ \mathbb{R}^3 \ &\longrightarrow \ \mathbb{R}^7 \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \ &\mapsto \ (\lambda_1, -2\lambda_2 - 6\lambda_3, \lambda_2 + 5\lambda_3, \lambda_2, 2\lambda_3, -2\lambda_3, \lambda_3) \, , \end{aligned}$$

η οποία είναι ένα προς ένα. Με

$$\begin{aligned} G(1,0,0) &= (1,0,0,0,0,0,0) =: u_1 \\ G(0,1,0) &= (0,-2,1,1,0,0,0) =: u_2 \\ G(0,0,1) &= (0,-6,5,0,2,-2,1) =: u_3 \, , \end{aligned}$$

έχουμε επομένως $\Lambda =< u_1, u_2, u_3 >$.

Το γεγονός αυτό μπορεί κανείς να το διατυπώσει με άλλα λόγια ως εξής: Σύμφωνα με την (6.8), με τυχαίες παραμέτρους λ_1, λ_2 και λ_3, οι λύσεις του συστήματος (6.7) γράφονται στη μορφή $(\lambda_1, -2\lambda_2 - 6\lambda_3, \lambda_2 + 5\lambda_3, \lambda_2, 2\lambda_3, -2\lambda_3, \lambda_3)$. Τώρα

$$\begin{aligned} &(\lambda_1, -2\lambda_2 - 6\lambda_3, \lambda_2 + 5\lambda_3, \lambda_2, 2\lambda_3, -2\lambda_3, \lambda_3) = \\ &= \lambda_1(1,0,0,0,0,0,0) + \lambda_2(0,-2,1,1,0,0,0) + \lambda_3(0,-6,5,0,2,-2,1) = \\ &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \, , \end{aligned}$$

δηλαδή $\Lambda =< u_1, u_2, u_3 >$.

6.2. Ομοπαραλληλικοί υπόχωροι και μη ομογενή γραμμικά συστήματα

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε γενικά, όχι κατ' ανάγκη ομογενή, γραμμικά συστήματα και θα γνωρίσουμε διάφορες ιδιότητες των λύσεών τους.

Έστω

$$A \in \mathbb{R}^{m,n},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \text{και}\ \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ λέγεται *μη ομογενές*, αν $b \neq 0$. Το σύνολο λύσεων $\{x \in \mathbb{R}^n \ :\ Ax = b\}$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, αν $b \neq 0$.

Ορισμός 6.3 Έστω X ένας γραμμικός χώρος, και Y ένα υποσύνολο του X. Το Y λέγεται *ομοπαραλληλικός υπόχωρος* του X, αν υπάρχουν ένα $y_1 \in X$ και ένας υπόχωρος Y_1 του X, έτσι ώστε να ισχύει

$$Y = y_1 + Y_1 := \{y \in X \ :\ y = y_1 + x, x \in Y_1\}.$$

Θα δούμε αμέσως τώρα ότι ο υπόχωρος Y_1, που αντιστοιχεί σε κάποιον ομοπαραλληλικό υπόχωρο όπως στον ανωτέρω ορισμό, ορίζεται μονοσήμαντα· αντίθετα το y_1 μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε στοιχείο του Y.

Λήμμα 6.2 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος, Y_1 ένας υπόχωρος του X και $y_1 \in X$. Για τον ομοπαραλληλικό υπόχωρο $Y := y_1 + Y_1$ ισχύουν:*
i. *Για κάθε $y \in Y$, $Y = y + Y_1$.*
ii. *Αν Y_1, Y_2 υπόχωροι του X και $y_1, y_2 \in X$ έτσι ώστε $Y = y_1 + Y_1 = y_2 + Y_2$, τότε $Y_1 = Y_2$ και $y_1 - y_2 \in Y_1$.*

Απόδειξη.
i. Αφού $y \in Y$, υπάρχει $x' \in Y_1$ τέτοιο ώστε $y = y_1 + x'$. Έστω τώρα $u \in Y$. Τότε το u θα γράφεται στη μορφή $u = y_1 + x$, με $x \in Y_1$, επομένως $u = y + (x - x')$, και, αφού ο Y_1 είναι γραμμικός χώρος, $x - x' \in Y_1$, δηλαδή $u \in y + Y_1$ Άρα $Y \subset y + Y_1$.

Αντίστροφα, αν $u \in y + Y_1$, τότε το u θα γράφεται στη μορφή $u = y + x$, με $x \in Y_1$, επομένως $u = y_1 + (x + x')$, δηλαδή $u \in y_1 + Y_1 = Y$, συνεπώς $y + Y_1 \subset Y$. Συμπερασματικά, $y + Y_1 = Y$.
ii. Έστω $Z := \{u - u' \ :\ u, u' \in Y\}$. Αμέσως διαπιστώνουμε ότι $Z = Y_1$ και $Z = Y_2$. Επομένως $Y_1 = Y_2$.

Επιπρόσθετα, από την ισότητα $y_1 + Y_1 = y_2 + Y_2$ συμπεραίνουμε αμέσως ότι υπάρχει $x \in Y_1$ τέτοιο ώστε $y_2 = y_1 + x$, οπότε $y_2 - y_1 = x \in Y_1$. $\square$

Σύμφωνα με το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορούμε τώρα να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 6.4 Έστω X ένας γραμμικός χώρος, και $Y, Y = y_1 + Y_1$, ένας ομοπαραλληλικός υπόχωρος του X. Ως *διάσταση* του Y ορίζεται η διάσταση του Y_1, $\dim Y := \dim Y_1$.

Στο επόμενο αποτέλεσμα δίνεται η σχέση μεταξύ ομοπαραλληλικών υποχώρων και του χώρου λύσεων μιας γραμμικής εξίσωσης $Lx = y$, με L μία γραμμική απεικόνιση. Ειδική περίπτωση είναι φυσικά τα γραμμικά συστήματα, τα οποία μας απασχολούν εδώ.

Πρόταση 6.4 *Έστω X, Y δύο γραμμικοί χώροι και $L : X \longrightarrow Y$ μία γραμμική απεικόνιση. Για κάθε $y \in Y$, το σύνολο $\overset{-1}{L}(y)$ είναι είτε κενό είτε ένας ομοπαραλληλικός υπόχωρος του X. Αν $x \in \overset{-1}{L}(y)$, τότε ισχύει*

$$\overset{-1}{L}(y) = x + \operatorname{Ker} L. \tag{6.9}$$

Απόδειξη. Αν το σύνολο $\overset{-1}{L}(y)$ είναι κενό, δηλαδή το y είναι τέτοιο ώστε η εξίσωση $Lx = y$ να μην έχει λύση, τότε δεν υπάρχει τίποτε προς απόδειξη. Έστω λοιπόν ότι $\overset{-1}{L}(y) \neq \emptyset$, και $x \in \overset{-1}{L}(y)$. Αν $u \in \overset{-1}{L}(y)$, τότε $u = x + (u - x)$ και $L(u - x) = Lu - Lx = y - y = 0$, άρα $u - x \in \operatorname{Ker} L$, δηλαδή $u \in x + \operatorname{Ker} L$.

Αντίστροφα, αν $u = x + x' \in x + \operatorname{Ker} L$, τότε $Lu = Lx + Lx' = y + 0 = y$, συνεπώς $u \in \overset{-1}{L}(y)$. $\square$

Πόρισμα 6.1 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ και $b \in \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ και το αντίστοιχο ομογενές, $Ax = 0$. Έστω $\Lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ ο χώρος λύσεων του $Ax = b$, και $\Lambda' := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ ο χώρος λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $Ax = 0$. Αν το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση, δηλαδή $\Lambda \neq \emptyset$, και $x \in \Lambda$, τότε ισχύει $\Lambda = x + \Lambda'$, δηλαδή ο Λ είναι ένας ομοπαραλληλικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Επίσης ισχύει* $\dim \Lambda = n - \text{βαθμός}(A)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ x \mapsto Ax$. Τότε έχουμε

$$\Lambda' = \operatorname{Ker} L = \overset{-1}{L}(0) \quad \text{και} \quad \Lambda = \overset{-1}{L}(b) \tag{6.10}$$

Τα αποτελέσματα τώρα έπονται από την Πρόταση 6.4· η σχέση για τη διάσταση αποδείχτηκε στην Πρόταση 6.1. □

Έστω $Ax = b$ ένα γραμμικό σύστημα, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ και $b \in \mathbb{R}^m$. Ο πίνακας

$$(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

λέγεται *επαυξημένος πίνακας* αυτού του συστήματος.

Θα δούμε τώρα ότι ένα γραμμικό σύστημα $Ax = b$ (για ένα συγκεκριμένο διάνυσμα b) έχει λύση, αν και μόνο αν ο πίνακάς του A και ο επαυξημένος πίνακάς του (A, b) έχουν τον ίδιο βαθμό. Αυτό σημαίνει απλώς ότι οι στήλες του A αφ' ενός και οι στήλες του A μαζί με το διάνυσμα b αφ' ετέρου παράγουν τον ίδιο χώρο, οπότε φυσικά το b θα είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A, γεγονός που είναι ισοδύναμο με το να έχει το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ λύση.

Θεώρημα 6.1 *Το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει λύση, αν και μόνο αν* βαθμός$(A) =$ βαθμός(A, b).

Απόδειξη. Στους πίνακες A και $A' := (A, b)$ αντιστοιχούν οι απεικονίσεις

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Ax,$$

και

$$A' : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto A'x,$$

αντίστοιχα. Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ και $\{e'_1, \dots, e'_{n+1}\}$ οι κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^{n+1}$. Τότε ισχύει $Ae_1 = A'e'_1, \dots, Ae_n = A'e'_n$, και $A'e_{n+1} = b$. Αυτό σημαίνει ότι $b \in \operatorname{Im} A'$, και η ερώτηση είναι κατά πόσον ισχύει $b \in \operatorname{Im} A$. Κατ' αρχήν έχουμε $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} A'$, άρα βαθμός$(A) \leq$ βαθμός(A'). Συνεπώς η σχέση βαθμός$(A) =$ βαθμός(A') είναι ισοδύναμη με την βαθμός$(A) \geq$ βαθμός(A'), δηλαδή με την $\operatorname{Im} A' \subset \operatorname{Im} A$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την $b \in \operatorname{Im} A$, δηλαδή με την ύπαρξη λύσης του συστήματος $Ax = b$. □

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση στην οποία το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ και $b \in \mathbb{R}^m$, έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$, δηλαδή η απεικόνιση $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$, είναι έφεση, δηλαδή επί. Αυτό συμβαίνει, φυσικά, όταν οι στήλες του A παράγουν όλον τον $\mathbb{R}^m$, δηλαδή όταν ο βαθμός του A είναι m.

Λήμμα 6.3 *Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$, αν και μόνο αν ο βαθμός του A είναι m,* βαθμός$(A) = m$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$. Αυτό σημαίνει φυσικά ότι η αντίστοιχη απεικόνιση A είναι επί, οπότε $A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$, συνεπώς βαθμός$(A) = \dim A(\mathbb{R}^n) = \dim \mathbb{R}^m = m$.

Αντίστροφα, αν ο βαθμός του A είναι m, τότε $\dim A(\mathbb{R}^n) = m$, δηλαδή $\dim A(\mathbb{R}^n) = \dim \mathbb{R}^m$, οπότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν και το γεγονός ότι $A(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$, συμπεραίνουμε ότι $A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$, δηλαδή για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ax = b$, οπότε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$. □

Εύκολα τώρα οδηγούμαστε σε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει ένα γραμμικό σύστημα ακριβώς μία λύση. Γνωρίζουμε ήδη ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση, αν και μόνο αν βαθμός$(A) =$ βαθμός(A, b). Για να είναι η λύση αυτή μοναδική πρέπει το αντίστοιχο ομογενές σύστημα $Ax = 0$ να έχει μόνο την τετριμμένη λύση, δηλαδή ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$, να περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, οπότε από τον τύπο των διαστάσεων παίρνουμε $\dim \mathrm{Im}\, A = n$, οπότε βαθμός$(A) = n$. Συνολικά δηλαδή θα έχουμε βαθμός$(A) =$ βαθμός$(A, b) = n$.

Λήμμα 6.4 *Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας και $b \in \mathbb{R}^m$. Τότε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει ακριβώς μία λύση, αν και μόνο αν* βαθμός$(A) =$ βαθμός$(A, b) = n$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1, το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει λύση, αν και μόνο αν βαθμός$(A) =$ βαθμός(A, b). Επιπρόσθετα, η σχέση βαθμός$(A) = n$ σημαίνει $\dim A(\mathbb{R}^n) = n$, οπότε ο τύπος των διαστάσεων μας δίνει $\dim \mathrm{Ker}\, A = 0$, δηλαδή $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι βαθμός$(A) =$ βαθμός$(A, b) = n$. Τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, το σύστημα $Ax = b$ έχει τουλάχιστον μία λύση, και αν Λ είναι ο χώρος λύσεών του και $x \in \Lambda$, τότε ισχύει $\Lambda = x + \mathrm{Ker}\, A$, συνεπώς $\Lambda = \{x\}$, δηλαδή το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση.

Αντίστροφα, αν το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει ακριβώς μία λύση x, τότε $\Lambda = \{x\}$, οπότε η σχέση $\Lambda = x + \mathrm{Ker}\, A$ δίνει $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$, συνεπώς, σύμφωνα με τον τύπο των διαστάσεων, $\dim A(\mathbb{R}^n) = n$, άρα βαθμός$(A) = n$. □

Ιδιαίτερα σημαντική στις εφαρμογές είναι η περίπτωση γραμμικών συστημάτων με ίδιο πλήθος εξισώσεων και αγνώστων. Άμεση απόρροια του Λήμματος 6.4 και της Προτάσεως 5.1 είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα, σύμφωνα με το οποίο ένα γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου A ένας $n \times n$ πίνακας, έχει μία και μόνο λύση ακριβώς τότε, αν ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

Πρόταση 6.5 *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και $b \in \mathbb{R}^n$. Τότε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει ακριβώς μία λύση, αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.* $\square$

6.3. Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Δίνουμε τώρα μία "πρακτική" μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Αποκαλέσαμε τη μέθοδο αυτή πρακτική, γιατί αυτή, και διάφορες παραλλαγές της, οι οποίες χρησιμοποιούνται για λόγους που δεν είναι στους σκοπούς αυτών των σημειώσεων να εξηγηθούν, χρησιμοποιούνται πολύ στην πράξη, κυρίως για όχι πολύ μεγάλα γραμμικά συστήματα.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ και $b \in \mathbb{R}^m$. Το πρόβλημα που μας απασχολεί είναι να προσδιορίσουμε τις λύσεις, δηλαδή τον χώρο λύσεων, του γραμμικού συστήματος $Ax = b$.

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss αποτελείται από δύο στάδια, την *τριγωνοποίηση* και την *οπισθοδρόμηση*. Στο πρώτο στάδιο γράφουμε το σύστημα $Ax = b$ ισοδύναμα στη μορφή

$$A^{(\nu)}x = b^{(\nu)}, \tag{6.11}$$

με κλιμακωτό πίνακα συντελεστών $A^{(\nu)} = \big(a_{ij}^{(\nu)}\big)$, ιδιαίτερα λοιπόν τέτοιον ώστε $a_{ij}^{(\nu)} = 0$ για $i > j$, με $\nu \leq \min(m, n)$, και στο δεύτερο στάδιο επιλύουμε το τελευταίο αυτό σύστημα ξεκινώντας από την τελευταία εξίσωση και προχωρώντας προς τα πίσω.

6.3.1. Τριγωνοποίηση.

Με τους συμβολισμούς που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη της Πρότασης 4.2, στην οποία υλοποιήθηκε το μέρος της τριγωνοποίησης που αφορά τον πίνακα A και μένει το μέρος που αφορά το διάνυσμα b, θέτουμε $b^{(1)} := b$, και, κατά το βήμα r, ορίζουμε το $b^{(r+1)}$ ως εξής, βλ. την (4.4),

$$\begin{aligned} b_i^{(r+1)} &= b_i^{(r)} \;, \quad 1 \leq i \leq r, \\ b_i^{(r+1)} &= b_i^{(r)} - m_{i\tilde{\ell}}\, b_r^{(r)} \;, \quad r+1 \leq i \leq m\,. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο, μετά από το πολύ $\min(m,n)-1$ βήματα, το σύστημά μας γράφεται στην επιθυμητή μορφή (6.11).

