

HY370 - Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Μάθημα επιλογής Ε3

Διδάσκοντες: Στυλιανού Ιωάννης – Καφεντζής Γεώργιος

Δημιουργία διαφανειών: Καφεντζής Γεώργιος

- Ως τώρα... (coming from HY215)

- Σειρές Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Μετασχ. Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- Μετασχ. Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- ΓΧΑ συστήματα:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

- **Θεώρημα Shannon-Nyquist:**

Ακριβής και τέλεια ανακατασκευή ενός σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$ από τα δείγματά του – Προϋποθέσεις:

1. Το σήμα συνεχούς χρόνου να έχει μετασχηματισμό Fourier $X(f)$ τέτοιο ώστε:

$$|X(f)| = 0, \quad |f| > f_{max}$$

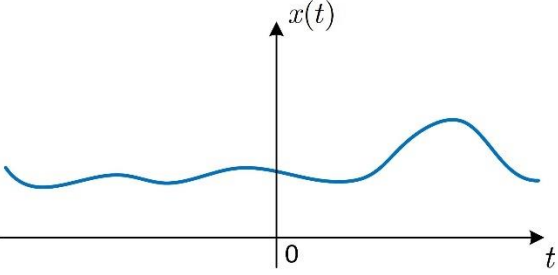
με f_{max} τη μέγιστη μη μηδενική συχνότητα του σήματος συνεχούς χρόνου

2. Η συχνότητα δειγματοληψίας f_s πρέπει να είναι (γνήσια) μεγαλύτερη από τη **διπλάσια** μέγιστη μη μηδενική συχνότητα f_{max}

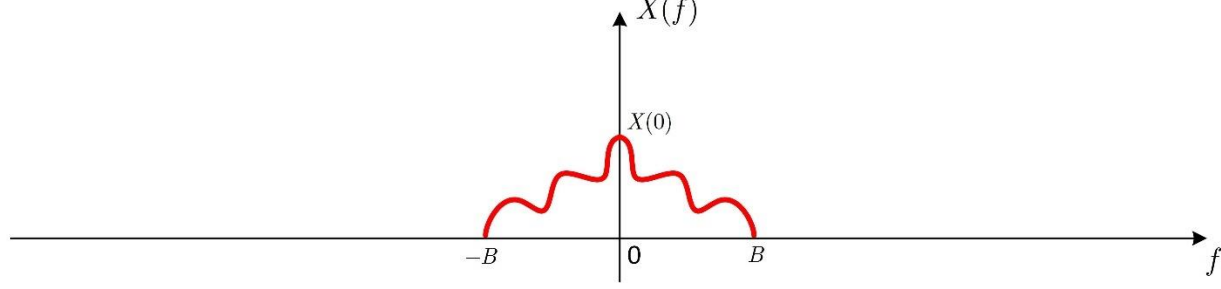
$$f_s > 2f_{max}$$

- Η συχνότητα f_{max} ονομάζεται **συχνότητα Nyquist** και η συχνότητα $2f_{max}$ ονομάζεται **ρυθμός Nyquist**
- Η δειγματοληψία του σήματος συνεχούς χρόνου στο χρόνο δημιουργεί «αντίγραφα» του φάσματος $X(f)$ ανά f_s Hz στο πεδίο της συχνότητας

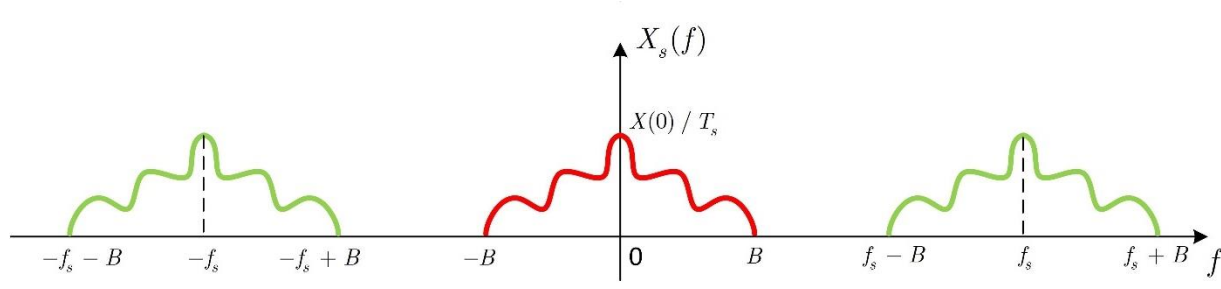
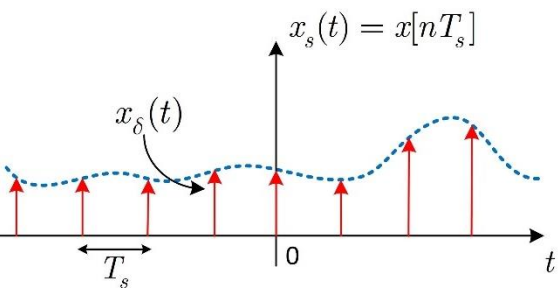
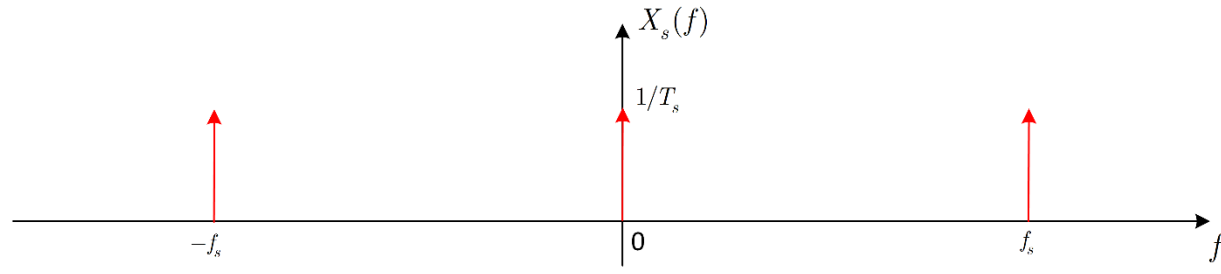
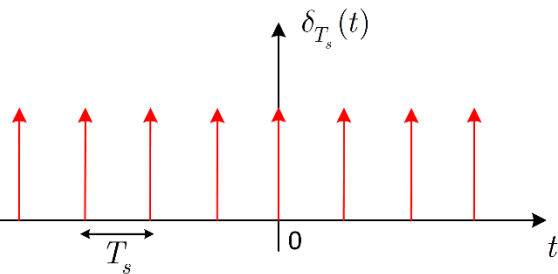
ΧΡΟΝΟΣ



ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ



★ (Συνέλιξη)



- **Θεώρημα Shannon-Nyquist:**

Πώς γίνεται η ανακατασκευή;

1. Πολλαπλασιάζουμε το φάσμα $X_S(f)$ του δειγματοληπτημένου σήματος $x[n]$ με ένα τετραγωνικό παράθυρο – χαμηλοπερατό φίλτρο

$$H_{lp}(f) = T_s \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

δηλ.

$$X_{rec}(f) = X_S(f)H_{lp}(f)$$

ώστε να απομονωθεί το «κεντρικό» φάσμα από τα «αντίγραφα» του

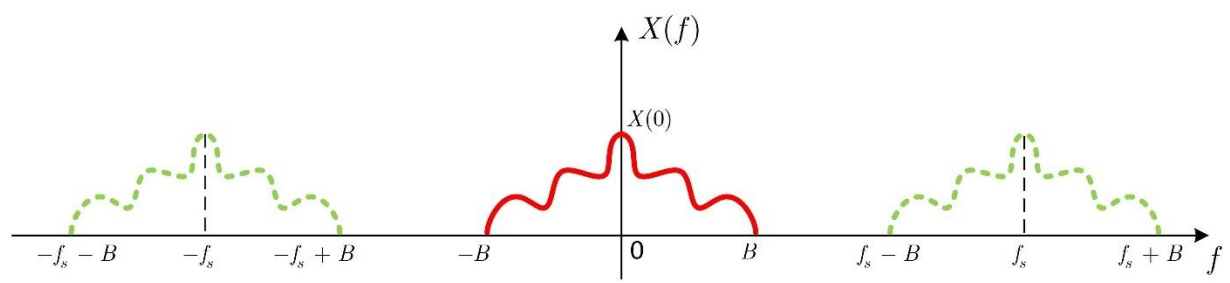
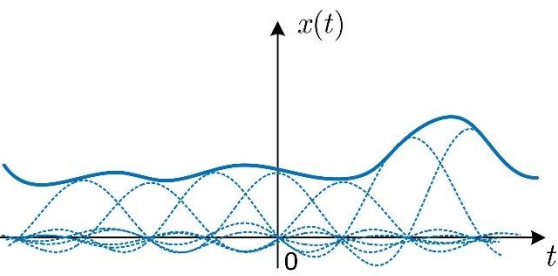
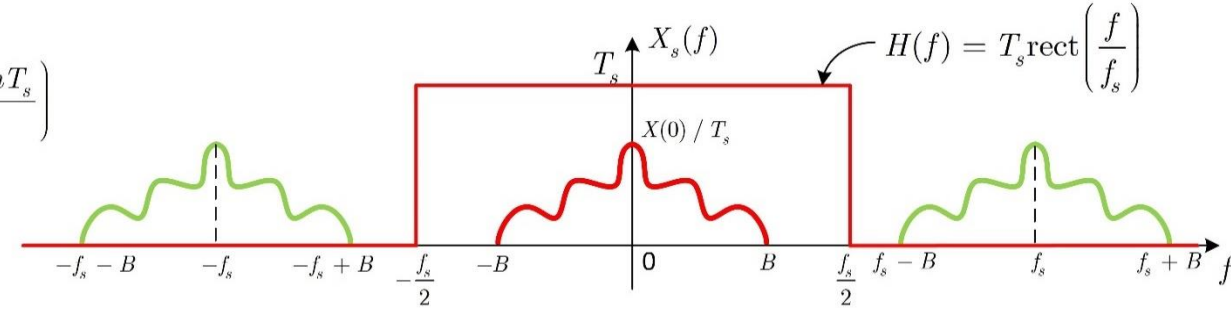
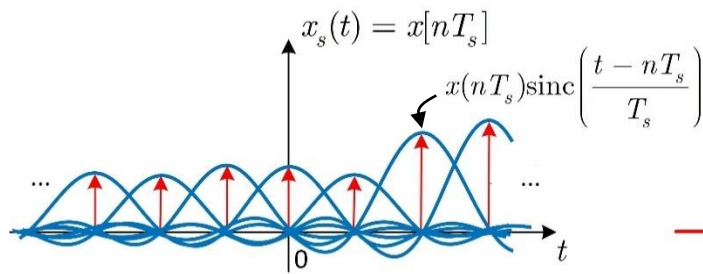
2. Η πράξη αυτή ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό και άθροιση κάθε δείγματος $x[nT_s]$ του δειγματοληπτημένου σήματος $x[n]$ με μετατοπισμένες συναρτήσεις $\text{sinc}(\cdot)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[nT_s] \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