6.3.2. Οπισθοδρόμηση. Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς, γράφουμε το σύστημα (6.11) ως $Bx=c$ και τώρα ο επαυξημένος πίνακας (B,c) θα είναι της μορφής

$$(B,c)=\begin{pmatrix} b_{1j_1} & \star & & \dots & & & c_1 \\ & & b_{2j_2} & \star & & \dots & c_2 \\ & & & b_{3j_3} & & \dots & c_3 \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & b_{rj_r} \quad \dots & c_r \\ & & & & & & c_{r+1} \\ & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & c_m \end{pmatrix},$$

με $b_{1j_1}\neq 0,\dots,b_{rj_r}\neq 0$. Τώρα, ο βαθμός του A είναι r, και επειδή οι πίνακες (A,b) και (B,c) έχουν τον ίδιο βαθμό, συμπεραίνουμε εύκολα ότι το να έχουν οι πίνακες (A,b) και A τον ίδιο βαθμό είναι ισοδύναμο με το $c_{r+1}=\cdots=c_m=0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1, ο χώρος λύσεων του γραμμικού συστήματος $Ax=b$ είναι συνεπώς ακριβώς τότε μη κενός, αν $c_{r+1}=\cdots=c_m=0$. Στην περίπτωση $r=m$, δεν εμφανίζονται καθόλου τα $c_{r+1},\dots,c_m$, και, όπως είδαμε στο Λήμμα 6.3, το σύστημα $Ax=b$ έχει λύση για κάθε $b\in\mathbb{R}^m$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $c_{r+1}=\cdots=c_m=0$. Όπως και στην περίπτωση ομογενών γραμμικών συστημάτων, οι μεταβλητές x_j με $j\notin\{j_1,\dots,j_r\}$ είναι ελεύθερες παράμετροι. Προς απλοποίηση των συμβολισμών υποθέτουμε και αυτή τη φορά ότι $j_1=1,\dots,j_r=r$. Για να προσδιορίσουμε μία ειδική λύση του μη ομογενούς γραμμικού συστήματος $Ax=b$, θέτουμε $x_{r+1}=\cdots=x_n=0$. Από την $r-$στή εξίσωση του $Bx=c$ λαμβάνουμε τότε $b_{rr}x_r=c_r$, και από εδώ υπολογίζουμε το x_r. Πηγαίνοντας μετά προς τα πίσω υπολογίζουμε τα $x_{r-1},\dots,x_1$, και παίρνουμε συνολικά μία ειδική λύση $u=(x_1,\dots,x_r,0,\dots,0)$ του $Bx=c$. Αφού ο πίνακας (B,c) προκύπτει από τον (A,b) μετά από πεπερασμένου πλήθους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $n\times n$ πίνακας S, τέτοιος ώστε $(B,c)=S(A,b)$, δηλαδή $(B,c)=(SA,Sb)$. Επομένως έχουμε

$$Au=S^{-1}SAu=S^{-1}Bu=S^{-1}c=b,$$

δηλαδή το u είναι επίσης λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$.

Τώρα, με τη γνωστή μας μέθοδο, υπολογίζουμε το χώρο λύσεων Λ' του ομογενούς γραμμικού συστήματος $Ax = 0$, οπότε ο χώρος λύσεων Λ του $Ax = b$ είναι $\Lambda = u + \Lambda'$.

Παράδειγμα 6.2 Θεωρούμε το μη ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 2 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{array}\right. . \tag{6.13}$$

Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον επαυξημένο πίνακα αυτού του γραμμικού συστήματος,

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

λαμβάνουμε τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: (B, c).$$

Επειδή οι πίνακες (A, b) και A έχουν τον ίδιο βαθμό, $2 =: r$, το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση. Ο χώρος λύσεων Λ έχει διάσταση δύο, $\dim \Lambda = n - r = 4 - 2 = 2$. Επίσης έχουμε $j_1 = 1, j_2 = 3$. Με $x_2 = x_4 = 0$, έχουμε $x_3 = -1$ και $x_1 = 1 - x_3 = 2$, άρα $u = (2, 0, -1, 0)$ είναι μία λύση του $Ax = b$.

Για να προσδιορίσουμε το χώρο λύσεων του $Ax = b$, προσδιορίζουμε πρώτα το χώρο λύσεων Λ' του αντίστοιχου ομογενούς γραμμικού συστήματος $Ax = 0$, ή του ισοδύναμου προς αυτό $Bx = 0$, δηλαδή του

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & = 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = 0 \end{array} . \tag{6.14}$$

Με $x_2 = \lambda_1$ και $x_4 = \lambda_2$ έχουμε $x_3 = -\lambda_2$ και $x_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$. Ο χώρος λύσεων Λ' είναι επομένως η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης

$$\begin{aligned} G \,:\, \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\lambda_1, \lambda_2) &\mapsto (2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, -\lambda_2, \lambda_2)\,, \end{aligned}$$

η οποία είναι ένα προς ένα, δηλαδή έχουμε επομένως

$$\Lambda' =< G(1,0), G(0,1) >=< (2,1,0,0), (1,0,-1,1) > .$$

Συνεπώς, ο χώρος λύσεων Λ του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ δίνεται ως εξής

$$\Lambda = u + \Lambda' = (2,0,-1,0)+ < (2,1,0,0), (1,0,-1,1) > .$$

Με άλλα λόγια, οι λύσεις του γραμμικού συστήματος (6.13) είναι τα διανύσματα

$$(2,0,-1,0) + \lambda_1(2,1,0,0) + \lambda_2(1,0,-1,1) = (2 + 2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, -1 - \lambda_2, \lambda_2)\,,$$

όπου οι παράμετροι λ_1 και λ_2 διατρέχουν όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

6.4. Ασκήσεις

6.1. Προσδιορίστε τους χώρους λύσεων των εξής ομογενών γραμμικών συστημάτων

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

6.2. Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας διαγώνια υπέρτερος πίνακας, δηλαδή πίνακας με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, δηλαδή τέτοιος ώστε

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Αποδείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, βλ. Πρόταση 5.2.
[*Υπόδειξη*: Υποθέστε ότι το ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = 0$ έχει μία μη τετριμμένη λύση x, συμβολίστε με x_i μία κατ' απόλυτο τιμή μέγιστη συνιστώσα της, και οδηγηθείτε σε άτοπο.]

6.3. Έστω

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 8 \\ 7 & 3 & 6 & 13 & 13 \end{pmatrix}.$$

Έχει το σύστημα $Ax = b$ για κάθε $b \in \mathbb{R}^4$ λύση;

6.4. Εξετάστε, χωρίς να το λύσετε, κατά πόσον το γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 9 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

6.5. Να λύσετε, δηλαδή να προσδιορίσετε το χώρο λύσεών του, το γραμμικό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr} 0x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & - & x_5 & - & 4x_6 & & & = & -2 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & + & 2x_6 & + & x_7 & = & 2 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & + & x_5 & - & 2x_6 & & & = & 2 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & & & + & 2x_6 & - & x_7 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & + & x_7 & = & 4 \end{array} \right. .$$

6.6. Προσδιορίστε τις τιμές της παραμέτρου λ, για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcc} 5x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 7 \\ 4x & - & 5y & + & \lambda z & = & \lambda - 5 \end{array}$$

έχει λύση. Για αυτές τις τιμές του λ, να λύσετε το γραμμικό σύστημα, δηλαδή να προσδιορίσετε το χώρο λύσεών του.

6.7. Έστω A ένας $n \times n$ πραγματικός, άνω τριγωνικός πίνακας με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία. Αποδείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, και ότι ο αντίστροφός του είναι επίσης άνω τριγωνικός πίνακας.

6.8. Αποδείξτε την Πρόταση 6.5.

6.9. Αποδείξτε ότι ένας $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν το ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση, $x = 0$.

6.10. Έστω A και B δύο $n \times n$ πραγματικοί πίνακες. Αποδείξτε ότι ο πίνακας AB είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν και οι δύο πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι.

6.11. Μελετήστε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss στην ειδική, αλλά ιδιαίτερα χρήσιμη στις εφαρμογές, περίπτωση, όπου το γραμμικό σύστημα έχει το ίδιο πλήθος εξισώσεων και αγνώστων και ο πίνακάς του είναι αντιστρέψιμος.

6.12. Προσδιορίστε τις λύσεις του γραμμικού συστήματος

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 - x_5 - 4x_6 = 3 \\ x_3 - x_4 - x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_2 - 2x_4 - x_5 + 2x_6 = 4 \\ x_3 + x_4 - 2x_6 - x_7 = -1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 1 \end{cases} .$$

6.13. Πόσες λύσεις έχει το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} 15x_1 + 5x_4 - x_5 - 4x_6 = 0 \\ 20x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 + x_7 = 0 \\ x_2 - 30x_3 + 10x_4 + x_5 - 2x_6 = 0 \\ x_2 + 25x_4 + x_5 - 2x_6 = 0 \\ x_3 - x_4 + 20x_5 + 7x_6 - x_7 = 0 \\ x_3 - x_4 + 2x_5 + 27x_6 - x_7 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 19x_7 = 0 \end{cases} ;$$

6.14. Θεωρούμε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους. Υποθέτουμε ότι $n > m$. Αποδείξτε ότι η διάσταση του χώρου λύσεων του συστήματος είναι τουλάχιστον $n - m$.

7. Ορίζουσες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισαγάγουμε ένα άλλο χρήσιμο εργαλείο της Γραμμικής Άλγεβρας, την *ορίζουσα* τετραγωνικού πίνακα. Η ορίζουσα είναι μία απεικόνιση, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε πραγματικό τετραγωνικό πίνακα έναν πραγματικό αριθμό. Θα μελετήσουμε διάφορες ιδιότητες οριζουσών, και θα δούμε πώς με τη βοήθειά τους μπορούμε να δώσουμε μία κομψή παράσταση της λύσης ενός γραμμικού συστήματος με ίδιο πλήθος εξισώσεων και αγνώστων. Ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο παίζουν οι ορίζουσες σε προβλήματα ιδιοτιμών, θέμα το οποίο θα μας απασχολήσει στο ένατο Κεφάλαιο.

7.1. Ορισμός, ύπαρξη και μονοσήμαντο της ορίζουσας

Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε έναν γενικό ορισμό της ορίζουσας, θα δούμε ότι κατ' αυτόν τον τρόπο η ορίζουσα είναι καλά ορισμένη, και θα γνωρίσουμε διάφορες ιδιότητες οριζουσών.

Κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ θα τον συμβολίζουμε και ως

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

όπου a_i είναι η $i-$στή γραμμή του.

Ορισμός 7.1 Έστω n ένας φυσικός αριθμός. Μία απεικόνιση $\det : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται *ορίζουσα* (determinant), αν ισχύουν:

D1 Η $\det$ είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή. Αναλυτικότερα αυτό σημαίνει ότι, για $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $i \in \{1, \ldots, n\}$, ισχύουν

i. Αν $a_i = a_i' + a_i''$, τότε

$$\det \mathrm{i} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i' \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i'' \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

ii. Αν $a_i = \lambda a_i'$, τότε

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i' \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

D2 Αν δύο γραμμές του $n \times n$ πίνακας A έχει δύο γραμμές του ίδιες, τότε η ορίζουσά του είναι μηδέν, $\det A = 0$.

D3 Η ορίζουσα του $n \times n$ μοναδιαίου πίνακα ισούται με τη μονάδα, $\det I_n = 1$.

Ο ορισμός δεν εξασφαλίζει, φυσικά, την ύπαρξη της ορίζουσας. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ύπαρξη και μοναδικότητα, δηλαδή ότι υπάρχει ακριβώς μία απεικόνιση με τις ιδιότητες D1, D2 και D3.

Εντελώς ανάλογα μπορούν να ορισθούν ορίζουσες και για πίνακες από το $\mathbb{K}^{n,n}$, όπου $\mathbb{K}$ ένα σώμα. Οι ορίζουσες βρίσκουν τη σημαντικότερη εφαρμογή τους στα προβλήματα ιδιοτιμών, με τα οποία θα ασχοληθούμε στο Κεφάλαιο 9, όπου και θα χρησιμοποιήσουμε ορίζουσες για μιγαδικούς τετραγωνικούς πίνακες. Επίσης οι ορίζουσες μας διευκολύνουν να παραστήσουμε με κομψό τρόπο τη λύση γραμμικών συστημάτων με το ίδιο πλήθος εξισώσεων και αγνώστων, και αντιστρέψιμο πίνακα συντελεστών.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη ύπαρξης και μοναδικότητας για ορίζουσες, σημειώνουμε ορισμένες απλές ιδιότητές τους, οι οποίες είναι άμεση απόρροια του ορισμού των οριζουσών.

Λήμμα 7.1 *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} .$$

Τότε ισχύουν:

i. *Αν ανταλλάξουμε δύο γραμμές του πίνακα, τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο,*

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

ii. *Αν σε μία γραμμή του πίνακα προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής του, η ορίζουσα μένει αναλλοίωτη,*

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

iii. *Αν ο πίνακας έχει μία μηδενική γραμμή, τότε η ορίζουσά του είναι μηδέν, δηλαδή αν* $a_i = 0$ *για κάποιο* $i \in \{1, \dots, n\}$, *τότε* $\det A = 0$.

iv. *Αν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα επί* λ, *τότε η ορίζουσά του πολλαπλασιάζεται επί* λ^n, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Απόδειξη.

i. Έχουμε

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 ,$$

όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε δύο φορές την D2, στη δεύτερη και στην τρίτη την D1 και στην τελευταία ξανά την D2.
ii. Έχουμε

$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i+\lambda a_j\\ \vdots\\ a_j\\ \vdots\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_j\\ \vdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\vdots\\ \lambda a_j\\ \vdots\\ a_j\\ \vdots\end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_j\\ \vdots\end{pmatrix} + \lambda\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_j\\ \vdots\\ a_j\\ \vdots\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_j\\ \vdots\end{pmatrix},$$

όπου στην πρώτη και στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την D1 και στην τελευταία την D2.
iii. Για έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό λ έχουμε

$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ 0\\ \vdots\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ \lambda\cdot 0\\ \vdots\end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix}\vdots\\ 0\\ \vdots\end{pmatrix},$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την D1. Το αποτέλεσμα τώρα έπεται αμέσως από αυτή τη σχέση.
iv. Για έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό λ έχουμε, χρησιμοποιώντας την D1,

$$\det(\lambda A) = \det\begin{pmatrix}\lambda a_1\\ \lambda a_2\\ \vdots\\ \lambda a_n\end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix}a_1\\ \lambda a_2\\ \vdots\\ \lambda a_n\end{pmatrix} = \cdots = \lambda^n\det\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} = \lambda^n\det A\,. \quad \square$$

Ορισμός 7.2 Έστω $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n,n}$ ένας πίνακας. Ο πίνακας $A_{ij}\in\mathbb{R}^{n-1,n-1}$, ο οποίος προκύπτει απο τον A αν διαγράψουμε την $i-$στή γραμμή του και την $j-$στή στήλη του, λέγεται *ελάσσων πίνακας* του στοιχείου a_{ij}. του στοιχείου a_{ij}. Ο $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$ λέγεται *αλγεβρικό συμπλήρωμα* ή *συμπαράγοντας* του a_{ij}.

Θεώρημα 7.1 *Υπάρχει ακριβώς μία απεικόνιση $D : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες D1, D2 και D3.*

Απόδειξη.
Ύπαρξη. Θεωρούμε ένα τυχαίο, αλλά σταθερό στη συνέχεια, $j \in \{1, \ldots, n\}$, και ορίζουμε αναδρομικά την απεικόνιση

$$\begin{aligned} \det\ : \mathbb{R}^{n,n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{n,n} &\mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}\,, \end{aligned}$$

με $\det(a) := a$, για 1×1 πίνακες με στοιχείο έναν πραγματικό αριθμό a. Θα αποδείξουμε τώρα, επαγωγικά ως προς n, ότι η $\det$ ικανοποιεί τις συνθήκες D1, D2 και D3. Για $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

και $j \in \{1, 2\}$, έχουμε $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, και διαπιστώνουμε αμέσως ότι η $\det$ έχει τις ιδιότητες D1, D2 και D3.

Στο επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι η $\det$ έχει τις ιδιότητες D1, D2 και D3 για $n-1$, και θα αποδείξουμε ότι έχει αυτές τις ιδιότητες και για n. Με

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ \lambda a_m \\ a_{m+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

λ σταθερός πραγματικός αριθμός, έχουμε

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(-1)^{i+j} \det B_{ij} \\ &= b_{mj}(-1)^{m+j} \det B_{mj} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{n} b_{ij}(-1)^{i+j} \det B_{ij}\,.\end{aligned} \tag{7.1}$$

Τώρα, $b_{mj} = \lambda a_{mj}, \det B_{mj} = \det A_{mj}$, και, σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής, $\det B_{ij} = \lambda \det A_{ij},\ i \neq m$. Επομένως η (7.1) δίνει

$$\det B = \lambda\big[a_{mj}(-1)^{m+j} \det A_{mj} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}\big] = \lambda \det A\,.$$

Έστω τώρα

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ b_m \\ a_{m+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m + b_m \\ a_{m+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Τότε ισχύει

$$\begin{aligned}\det C &= \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(-1)^{i+j} \det C_{ij} \\ &= c_{mj}(-1)^{m+j} \det C_{mj} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{n} c_{ij}(-1)^{i+j} \det C_{ij}\,.\end{aligned} \tag{7.2}$$

Τώρα, $c_{mj} = a_{mj} + b_{mj}, \det C_{mj} = \det A_{mj} = \det B_{mj},\ c_{ij} = a_{ij}$, για $i \neq m$, και, σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής, $\det C_{ij} = \det A_{ij} + \det B_{ij}$. Επομένως η (7.2) δίνει

$$
\begin{aligned}
\det C &= (a_{mj}+b_{mj})(-1)^{m+j}\det A_{mj} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\big(\det A_{ij}+\det B_{ij}\big)\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(-1)^{i+j}\det B_{ij}\\
&= \det A + \det B\,.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, μέχρι τώρα δείξαμε ότι η $\det$ ικανοποιεί την D1 και για n.

Έστω

$$
A = \begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_\ell\\ \vdots\\ a_m\\ \vdots\\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}
$$

ένας πίνακας με δύο ίδιες γραμμές, $a_\ell = a_m$. Τότε $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij}$. Τώρα, για $i \neq \ell, m$, οι πίνακες A_{ij} είναι $(n-1)\times(n-1)$ και έχουν δύο γραμμές ίδιες, άρα, σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής, $\det A_{ij} = 0$ για $i \neq \ell, m$. Επομένως έχουμε

$$
\begin{aligned}
\det A &= a_{\ell j}(-1)^{\ell+j}\det A_{\ell j} + a_{mj}(-1)^{m+j}\det A_{mj}\\
&= a_{\ell j}(-1)^{\ell+j}\big[\det A_{\ell j} + (-1)^{m-\ell}\det A_{mj}\big]\,.
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

Ο πίνακας A_{mj} προκύπτει από τον $A_{\ell j}$, αν τη γραμμή του ℓ την ανταλλάξουμε πρώτα με την $\ell+1$, μετά με την $\ell+2$, και ούτω καθ' εξής, και, τέλος με την $m-1$, άρα $\det A_{mj} = (-1)^{(m-1)-\ell}\det A_{\ell j}$, και η (7.3) δίνει $\det A = 0$. Συνεπώς η $\det$ ικανοποιεί την D2 και για n.

Τέλος, για $A = I_n$ έχουμε, λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$ και εν συνεχεία το ότι $a_{ii} = 1$ και την επαγωγική υπόθεση,

$$
\begin{aligned}
\det I_n &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij}\\
&= 1\cdot(-1)^{i+i}\det I_{n-1} = 1\,,
\end{aligned}
$$

δηλαδή η det ικανοποιεί και την D3 και για n.

Μοναδικότητα. Έστω ότι οι απεικονίσεις $D, D' : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιούν και τις τρεις συνθήκες D1, D2 και D3. Θα αποδείξουμε ότι $D = D'$. Θέτουμε λοιπόν $\Delta := D - D'$ και αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Delta(A) = 0$ για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Αν $\{e_1, \dots, e_n\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε η $i-$στή γραμμή a_i του πίνακα A γράφεται στη μορφή

$$a = (a_{i1}, \dots, a_{in}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j.$$

Η Δ είναι γραμμική ως προς τις γραμμές του A, ως διαφορά των D και D' για τις οποίες υποθέσαμε ότι έχουν αυτή την ιδιότητα. Επομένως έχουμε

(7.4)
$$\begin{aligned}\Delta(A) = \Delta \begin{pmatrix} \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} e_{j_1} \\ \vdots \\ \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n} \end{pmatrix} &= \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \Delta \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} e_{j_2} \\ \vdots \\ \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_n} e_{j_n} \end{pmatrix} = \cdots = \\ &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n = 1}^{n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \Delta \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Τώρα, αν δύο από τους δείκτες $j_1, \dots, j_n$ είναι ίσοι, τότε προφανώς

(7.5i)
$$\Delta \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix} = 0\,,$$

αφού οι D, D' έχουν αυτή την ιδιότητα.

Αν οι δείκτες $j_1, \dots, j_n$ είναι ανά δύο διαφορετικοί μεταξύ τους, τότε, ξεκινώντας από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix},$$

μπορούμε με $m, m \leq n$, εναλλαγές γραμμών να οδηγηθούμε στον μοναδιαίο πίνακα I_n,

$$I_n = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix},$$

οπότε, αφού σε κάθε εναλλαγή γραμμών αλλάζουν τα πρόσημα των D και D', συνεπώς και της Δ, θα έχουμε

$$\text{(7.5ii)} \qquad \Delta \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix} = (-1)^m \Delta(I_n) = (-1)^m \big(D(I_n) - D'(I_n)\big) = (-1)^m \big(1 - 1\big) = 0\,.$$

Λαμβάνοντας τώρα υπ' όψιν την (7.5), η (7.4) δίνει αμέσως $\Delta(A) = 0$, για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, συνεπώς $D = D'$. $\square$

Συμπερασματικά, λοιπόν, σύμφωνα με τα προηγούμενα, η ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα A ορίζεται, επαγωγικά ως προς n, ως εξής: Για $n = 1$ και $A = (a)$ θέτουμε $\det A := a$, και για $n > 1$, με ένα τυχαίο $j \in \{1, \dots, n\}$, θέτουμε

$$\text{(7.6)} \qquad \det A := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}\,,$$

όπου A_{ij} είναι ο ελάσσων πίνακας του στοιχείου a_{ij}, δηλαδή ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει από τον A, αν διαγράψουμε την $i-$στή γραμμή του και την $j-$στή στήλη του. Η σχέση (7.6) λέγεται ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τη στήλη j. Το γεγονός ότι το εξαγόμενο είναι ανεξάρτητο του j, είναι άμεση απόρροια του Θεωρήματος 6.1.

Δίνουμε τώρα ένα βοηθητικό αποτέλεσμα, ότι κάθε αντιστρέψιμος πίνακας μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο στοιχειωδών πινάκων, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη της επόμενης Πρότασης.

Λήμμα 7.2 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε υπάρχει ένας φυσικός αριθμός r και στοιχειώδεις πίνακες $E_1, \dots, E_r$ τέτοιοι ώστε*

$$\text{(7.7)} \qquad A = E_1 \cdots E_r.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ήδη ότι τον πίνακα A μπορεί κανείς, με κατάλληλους μετασχηματισμούς γραμμών, δηλαδή με πολλαπλασιασμό από αριστερά με πίνακες της μορφής $S_i(\lambda), Q_i^j$, να τον μετατρέψει σε άνω τριγωνικό πίνακα με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία, οπότε

$$E_1 \cdots E_s A \;=B\;= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star & \dots & \star \\ & \lambda_2 & \star & \dots & \star \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Τώρα,

$$S_1(\frac{1}{\lambda_1}) \cdots S_n(\frac{1}{\lambda_n}) B \;= \tilde{B}\;= \begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \dots & \star \\ & 1 & \star & \dots & \star \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Με κατάλληλους μετασχηματισμούς γραμμών, πολλαπλασιάζοντας φερ' ειπείν την τελευταία γραμμή με κατάλληλους αριθμούς και αφαιρώντας από κάθε μία από τις προηγούμενες γραμμές έτσι ώστε να μηδενιστούν όλα τα στοιχεία της τελευταίας στήλης εκτός από το τελευταίο και προχωρώντας αντίστοιχα προς τα πίσω, μπορούμε να πετύχουμε το εξής

$$\tilde{E}_1 \cdots \tilde{E}_q \tilde{B} \;=\; I_n.$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\tilde{E}_1 \cdots \tilde{E}_q S_1(\frac{1}{\lambda_1}) \cdots S_n(\frac{1}{\lambda_n}) E_1 \cdots E_s A \;=\; I_n.$$

Το αποτέλεσμα τώρα προκύπτει αμέσως πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά πρώτα με $(\tilde{E}_1)^{-1}$, εν συνεχεία με $(\tilde{E}_2)^{-1}$, και ούτω καθ' εξής, και τέλος με $(E_s)^{-1}$, και λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι όλοι οι πίνακες με τους οποίους πολλαπλασιάσαμε είναι στοιχειώδεις. $\square$

Ορισμένες άλλες χρήσιμες ιδιότητες οριζουσών δίνονται στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 7.1 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Τότε ισχύουν:*

i. *Αν ο A είναι άνω τριγωνικός πίνακας, δηλαδή $a_{ij} = 0$ για $i > j$, οπότε γράφεται στη μορφή*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star & \dots & \star \\ & \lambda_2 & \star & \dots & \star \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

τότε η ορίζουσά του είναι το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του A, δηλαδή $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

ii. *Αν $a_1, \dots, a_n$ είναι οι γραμμές του A, τότε η ορίζουσα του A είναι μηδέν, αν και μόνο αν τα διανύσματα $a_1, \dots, a_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

iii. *Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν η ορίζουσά του δεν είναι μηδέν.*

iv. *Η ορίζουσα του γινομένου δύο $n \times n$ πινάκων ισούται με το γινόμενο των οριζουσών των δύο πινάκων. Ειδικότερα, αν A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, τότε η ορίζουσα του αντιστρόφου του,* $\det A^{-1}$, *ισούται με τον αντίστροφο της ορίζουσας του A,* $\det A^{-1} = 1/\det A$.

v. *Η ορίζουσα του ανάστροφου ενός πίνακα ισούται με την ορίζουσα του πίνακα,* $\det A^T = \det A$.

Απόδειξη.

i. Η απόδειξη γίνεται επαγωγικά ως προς n. Για $n = 2$ η σχέση είναι προφανής και, αν δεχθούμε ότι ισχύει για $n-1$ και αναπτύξουμε την $n \times n$ ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη, οπότε μόνο ο πρώτος όρος είναι μη μηδενικός και έχουμε μία $(n-1) \times (n-1)$ ορίζουσα της ίδιας μορφής, διαπιστώνουμε αμέσως ότι η σχέση ισχύει και για n.

ii. Με κατάλληλους μετασχηματισμούς γραμμών των μορφών iii. και iv., βλ. την Πρόταση 4.2, από τον πίνακα A προκύπτει ένας άνω τριγωνικός πίνακας B,

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star & \dots & \star \\ & \lambda_2 & \star & \dots & \star \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Αν γίνουν m μετασχηματισμοί της μορφής iv., τότε έχουμε $\det A = (-1)^m \det B$, επομένως, σύμφωνα με το i., $\det A = (-1)^m \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Υποθέτοντας τώρα ότι η $\det A$ είναι διαφορετική του μηδενός, γεγονός που σημαίνει ότι όλα τα λ_i είναι μη μηδενικά, δηλ. ο βαθμός του B, συνεπώς και του A, ως προς τις γραμμές είναι n, συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα $a_1, \ldots, a_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Λογικά ισοδύναμο με αυτό είναι το γεγονός ότι η ορίζουσα του A μηδενίζεται, αν και μόνο αν τα $a_1, \ldots, a_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

iii. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1, ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν ο βαθμός του A ως προς τις στήλες είναι n. Σύμφωνα με το ii., όμως, η ορίζουσα του A είναι διαφορετική του μηδενός, αν και μόνο αν ο βαθμός του ως προς τις γραμμές είναι n. Επειδή οι βαθμοί του A ως προς τις γραμμές και ως προς τις στήλες ταυτίζονται, συμπεραίνουμε ότι η ορίζουσα του A δεν είναι μηδέν, αν και μόνο αν ο A είναι αντιστρέψιμος.

iv. Αποδεικνύουμε κατ' αρχήν αυτή την ιδιότητα στην περίπτωση που ο A είναι στοιχειώδης πίνακας. Κατόπιν χρησιμοποιούμε αυτό το αποτέλεσμα για να οδηγηθούμε στο αποτέλεσμα στη γενική περίπτωση.

Έστω λοιπόν $E \in \{S_i(\lambda), Q_i^j, (Q_i^j)^{-1}\}$, βλ. τις (6.3) και (6.4) για το συμβολισμό. Σύμφωνα με το i. ισχύει τότε $\det S_i(\lambda) = \lambda$ και $\det Q_i^j = 1$. Επιπρόσθετα

$$\det\bigl(S_i(\lambda)B\bigr) = \det\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{i-1} \\ \lambda b_i \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{i-1} \\ b_i \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \lambda\det B\,,$$

και, σύμφωνα με τις D1 και D2,

$$\det\left(Q_i^j B\right) = \det\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{i-1} \\ b_i + b_j \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{i-1} \\ b_i \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \det B \cdot$$

ακριβώς αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι

$$\det\left((Q_i^j)^{-1} B\right) = \det B \,.$$

Το προκαταρκτικό μας αποτέλεσμα είναι λοιπόν ότι

$$\det\left(EB\right) = \det E \det B \,, \tag{7.8}$$

όταν ο E είναι στοιχειώδης πίνακας. Αν τώρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, οπότε, σύμφωνα με το Λήμμα 7.2, γράφεται ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων στη μορφή (7.7), χρησιμοποιώντας το προκαταρκτικό μας αποτέλεσμα έχουμε

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1 \cdots E_r \cdot B) \\ &= \det E_1 \det(E_2 \cdots E_r \cdot B) \\ &= \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_r \cdot \det B \\ &= \det(E_1 \cdots E_r) \det B = \det A \det B \,. \end{aligned}$$

Τέλος, αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε, σύμφωνα με την iii., $\det A \det B = 0$. Επίσης, $\dim A(\mathbb{R}^n) < n$, συνεπώς, βαθμός $(AB) = \dim AB(\mathbb{R}^n) \leq \dim A(\mathbb{R}^n) < n$, οπότε $\det(AB) = 0$.

v. Έστω κατ' αρχήν ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, οπότε γράφεται ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων, $A = E_1 \cdots E_r$. Επειδή προφανώς ισχύει $\det E_i^T = \det E_i$, χρησιμοποιώντας το iv. έχουμε

$$\begin{aligned} \det A = \det E_1 \cdots \det E_r &= \det E_1^T \cdots \det E_r^T \\ &= \det(E_r^T \cdots E_1^T) = \det(E_1 \cdots E_r)^T = \det A^T \,. \end{aligned}$$

Αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε ο βαθμός του A ως προς τις γραμμές, συνεπώς και ο βαθμός του A^T ως προς τις στήλες, είναι μικρότερος του n, συνεπώς και ο A^T δεν είναι αντιστρέψιμος, οπότε $\det A = \det A^T = 0$. $\square$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ορίζουσα του αναστρόφου ενός πίνακα ισούται με την ορίζουσα του πίνακα, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η ορίζουσα είναι γραμμική και ως προς τις στήλες ενός πίνακα, βλ. την Άσκηση 7.5. Αυτή η ιδιότητα θα χρησιμοποιηθεί στην επόμενη ενότητα.

7.2. Υπολογισμός οριζουσών και εφαρμογές

Σε αυτή την ενότητα θα γνωρίσουμε τρόπους υπολογισμού οριζουσών, καθώς και του αντιστρόφου ενός πίνακα, και θα δώσουμε κομψές παραστάσεις τόσο του αντιστρόφου ενός πίνακα όσο και της λύσης ενός γραμμικού συστήματος, με ίδιο πλήθος εξισώσεων και αγνώστων, με τη βοήθεια οριζουσών.

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Τότε κατ' ευθείαν από τον ορισμό της ορίζουσας λαμβάνουμε $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Για

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ορίζουσας, έχουμε

$$\det A = a_{11}\det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21}\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31}\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

δηλαδή

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{11}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}. \tag{7.9}$$

Το αποτέλεσμα (7.9) προκύπτει και με τον λεγόμενο *κανόνα του Sarrus*, δηλαδή ως εξής: Επαναλαμβάνουμε τις δύο πρώτες στήλες του πίνακα μετά την τρίτη στήλη,

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

και σχηματίζουμε τα γινόμενα των τριών "διαγωνίων" από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά, με θετικό πρόσημο, και των τριών "διαγωνίων" από κάτω αριστερά προς τα πάνω δεξιά, με αρνητικό πρόσημο, όπως φαίνεται ανωτέρω, και παίρνουμε το άθροισμα των έξι όρων που προκύπτουν. Η σημασία του κανόνα του Sarrus περιορίζεται από το γεγονός ότι δεν υπάρχει γενίκευσή της για μεγαλύτερο $n, n > 3.$

Για γενικό $n,$ ένας τρόπος υπολογισμού μιας ορίζουσας δίνεται κατ' ευθείαν από τον ορισμό της. Ο τρόπος αυτός είναι δαπανηρός, απαιτεί πολλές πράξεις. Ένας άλλος, ευκολότερος και οικονομικότερος τρόπος, είναι να μετατρέψουμε τον πίνακα $A,$ με κατάλληλους μετασχηματισμούς γραμμών της μορφής iii. και iv., σε έναν γραμμοϊσοδύναμό του άνω τριγωνικό πίνακα $B,$ να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\det A = (-1)^m \det B,$ όταν γίνονται m μετασχηματισμοί της μορφής iv., και να υπολογίσουμε την ορίζουσα του B ως γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του. Στην ουσία, δηλαδή, υλοποιούμε το μέρος της τριγωνοποίησης στη μέθοδο απαλοιφής του Gauss που αναφέρεται στον πίνακα A και υπολογίζουμε την ορίζουσα του άνω τριγωνικού πίνακα που προκύπτει.

7.2.1. Υπολογισμός του αντιστρόφου ενός πίνακα. Έστω A ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας. Αν $\{e^1, \dots, e^n\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, χρησιμοποιούμε άνω δείκτες γιατί θεωρούμε τα διανύσματα ως στήλες, και

$$u^j = \begin{pmatrix} u_{1j} \\ \vdots \\ u_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n,$$

οι λύσεις των γραμμικών συστημάτων

$$Au^j = e^j, \ j = 1, \dots, n, \tag{7.10}$$

τότε έχουμε

$$A(u^1, \dots, u^n) = (Au^1, \dots, Au^n) = (e^1, \dots, e^n) = I_n, \tag{7.11}$$

συνεπώς ο πίνακας $(u^1, \dots, u^n)$ είναι ο αντίστροφος του A. Τα συστήματα (7.10) μπορούν να λυθούν, φερ' ειπείν, με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Φυσικά η μέθοδος εφαρμόζεται ταυτόχρονα για όλα τα συστήματα, αφού αυτά έχουν τον ίδιο πίνακα συντελεστών. Αυτός είναι πραγματικά ένας τρόπος που χρησιμοποιείται και στην πράξη, τις ελάχιστες φορές που χρειάζεται όντως ο αντίστροφος ενός πίνακα.