- Δηλαδή:

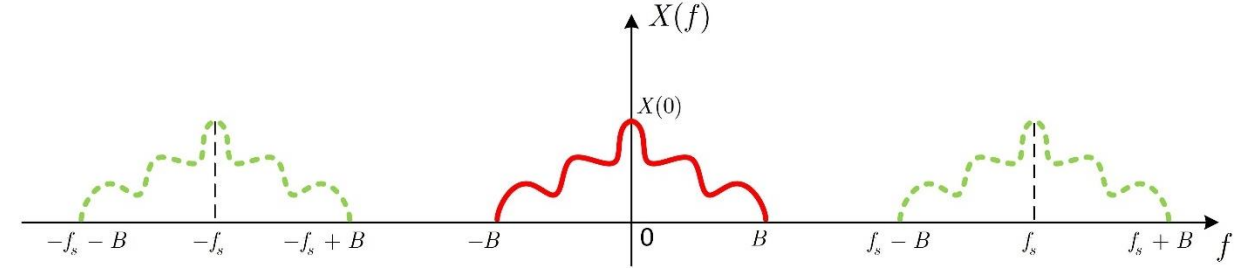
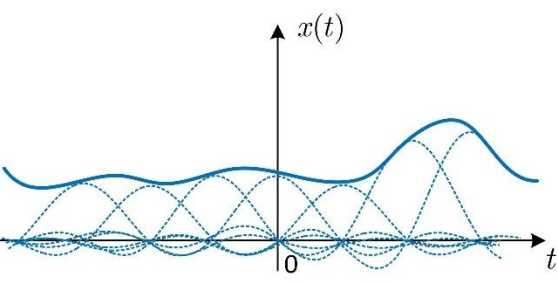
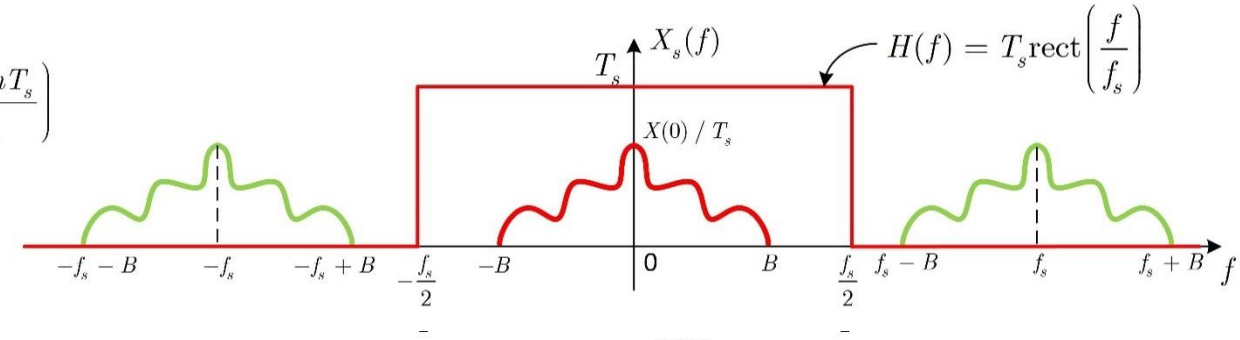
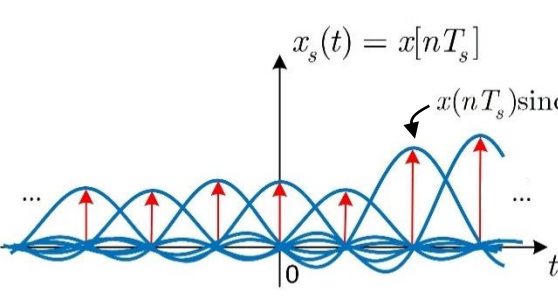
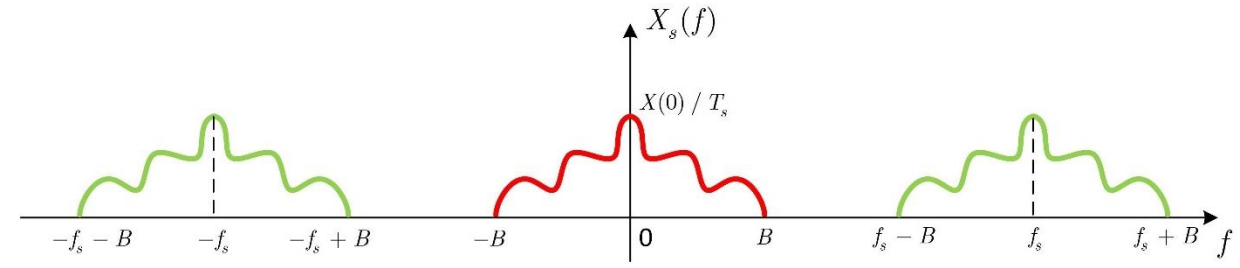
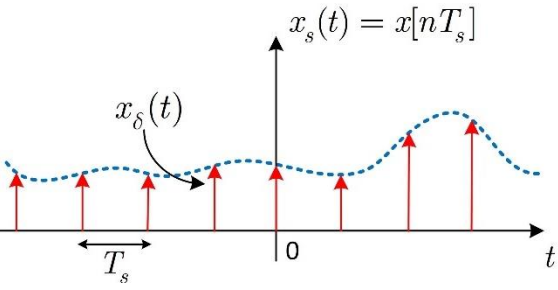
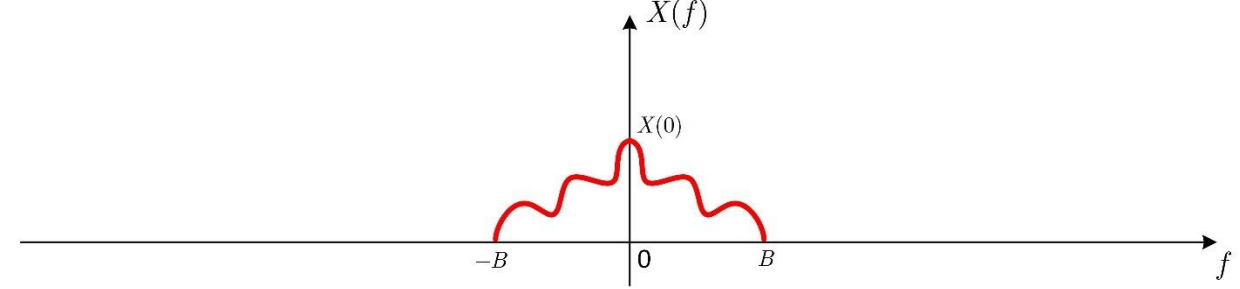
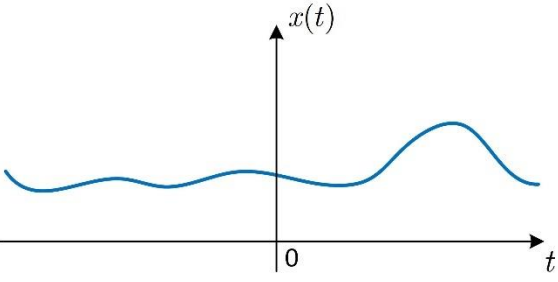
$$\begin{aligned}
 x_{rec}(t) &= x_s(t) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \\
 &= \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \right] * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)
 \end{aligned}$$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$



ΧΡΟΝΟΣ

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ



- Παράδειγμα:

- Έστω το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$. Δειγματοληπτήστε το με συχνότητα δειγματοληψίας f_s και βρείτε το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$.

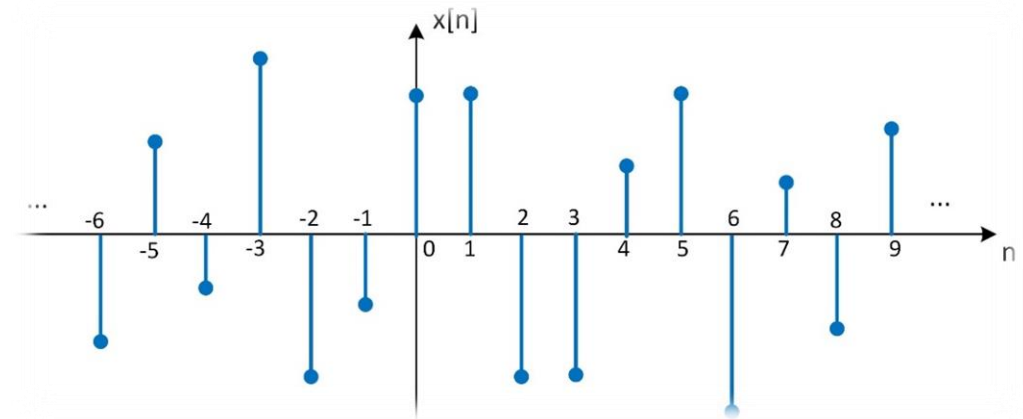
Είναι $T_s = \frac{1}{f_s}$, και $t := nT_s = \frac{n}{f_s}$

Άρα έχουμε $x(nT_s) = A \cos(2\pi f_0 nT_s) = A \cos\left(\frac{2\pi f_0 n}{f_s}\right)$

Άρα $x[n] = A \cos(\omega_0 n)$, με $\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s}$. $\left(\frac{\text{rad}}{\text{sample}}\right)$

Δεν προέρχονται **όλα** τα σήματα διακριτού χρόνου από δειγματοληψία κάποιων σημάτων συνεχούς χρόνου!

- Σήμα διακριτού χρόνου



- Εν γένει, μπορεί να είναι μιγαδικό

$$x[n] = a[n] + jb[n], \quad j = \sqrt{-1}$$

$$= \Re\{x[n]\} + j\Im\{x[n]\}$$

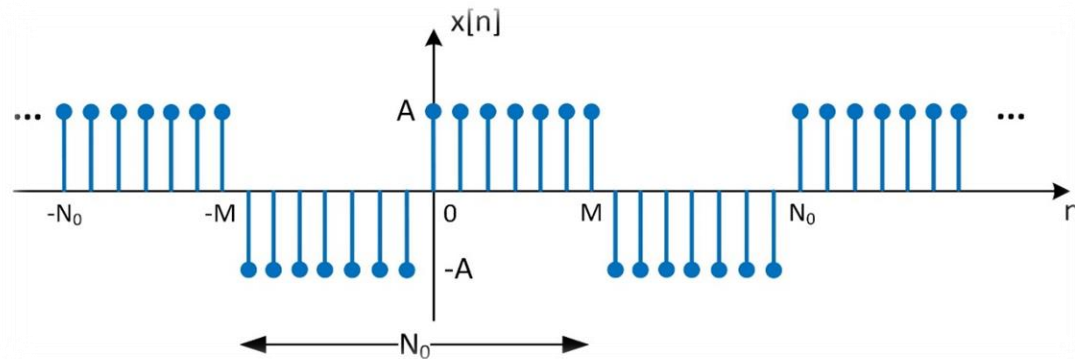
$$= |x[n]| e^{j\phi_x[n]}$$

- Αναπαράσταση μέτρου - φάσης

$$|x[n]| = \sqrt{\Re^2\{x[n]\} + \Im^2\{x[n]\}}$$

$$\phi_x[n] = \tan^{-1} \frac{\Im\{x[n]\}}{\Re\{x[n]\}} \in [-\pi, \pi]$$

- Περιοδικά σήματα



- Ένα σήμα θεωρείται περιοδικό αν υπάρχει θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε

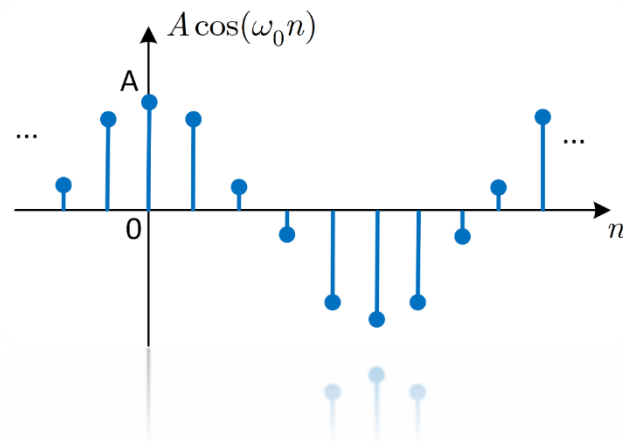
$$x[n] = x[n + N]$$

- Ο μικρότερος αριθμός N που ικανοποιεί τη σχέση αυτή ονομάζεται **περίοδος** του σήματος.
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι αν $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$, με περιόδους N_1, N_2 , τότε η περίοδος του σήματος $y[n]$ είναι

$$N_y = \frac{N_1 N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)}$$

• Ημίτονα

- Περιοδικότητα στο χρόνο
- Είναι κάθε ημίτονο περιοδικό; (στο συνεχή χρόνο, ήταν!)
- Έστω ότι υπάρχει περίοδος N , τότε θα ικανοποιεί τη σχέση



$$x[n] = x[n + N]$$

- Άρα

$$A \cos(\omega_0 n) = A \cos(\omega_0 (n + N))$$

$$A \cos(\omega_0 n) = A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N)$$

$$\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi k)$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

- Πρέπει να ισχύει

$$\omega_0 N = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

δηλ.

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N} \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\omega_0}, \quad N, k \in \mathbb{Z}$$

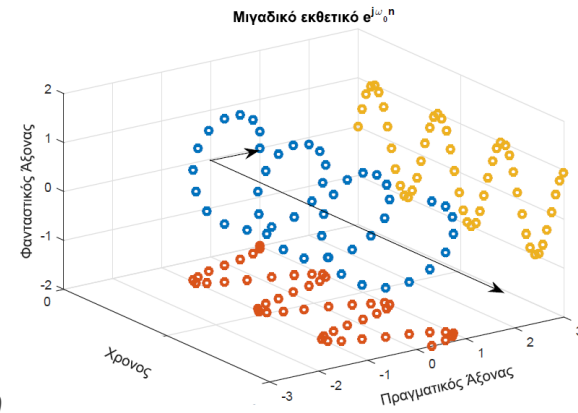
Θέλουμε το μικρότερο k που να δίνει ακέραιο N !

- Ημίτονα
- Περιοδικότητα στη συχνότητα (!!)
- Υπενθύμιση: Σχέσεις του Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \operatorname{Re}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \operatorname{Im}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



- Στο διακριτό χρόνο

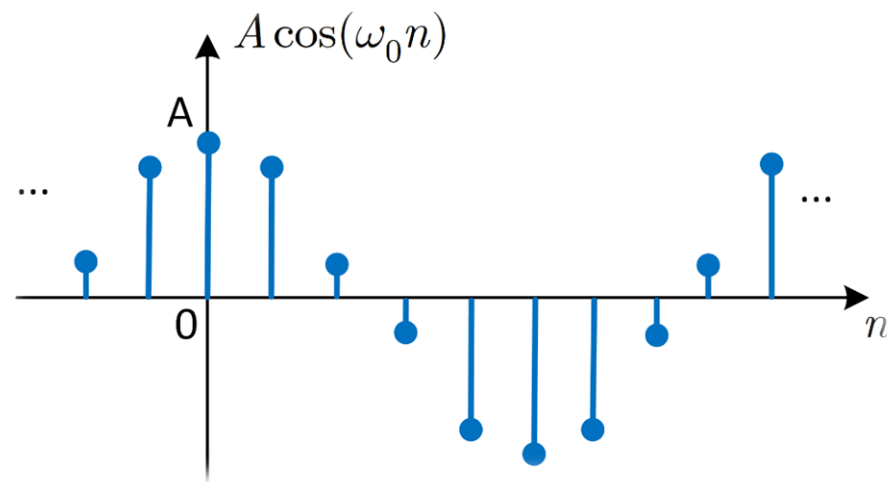
$$e^{j(\omega_0 + \varphi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi n}$$

- Αν $\varphi = 2\pi\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, τότε

$$e^{j(\omega_0 + \varphi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi n} = e^{j2\pi\lambda n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n} \quad (!!!!!!!!!!!)$$

- Άρα τα μιγαδικά εκθετικά σήματα είναι ΠΑΝΤΑ περιοδικά στο χώρο της συχνότητας με περίοδο (στη συχνότητα) ίση με 2π !!
 - Το ίδιο ισχύει και για τα ημιτονοειδή σήματα!

- Ημίτονα
- Σύνοψη:



Περιοδικό?