Ένας άλλος τρόπος αντιστροφής πίνακα, με τη βοήθεια οριζουσών, ο οποίος μας δίνει τον αντίστροφο πίνακα σε κομψή μορφή, κατάλληλος μόνο για θεωρητικούς σκοπούς αφού το υπερβολικά υψηλό κόστος του καθιστά τη χρήση του απαγορευτική για την πράξη, είναι ο εξής: Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας πίνακας και $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, όπου c_{ij} το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ji}, $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ji}$. Θα αποδείξουμε ότι

$$CA = AC = (\det A)I_n,$$

οπότε, φυσικά, θα έχουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}C. \tag{7.12}$$

Θέτουμε $D := CA, D = (d_{ij})$. Τότε

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{n} c_{i\ell}a_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}(-1)^{i+\ell}\det A_{\ell i} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}\det(a^1, \dots, a^{i-1}, e^\ell, a^{i+1}, \dots, a^n). \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει εύκολα, αν αναπτύξει κανείς την τελευταία ορίζουσα ως προς την $i-$στή της στήλη. Επομένως, λόγω της γραμμικότητας της ορίζουσας ως προς τις στήλες, έχουμε

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \det(a^1, \dots, a^{i-1}, \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}e^\ell, a^{i+1}, \dots, a^n) \\ &= \det(a^1, \dots, a^{i-1}, a^j, a^{i+1}, \dots, a^n) = \delta_{ij}\det A\,, \end{aligned}$$

δηλαδή $CA = (\det A)I_n$, και από εδώ προκύπτει αμέσως το ζητούμενο.

Ορισμός 7.3 Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ο πίνακας $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, όπου c_{ij} είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του a_{ji}, λέγεται *προσαρτημένος* του A, και συμβολίζεται με $\text{adj}\, A$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η (7.12) γράφεται τώρα στη μορφή

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}\, A. \tag{7.13}$$

7.2.2. Επίλυση γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο του Cramer. Έστω A ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας. Για τη λύση x ενός γραμμικού συστήματος $Ax = b$, για την οποία, φυσικά, ισχύει $x = A^{-1}b$, θα έχουμε, σύμφωνα με την (7.13),

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \text{adj}\, A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

δηλαδή

$$x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det (A_{ji}) b_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

και με $A_i := (a^1, \dots, a^{i-1}, b, a^{i+1}, \dots, a^n)$ αυτή η σχέση γράφεται στη μορφή

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{7.14}$$

Ο ιδιαίτερα κομψός αυτός τρόπος παράστασης της λύσης ενός γραμμικού συστήματος λέγεται *μέθοδος του Cramer*. Η μέθοδος αυτή είναι πολύ χρήσιμη για θεωρητικούς σκοπούς, δεν πρέπει όμως να χρησιμοποιείται ποτέ στην πράξη λόγω του υπερβολικά μεγάλου κόστους υλοποίησής της, το οποίο οφείλεται στις πολλές πράξεις που απαιτούνται.

Επειδή η προηγούμενη παρατήρησή μας σχετικά με το μεγάλο κόστος υλοποίησης της μεθόδου του Cramer μπορεί να θεωρηθεί υπερβολική, αναφέρουμε τα εξής: Σε πολλές εφαρμογές χρειάζεται να επιλύσουμε γραμμικά συστήματα με χιλιάδες αγνώστους. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα μικρό γραμμικό σύστημα, με μόνο είκοσι αγνώστους. Με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss μπορεί αυτό να γίνει με έναν υπολογιστή σε χιλιοστά του δευτερολέπτου. Όμως, η υλοποίηση της μεθόδου του Cramer, ακόμη και με τους ταχύτερους σημερινούς υπολογιστές, αν υπολογίσουμε τις ορίζουσες στην (7.14) με τα αναπτύγματα όπως ορίστηκαν στο Θεώρημα 7.1, θα απαιτούσε πολλούς αιώνες για ένα τέτοιο γραμμικό σύστημα!

7.3. Ασκήσεις

7.1. Για πραγματικούς αριθμούς t και s, αποδείξτε ότι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & t & s & 1 \\ 1 & t & t & t \\ t & 1 & ts & s \\ t & t & ts & 1 \end{pmatrix} = (t-1)(t-s)(1-ts)\,.$$

Θα μπορούσατε, χωρίς να κάνετε τους υπολογισμούς, να "μαντέψετε" ότι το εξαγόμενο περιέχει καθέναν από τους δύο πρώτους παράγοντες που δίνονται ανωτέρω;

7.2. Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς $t_1, \ldots, t_n$. Αποδείξτε ότι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & \ldots & t_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \ldots & t_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (t_j - t_i)\,.$$

Ορίζουσες αυτής της μορφής καλούνται *ορίζουσες του Vandermonde*.
[*Υπόδειξη*: Όταν δύο από τα $t_1, \ldots, t_n$ είναι ίσα, η ορίζουσα έχει δύο ίδιες στήλες, συνεπώς μηδενίζεται. Έστω λοιπόν ότι τα $t_1, \ldots, t_n$ είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους. Θέτουμε στην ανωτέρω ορίζουσα $t_n = t$ και ορίζουμε το πολυώνυμο p ως εξής

$$(\star) \qquad p(t) := \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t \\ t_1^2 & t_2^2 & \ldots & t^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \ldots & t^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Προφανώς, το p είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n-1$ και τα $t_1, \ldots, t_{n-1}$ είναι ρίζες του p. Συνεπώς, το p γράφεται στη μορφή $p(t) = c_n(t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_{n-1})$ και ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του c_n δίνεται από τη σχέση

$$(\star\star) \qquad c_n := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^{n-2} & t_2^{n-2} & \dots & t_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Τώρα το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο για $n = 2$, και, υποθέτοντας ότι αληθεύει για $n-1$, από τις $(\star)$ και $(\star\star)$ συμπεραίνουμε αμέσως ότι αληθεύει και για n.]
Εφαρμογή: Υπολογίστε τις ορίζουσες των πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 1 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 1 & 64 & 125 \\ 16 & 81 & 1 & 256 & 625 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & \omega \\ x^2 & y^2 & z^2 & \omega^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & \omega^3 \end{pmatrix}.$$

7.3. Έστω $a_1, \dots a_n$ μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί, ανά δύο διάφοροι μεταξύ τους. Αποδείξτε ότι η μόνη λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n &= 0 \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \dots + a_n^2x_n &= 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots & \vdots \\ a_1^nx_1 + a_2^nx_2 + \dots + a_n^nx_n &= 0 \end{cases}$$

είναι η τετριμμένη.

7.4. Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 7.1, για να απλοποιήσετε την απόδειξη της Άσκησης 6.10.

7.5. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η ορίζουσα του αναστρόφου ενός πίνακα ισούται με την ορίζουσα του πίνακα, για να αποδείξετε ιδιότητες της ορίζουσας για τις στήλες ανάλογες με εκείνες για τις γραμμές. Ειδικότερα αποδείξτε τα εξής:

i. Η ορίζουσα είναι γραμμική ως προς κάθε στήλη.

ii. Αν ένας $n \times n$ πίνακας έχει δύο στήλες ίσες, τότε η ορίζουσά του είναι μηδέν.

iii. Αν ανταλλάξουμε δύο στήλες ενός πίνακα, τότε η ορίζουσά του αλλάζει πρόσημο.

iv. Αν σε μία στήλη ενός πίνακα προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο μίας άλλης στήλης, τότε η ορίζουσα μένει αναλλοίωτη.

v. Αν ένας $n \times n$ πίνακας έχει μία μηδενική στήλη, τότε η ορίζουσά του είναι μηδέν.

vi. Αν $a^1, \ldots, a^n$ είναι οι στήλες ενός $n \times n$ πίνακα A, τότε η ορίζουσα του A είναι μηδέν, αν και μόνον αν τα διανύσματα $a^1, \ldots, a^n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

7.6. Δώστε μία λύση της Άσκησης 6.7 με τη βοήθεια οριζουσών και της μεθόδου του Cramer.
[*Υπόδειξη*: Παρατηρήστε ότι ο πίνακας $A_i := (a^1, \ldots, a^{i-1}, e^j, a^{i+1}, \ldots, a^n)$ είναι, για $i > j$, άνω τριγωνικός και το στοιχείο του στη θέση (i,i) είναι μηδέν, συνεπώς και η ορίζουσά του είναι ίση με μηδέν.]

7.7. Προσδιορίστε τις λύσεις του γραμμικού συστήματος

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 16x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 9x_3 & + & 27x_4 & + & 81x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 16x_3 & + & 64x_4 & + & 256x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 25x_3 & + & 125x_4 & + & 625x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

7.8. Έστω x, y, z, u, v και w πραγματικοί αριθμοί. Προσδιορίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & z & 1 & u^2 & v & 1 \\ x & y & z^2 & 1 & u^4 & v^3 & w^2 \\ x^2 & y^2 & z^3 & 1 & u^6 & v^5 & w^4 \\ x^3 & y^3 & z^4 & 1 & u^8 & v^7 & w^6 \\ x^4 & y^4 & z^5 & 1 & u^{10} & v^9 & w^8 \\ x^5 & y^5 & z^6 & 1 & u^{12} & v^{11} & w^{10} \\ x^6 & y^6 & z^7 & 1 & u^{14} & v^{13} & w^{12} \end{pmatrix}.$$

8. Χώροι με Εσωτερικό Γινόμενο

Τα περισσότερα από τα μέχρι τώρα αποτελέσματα διατυπώθηκαν για πραγματικούς γραμμικούς χώρους, μπορούν όμως εύκολα να γενικευθούν για χώρους πάνω σε ένα τυχόν σώμα $\mathbb{K}$. Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου ισχύουν, μόνο αν το σώμα είναι είτε το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είτε το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Θα συμβολίζουμε λοιπόν εδώ το σώμα με $\mathbb{K}$ και θα εννοούμε πάντα είτε ότι $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ είτε ότι $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισαγάγουμε διάφορες χρήσιμες έννοιες, εντελώς διαφορετικές από αυτές που χρησιμοποιήσαμε μέχρι τώρα. Κατ' αρχήν θα εισαγάγουμε την έννοια της νόρμας, μία γενίκευση της απόλυτης τιμής πραγματικών αριθμών σε γραμμικούς χώρους, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε διάνυσμα έναν μη αρνητικό αριθμό και μας επιτρέπει έτσι να μετράμε το "μέγεθος" ενός διανύσματος. Υπάρχουν πολλοί τρόποι να ορίσει κανείς νόρμες· ιδιαίτερα εύχρηστες είναι οι νόρμες που παράγονται από ένα εσωτερικό γινόμενο, γιαυτό και σε όλο αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τέτοιους χώρους. Θα μελετήσουμε διάφορες ιδιότητες αυτών των χώρων και θα δούμε ότι ορισμένα προβλήματα βέλτιστης προσέγγισης μπορούν σε τέτοιους χώρους να λυθούν πολύ εύκολα, ενώ αυτό δεν είναι γενικά σωστό όταν η νόρμα δεν παράγεται από εσωτερικό γινόμενο.

8.1. Η έννοια του χώρου με εσωτερικό γινόμενο

Μία δυνατότητα για να μετράμε "μήκη" διανυσμάτων σ' έναν γραμμικό χώρο μας δίνεται με την εισαγωγή της έννοιας της νόρμας. Η νόρμα αποτελεί γενίκευση της απόλυτης τιμής για πραγματικούς αριθμούς. Σε αυτή την ενότητα θα εισαγάγουμε την έννοια του εσωτερικού γινομένου και θα δούμε ορισμένες ιδιότητες νορμών που παράγονται από εσωτερικά γινόμενα.

Ορισμός 8.1 Έστω X ένας $\mathbb{K}-$γραμμικός χώρος με $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Μία απεικόνιση

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \ X \ &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ x \ &\mapsto \ \|x\| , \end{aligned}$$

λέγεται *νόρμα (στάθμη, norm)*, αν ισχύουν:

(N1) $$x \in X \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

(N2) $$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in X \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$$

(N3) $$\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{(τριγωνική ανισότητα).}$$

Αν σε έναν $\mathbb{K}-$γραμμικό χώρο ορισθεί μία νόρμα, τότε αυτός λέγεται *χώρος με νόρμα* ή *σταθμητός χώρος*.

Σημείωση. Στη σχέση (N2) χρησιμοποιούμε, για $\lambda \in \mathbb{K}$, την απόλυτο τιμή του λ, έννοια που ορίζεται μόνο για πραγματικούς ή για μιγαδικούς αριθμούς.

Παρατηρήσεις 8.1

(i) Από τα αξιώματα της νόρμας έπεται ότι για $x \in X$ ισχύει $\|x\| \geq 0$. Πραγματικά έχουμε

$$0 = \|x - x\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \| - x\| = \|x\| + \|x\| = 2 \, \|x\| ,$$

όπου η ανισότητα ισχύει λόγω της (N3) και η προτελευταία ισότητα λόγω της (N2).

(ii) Ισχύει η λεγόμενη *τριγωνική ανισότητα προς τα κάτω*, δηλαδή

$$\forall \, x, y \in X \quad \|x - y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big| .$$

Πραγματικά έχουμε

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| , \quad \text{δηλαδή} \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

και αντίστοιχα $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$, από τις οποίες έπεται αμέσως το ζητούμενο.

Παραδείγματα 8.1

1. $\big(\mathbb{R}, \, \|\cdot\|\big)$ με $\|x\| := |x| \ \ \forall \, x \in \mathbb{R}$. $\big(\mathbb{C}, \, \|\cdot\|\big)$ με $\|z\| := |z| \ \ \forall \, z \in \mathbb{C}$.

2. $\big(\mathbb{R}^n, \, \|\cdot\|_1\big)$ με $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ (“ℓ_1 νόρμα”).

Πραγματικά ισχύουν:

Η (N1) γιατί $\|x\|_1 = 0 \iff \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \iff x_i = 0,\ i = 1, \dots, n \iff x = 0\,.$
Η (N2) γιατί για $\lambda \in \mathbb{R}\,,\ x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^n |\lambda|\ |x_i| = |\lambda|\ \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda|\ \|x\|_1\,.$$

Η (N3) γιατί για $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^n \big(|x_i| + |y_i|\big) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1\,.$$

3. $\big(\mathbb{R}^n,\ \|\cdot\|_\infty\big)$ με $\|x\|_\infty := \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$ ("ℓ_∞ νόρμα").

   Η απόδειξη ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι πολύ απλή.

4. $\big(C[a,b],\ \|\cdot\|_\infty\big)$ με $\|f\|_\infty := \max\limits_{a\le x\le b} |f(x)|$ (νόρμα μεγίστου), όπου $-\infty < a < b < \infty\,.$

Πραγματικά ισχύουν:
Η (N1) γιατί για $f \in C[a,b]$

$$\|f\|_\infty = 0 \iff \max_{a\le x\le b} |f(x)| = 0 \iff f = 0\,.$$

Η (N2) γιατί για $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in C[a,b]$ έχουμε

$$\|\lambda f\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |\lambda f(x)| = |\lambda|\ \max_{a\le x\le b} |f(x)| = |\lambda|\, \|f\|_\infty\,.$$

Η (N3) γιατί για $f, g \in C[a,b]$

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= \max_{a\le x\le b} |f(x)+g(x)| \le \max_{a\le x\le b} \big[|f(x)| + |g(x)|\big]\\ &\le \max_{a\le x\le b} |f(x)| + \max_{a\le x\le b} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\,.\end{aligned}$$

Οι πιο εύκολες στη χρήση τους νόρμες είναι όσες παράγονται από εσωτερικά γινόμενα.

Ορισμός 8.2 Έστω X ένας $\mathbb{K}-$γραμμικός χώρος. Μια απεικόνιση $(\cdot\,,\cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται *εσωτερικό γινόμενο* στον X, αν είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή της, συμμετρική, στην πραγματική περίπτωση, και τέτοια ώστε οι αριθμοί (x,y) και (y,x) να είναι συζυγείς, στη μιγαδική περίπτωση, και θετικά ορισμένη, δηλαδή αν ισχύουν

(ΕΓ1) $$(x+y, z) = (x,z) + (y,z) \qquad \forall\, x, y, z \in X$$

(ΕΓ2) $\quad (\lambda x, y) = \lambda\,(x, y) \qquad \forall\, x, y \in X \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$

(ΕΓ3) $\quad (x, y) = \overline{(y, x)} \qquad \forall\, x, y \in X$

(ΕΓ4) $\quad (x, x) > 0 \qquad \forall\, x \in X \setminus \{0\}\ .$

Ένας γραμμικός χώρος στον οποίο έχει ορισθεί ένα εσωτερικό γινόμενο λέγεται *χώρος με εσωτερικό γινόμενο.* .

Στην περίπτωση που ο χώρος είναι πραγματικός, χρησιμοποιείται συνώνυμα και ο όρος *Ευκλείδειος χώρος*, αντί του πραγματικός γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

Αν για $x, y \in X$ ισχύει $(x, y) = 0$, τότε λέμε ότι τα x, y είναι *ορθογώνια*, και γράφουμε συμβολικά $x \perp y$.

Παραδείγματα 8.2

1. Συμβολίζουμε με $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ στοιχεία του $\mathbb{K}^n$.
i. Για $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ορίζεται δια $(x, y) := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$, το λεγόμενο *Ευκλείδειο* ή *κανονικό* εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$. εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$.
ii. Για $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ορίζεται δια $(x, y) := x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n$ ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$.

2. Έστω $-\infty < a < b < \infty$, και $X := \{x\ : [a, b]\ \longrightarrow \mathbb{K}\ /\ x$ συνεχής$\}$.
i. Για $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ορίζεται δια $(x, y) := \int_a^b x(s) y(s) ds$ ένα εσωτερικό γινόμενο στον X, δηλαδή στον $C[a, b]$.
ii. Για $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ορίζεται δια $(x, y) := \int_a^b x(s) \overline{y(s)} ds$ ένα εσωτερικό γινόμενο στον X.

Σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο, $(X, (\cdot, \cdot))$, ορίζεται με

$$\begin{aligned} \|\cdot\| :\ X\ &\longrightarrow\ \mathbb{R} \\ x\ &\mapsto\ \sqrt{(x, x)}\,, \end{aligned}$$

μία νόρμα. Για την απόδειξη χρειαζόμαστε τη λεγόμενη ανισότητα των Cauchy–Schwarz. Η ανισότητα των Cauchy–Schwarz αναφέρεται συχνά και ως ανισότητα του Schwarz, κυρίως στη Γερμανική βιβλιογραφία, ή ως ανισότητα του Cauchy, κυρίως στη Γαλλική βιβλιογραφία, ή ακόμα και ως ανισότητα του Bunjakowski, κυρίως στη Ρωσική βιβλιογραφία.

Λήμμα 8.1 (Ανισότητα των Cauchy–Schwarz.) *Σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο, $\big(X,(\cdot,\cdot)\big)$, ισχύει η ανισότητα των Cauchy–Schwarz*

$$\forall\, x,y\in X \qquad |(x,y)|\le\sqrt{(x,x)}\;\sqrt{(y,y)}\,. \tag{8.1}$$

Απόδειξη. Στην περίπτωση $y=0$, η (8.1) ισχύει προφανώς. Έστω λοιπόν $y\ne 0$. Για $\lambda\in\mathbb{K}$ ισχύει, φυσικά, $(x-\lambda y,\ x-\lambda y)\ge 0$, και επειδή

$$\begin{aligned}(x-\lambda y,\ x-\lambda y) &= (x,\ x-\lambda y)-(\lambda y,\ x-\lambda y)\\ &=(x,x)-\bar\lambda\,(x,y)-\lambda\,(y,x)+\lambda\bar\lambda(y,y)\\ &=(x,x)-\bar\lambda\,(x,y)-\lambda\,\overline{(x,y)}+\lambda\bar\lambda(y,y)\,,\end{aligned}$$

θα έχουμε $(x,x)-\bar\lambda\,(x,y)-\lambda\,\overline{(x,y)}+\lambda\bar\lambda(y,y)\ge 0$. Ειδικότερα, για $\lambda:=\frac{(x,y)}{(y,y)}$, θα έχουμε

$$(x,x)-\frac{\overline{(x,y)}}{(y,y)}\,(x,y)-\frac{(x,y)}{(y,y)}\,\overline{(x,y)}+\frac{(x,y)\,\overline{(x,y)}}{(y,y)}\ge 0\,,$$

άρα $(x,x)-\frac{(x,y)\,\overline{(x,y)}}{(y,y)}\ge 0$, δηλαδή $(x,y)\overline{(x,y)}\le(x,x)(y,y)$, οπότε

$$|(x,y)|^2\le(x,x)\,(y,y),$$

και έτσι οδηγούμαστε αμέσως στην (8.1), λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι η εξαγωγή τετραγωνικής ρίζας είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση, αφού η παράγωγός της είναι θετική. □

Σημείωση. Στην περίπτωση Ευκλείδειου χώρου, δηλαδή πραγματικού γραμμικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο, η ανισότητα των Cauchy–Schwarz αποδεικνύεται απλούστερα ως εξής: Για $\lambda\in\mathbb{R}$ η σχέση $(x-\lambda y,\ x-\lambda y)\ge 0$ γράφεται στη μορφή

$$(x,x)-2(x,y)\lambda+(y,y)\lambda^2\ge 0\,.$$

Για να αληθεύει η τελευταία ανισότητα για κάθε πραγματικό αριθμό λ πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι μη θετική, δηλαδή

$$\Delta=\big[(x,y)^2-(x,x)(y,y)\big]\le 0,$$

και από εδώ έπεται αμέσως η ζητούμενη ανισότητα. □

Οι συνηθισμένες ανισότητες για αθροίσματα

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i\Big| \le \Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\Big)^{1/2},$$

για μιγαδικούς αριθμούς $x_i, y_i,\ i = 1, \dots, n$, καθώς και για ολοκληρώματα

$$\Big|\int_a^b x(s)y(s)\,ds\Big| \le \Big(\int_a^b |x(s)|^2\,ds\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b |y(s)|^2\,ds\Big)^{1/2},$$

για συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[a, b]$, αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας των Cauchy–Schwarz, και συγκεκριμένα για τους χώρους $(\mathbb{C}^n, (\cdot,\cdot))$ με $(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i$ για $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, και $(C[a, b], (\cdot,\cdot))$ με $(x, y) := \int_a^b x(s)y(s)\,ds$.

Πρόταση 8.1 *Έστω* $\big(X, (\cdot,\cdot)\big)$ *ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε με*

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}\,, \qquad x \in X\,,$$

ορίζεται μια νόρμα στον X, *η οποία λέμε ότι παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο* $(\cdot,\cdot)$.

Απόδειξη. Οι (N1) και (N2) είναι τετριμμένες. Για να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα, παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι για $x, y \in X$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2\\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x, y) + \|y\|^2,\end{aligned}$$

και με τη βοήθεια της ανισότητας των Cauchy–Schwarz λαμβάνουμε

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2,$$

από την οποία έπεται αμέσως η τριγωνική ανισότητα. □

Όταν αναφερόμαστε σε μια νόρμα σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινομενο χωρίς να την προσδιορίζουμε, εννοούμε πάντα τη νόρμα που παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο. Επίσης, όταν μιλάμε για βέλτιστες προσεγγίσεις σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο, εννοούμε πάντα βέλτιστες προσεγγίσεις ως προς αυτή τη νόρμα.

Λήμμα 8.2 *Σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο* $\big(X, (\cdot,\cdot)\big)$ *ισχύει η λεγόμενη ισότητα του παραλληλογράμμου*

$$\forall\, x, y \in X \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\|y\|^2\,. \tag{8.2}$$

Επίσης, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα

(8.3) $$\forall\, x, y \in X \qquad (x,y) = 0 \implies \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\ ,$$

και γενικότερα για $x_1, \dots, x_n \in X$

(8.4) $$(x_i, x_j) = 0\ ,\ \ i \neq j \quad \implies \|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2\ .$$

Απόδειξη. Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις

(i) $$\|x+y\|^2 = (x+y,\ x+y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2$$

(ii) $$\|x-y\|^2 = (x-y,\ x-y) = \|x\|^2 - (x,y) - (y,x) + \|y\|^2$$

λαμβάνουμε αμέσως την (8.2).

Για $(x,y) = 0$, η (i) είναι η (8.3).

Αποδεικνύουμε τώρα επαγωγικά την (8.4). Για $n = 2$ ισχύει, σύμφωνα με την (8.3). Έστω ότι ισχύει για $n = m-1$. Τότε προφανώς $(x_1 + \cdots + x_{m-1},\ x_m) = 0$, οπότε

$$\begin{aligned}\|x_1 + \cdots + x_{m-1} + x_m\|^2 &= \|x_1 + \cdots + x_{m-1}\|^2 + \|x_m\|^2\\ &= \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_m\|^2\ ,\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει σύμφωνα με την (8.3) και η δεύτερη σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση. □

Σε κάθε παραλληλόγραμμο το άθροισμα των τετραγώνων όλων των πλευρών του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του· σε αυτό το γεγονός οφείλεται η ονομασία "ισότητα του παραλληλογράμμου" για τη σχέση (8.2).

Σημείωση. Κάθε νόρμα που παράγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί, όπως είδαμε, την ισότητα του παραλληλογράμμου. Αντίστροφα, μπορεί να δειχθεί, ότι κάθε νόρμα, η οποία ικανοποιεί την ισότητα του παραλληλογράμμου, παράγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο, συγκεκριμένα από το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από τον τύπο

(8.5) $$\forall\, x, y \in X \qquad (x,y) := \frac{1}{4}\left[\, \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right],$$

στην περίπτωση πραγματικού χώρου, και από τον τύπο

(8.6) $$\forall\, x, y \in X \quad (x,y) := \frac{1}{4}\left[\, \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2\right],$$

στην περίπτωση μιγαδικού χώρου.

Με τη βοήθεια του Ευκλείδειου εσωτερικού γινομένου στον $\mathbb{R}^n$, μπορούμε τώρα να ορίσουμε *θετικά ορισμένους* τετραγωνικούς πίνακες.

Ορισμός 8.3 Ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας A λέγεται *θετικά ορισμένος*, αν για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα x του $\mathbb{R}^n$ το εσωτερικό γινόμενο (Ax, x) είναι θετικός αριθμός, $(Ax, x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Πολύ εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι ένας θετικά ορισμένος πίνακας είναι αντιστρέψιμος, βλ. Άσκηση 8.2

Στη συνέχεια εισάγουμε την έννοια της μετρικής, και μετά ορίζουμε μία μετρική με τη βοήθεια μιας νόρμας.

Ορισμός 8.4 Έστω X ένα σύνολο. Μία *μετρική* στο X είναι μία απεικόνιση

$$\begin{aligned} d:\ X \times X \ &\longrightarrow\ \mathbb{R} \\ (x, y)\ &\mapsto\ d(x, y)\,, \end{aligned}$$

αν ισχύουν:

(M1) $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$ συμμετρία

(M2) $\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ τριγωνική ανισότητα

(M3) $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = 0 \iff x = y.$

Πολύ εύκολα διαπιστώνει κανείς, ότι σε έναν χώρο με νόρμα, ιδιαίτερα, συνεπώς, σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο, στον οποίο η νόρμα παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο, δια $d(x, y) := \|x - y\|$ ορίζεται μία μετρική.

8.2. Ορθοκανονικοποίηση

Η ενότητα αυτή αναφέρεται στα ορθομοναδιαία συστήματα και διάφορες εφαρμογές τους. Κατ' αρχήν θα ορίσουμε τα ορθομοναδιαία συστήματα, και εν συνεχεία θα γνωρίσουμε μερικές ιδιότητές τους, καθώς και έναν τρόπο κατασκευής κατάλληλων ορθομοναδιαίων συστημάτων, ξεκινώντας από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Επίσης θα αναφερθούμε εν συντομία σε βέλτιστες προσεγγίσεις από χώρους πεπερασμένης διάστασης, σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο, και θα δούμε το ρόλο ορθομοναδιαίων συστημάτων σε αυτή την περίπτωση.

Ορισμός 8.5 Έστω $\big(X,(\cdot,\cdot)\big)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα σύνολο $S=\{x_1,\dots,x_n\}\subset X$ λέγεται *ορθογώνιο* (ορθογώνιο σύστημα), αν τα στοιχεία του είναι ορθογώνια μεταξύ τους, δηλαδή αν για $i\neq j$ ισχύει $(x_i,x_j)=0$. Αν επί πλέον κάθε διάνυσμα του S είναι *μοναδιαίο*, δηλαδή $\|x_i\|=1$, για κάθε i, οπότε συνολικά έχουμε $(x_i,x_j)=\delta_{ij}$, τότε το S λέγεται *ορθοκανονικό* (ορθοκανονικό σύστημα) ή *ορθομοναδιαίο*. Αν ένα ορθοκανονικό σύνολο S είναι βάση του X, τότε το S λέγεται *ορθοκανονική* ή *ορθομοναδιαία βάση* του X.

Λήμμα 8.3. *Έστω $\big(X,(\cdot,\cdot)\big)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $S=\{e_1,\dots,e_n\}$ ένα ορθομοναδιαίο σύνολο στοιχείων του X. Τότε τα $e_1,\dots,e_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ και $\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n=0$. Τότε για $j\in\{1,\dots,n\}$ έχουμε

$$\begin{aligned}0=(0,e_j)&=(\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n,e_j)\\&=\sum_{i=1}^n\lambda_i\,(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^n\lambda_i\,\delta_{ji}=\lambda_j\,. \quad\square\end{aligned}$$

Θεώρημα 8.1 (Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram–Schmidt.) *Έστω $\big(X,(\cdot,\cdot)\big)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x_1,\dots,x_n\in X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε υπάρχει ένα ορθομοναδιαίο σύστημα $\{e_1,\dots,e_n\}$, τέτοιο ώστε κάθε e_i να είναι γραμμικός συνδυασμός των $x_1,\dots,x_i$, και τα διανύσματα $e_1,\dots,e_n$ και $x_1,\dots,x_n$ να παράγουν τον ίδιο χώρο.*

Απόδειξη. Επειδή τα $x_1,\dots,x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ισχύει $x_i\neq 0$, $i=1,\dots,n$. Ορίζουμε τώρα τα διανύσματα $e'_1,\dots,e'_n$ ως εξής:

$$\begin{aligned}e'_1&:=x_1\\ e'_2&:=x_2-\frac{(x_2,e'_1)}{(e'_1,e'_1)}\,e'_1\\ &\ \vdots\\ e'_n&:=x_n-\frac{(x_n,e'_{n-1})}{(e'_{n-1},e'_{n-1})}\,e'_{n-1}-\cdots-\frac{(x_n,e'_1)}{(e'_1,e'_1)}\,e'_1\,.\end{aligned}$$

Επειδή τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_i$, $i \le n$, συνεπώς και τα διανύσματα $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{i-1}$, x_i, είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ισχύει προφανώς $e'_i \neq 0$. Επομένως το e'_{i+1} ορίζεται καλώς, δηλαδή τα $e'_1, \ldots, e'_n$ είναι καλώς ορισμένα. Εκτελώντας πράξεις, διαπιστώνουμε εύκολα επαγωγικά ότι, για $i \in \{1, \ldots, n\}$, $(e'_i, e'_j) = 0$, $j = 1, \ldots, i-1$, απ' όπου έπεται αμέσως ότι το σύστημα $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ είναι ορθογώνιο. Θέτουμε τώρα

$$e_i := \frac{e'_i}{\|e'_i\|}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

και παίρνουμε ένα ορθομοναδιαίο σύστημα, το οποίο ικανοποιεί τους ισχυρισμούς του θεωρήματος. □

Σημείωση.

1. Η απόδειξη του προηγουμένου θεωρήματος είναι κατασκευαστική· δεν αποδείχθηκε απλώς η ύπαρξη των $e_1, \ldots, e_n$, αλλά δόθηκε και μια μέθοδος προσδιορισμού τους.
2. Τα $e_1, \ldots, e_n$ εξαρτώνται προφανώς και από τη σειρά της ορθοκανονικοποίησης των $x_1, \ldots, x_n$.

Άμεση συνέπεια του προηγουμένου Θεωρήματος είναι ότι κάθε χώρος Y πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο έχει μια ορθομοναδιαία βάση· διατυπώνουμε αυτό το αποτέλεσμα υπό μορφή Πορίσματος.

Πόρισμα 8.1 *Σε κάθε χώρο X, $X \neq \{0\}$, πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο υπάρχει μια ορθοκανονική βάση.* □

Στον $\mathbb{R}^n$ με το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο, η κανονική του βάση αποτελεί ορθομοναδιαίο σύστημα το οποίο παράγει τον $\mathbb{R}^n$, είναι δηλαδή μία ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{R}^n$.

8.2.1. Εφαρμογή: Βέλτιστη προσέγγιση. Συχνά θέλουμε να προσεγγίσουμε κάποιο στοιχείο ενός δεδομένου συνόλου με τον "καλύτερο", κατά κάποια έννοια, δυνατό τρόπο. Τότε μιλάμε για *βέλτιστες προσεγγίσεις*. Η απλούστερη περίπτωση τέτοιων προβλημάτων, που είναι και η περίπτωση με την οποία θα ασχοληθούμε εν συντομία εδώ, παρουσιάζεται όταν ο χώρος στον οποίο εργαζόμαστε είναι γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και προσεγγίζουμε από κάποιον υπόχωρό του πεπερασμένης διάστασης.

Ορισμός 8.6 Έστω $\big(X, \|\cdot\|\big)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα, Y ένα μη κενό υποσύνολο του X, και $x \in X$. Ένα στοιχείο $y \in Y$ (αν υπάρχει), για το οποίο ισχύει

$$\forall\, z \in Y \quad \|x - y\| \;\leq\; \|x - z\|\,,$$

λέγεται *βέλτιστη προσέγγιση* του x από το Y.

Συχνά στις εφαρμογές προσεγγίζουμε το x με στοιχεία υποχώρων του X πεπερασμένης διάστασης. Το βασικό πρόβλημα στις βέλτιστες προσεγγίσεις είναι να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας βέλτιστης προσέγγισης, να εξετάσουμε αν είναι μοναδική και, τέλος, να αναπτύξουμε καλές μεθόδους υπολογισμού της. Το πρόβλημα σ' αυτήν τη γενικότητα είναι αρκετά δύσκολο, τουλάχιστον όσον αφορά τον υπολογισμό της βέλτιστης προσέγγισης. Υπάρχει ένας κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, η λεγόμενη Θεωρία Προσεγγίσεων, που ασχολείται με τέτοια θέματα. Στην περίπτωση, όμως, των χώρων με εσωτερικό γινόμενο, με την οποία και θ' ασχοληθούμε, θα αποδείξουμε εύκολα ύπαρξη και μοναδικότητα, και θα δούμε έναν τρόπο για τον υπολογισμό της βέλτιστης προσέγγισης.