Εξαρτάται από το ω_0 !

Περιοδικό?

Ναι, πάντα! (ανεξάρτητα από τη μορφή στο χρόνο)
 Η περίοδος είναι ίση με 2π

• Ημίτονα

- Αυτή η ιδιότητα της περιοδικότητας στη συχνότητα έχει μερικές ενδιαφέρουσες αντι-διαισθητικές προεκτάσεις
- Θα περίμενε κανείς όσο αυξάνεται η συχνότητα ενός ημιτόνου, τόσο γρηγορότερα αυτό να αλλάζει/ταλαντώνεται
 - Αυτό γνωρίζουμε από το συνεχή χρόνο

• Όμως...

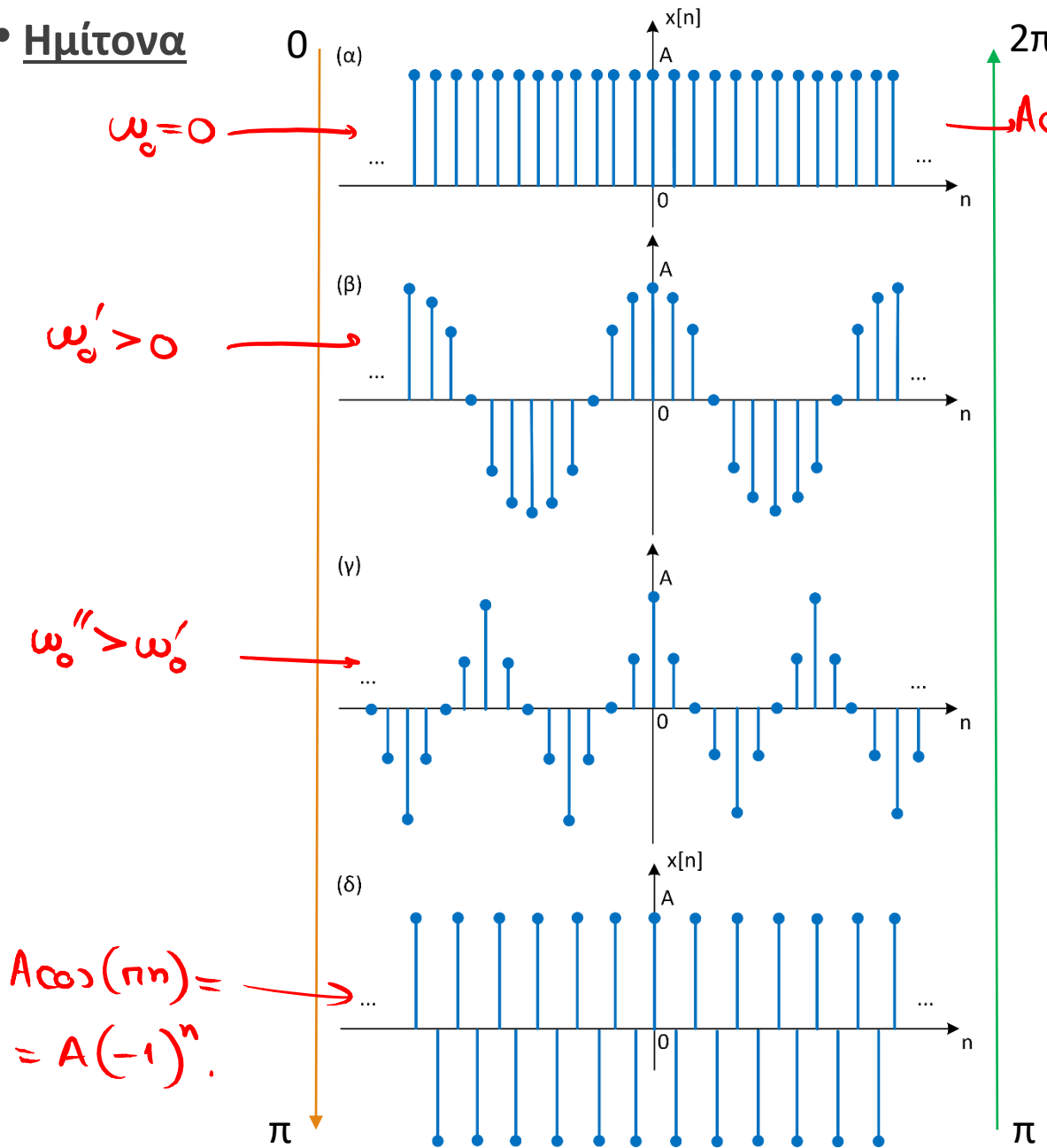
$$x_1[n] = 4 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$x_2[n] = 4 \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) = 4 \cos\left(2\pi n - \frac{2\pi n}{3}\right)$$

$$= 4 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3} (!!!)$$

- Οι δυο διαφορετικές συχνότητες παράγουν το ίδιο σήμα!!!

• Ημίτονα



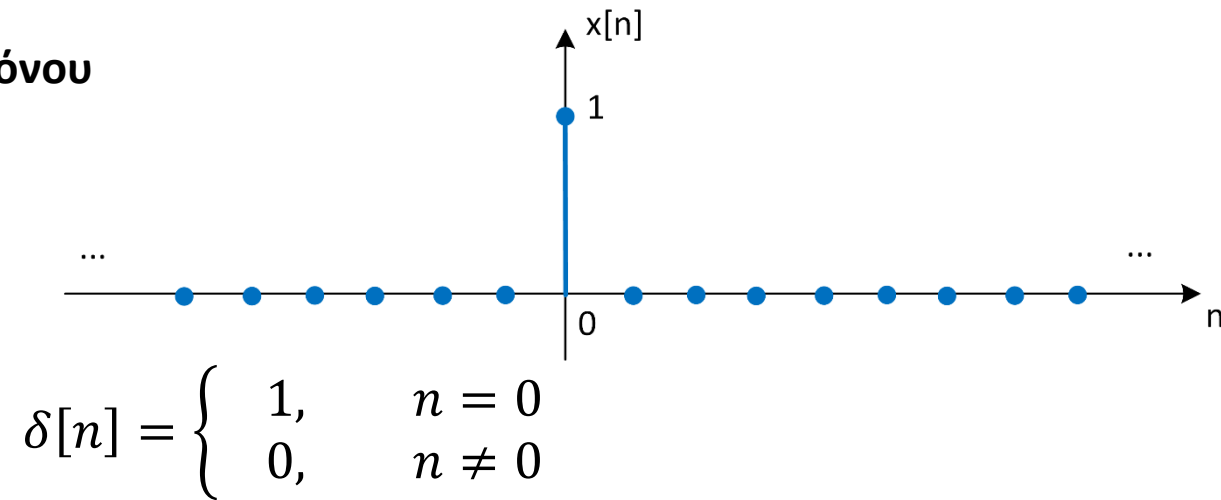
- Στο $[0, \pi]$, η συχνότητα ταλάντωσης αυξάνεται όσο μεγαλώνει το ω_0
- Στο $(\pi, 2\pi]$, η συχνότητα ταλάντωσης μειώνεται όσο μεγαλώνει το ω_0 !!
- Συχνότητες γύρω από το $\omega = 0 \rightarrow$ χαμηλές
- Συχνότητες γύρω από το $\omega = \pi \rightarrow$ υψηλές

• Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου

- Στο συνεχή χρόνο, κυριαρχούσαν μοντέλα σημάτων όπως η βηματική συνάρτηση, η συνάρτηση (κατανομή) Δέλτα, η εκθετική μιγαδική συνάρτηση, και άλλες.
- Ας δούμε ποια από αυτά υπάρχουν και στο διακριτό χρόνο και αν/πως αλλάζουν σε σχέση με αυτά που ξέρουμε

• Συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου

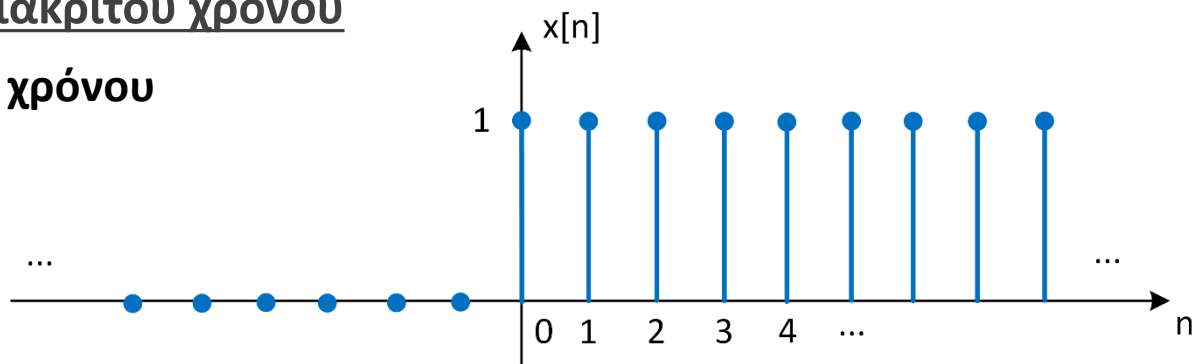
Ορισμός:



- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

- Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου
- Βηματική Συνάρτηση διακριτού χρόνου