Έστω λοιπόν $(X, (\cdot,\cdot))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και Y ένας υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης. Αν $x \in X$ και $\{e_1, \dots, e_n\}$ μια ορθομοναδιαία βάση του υποχώρου Y, τότε ορίζουμε το στοιχείο y του Y ως εξής

$$y = (x, e_1)\, e_1 + \cdots + (x, e_n)\, e_n\,. \tag{8.7}$$

Τώρα για $j \in \{1, \dots, n\}$ έχουμε

$$(x - y, e_j) = (x, e_j) - (y, e_j) = (x, e_j) - (x, e_1)(e_1, e_j) - \cdots - (x, e_n)(e_1, e_n),$$

όπότε, λαμβάνοντας υπ'όψιν το γεγονός ότι τα $\{e_1, \dots, e_n\}$ αποτελούν ορθομοναδιαίο σύστημα,

$$(x - y, e_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{8.8}$$

δηλαδή το $x - y$ είναι ορθογώνιο με καθένα των $e_1, \dots, e_n$. Αμέσως τώρα συμπεραίνουμε ότι το $x - y$ είναι ορθογώνιο με κάθε γραμμικό συνδυασμό των $e_1, \dots, e_n$, δηλαδή με κάθε στοιχείο του Y,

$$(x - y, z) = 0, \quad \forall z \in Y. \tag{8.8$'$}$$

Για αυτόν το λόγο, το y λέγεται *ορθογώνια* ή *ορθή προβολή* ή απλώς *προβολή* του x στον χώρο Y.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι αυτό το y είναι πραγματικά *μία* βέλτιστη προσέγγιση του x από τον Y και εν συνεχεία ότι είναι *η* βέλτιστη προσέγγιση του x από τον Y. Έστω λοιπόν $z \in Y$. Τότε, φυσικά, $y - z \in Y$, επομένως, σύμφωνα με την (8.8′), $(x - y, y - z) = 0$. Συνεπώς, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2, \tag{8.9}$$

δηλαδή το y είναι όντως μία βέλτιστη προσέγγιση του x από τον Y. Επιπρόσθετα, για $z \neq y$, η (8.9) δίνει $\|x-z\| > \|x-y\|$, άρα υπάρχει ακριβώς μία βέλτιστη προσέγγιση του x από τον Y.

Σημειώνουμε ακόμη ότι, αν το σύνολο $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι μια βάση του Y με ορθογώνια μεταξύ τους στοιχεία $e_1, \dots, e_n$, τα οποία δεν είναι αναγκαστικά μοναδιαία, τότε η βέλτιστη προσέγγιση $y \in Y$ ενός στοιχείου x δίνεται από τον τύπο

$$y = \frac{(x, e_1)}{(e_1, e_1)}\, e_1 + \cdots + \frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)}\, e_n\ . \tag{8.7′}$$

Παραστάσεις του είδους (8.7) ή (8.7′) λέγονται *αναπτύγματα Fourier* ή *ορθογώνια αναπτύγματα*. Η πιο γνωστή περίπτωση είναι *οι σειρές Fourier* περιοδικών συναρτήσεων, με την οποία θα ασχοληθούμε συνοπτικά στο επόμενο παράδειγμα.

Ας αναφέρουμε επιπρόσθετα ότι τη βέλτιστη προσέγγιση ενός στοιχείου x από το χώρο που παράγουν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $x_1, \dots, x_n$ μπορούμε να την προσδιορίσουμε και απ' ευθείας λύνοντας το λεγόμενο *σύστημα των κανονικών εξισώσεων*, βλ. Ασκήσεις 8.3 και 8.4, παρακάμπτοντας έτσι τον προσδιορισμό μίας ορθομοναδιαίας βάσης του χώρου που παράγουν τα $x_1, \dots, x_n$. Το τίμημα τώρα θα είναι ότι η παράσταση της βέλτιστης προσέγγισης δεν θα είναι πλέον τόσο κομψή όσο η παράσταση (8.7).

Ένα σχόλιο σχετικά με τον ορισμό των διανυσμάτων e_i' στη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης των Gram–Schmidt: Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (8.7′), βλέπουμε ότι το e_i' ορίστηκε ως η διαφορά του x_i μείον τη βέλτιστη προσέγγιση του x_i από τον χώρο $\langle e_1', \dots, e_{i-1}' \rangle$. Έτσι η ορθογωνιότητα του e_i' προς τα $e_1', \dots, e_{i-1}'$ έπεται αμέσως από την (8.8′).

Παράδειγμα 8.1 Έστω $X := C_{2\pi} := \{x \ : \ [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \,/ x(0) = x(2\pi), x$ συνεχής$\}$ ο χώρος των συνεχών, περιοδικών συναρτήσεων με περίοδο 2π, με το εσωτερικό γινόμενο $(x,y) := \int_0^{2\pi} x(s)y(s)\,ds$. Ο χώρος

$$T_n := \{x \in C_{2\pi} \ : \ x(s) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \big(\alpha_i \cos(is) + \beta_i \sin(is)\big)\},$$

δηλαδή το σύνολο των *τριγωνομετρικών πολυωνύμων* βαθμού το πολύ n, είναι, προφανώς, υπόχωρος του X.

Το πρόβλημά μας τώρα είναι, δεδομένου $x \in X$, να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη προσέγγισή του y από τον T_n. Οι συναρτήσεις

$$e_0(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_{2i-1}(s) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(is), \quad e_{2i} := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(is), \qquad i = 1, \dots, n,$$

σχηματίζουν μία ορθομοναδιαία βάση του T_n. Το γεγονός ότι το σύστημα είναι ορθομοναδιαίο αποδεικνύεται πολύ εύκολα υπολογίζοντας τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, και μετά, σύμφωνα με το Λήμμα 8.3, έχουμε και τη γραμμική ανεξαρτησία και την ιδιότητα της βάσεως. Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο γενικότερο αποτέλεσμα, βλ. την (8.7), η λύση του προβλήματος μας είναι $y = S_n x$,

$$S_n x := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s)\,ds \ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2n} \Big(\int_0^{2\pi} x(s) e_i(s)\,ds \Big)\, e_i,$$

το μερικό άθροισμα της λεγόμενης *σειράς Fourier* της συνάρτησης x. Οι σειρές Fourier παρουσιάζουν πολύ μεγάλο ενδιαφέρον, τόσο από καθαρά μαθηματικής απόψεως όσο και λόγω του πολύ σημαντικού ρόλου που αυτές παίζουν στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και σε άλλες επιστήμες. Υπάρχει πολύ πλούσια θεωρία για σειρές Fourier, και ένας ολόκληρος κλάδος της Ανάλυσης, η *Αρμονική Ανάλυση*, είναι αφιερωμένος στη μελέτη της συμπεριφοράς των μερικών αθροισμάτων τέτοιων σειρών.

8.3. Ασκήσεις

8.1. Έστω $\big(X, (\cdot,\cdot)\big)$ ένας Ευκλείδειος χώρος, $x \in X$, Y ένας υπόχωρος του X και $\{e_1, \dots, e_n\}$ μια ορθομοναδιαία βάση του Y. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \big\| x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) \big\|^2 ,$$

έχει ένα μόνο ελάχιστο στον $\mathbb{R}^n$, και μάλιστα για

$$\alpha_i = (x, e_i)\,, \quad i = 1, \dots, n\,.$$

Αυτό αποτελεί μια άλλη απόδειξη για ύπαρξη και μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης, καθώς και για τη σχέση (8.7).
[*Υπόδειξη:* Αποδείξτε ότι

$$\big\|x - (\alpha_1\, e_1 + \cdots + \alpha_n\, e_n)\big\|^2 = (x, x) + \sum_{i=1}^{n} \big\{\alpha_i^2 - 2(x, e_i)\,\alpha_i\big\}\,.]$$

8.2. Έστω A ένας θετικά ορισμένος $n \times n$ πραγματικός πίνακας. Αποδείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.

8.3. Έστω $\big(X, (\cdot,\cdot)\big)$ ένας Ευκλείδειος χώρος, και $x_1, \dots, x_n \in X$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Αποδείξτε ότι ο πίνακας του Gram $G(x_1, \dots, x_n) = (g_{ij})$, με $g_{ij} := (x_i, x_j)$, είναι θετικά ορισμένος.

8.4. Έστω $\big(X, (\cdot,\cdot)\big)$ ένας Ευκλείδειος χώρος, $x \in X$, και $x_1, \dots, x_n \in X$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Αν $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \big\|x - (\alpha_1\, x_1 + \cdots + \alpha_n\, x_n)\big\|^2\,,$$

αποδείξτε ότι το σύστημα

$$(\nabla\varphi)\,(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$$

γράφεται στη μορφή

$$\begin{cases} (x_1, x_1)\alpha_1 + (x_1, x_2)\alpha_2 + & \cdots & + (x_1, x_n)\alpha_n & = & (x, x_1) \\ (x_2, x_1)\alpha_1 + (x_2, x_2)\alpha_2 + & \cdots & + (x_2, x_n)\alpha_n & = & (x, x_2) \\ & & & & \vdots \\ (x_n, x_1)\alpha_1 + (x_n, x_2)\alpha_2 + & \cdots & + (x_n, x_n)\alpha_n & = & (x, x_n) \end{cases}.$$

Το σύστημα αυτό λέγεται *σύστημα των κανονικών εξισώσεων*, , και και η λύση του μας δίνει τη βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $\langle x_1, \dots, x_n\rangle$.
Ποια μορφή λαμβάνει το σύστημα των κανονικών εξισώσεων όταν το σύνολο $\{x_1, \dots,$ $x_n\}$ είναι ορθογώνιο, και ποια όταν είναι ορθομοναδιαίο;
[*Υπόδειξη:* Για $y, z \in X$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\|y - \alpha z\|^2 = (y - \alpha z,\, y - \alpha z) = (z, z)\,\alpha^2 - 2\,(y, z)\,\alpha + (y, y)\,.]$$

8.5. Έστω φ η συνάρτηση της Άσκησης 8.4. Αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_i \, \partial \alpha_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n} = 2\, G(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Συνδυάστε τώρα τις δύο προηγούμενες ασκήσεις για να αποδείξετε ότι αν $\alpha_1, \ldots,$ α_n είναι η λύση του συστήματος

$$(\nabla \varphi)\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0\,,$$

τότε $y = \alpha_1 \, x_1 + \cdots + \alpha_n \, x_n$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $Y :=$ $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

8.6. Έστω $(X, (\cdot,\cdot))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, Y ένας υπόχωρος του X πεπερασμένης διατάσεως, και $L : X \longrightarrow Y$ η απεικόνιση της ορθογώνιας προβολής, δηλαδή, για $x \in X$, $Lx \in Y$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον χώρο Y. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση L είναι γραμμική.

8.7. Έστω $(X, (\cdot,\cdot))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, Y ένας υπόχωρος του X πεπερασμένης διατάσεως, $x \in X$ και $y \in Y$ η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον χώρο Y. Χρησιμοποιήστε την (8.8′) για να αποδείξετε ότι

$$\|y\| \le \|x\|.$$

Ακριβέστερα, αποδείξτε ότι

$$\|x\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y\|^2.$$

8.8. Με τους συμβολισμούς της Άσκησης 8.7, αν $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι μία ορθομοναδιαία βάση του Y, αποδείξτε ότι

$$\|y\|^2 = |(x, e_1)|^2 + \cdots + |(x, e_n)|^2.$$

8.9. (Ανισότητα του Bessel.) Έστω $(X, (\cdot,\cdot))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ένα ορθομοναδιαίο σύστημα στον X, και $x \in X$. Συνδυάστε τις Ασκήσεις 8.7 και 8.8, για να αποδείξετε ότι

$$|(x, e_1)|^2 + \cdots + |(x, e_n)|^2 \le \|x\|^2.$$

9. Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα και Διαγωνιοποίηση

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε δύο βασικές έννοιες για γραμμικές απεικονίσεις, αυτές των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων. Επίσης θα μας απασχολήσει το θέμα της διαγωνιοποίησης πινάκων, το οποίο, όπως θα δούμε, συνδέεται στενά με τις προαναφερθείσες έννοιες.

9.1. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα γραμμικών απεικονίσεων

Σε αυτή την ενότητα θα εισαγάγουμε τις έννοιες των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων γραμμικών απεικονίσεων σε έναν γραμμικό χώρο, καθώς και τετραγωνικών πινάκων. Επίσης θα ορίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα, την ομοιότητα πινάκων, και τη γεωμετρική και αλγεβρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής ενός πίνακα.

Ορισμός 9.1 Έστω X ένας γραμμικός χώρος, και $L : X \longrightarrow X$ μία γραμμική απεικόνιση. Λέμε ότι η L αφήνει έναν υπόχωρο X_1 του X *αναλλοίωτο*, αν ο X_1 απεικονίζεται μέσω της L στον εαυτό του, δηλαδή αν ο $L(X_1)$ περιέχεται στον X_1, $L(X_1) \subset X_1$.

Παραδείγματα 9.1
1. Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Κάθε γραμμική απεικόνιση $L : X \longrightarrow X$ αφήνει τους υποχώρους $\{0\}$ και X αναλλοίωτους.
2. Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός, και $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x_1, x_2, x_3) := (\lambda x_1, 2\lambda x_1 + x_2, x_3)$. Η L αφήνει, όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως, τον υπόχωρο $X_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, 0)\}$ αναλλοίωτο.
3. Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός, και $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2)$. Για τυχόντα πραγματικό αριθμό k, η L αφήνει τον υπόχωρο $X_1 := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = kx_1\}$ αναλλοίωτο.

Έστω τώρα X ένας γραμμικός χώρος, x_1 ένα μη μηδενικό διάνυσμά του, και X_1 ο χώρος που παράγεται από το $x_1, X_1 :=< x_1 >$. Μία γραμμική απεικόνιση $L : X \longrightarrow X$ αφήνει τον X_1 ακριβώς τότε αναλλοίωτο, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε να ισχύει $Lx_1 = \lambda x_1$, οπότε, όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως, θα ισχύει και $Lx = \lambda x$ για κάθε $x \in X_1$. Αυτό το γεγονός μας οδηγεί στην εισαγωγή δύο πολύ βασικών εννοιών, οι οποίες έχουν ιδιαίτερη σημασία στις εφαρμογές των Μαθηματικών στις Φυσικές Επιστήμες, αυτών των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.

Στη συνέχεια οι γραμμικοί μας χώροι θα είναι είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Ορισμός 9.2 Έστω X ένας γραμμικός χώρος πάνω στο $\mathbb{K}$, και $L : X \longrightarrow X$ μία γραμμική απεικόνιση. Ένα $\lambda \in \mathbb{K}$ λέγεται *ιδιοτιμή* (*eigenvalue*) της L, αν υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο x του X, $x \in X \setminus \{0\}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $Lx = \lambda x$. Ένα $x \in X \setminus \{0\}$, για το οποίο ισχύει $Lx = \lambda x$, λέγεται *ιδιοδιάνυσμα* (*eigenvector*) της L ως προς την ιδιοτιμή λ.

Αν x_1 είναι ιδιοδιάνυσμα μίας γραμμικής απεικόνισης L, τότε, προφανώς, η L αφήνει τον χώρο $< x_1 >$ αναλλοίωτο.

Στο αποτέλεσμα που ακολουθεί, θα δούμε ότι ιδιοδιανύσματα, που αντιστοιχούν σε ανά δύο διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Λήμμα 9.1 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος, και $x_1, \ldots, x_m$ ιδιοδιανύσματα μιας γραμμικής απεικόνισης $L : X \longrightarrow X$ ως προς ανά δύο διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Τότε τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα δοθεί επαγωγικά ως προς m. Για $m = 1$ ο ισχυρισμός αληθεύει, προφανώς, αφού το x_1, ως μη μηδενικό διάνυσμα, είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Υποθέτουμε τώρα ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $m - 1$ και θα δείξουμε ότι ισχύει και για m. Έστω ότι $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = 0$. Τότε θα έχουμε αφ' ενός

$$0 = \lambda_m \cdot 0 = \lambda_m \alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda_m \alpha_m x_m$$

και αφ' ετέρου

$$0 = L(0) = \alpha_1 L x_1 + \cdots + \alpha_m L x_m = \lambda_1 \alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda_m \alpha_m x_m.$$

Επομένως

$$0 = \alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)x_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})x_{m-1}. \tag{9.1}$$

Από αυτή τη σχέση έπεται αμέσως, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $x_1, \ldots,$ x_{m-1} και του γεγονότος ότι το λ_m είναι διαφορετικό των $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, ότι $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$. Επομένως, η σχέση $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = 0$ γράφεται στη μορφή $\alpha_m x_m = 0$ και μας δίνει $\alpha_m = 0$. Συνεπώς, τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. $\square$

Θα δούμε τώρα μερικές απλές ιδιότητες ιδιοδιανυσμάτων.

Λήμμα 9.2 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος πάνω σε ένα σώμα $\mathbb{K}$, $L : X \longrightarrow X$ μία γραμμική απεικόνιση, και, για $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{I\Delta X}\,(L, \lambda) := \{x \in X : Lx = \lambda x\}$. Τότε ισχύουν:*
i. *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$, το $\mathrm{I\Delta X}\,(L, \lambda)$ είναι υπόχωρος του X.*
ii. *Ένα $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή της L ακριβώς τότε, αν το $\mathrm{I\Delta X}\,(L, \lambda)$ δεν περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, $\mathrm{I\Delta X}\,(L, \lambda) \neq \{0\}$.*
iii. *$\mathrm{I\Delta X}\,(L, \lambda) \setminus \{0\}$ είναι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων της L ως προς λ.*
iv. *Το $\mathrm{I\Delta X}\,(L, \lambda)$ είναι ο πυρήνας της απεικόνισης $L - \lambda\,\mathrm{id}_X$, $\mathrm{I\Delta X}\,(L, \lambda) = \mathrm{Ker}\,(L - \lambda\,\mathrm{id}_X)$.*
v. *Για δύο διαφορετικά λ_1, λ_2, η τομή των $\mathrm{I\Delta X}\,(L, \lambda_1)$ και $\mathrm{I\Delta X}\,(L, \lambda_2)$ περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, $\mathrm{I\Delta X}\,(L, \lambda_1) \cap \mathrm{I\Delta X}\,(L, \lambda_2) = \{0\}$.*

Απόδειξη. Τα i., ii., iii., και iv. είναι προφανή. Το v. έπεται ουσιαστικά από το Λήμμα 9.1. Για να το αποδείξουμε, υποθέτουμε ότι $x \in \mathrm{I\Delta X}\,(L, \lambda_1) \cap \mathrm{I\Delta X}\,(L, \lambda_2)$. Τότε θα έχουμε $Lx = \lambda_1 x$ και $Lx = \lambda_2 x$, συνεπώς $\lambda_1 x = \lambda_2 x$, οπότε $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, και επομένως, λόγω του ότι $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, $x = 0$. $\square$

Ορίζουμε τώρα ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα τετραγωνικών πινάκων, και στη συνέχεια θα δούμε ότι οι ιδιοτιμές μιας απεικόνισης συμπίπτουν με τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα ως προς οποιαδήποτε βάση, υποθέτοντας φυσικά ότι ο γραμμικός χώρος είναι πεπερασμένης διάστασης.

Ορισμός 9.3 Έστω A ένας τετραγωνικός, $n \times n$, πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Ένα $\lambda \in \mathbb{K}$ λέγεται *ιδιοτιμή* του A, αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα x του $\mathbb{K}^n$, $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $Ax = \lambda x$. Ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, για το οποίο ισχύει $Ax = \lambda x$, λέγεται *ιδιοδιάνυσμα* του A ως προς την ιδιοτιμή λ.

Σημείωση. Ένας πραγματικός, $n \times n$ πίνακας A, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, μπορεί φυσικά να θεωρηθεί και ως στοιχείο του $\mathbb{C}^{n,n}$, συνεπώς είναι δυνατόν να υπάρχουν και μιγαδικές ιδιοτιμές και μιγαδικά ιδιοδιανύσματα ενός πραγματικού πίνακα.

Στη συνέχεια δίνουμε ένα αλγεβρικό κριτήριο για τις ιδιοτιμές ενός πίνακα. Σύμφωνα με αυτό οι ιδιοτιμές ενός $n \times n$ πίνακα είναι ρίζες ενός πολυωνύμου βαθμού n.

Πρόταση 9.1 *Έστω A ένας μιγαδικός, $n \times n$, πίνακας. Ένας μιγαδικός αριθμός λ είναι ακριβώς τότε ιδιοτιμή του A, αν* $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Απόδειξη. Το λ είναι ιδιοτιμή του A, αν και μόνο αν το γραμμικό σύστημα $Ax = \lambda x$, ή ισοδύναμα το $(A - \lambda I_n)x = 0$, έχει μη μηδενική λύση. Αυτό όμως, κατά τα γνωστά, συμβαίνει ακριβώς τότε, αν ο πίνακας $A - \lambda I_n$ δεν είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή αν η ορίζουσά του μηδενίζεται, $\det(A - \lambda I_n) = 0$. □

Ορισμός 9.4 Έστω A ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Το πολυώνυμο $p, p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$, λέγεται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του A.

Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς επαγωγικά, ότι ο βαθμός του πολυωνύμου $p, p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$, είναι n. Επομένως, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας, κάθε $n \times n$ μιγαδικός πίνακας έχει, μετρώντας και την πολλαπλότητά τους, n ιδιοτιμές.

Έστω X ένας γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, $\dim X = n$, και $L : X \longrightarrow X$ μία γραμμική απεικόνιση. Αν $\mathcal{B}_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ και $\mathcal{B}_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$ είναι δύο βάσεις του X και A, B οι πίνακες της L ως προς $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$, αντίστοιχα, θεωρώντας κάθε φορά την ίδια βάση στο πεδίο ορισμού και στο πεδίο τιμών της, το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια είναι να προσδιορίσουμε μία σχέση μεταξύ των πινάκων A και B.

Κατ' αρχήν υπάρχει ακριβώς μία γραμμική απεικόνιση $L_1 : X \longrightarrow X$ για την οποία ισχύει $L_1 x_j = y_j,\ j = 1, \dots, n$. Για την αντίστροφη L_1^{-1} της L_1 ισχύει $L_1^{-1} y_j = x_j,\ j = 1, \dots, n$. Αν S είναι ο πίνακας της L_1 ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$, στο πεδίο ορισμού και στο πεδίο τιμών της, αντίστοιχα, τότε ο S είναι αντιστρέψιμος και ο S^{-1} είναι ο πίνακας της L_1^{-1} ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_2$ και $\mathcal{B}_1$ στο πεδίο ορισμού και στο πεδίο τιμών της, αντίστοιχα, βλ. την Πρόταση 5.3. Επομένως, με $S = (s_{ij})$ και

$S^{-1} = (s'_{ij})$ έχουμε

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_i \quad \text{και} \quad x_j = \sum_{i=1}^{n} s'_{ij} y_i, \quad j = 1, \dots, n. \tag{9.2}$$

Επίσης με τους πίνακες A και B έχουμε

$$Lx_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \quad \text{και} \quad Ly_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} y_i, \quad j = 1, \dots, n. \tag{9.3}$$

Προσδιορίζουμε τώρα τον πίνακα της L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_2$ και $\mathcal{B}_1$, στο πεδίο ορισμού και στο πεδίο τιμών της, αντίστοιχα, με δύο τρόπους, για να οδηγηθούμε στην επιθυμητή σχέση μεταξύ των πινάκων A και B. Έχουμε, σύμφωνα με τις (9.2) και (9.3),

$$Ly_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \big(\sum_{\ell=1}^{n} s_{\ell i} x_\ell \big) = \sum_{\ell=1}^{n} \big(\sum_{i=1}^{n} s_{\ell i} b_{ij} \big) x_\ell,$$

$$Ly_j = \sum_{\ell=1}^{n} s_{\ell j} Lx_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} s_{\ell j} \big(\sum_{i=1}^{n} a_{i\ell} x_i \big) = \sum_{i=1}^{n} \big(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} s_{\ell j} \big) x_i,$$

$j = 1, \dots, n$, επομένως ένας πίνακας είναι ο SB και ένας ο AS, οπότε θα έχουμε $SB = AS$, δηλαδή $A = SBS^{-1}$. Έτσι οδηγηθήκαμε στη σχέση που αναζητούσαμε. Σε λίγο θα μπορέσουμε να διατυπώσουμε τη σχέση μεταξύ A και B διαφορετικά, μετά από έναν κατάλληλο ορισμό.

Οι ιδιοτιμές μιας γραμμικής απεικόνισης δεν εξαρτώνται, βέβαια, από μια συγκεκριμένη βάση. Θα δείξουμε τώρα ότι και οι πίνακες A και B, που αντιστοιχούν στην ίδια γραμμική απεικόνιση, έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Ορισμός 9.5 Δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ λέγονται *όμοιοι*, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $S \in \mathbb{K}^{n,n}$ τέτοιος ώστε $A = SBS^{-1}$.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, οι πίνακες A και B που αντιστοιχούν σε μία γραμμική απεικόνιση ως προς δύο βάσεις, την ίδια κάθε φορά στο πεδίο ορισμού της και στο πεδίο τιμών της, είναι όμοιοι.

Θα δούμε τώρα ότι όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Πρόταση 9.2 *Έστω $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ δύο όμοιοι πίνακες. Τότε οι A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*

Απόδειξη. Έστω $S \in \mathbb{K}^{n,n}$ αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε $A = SBS^{-1}$. Έστω τώρα λ ιδιοτιμή του A. Τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{K}^n$, έστω $x^\star$, τέτοιο ώστε $Ax^\star = \lambda x^\star$. Επομένως, θα έχουμε, $(SBS^{-1})x^\star = \lambda x^\star$, οπότε $S^{-1}(SBS^{-1})x^\star = \lambda S^{-1}x^\star$, δηλαδή $B(S^{-1}x^\star) = \lambda(S^{-1}x^\star)$. Αφού ο S^{-1} είναι αντιστρέψιμος και το $x^\star$ μη μηδενικό, και το $S^{-1}x^\star$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{K}^n$, και από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι το λ είναι ιδιοτιμή του B. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο δείχνουμε ότι και κάθε ιδιοτιμή του B είναι και ιδιοτιμή του A. $\square$

Αν λ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα A, τότε τα ιδιοδιανύσματα του A ως προς την ιδιοτιμή λ είναι οι μη τετριμμένες λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος $(A - \lambda I_n)x = 0$.

Για

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

έχουμε

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 9.2 Θα προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε, αναπτύσσοντας ως προς την τελευταία στήλη,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} 1 & -1-\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - (1+\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

επομένως

$$\det(A - \lambda I_3) = -(1+\lambda) - (1+\lambda)(\lambda^2 - 1 + 1) = -(1+\lambda)(\lambda^2+1).$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \mathrm{i}, \lambda_3 = -\mathrm{i}$. Για να προσδιορίσουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, αρκεί να λύσουμε τα ομογενή γραμμικά συστήματα $(A - \lambda_j I_3)x = 0,\ j = 1, 2, 3$.

Σημείωση. Αν στο προηγούμενο παράδειγμα, ο πίνακας A θεωρηθεί ως απεικόνιση του $\mathbb{R}^3$ στον εαυτό του, τότε η μόνη ιδοτιμή είναι το λ_1.

Ορισμός 9.6 Έστω λ_k ιδιοτιμή του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, και $p, p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. *Αλγεβρική πολλαπλότητα* της ιδιοτιμής λ_k λέγεται ο φυσικός αριθμός μ_k, για τον οποίο ισχύει $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{\mu_k} q(\lambda)$, με q ένα πολυώνυμο βαθμού $n - \mu_k$ το οποίο δεν μηδενίζεται στο λ_k, δηλαδή η πολλαπλότητα του λ_k ως ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα A. Η *γεωμετρική πολλαπλότητα* $\rho_k, \rho_k := \dim \mathbf{I\Delta X}(A, \lambda_k) = \dim\{x \in \mathbb{C}^n \ :\ Ax = \lambda_k x\}$, είναι το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του A ως προς λ_k.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα δεν υπερβαίνει την αλγεβρική πολλαπλότητα.

Πρόταση 9.3 *Έστω λ' ιδιοτιμή ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $\mu(\lambda')$ και γεωμετρική πολλαπλότητα $\rho(\lambda')$. Τότε ισχύει $1 \le \rho(\lambda') \le \mu(\lambda') \le n$.*

Απόδειξη. Η πρώτη και η τελευταία ανισότητα είναι προφανείς. Αρκεί συνεπώς να δείξουμε ότι $\rho(\lambda') \le \mu(\lambda')$. Θέτουμε $\rho := \rho(\lambda')$ και $\mu := \mu(\lambda')$. Έστω $x^1, \dots, x^\rho \in \mathbb{C}^n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A ως προς λ', δηλαδή $Ax^i = \lambda' x^i,\ i = 1, \dots, \rho$. Τότε, κατά τα γνωστά, υπάρχουν $x^{\rho+1}, \dots, x^n \in \mathbb{C}^n$ τέτοια ώστε $\{x^1, \dots, x^n\}$ να είναι βάση του $\mathbb{C}^n$. Έστω S ο πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $x^1, \dots, x^n$, $S := (x^1, \dots, x^n)$. Τότε ισχύει $\det S \ne 0$, βλ. Πρόταση 7.1, συνεπώς ο S είναι αντιστρέψιμος. Τώρα έχουμε $Se^i = x^i,\ i = 1, \dots, \rho$, άρα και $e^i = S^{-1}x^i,\ i = 1, \dots, \rho$, επομένως

$$S^{-1}ASe^i = S^{-1}Ax^i = S^{-1}(\lambda' x^i) = \lambda' S^{-1}x^i = \lambda' e^i.$$

Συνεπώς, ο πίνακας $S^{-1}AS$ είναι της μορφής

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda' & & 0 & \star & \star & \dots & \star \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \lambda' & \star & \star & \dots & \star \\ & & & \star & \star & \dots & \star \\ & 0 & & \star & \star & \dots & \star \\ & & & \star & \star & \dots & \star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' I_\rho & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A ισχύει, επομένως,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) = \det S^{-1} \det(A - \lambda I_n) \det S \\ &= \det(S^{-1}AS - \lambda I_n) = (\lambda' - \lambda)^\rho \det(C - \lambda I_{n-\rho}), \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\det S^{-1} = 1/\det S$, συνεπώς $\rho \leq \mu$. $\square$

Παράδειγμα 9.3 Η μόνη ιδιοτιμή του πίνακα A,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

είναι το 2, με αλγεβρική πολλαπλότητα τέσσερα, $\mu(2) = 4$. Το σύστημα $(A - 2I_4)x = 0$ έχει χώρο λύσεων $< (\alpha, 0, 0, 0) >$, με α πραγματικόν αριθμό. Συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι ένα, $\rho(2) = 1$.

9.2. Διαγωνιοποίηση πινάκων

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τη διαγωνιοποίηση πινάκων, θα γνωρίσουμε διάφορες συνθήκες για να είναι ένας πίνακας διαγωνιοποιήσιμος και θα αναφερθούμε στο λεγόμενο ελάχιστο πολυώνυμο ενός τετραγωνικού πίνακα.

Ένας πίνακα $D = (d_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται *διαγώνιος*, αν ισχύει $d_{ij} = 0$ για $i \neq j$, δηλαδή αν έχει μη μηδενικά στοιχεία μόνο στη διαγώνιό του. Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι τα διαγώνια στοιχεία του D, τότε συχνά γράφουμε $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Ορισμός 9.7 Ένας πίνακας $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ λέγεται *διαγωνιοποιήσιμος*, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $S \in \mathbb{K}^{n,n}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $S^{-1}AS$ να είναι διαγώνιος, $S^{-1}AS = D$ με D διαγώνιο πίνακα.

Ένα κριτήριο, για το πότε ένας πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος, δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 9.1 *Ένας πίνακας $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ είναι ακριβώς τότε διαγωνιοποιήσιμος, αν υπάρχει ένα σύνολο ιδιοδιανυσμάτων του A, τα οποία αποτελούν βάση του $\mathbb{K}^n$.*

Απόδειξη. Έστω κατ' αρχήν ότι ο $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος. Τότε υπάρχει πίνακας $S \in \mathbb{K}^{n,n}$, $S = (s^1, \dots, s^n)$, τέτοιος ώστε

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Επομένως θα έχουμε $AS = S\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1 s^1, \dots, \lambda_n s^n)$, οπότε $As^i = \lambda_i s^i$, $i = 1, \dots, n$, δηλαδή τα $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι ιδιοτιμές του A, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $s^1, \dots, s^n$. Τώρα τα $s^1, \dots, s^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, βλ. τις Προτάσεις 5.1 και 6.3, επομένως αποτελούν βάση του $\mathbb{K}^n$.

Αντίστροφα τώρα, αν $x^1, \dots, x^n$ ιδιοδιανύσματα του A, ως προς $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, που αποτελούν βάση του $\mathbb{K}^n$, τότε ο πίνακας $S := (x^1, \dots, x^n)$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $AS = (Ax^1, \dots, Ax^n) = (\lambda_1 x^1, \dots, \lambda_n x^n) = S\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, άρα $S^{-1}AS = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, δηλαδή ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος. □

Άμεση απόρροια του Θεωρήματος 9.1 και του Λήμματος 9.1 είναι το γεγονός ότι ένας $n \times n$ πίνακας με ανά δύο διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Πρόταση 9.4 *Έστω $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ένας πίνακας με ανά δύο διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Έστω $x_1, \dots, x_n$ ιδιοδιανύσματα του A ως προς τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, αντίστοιχα. Σύμφωνα με το Λήμμα 9.1 τα $x_1, \dots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα 9.1. □

Έστω A ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας. Θεωρούμε στον $\mathbb{R}^n$, με την κανονική του βάση, την απεικόνιση $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$. Ο πίνακας, που αντιστοιχεί σε αυτή την απεικόνιση, είναι, φυσικά, ο A. Το ερώτημα είναι τώρα, κατά πόσον μπορεί η απεικόνιση να παρασταθεί με έναν πίνακα απλούστερης μορφής, αν επιλέξουμε άλλη, κατάλληλη βάση του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος, $S^{-1}AS = D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n) = (d_{ij})$. Θεωρούμε τη βάση $\{Se^1, \dots, Se^n\}$ του $\mathbb{R}^n$, όπου φυσικά $Se^i = s^i$ είναι η $i-$στή στήλη του S. Θα δείξουμε αμέσως τώρα ότι ο πίνακας, που αντιστοιχεί στην L_A ως προς αυτή τη βάση, δεν είναι άλλος από τον διαγώνιο πίνακα D, γεγονός στο οποίο οφείλεται, κατά μεγάλο μέρος, η σημασία των διαγωνιοποιήσιμων πινάκων. Πραγματικά έχουμε

$$\begin{aligned} L_A s^j &= As^j = ASe^j = SS^{-1}ASe^j \\ &= SDe^j = S(d_j e^j) = d_j Se^j = d_j s^j \\ &(= \sum_{i=1}^{n} d_{ij} s^j), \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

σχέση η οποία, κατά τα γνωστά, μας οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Ορισμός 9.8 Ένας πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται
i. *ερμητιανός*, αν $A^\star = A$, όπου $A^\star := \bar{A}^T$,
ii. *συμμετρικός*, αν είναι πραγματικός και συμπίπτει με τον ανάστροφό του, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $A^T = A$,
iii. *ορθογώνιος*, αν είναι πραγματικός και ο ανάστροφός του είναι αντίστροφός του, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $A^T A = I_n$.