Ορισμός:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- Ιδιότητες:

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n - k]$$

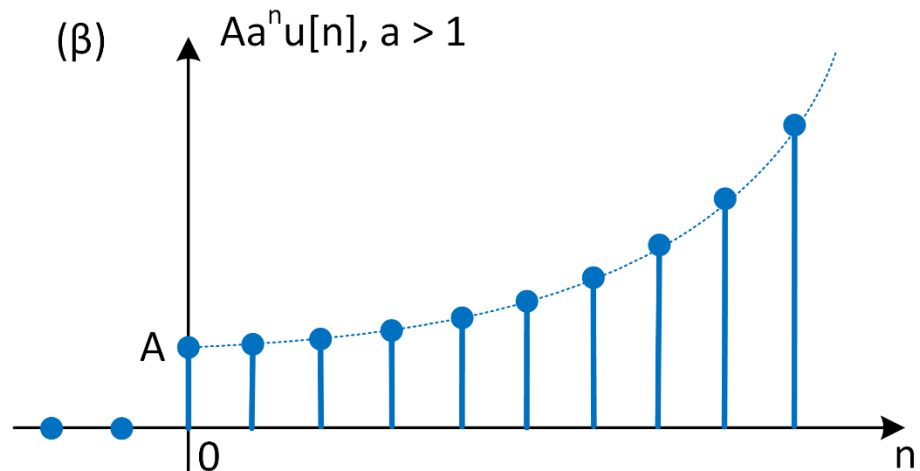
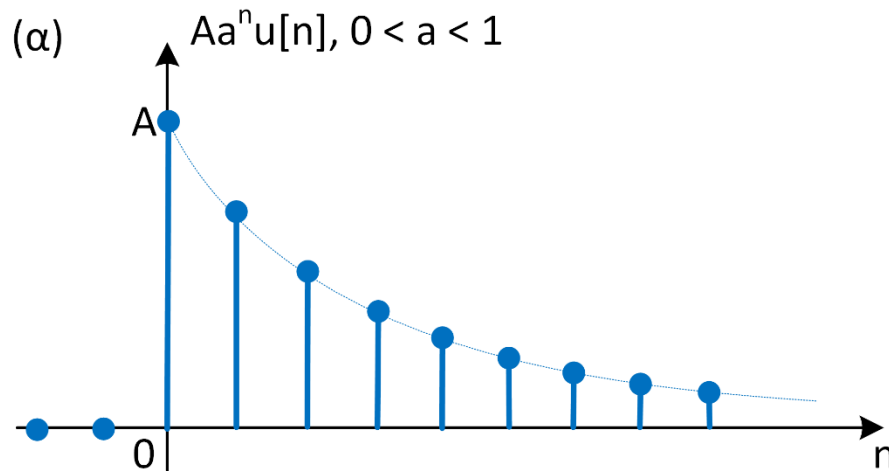
$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

- Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου
- Εκθετική μιγαδική συνάρτηση διακριτού χρόνου

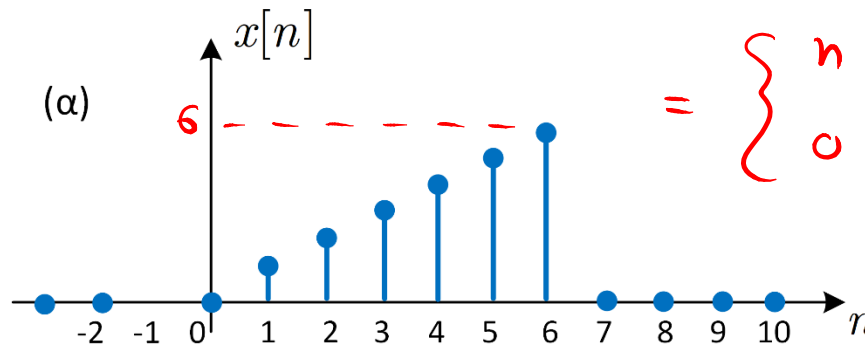
$$x[n] = a^n, \quad a \in \mathbb{C}$$

- Περισσότερο χρήσιμες είναι οι «εκδόσεις» γινομένου με τη βηματική συνάρτηση

$$x[n] = a^n u[n], \quad 0 < a < 1 \text{ ή } a > 1$$

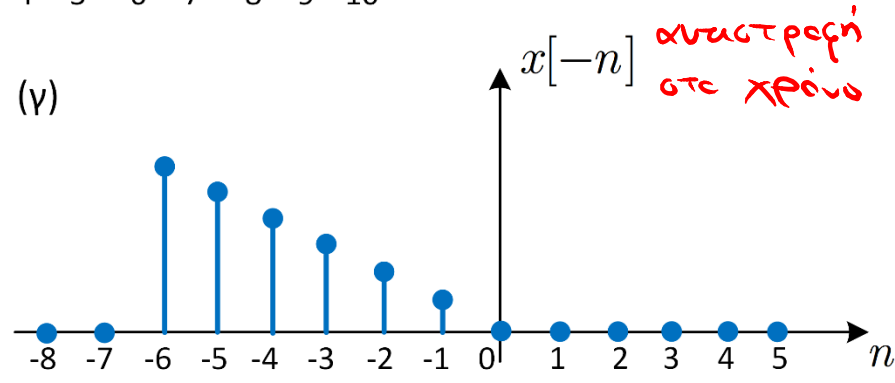
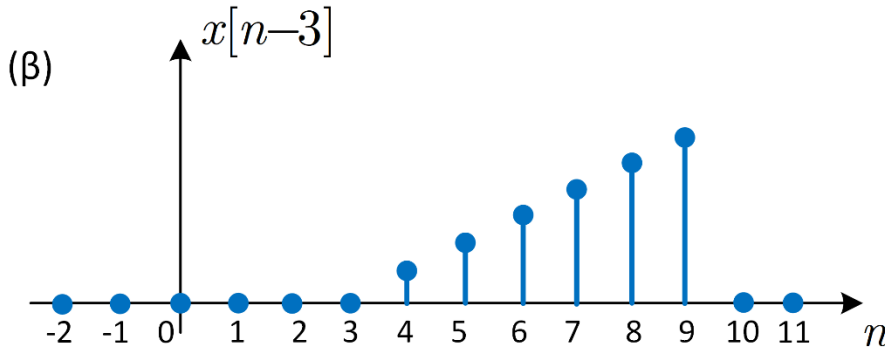


• Μετασχηματισμοί σημάτων

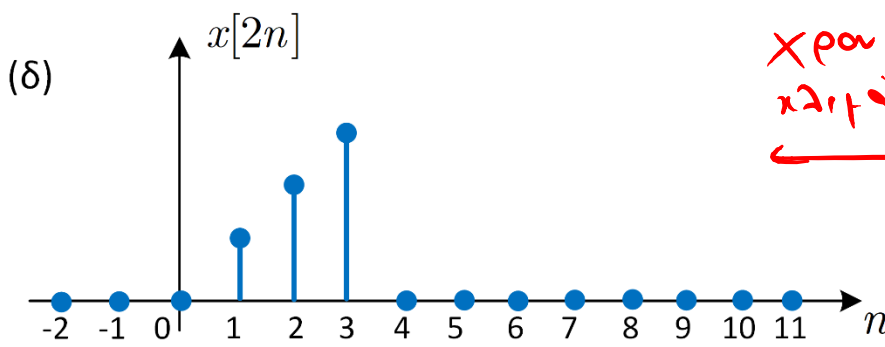


$$= \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

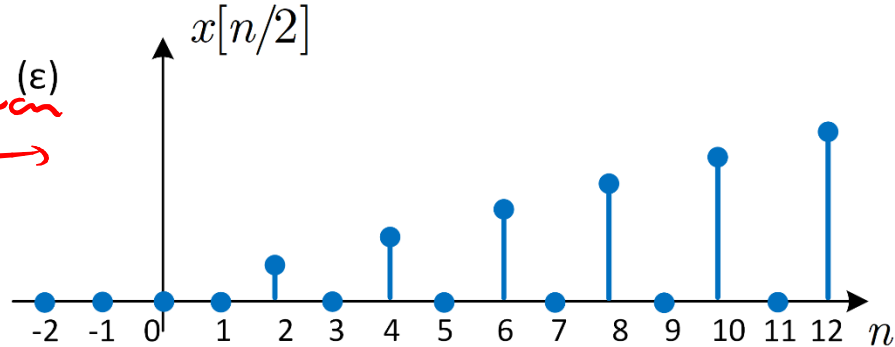
χρον. μετατόπιση



αναστροφή
στο χρόνο

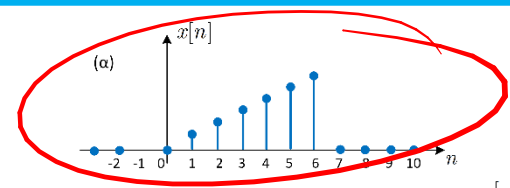


χρονική
συστολή (ε)



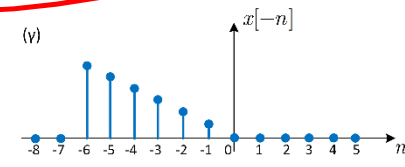
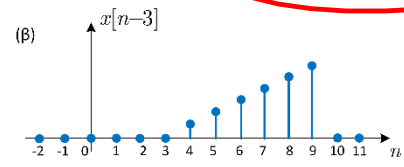
• Μετασχηματισμοί σημάτων

α) $x[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$



β) Χρον. μετατόπιση: $x[n-3]$

$x[n-3] = \begin{cases} n-3, & 0 \leq n-3 \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} n-3, & 3 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

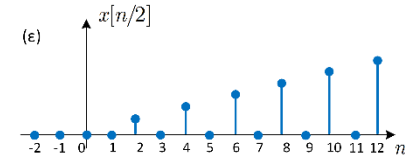
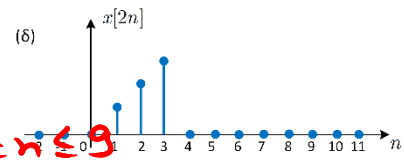


δ) Αντιστροφή στο χρόνο

$x[-n] = \begin{cases} -n, & 0 \leq -n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} -n, & -6 \leq n \leq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

δ)-ε) $x[2n] = \begin{cases} 2n, & 0 \leq 2n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 2n, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$x[\frac{n}{2}] = \begin{cases} \frac{n}{2}, & 0 \leq \frac{n}{2} \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n=2, 4, 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$



• Ανάλυση σήματος

- Κάθε σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα ως

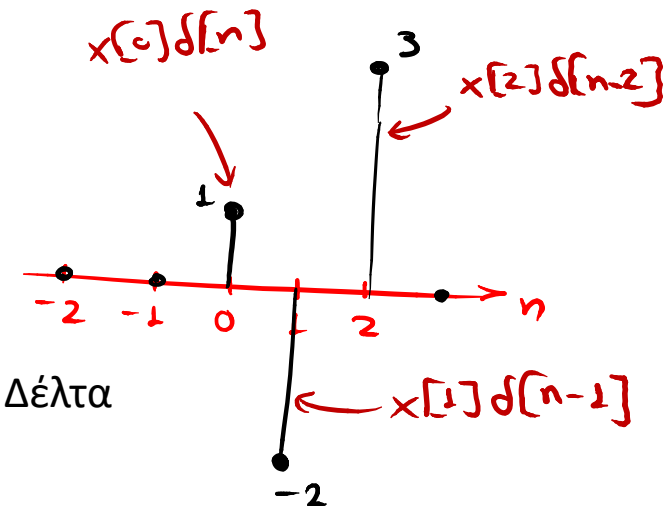
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k]$$

- Παρατηρήστε ότι κάθε συνάρτηση Δέλτα έχει πλάτος την αντίστοιχη τιμή του σήματος $x[n]$ τη χρονική στιγμή $n = k$
- Σκεφτείτε το ανάλογο του συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

- Παράδειγμα:

○ Γράψτε το σήμα $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -2, & n = 1 \\ 3, & n = 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ με χρήση συναρτήσεων Δέλτα



$$\begin{aligned} x[n] &= x[0] \delta[n] + x[1] \delta[n-1] + x[2] \delta[n-2] \\ &= \delta[n] - 2 \delta[n-1] + 3 \delta[n-2]. \end{aligned}$$

• Ενέργεια και Ισχύς σήματος

- Χρειαζόμαστε μια μετρική που να απεικονίζει το «μέγεθος» ενός σήματος
- Μια τέτοια είναι η **ενέργεια** ενός σήματος

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

- Σήματα για τα οποία $0 < E < +\infty$ ονομάζονται **σήματα ενέργειας**
 - Όλα τα σήματα στη φύση ή στο εργαστήριο είναι σήματα ενέργειας
- Κάποια ενδιαφέροντα σήματα (από θεωρητικής πλευράς) έχουν άπειρη ενέργεια
- Μια πιο κατάλληλη μετρική είναι η **ισχύς** ενός σήματος

$$P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

- Ένα σήμα είναι ενέργειας, ισχύος, ή τίποτε από τα δυο!

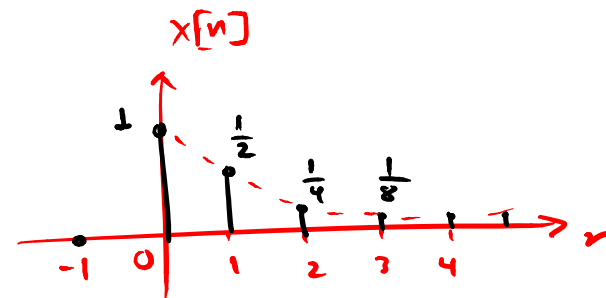
• Ενέργεια και Ισχύς σήματος

- Hints:
- Σήμα με:
 - Πεπερασμένη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος \rightarrow σήμα ενέργειας
 - Άπειρη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος που φθίνει στο μηδέν όταν $n \rightarrow \pm\infty \rightarrow$ πιθανότατα σήμα ενέργειας
 - Άπειρη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος που δε φθίνει στο μηδέν όταν $n \rightarrow \pm\infty \rightarrow$ σήμα ισχύος
 - Περιοδικό σήμα με πεπερασμένο πλάτος \rightarrow σήμα ισχύος

• Ενέργεια και Ισχύς σήματος

• Παραδείγματα:

○ Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$



$$\text{Είναι } E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \right]^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} u^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n u^2[n]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Άρα } E = \frac{4}{3}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

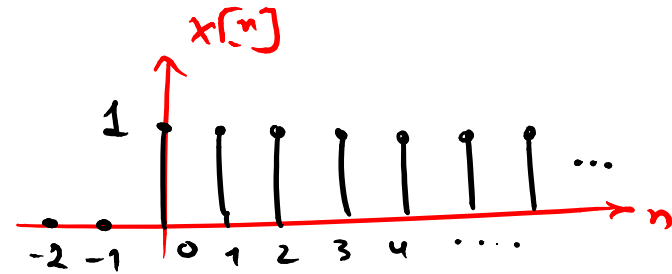
$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$u^2[n] = \begin{cases} 1^2 = 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

• Ενέργεια και Ισχύς σήματος

• Παραδείγματα:

- Υπολογίστε την ισχύ του σήματος $x[n] = u[n]$



$$\text{Είναι } P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N u^2[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N u[n]$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N 1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} (N+1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N+1}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\cancel{N} \left(1 + \frac{1}{N}\right)}{\cancel{N} \left(2 + \frac{1}{N}\right)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{N}}{2 + \frac{1}{N}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } P = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} c = (N_2 - N_1 + 1) \cdot c$$

- Τα σήματα φέρουν χρήσιμη πληροφορία που μπορεί να εξαχθεί μέσω των **συστημάτων**
- Ένα σύστημα δεν είναι τίποτε άλλο από μια οποιαδήποτε διαδικασία παράγει μια **έξοδο** όταν διεγερθεί από μια **είσοδο**
 - Το σύστημα διεγείρεται από ένα **σήμα εισόδου** και παράγει ως απόκριση ένα **σήμα εξόδου**
 - Το σύστημα μπορεί να υλοποιείται σε υλικό, λογισμικό, ή να υπάρχει στη φύση
- Η πιο γενική απεικόνιση ενός συστήματος είναι η ακόλουθη



- Το σήμα εισόδου συμβολίζεται με $x[n]$
- Το σήμα εξόδου συμβολίζεται με $y[n]$

- Το σύστημα πραγματοποιεί μια λειτουργία επάνω στο σήμα εισόδου με σκοπό να εξάγει κάποια πληροφορία από αυτό
- Μια διαφορετική αναπαράσταση ενός συστήματος είναι η ακόλουθη

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

με $T\{\cdot\}$ να αναπαριστά έναν τελεστή (πράξη) που εφαρμόζεται στην είσοδο του συστήματος $x[n]$ ώστε να παραχθεί η έξοδος $y[n]$

- Πιο συγκεκριμένα, ένα σύστημα αναπαριστά μια **σχέση εισόδου-εξόδου**
- Παραδείγματα συστημάτων:

$$y[n] = 2x[n]$$

$$y[n] = 3x^2[n - 1]$$

$$y[n] = y[n - 1] + x[n]$$

- Γενικότερα, ένα σύστημα αναπαρίσταται μαθηματικά ως μια **εξίσωση διαφορών**

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n - l]$$

• Τα συστήματα διακρίνονται σε 5 (για τους σκοπούς μας) κατηγορίες:

1. Δυναμικά ή Στατικά
2. Γραμμικά ή μη γραμμικά
3. Χρονικά μεταβλητά ή αμετάβλητα
4. Αιτιατά ή μη αιτιατά
5. Ευσταθή και ασταθή

Σε κάθε περίπτωση, θεωρούμε ότι ένα σύστημα με είσοδο $x[n]$ θα δίνει έξοδο $y[n]$

• Δυναμικά ή Στατικά

- Αλλιώς, ονομάζονται συστήματα **με μνήμη ή χωρίς μνήμη**
- **Δυναμικά** ονομάζονται τα συστήματα που απαιτούν μνήμη για τον υπολογισμό της εξόδου σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή n_0
- **Στατικά** ονομάζονται αυτά που δεν έχουν αυτήν την απαίτηση, δηλ. για τον υπολογισμό της εξόδου τη στιγμή n_0 απαιτείται η είσοδος την ίδια χρονική στιγμή και μόνο

- Παραδείγματα:

$$y[n] = x[n] + x[n - 2] \quad \text{Δυν.}$$

$$y[n] = x[n + 1] - 2x[n - 1] \quad \text{Δυν.}$$

$$y[n] = \log |x[n]| \quad \text{Στ.}$$

$$y[n] = x^2[n] \quad \text{Στ.}$$

- Αναγνωρίζετε σε ποια κατηγορία ανήκουν?