Σημείωση. Κάθε συμμετρικός πίνακας είναι, προφανώς, και ερμητιανός. Για έναν ορθογώνιο πίνακα $A, A = (a^1, \dots, a^n)$ ισχύει $(a^i, a^j) = \delta_{ij},\ i, j = 1, \dots, n$, ιδιαίτερα οι στήλες του είναι ορθογώνιες μεταξύ των, γεγονός στο οποίο αυτοί οι πίνακες οφείλουν την ονομασία τους.

Πρόταση 9.5 *Αν $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ένας ερμητιανός πίνακας, τότε οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί.*

Απόδειξη. Έστω λ μία ιδιοτιμή του A και $x \in \mathbb{C}^n$ ένα ιδιοδιάνυσμα του A ως προς λ, δηλαδή $x \neq 0$ και $Ax = \lambda x$. Τότε θα ισχύει και $\overline{Ax} = \overline{\lambda x}$, άρα $\bar{A}\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$. Επομένως $(\bar{A}\bar{x})^T = (\bar{\lambda}\bar{x})^T$, οπότε $\bar{x}^T\bar{A}^T = \bar{\lambda}\bar{x}^T$. Συνεπώς έχουμε $\bar{x}^T\bar{A}^T x = \bar{\lambda}\bar{x}^T x$ ή $\bar{x}^T A x = \bar{\lambda}\bar{x}^T x$ ή $\bar{x}^T(\lambda x) = \bar{\lambda}\bar{x}^T x$, άρα $(\lambda - \bar{\lambda})\bar{x}^T x = 0$. Τώρα, $\bar{x}^T x \neq 0$, αφού $x \neq 0$, οπότε $\lambda - \bar{\lambda} = 0$, δηλαδή ο λ είναι πραγματικός αριθμός. $\square$

Στη συνέχεια, στο Θεώρημα 9.2, θα δείξουμε ότι οι συμμετρικοί πίνακες είναι διαγωνιοποιήσιμοι. Μάλιστα θα δούμε ότι, αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας, τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας S, δηλαδή τέτοιος ώστε $S^T = S^{-1}$, για τον οποίο ισχύει $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Πριν μπορέσουμε να οδηγηθούμε σε αυτό το βασικό αποτέλεσμα, θα δώσουμε ορισμένα προκαταρκτικά αποτελέσματα για συμμετρικούς πίνακες.

Ορισμός 9.9 Δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ λέγονται *ορθογώνια όμοιοι*, αν υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ τέτοιος ώστε $B = S^TAS$. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ λέγεται *ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος*, αν είναι ορθογώνια όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα.

Σημείωση. Αφού, για κάθε ορθογώνιο πίνακα S, ο ανάστροφός του είναι και αντίστροφός του, δύο ορθογώνια όμοιοι πίνακες, είναι όμοιοι.

Σύμφωνα με το ακόλουθο, πρώτο προκαταρκτικό, αποτέλεσμα, ιδιοδιανύσματα συμμετρικών πινάκων, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Λήμμα 9.3 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας συμμετρικός πίνακας, λ, μ δύο ιδιοτιμές του και x, y αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Αν $\lambda \neq \mu$, τότε τα x, y είναι ορθογώνια.*

Απόδειξη. Αφού ο A είναι συμμετρικός, έχουμε $A^T = A$. Τώρα $Ax = \lambda x$, άρα $(Ax)^T = (\lambda x)^T$, οπότε $x^TA = \lambda x^T$, επομένως $x^TAy = (\lambda x^T)y = \lambda(x^Ty) = \lambda(x, y)$. Επιπρόσθετα, $x^TAy = x^T(\mu y) = \mu(x^Ty) = \mu(x, y)$. Από τις δύο αυτές σχέσεις συμπεραίνουμε ότι $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$, οπότε $(x, y) = 0$, αφού $\lambda \neq \mu$. $\square$

Σύμφωνα με το δεύτερο προκαταρκτικό αποτέλεσμα, συμμετρικοί πίνακες με ανά δύο διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμοι.

Πρόταση 9.6 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας συμμετρικός πίνακας, με ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Τότε ο A είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Έστω $x^1, \ldots, x^n$ ιδιοδιανύσματα του A ως προς τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, αντίστοιχα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να δεχθούμε ότι τα $x^1, \ldots, x^n$ είναι μοναδιαία, δηλαδή $\|x^i\| = 1,\ i = 1, \ldots, n$. Επιπρόσθετα, σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, τα $x^1, \ldots, x^n$ είναι ανά δύο ορθογώνια μεταξύ τους, συνεπώς ισχύει

$(x^i, x^j) = \delta_{ij},\ i, j = 1, \dots, n$. Τώρα, ο πίνακας $S, S := (x^1, \dots, x^n)$, είναι ορθογώνιος και ισχύει $S^T AS = S^T(Ax^1, \dots, Ax^n) = S^T(\lambda_1 x^1, \dots, \lambda_n x^n) = S^T S \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. □

Μετά από τα προηγούμενα δύο προκαταρκτικά αποτελέσματα είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε και το βασικό αποτέλεσμα. Σημειώνουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο αυτού του αποτελέσματος, η απόδειξη του οποίου είναι μάλιστα πολύ ευκολότερη, βλ. την Άσκηση 9.15.

Θεώρημα 9.2 *Κάθε $n \times n$ συμμετρικός πίνακας είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα δοθεί επαγωγικά ως προς n. Για $n = 1$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. Στό επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός μας ισχύει για $(n-1) \times (n-1)$ πίνακες και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n \times n$ πίνακες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας συμμετρικός πίνακας, λ_1 μία ιδιοτιμή του και x^1 ένα αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα. Τότε υπάρχουν $x^2, \dots, x^n \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{x^1, \dots, x^n\}$ να αποτελεί ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{R}^n$. Ο πίνακας $S, S := (x^1, \dots, x^n)$, είναι ορθογώνιος και ισχύει

$$S^T AS = S^T(\lambda_1 x^1, Ax^2, \dots, Ax^n) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x^1, x^1) & \star & \dots & \star \\ \lambda_1(x^2, x^1) & & & \\ \vdots & & B & \\ \lambda_1(x^n, x^1) & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

όπου B ένας $(n-1) \times (n-1)$ πραγματικός πίνακας, $B \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$. Αφού ο πίνακας A είναι συμμετρικός, θα έχουμε $(S^T AS)^T = S^T A^T (S^T)^T = S^T AS$, δηλαδή ο $S^T AS$ είναι συμμετρικός, οπότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, θα έχει τη μορφή

$$S^T AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

και ο B είναι επίσης συμμετρικός. Τώρα, σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής, υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας $T \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ τέτοιος ώστε $T^T B T = \operatorname{diag}(\lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Θέτουμε τώρα

$$T_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

και έχουμε

$$(ST_1)^T A (ST_1) = T_1^T (S^T A S) T_1 = T_1^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} T_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Τώρα, ο πίνακας ST_1 είναι ορθογώνιος, και έτσι συμπεραίνουμε ότι ο ισχυρισμός μας ισχύει και για $n \times n$ συμμετρικούς πίνακες. $\square$

9.2.1. Το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα. Έστω $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ένας πίνακας. Επειδή η διάσταση του γραμμικού χώρου $\mathbb{K}^{n,n}$ είναι n^2 και οι δυνάμεις $A^i, i = 0, \ldots, n^2$, είναι στοιχεία του $\mathbb{K}^{n,n}$, τα $I_n, A, \ldots, A^{n^2}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Επομένως υπάρχουν $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n^2}$, όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε $\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n^2} A^{n^2} = 0$, $0 \in \mathbb{K}^{n,n}$, δηλαδή υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ n^2, του οποίου ο πίνακας A είναι “ρίζα”. Το θέμα που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια είναι κατά πόσον υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο P, βαθμού μικρότερου του n^2, τέτοιο ώστε ο A να είναι “ρίζα” του, $P(A) = 0$. Το βασικό αποτέλεσμα εδώ είναι το Θεώρημα των Caley–Hamilton, σύμφωνα με το οποίο το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα, βαθμού n, έχει αυτή την ιδιότητα.

Ορισμός 9.10 Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Το πολυώνυμο p του ελάχιστου δυνατού βαθμού με μεγιστοβάθμιο συντελεστή, δηλαδή συντελεστή της μεγαλύτερης δύναμής του, τη μονάδα, για το οποίο ισχύει $p(A) = 0$, λέγεται *ελάχιστο πολυώνυμο* του A.

Το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα είναι προφανώς μονοσήμαντα ορισμένο. Πραγματικά, αν υπήρχαν δύο διαφορετικά ελάχιστα πολυώνυμα p και q ενός πίνακα

A, τότε η διαφορά τους θα ήταν μικρότερου βαθμού και θα ικανοποιούσε τη σχέση $(p-q)(A)=0$, δηλαδή τα p και q δεν θα ήταν ελάχιστα πολυώνυμα, άτοπο.

Λήμμα 9.4 *Έστω $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, p το ελάχιστο πολυώνυμό του, και P ένα πολυώνυμο για το οποίο ισχύει $P(A)=0$. Τότε το p διαιρεί το P.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του p έπεται ότι ο βαθμός του είναι το πολύ όσος και ο βαθμός του P. Επομένως ισχύει $P = pq + r$, με πολυώνυμα q και r τέτοια ώστε ο βαθμός του r να είναι μικρότερος του βαθμού του p. Θέλουμε να δείξουμε ότι το r είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Αν υποθέσουμε, προς στιγμήν, ότι αυτό δεν είναι αληθές, θα είχαμε αφ' ενός $r(A) = P(A) - p(A)q(A) = 0$ και αφ' ετέρου ο βαθμός του r θα ήταν μικρότερος του βαθμού του p, άτοπο. $\square$

Στη συνέχεια θα δούμε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Λήμμα 9.5 *Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.*

Απόδειξη. Έστω $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ όμοιοι πίνακες, δηλαδή $B = S^{-1}AS$ με $S \in \mathbb{K}^{n,n}$. Αν i είναι ένας φυσικός αριθμός ή το μηδέν, τότε $B^i = (S^{-1}AS)^i = S^{-1}AS \cdots S^{-1}AS = S^{-1}A^iS$, και, ακριβώς αντίστοιχα, $A^i = SB^iS^{-1}$. Επομένως, αν για κάποιο πολυώνυμο p ισχύει $p(A)=0$, θα έχουμε επίσης $p(B) = S^{-1}p(A)S = S^{-1}0S = 0$. Αντίστροφα, αν για κάποιο πολυώνυμο q ισχύει $q(B)=0$, θα έχουμε επίσης $q(A) = Sq(B)S^{-1} = S0S^{-1} = 0$. Από τα ανωτέρω έπεται εύκολα, αν λάβουμε υπ' όψιν μας και το γεγονός ότι το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα ορίζεται μονοσήμαντα, ότι οι πίνακες A και B έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο. $\square$

Σύμφωνα με το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα, των Caley–Hamilton, ένας πίνακας είναι "ρίζα", με έννοια που γίνεται σαφής στο Θεώρημα, του χαρακτηριστικού της πολυωνύμου. Ενώ λοιπόν μέχρι τώρα ξέραμε ότι ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου ενός $n \times n$ πίνακα είναι το πολύ n^2, τώρα θα δούμε ότι αυτός ο βαθμός είναι το πολύ n.

Θεώρημα 9.3 (των Caley–Hamilton) *Αν p είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, τότε ισχύει $p(A)=0$.*

Απόδειξη. Έστω $p(t) = (-1)^n(t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_0)$, με $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, \dots, n-1$. Επειδή, σύμφωνα με την (7.11), ισχύει $(A - \lambda I_n)\,\mathrm{adj}\,(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) I_n$, έχουμε, λαμβάνοντας υπ' όψιν και τον ορισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου,

$$(A - \lambda I_n)\,\mathrm{adj}\,(A - \lambda I_n) = p(\lambda) I_n. \tag{9.4}$$

Τώρα ο adj $(A - \lambda I_n)$ έχει στοιχεία πολυώνυμα ως προς λ βαθμού το πολύ $n - 1$, μπορεί συνεπώς να γραφεί στη μορφή

$$\mathrm{adj}\,(A - \lambda I_n) = B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}. \tag{9.5}$$

Από τις (9.4) και (9.5) λαμβάνουμε

$$(A - \lambda I_n)(B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) = (-1)^n(\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0)I_n. \tag{9.6}$$

Σύγκριση συντελεστών στα δύο μέλη της (9.6), δηλαδή σύγκριση των συντελεστών ίδιων δυνάμεων του λ, μας δίνει

$$\begin{aligned} AB_0 &= (-1)^n\alpha_0 I_n \\ -B_0 + AB_1 &= (-1)^n\alpha_1 I_n \\ &\vdots \\ -B_{n-2} + AB_{n-1} &= (-1)^n\alpha_{n-1} I_n \\ -B_{n-1} &= (-1)^n I_n\,. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις σχέσεις με $I_n, A, \ldots, A^n$, αντίστοιχα, και προσθέτοντας κατά μέλη λαμβάνουμε

$$0 = (-1)^n(\alpha_0 I_n + \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + A^n),$$

δηλαδή $p(A) = 0$. □

Συνδυάζοντας το Λήμμα 9.4 με το Θεώρημα 9.3 οδηγούμαστε αμέσως στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 9.1 *Το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα διαιρεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.* □

9.3. Ασκήσεις

9.1. Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της απεικόνισης $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, L(x) := Ax$, όπου

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.2. Έστω X ένας γραμμικός χώρος, $L : X \longrightarrow X$ ένας ισομορφισμός, λ μία ιδιοτιμή της L, και x ένα ιδιοδιάνυσμα της L ως προς την ιδιοτιμή λ. Αποδείξτε ότι το λ είναι διάφορο του μηδενός. Προσδιορίστε μία ιδιοτιμή της L^{-1} και ένα ιδιοδιάνυσμά της ως προς αυτή την ιδιοτιμή.

9.3. Έστω $L : X \longrightarrow X$ μία γραμμική απεικόνιση, και x ένα ιδιοδιάνυσμα της L ως προς την ιδιοτιμή λ. Προσδιορίστε μία ιδιοτιμή και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της γραμμικής απεικόνισης $L^2 := L \circ L$.

9.4. Έστω $L, M : X \longrightarrow X$ γραμμικές απεικονίσεις. Αν η M είναι ένεση, δηλαδή ένα προς ένα, και x ένα ιδιοδιάνυσμα της $L \circ M$ ως προς την ιδιοτιμή λ, προσδιορίστε μία ιδιοτιμή και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης $M \circ L$.

9.5. Αποδείξτε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ακριβώς τότε αντιστρέψιμος, αν το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του.

9.6. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας άνω τριγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές του.

9.7. Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

9.8. Προσδιορίστε την αλγεβρική και τη γεωμετρική πολλαπλότητα των πραγματικών ιδιοτιμών του πίνακα

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

9.9. Έστω

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & -2 \\ -2 & -5 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -2 \\ 4 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Προσδιορίστε, αν υπάρχει, έναν διαγώνιο πίνακα όμοιο του A.

9.10. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathbb{R}^{2n+1,2n+1}$. Αποδείξτε ότι ο πίνακας A έχει τουλάχιστον μία πραγματική ιδιοτιμή.

9.11. Έστω

$$A := \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 5 & -14 & 2 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix}.$$

Προσδιορίστε έναν διαγώνιο πίνακα όμοιο του A.

9.12. Εξετάστε κατά πόσον οι πίνακες

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \ B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ και } C := \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι διαγωνιοποιήσιμοι.

9.13. (Ανισότητα του Gerschgorin.) Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $n \times n$ πίνακας και λ μία ιδιοτιμή του. Αποδείξτε ότι, για κάποιο $i \in \{1, \dots, n\}$, ισχύει

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,$$

δηλαδή κάθε ιδιοτιμή λ βρίσκεται σε κάποιον κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο, με κέντρο a_{ii} και ακτίνα $\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$. Οι κύκλοι αυτοί λέγονται *κύκλοι του Gerschgorin*. Με αυτόν τον τρόπο δεν προσδιορίζουμε φυσικά τις ιδιοτιμές ενός πίνακα, αλλά έχουμε στη διάθεσή μας μία μέθοδο εντοπισμού των.
[*Υπόδειξη*: Έστω x ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Αν x_i είναι μία κατ' απόλυτο τιμή μέγιστη συνιστώσα του x, τότε θα έχουμε

$$(a_{ii}-\lambda)x_i = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j.]$$

9.14. Συνδυάστε τις Ασκήσεις 9.5 και 9.13, για να αποδείξετε ότι ένας πίνακας, με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, είναι αντιστρέψιμος, να αποδείξετε δηλαδή την Άσκηση 6.2.

9.15. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος πίνακας. Αποδείξτε ότι ο A είναι συμμετρικός.

Βιβλιογραφία

[1] Γ. Δ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγαλής: *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*, δ′ έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2002.

[2] Σ. Α. Ανδρεαδάκης: *Γραμμική Άλγεβρα*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1991.

[3] H. Anton: *Elementary Linear Algebra*. 4th ed., Wiley, New York, 1984.

[4] G. Fischer: *Lineare Algebra*, rororo vieweg, Rowohlt, Reinbek, 1975.

[5] W. Greub: *Linear Algebra*. 3rd ed., Springer–Verlag, New York, 1967.

[6] G. Hadley: *Linear Algebra*. 3rd printing, Addison–Wesley, Reading, 1973.

[7] W. Nef: *Lehrbuch der Linearen Algebra*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1966.

[8] G. Strang: *Linear Algebra and its Applications*. 3rd ed., Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1988. (Ελληνική μετάφραση με τίτλο *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*. γ′ έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1999.)

Ευρετήριο