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**

- **Γραμμικό** λέγεται ένα σύστημα ικανοποιεί δυο ιδιότητες:

- Την ιδιότητα της **ομογένειας**

- Την ιδιότητα της **αθροιστικότητας**

$$\left. \begin{array}{l} x[n] \rightarrow y[n] \\ cx[n] \rightarrow cy[n] \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{ομογένεια}}$$

• Γραμμικά ή μη γραμμικά

- **Ομογένεια:** αν στην είσοδο του συστήματος εμφανίζεται το σήμα $cx[n]$ τότε στην έξοδο θα εμφανίζεται το σήμα $cy[n]$

- Π.χ. $y[n] = 2x[n - 1]$, $y[n] = x[n + 3] - x[n]$, $y[n] = 3x[-n] + 2x[n^2]$

- Αντιπαράδειγμα: $y[n] = x^2[n]$, $y[n] = \frac{1}{x[n]}$, $y[n] = \sqrt{|x[n]|}$

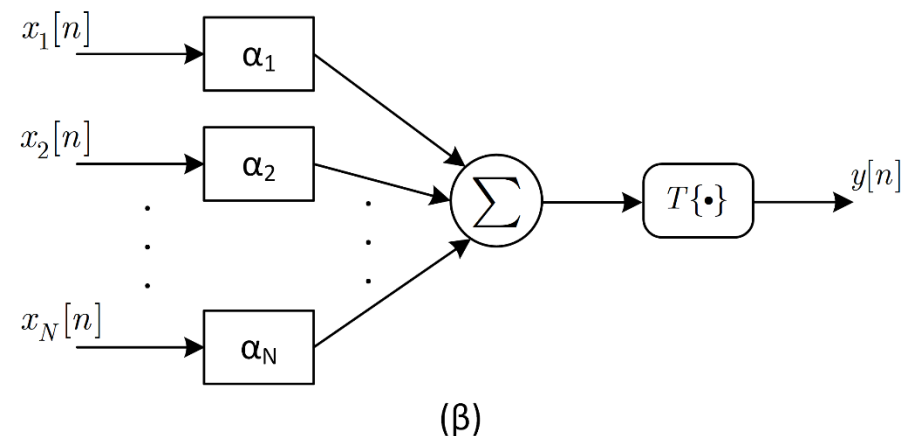
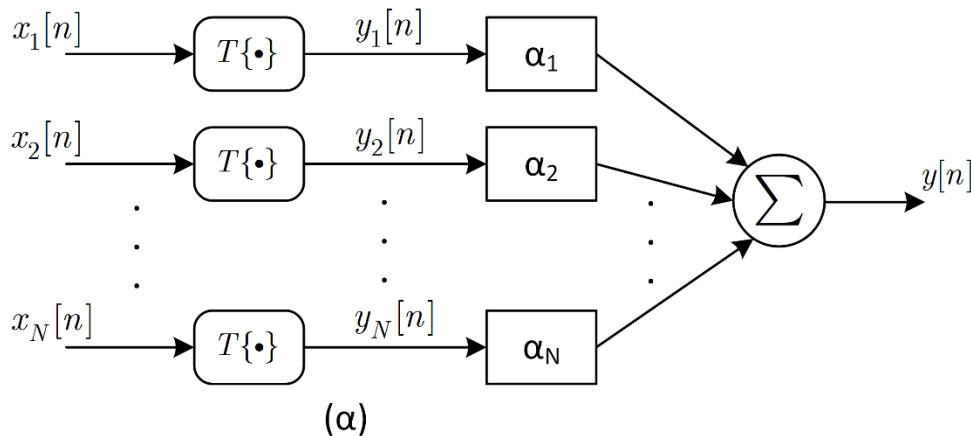
- **Αθροιστικότητα:** αν στην είσοδο του συστήματος εμφανίζεται το σήμα $x_1[n] + x_2[n]$ τότε στην έξοδο εμφανίζεται το σήμα $y_1[n] + y_2[n]$, με $y_1[n]$ και $y_2[n]$ τις εξόδους του συστήματος για εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ αντίστοιχα.

- Π.χ. $y[n] = 2x[n - 1] + x[n]$, $y[n] = nx[-n] - 5x[n + 1]$, $y[n] = 3x[-n - 1] + 2[n + 1]$

- Αντιπαράδειγμα: $y[n] = x^2[n]$, $y[n] = \frac{1}{x[n]}$, $y[n] = \sqrt{|x[n]|}$

• Γραμμικά ή μη γραμμικά

- Για τους οπτικούς τύπους ☺ η γραμμικότητα ισχύει αν οι δυο παρακάτω διατάξεις πραγματοποιούν την ίδια έξοδο



- Με μαθηματικά, αν

$$\begin{aligned}
 T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} &= \\
 &= T\{ax_1[n]\} + T\{bx_2[n]\} \\
 &= aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} \\
 &= ay_1[n] + by_2[n]
 \end{aligned}$$

με $y_1[n]$, $y_2[n]$ τις εξόδους του συστήματος για εισόδους $x_1[n]$, $x_2[n]$ αντίστοιχα, τότε το σύστημα είναι γραμμικό.

• Γραμμικά ή μη γραμμικά

- Παράδειγμα:

- Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = 2x[n-1] + x[n]$$

είναι γραμμικό.

Για είσοδο $x[n] \rightarrow y[n] = 2x[n-1] + x[n]$ ①

— " — $ax[n] \rightarrow y'[n] = 2(ax[n-1]) + ax[n]$

$= a[2x[n-1] + x[n]] \stackrel{\text{①}}{=} ay[n]$ } Ομογένεια ✓

Για είσοδο $x_1[n] \rightarrow y[n] = [2x_1[n-1] + x_1[n]] = y_1[n]$

— " — $x_2[n] \rightarrow y[n] = [2x_2[n-1] + x_2[n]] = y_2[n]$

— " — $x_1[n] + x_2[n] \rightarrow y'[n] = 2(x_1[n-1] + x_2[n-1]) +$

$(x_1[n] + x_2[n])$ } Αδρειατικότητα ✓

$= 2 \cdot x_1[n-1] + x_1[n] + 2 \cdot x_2[n-1] + x_2[n]$

$= y_1[n] + y_2[n].$

• Γραμμικά ή μη γραμμικά

- Παράδειγμα:

- Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = x^2[n]$$

είναι γραμμικό.

Ομογένεια: Έστω $x[n] \rightarrow y[n] = x^2[n]$. Αν $x_1[n] = ax[n]$, τότε
 $y_1[n] = x_1^2[n] = (ax[n])^2 = a^2x^2[n] = a^2y[n] \neq ay[n]$.

Δεν είναι ομογενές, άρα δεν είναι γραμμικό. Ας ελέγξουμε όμως και την αδρυστικότητα, για εΐσασηση.

Αδρυστικότητα: Έστω $x_1[n] \rightarrow y_1[n] = x_1^2[n]$ ①

$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = x_2^2[n]$ ②

Αν $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$, τότε $y[n] = (x_1[n] + x_2[n])^2 =$

$= x_1^2[n] + x_2^2[n] + \underbrace{2x_1[n]x_2[n]}_{c[n]} = y_1[n] + y_2[n] + c[n] \neq ① + ②$.

Δεν είναι άτε αδρυστικό.

• Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα

- Η χρονική (α)μεταβλητότητα έχει να κάνει με τη συμπεριφορά του συστήματος όταν η είσοδος καθυστερεί κατά κάποια δείγματα
- Έστω $x[n]$ η είσοδος σε ένα **χρονικά αμετάβλητο** (ΧΑ) σύστημα, και έστω $y[n]$ η έξοδος. Αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά n_0 δείγματα, δηλ.

$$x_1[n] = x[n - n_0]$$

τότε η έξοδος θα είναι

$$y_1[n] = y[n - n_0]$$

- Ένα σύστημα που δεν ικανοποιεί τα παραπάνω ονομάζεται **χρονικά μεταβλητό**. Ένα χρονικά μεταβλητό σύστημα αποκρίνεται διαφορετικά σε κάθε καθυστέρηση της εισόδου
 - Η διαφορά μπορεί να έγκειται στην καθυστέρηση της εξόδου, στο πλάτος της, ακόμα και στη γραφική παράσταση του σήματος εξόδου!

- Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα

- Παράδειγμα:

- Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = x^2[n]$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Έστω $x[n] \longrightarrow y[n] = x^2[n]$

— $x_1[n] = x[n - n_0] \longrightarrow y_1[n] = x^2[n - n_0]$ ①

Καθυστερήσεις των είσοδο κατά n_0 δείγματα:

$$y[n - n_0] = x^2[n - n_0]$$
 ②

① = ②, άρα το σύστημα είναι Χ.Α.

- Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα

- Παράδειγμα:

- Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = nx^2[n]$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Έστω $x[n] \rightarrow y[n] = nx^2[n]$

$-n \rightarrow x_1[n] = x[n-n_0] \rightarrow y_1[n] = nx^2[n-n_0]$ ①

Τώρα, $y[n-n_0] = (n-n_0)x^2[n-n_0]$ ②

① \neq ②, άρα το σύστημα είναι Χ.Μ.

• Αιτιατά και μη αιτιατά

- Αιτιατό λέγεται ένα σύστημα που **δεν** απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου για να υπολογίσει μια τιμή της εξόδου του
- Κάθε φυσικό σύστημα είναι αιτιατό
- Μη αιτιατά συστήματα είναι υλοποιήσιμα όταν η είσοδος βρίσκεται διαθέσιμη ολόκληρη από πριν
 - Καταγεγραμμένη σε κάποιο αποθηκευτικό χώρο

- Παραδείγματα:

$$y[n] = x[n] + x[n - 2] \quad \text{Αιτ.}$$

$$y[n] = x^2[n + 1] - 2 \sin(x[n - 1]) \quad \text{Μη αιτ.}$$

$$y[n] = \log |x[n + 1]| \quad \text{Μη αιτ.}$$

$$y[n] = \sqrt{x[n - 1]} \quad \text{Αιτ.}$$

- Αναγνωρίζετε σε ποια κατηγορία ανήκουν?

• Ευσταθή και ασταθή

- Ένα σύστημα ονομάζεται **Φραγμένης-Εισόδου-Φραγμένης-Εξόδου (Bounded-Input-Bounded-Output – BIBO) ευσταθές** αν

$$|x[n]| < B_x, \quad B_x \in \mathfrak{R}$$

συνεπάγεται ότι

$$|y[n]| < B_y, \quad B_y \in \mathfrak{R}$$

- Η ευστάθεια ουσιαστικά απαιτεί για απολύτως φραγμένη είσοδο, η έξοδος να είναι επίσης απολύτως φραγμένη
- Κάθε σύστημα που υπάρχει στη φύση είναι ευσταθές
- Αλλά...
 - Ένας πύραυλος που εκτοξεύεται είναι εκ φύσεως ασταθές σύστημα
 - Ένα μαχητικό εν πτήση είναι εκ φύσεως ασταθές σύστημα
 - Ένα πρόγραμμα που παράγει τους αριθμούς Fibonacci μοντελοποιεί ένα ασταθές σύστημα

• Ευσταθή και ασταθή

- Παράδειγμα:

- Ελέγξτε αν τα συστήματα

$$y[n] = \frac{1}{x[n]}$$

$$y[n] = x^2[n - 2]$$

είναι ευσταθή.

- Έχουμε $y[n] = \frac{1}{x[n]}$. Υποθέτουμε ότι $|x[n]| < B_x$, $B_x \in \mathbb{R}$.

Άρα $|y[n]| = \frac{1}{|x[n]|} \xrightarrow{|x[n]| < B_x} ? +\infty$, αν υπάρχει n_0 :
 $x[n_0] = 0$.

- Έχουμε $y[n] = x^2[n - 2]$. Υποθέτουμε ότι $|x[n]| < B_x$, $B_x \in \mathbb{R}$.

Άρα $|y[n]| = |x^2[n - 2]| \xrightarrow{|x[n]| < B_x} |y[n]| < B_x^2 = B_y$.

Οπότε το σύστημα είναι ευσταθές.

• Συστήματα με εξισώσεις διαφορών

- Είπαμε νωρίτερα ότι μας ενδιαφέρουν συστήματα που περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών
 - Αντίστοιχα με τις διαφορικές εξισώσεις στο συνεχή χρόνο

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

- Πολύ απλά συστήματα όπως το

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x[n-k]$$

μπορούν να κάνουν τίμια δουλειά! 😊



- Συστήματα με εξισώσεις διαφορών

- Όπως βλέπετε και από τη γενική σχέση

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

ένα σύστημα μπορεί να εξαρτάται από προηγούμενες τιμές τόσο της εισόδου όσο και της εξόδου

- Ας θεωρήσουμε ένα πολύ απλό σύστημα

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2]$$

- Αν θέλουμε να το υλοποιήσουμε ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή $n = 0$, παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε τις τιμές $y[-1]$, $y[-2]$
- Στη γενικότερη περίπτωση, θέλουμε τις τιμές $y[-1]$, $y[-2]$, ..., $y[-N]$

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

- Οι τιμές

$$y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$$

ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**

- Περιγράφουν την αρχική κατάσταση του συστήματος
- Χωρίς αυτές, η εξίσωση διαφορών **δεν** έχει μοναδική λύση
- Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, τότε λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία**
 - Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν αποκρίνεται αν δεν το διεγείρουμε με μια είσοδο
 - Ένα σύστημα που δε βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, μπορεί να παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί!!

• Συστήματα με εξισώσεις διαφορών

- Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y[n]$ ενός συστήματος που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών δεδομένης μιας εισόδου $x[n]$?
- Η έξοδος $y[n]$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα δυο διαφορετικών «αποκρίσεων»
 - Της απόκρισης μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$ (zero input response)
 - Της απόκρισης μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$ (zero state response)

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- Η απόκριση μηδενικής εισόδου αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία μόνο των αρχικών συνθηκών
 - Εύκολα καταλαβαίνετε ότι αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι μηδέν
- Η απόκριση μηδενικής κατάστασης αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία μόνο της εισόδου
 - Προφανώς η είσοδος πρέπει να είναι μη μηδενική

- Συστήματα με εξισώσεις διαφορών – Επανάληψη...

- Όπως βλέπετε και από τη γενική σχέση

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

ένα σύστημα μπορεί να εξαρτάται από προηγούμενες τιμές τόσο της εισόδου όσο και της εξόδου

- Ας θεωρήσουμε ένα πολύ απλό σύστημα

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2]$$

- Αν θέλουμε να το υλοποιήσουμε ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή $n = 0$, παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε τις τιμές $y[-1]$, $y[-2]$
- Στη γενικότερη περίπτωση, θέλουμε τις τιμές $y[-1]$, $y[-2]$, ..., $y[-N]$

- Συστήματα με εξισώσεις διαφορών – Επανάληψη...

- Οι τιμές

$$y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$$

ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**

- Περιγράφουν την αρχική κατάσταση του συστήματος
- Χωρίς αυτές, η εξίσωση διαφορών **δεν** έχει μοναδική λύση
- Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, τότε λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία**
 - Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν αποκρίνεται αν δεν το διεγείρουμε με μια είσοδο
 - Ένα σύστημα που δε βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, μπορεί να παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί!!

• Συστήματα με εξισώσεις διαφορών – Επανάληψη...

- Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y[n]$ ενός συστήματος που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών δεδομένης μιας εισόδου $x[n]$?
- Η έξοδος $y[n]$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα δυο διαφορετικών «αποκρίσεων»
 - Της απόκρισης μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$ (zero input response)
 - Της απόκρισης μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$ (zero state response)

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- Η απόκριση μηδενικής εισόδου αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία μόνο των αρχικών συνθηκών
 - Εύκολα καταλαβαίνετε ότι αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι μηδέν
- Η απόκριση μηδενικής κατάστασης αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία μόνο της εισόδου
 - Προφανώς η είσοδος πρέπει να είναι μη μηδενική

• Συστήματα με εξισώσεις διαφορών

- Επιστρέφοντας στην αρχική απλή εξίσωση διαφορών

$$y[n] = y[n - 1] + y[n - 2]$$

αν θέσουμε $y[-1] = 0, y[-2] = 1$ τότε η έξοδος δίνεται ως

$$y[0] = y[-1] + y[-2] = 0 + 1 = 1$$

$$y[1] = y[0] + y[-1] = 1 + 0 = 1$$

$$y[2] = y[1] + y[0] = 1 + 1 = 2$$

$$y[3] = y[2] + y[1] = 1 + 2 = 3$$

- Παρατηρήστε ότι για το παραπάνω σύστημα η είσοδος είναι μηδενική, οπότε η έξοδος αποτελείται μόνο από την απόκριση μηδενικής εισόδου, δηλ.

$$y[n] = y_{zi}[n]$$

- Η απουσία εισόδου βλέπετε ότι δεν εμποδίζει το σύστημα να παράγει τιμές εξόδου!
 - Οι μη μηδενικές αρχικές συνθήκες προκαλούν αυτήν τη συμπεριφορά

- Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- Θεωρώντας ότι η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. $x[n] = 0 \forall n$, η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{zi}[n - k] = 0$$

- Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **ομογενής**
- Μπορεί ναδειχθεί ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c\gamma^n, \quad \gamma, c \in \mathbb{C} - \{0\}$$

- Αντικαθιστώντας παραπάνω

$$\sum_{k=0}^N a_k c\gamma^{n-k} = 0 \Leftrightarrow c\gamma^n \sum_{k=0}^N a_k \gamma^{-k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^N a_k \gamma^{-k} = 0$$

- Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- Δηλ. πρέπει

$$\sum_{k=0}^N a_k \gamma^{-k} = 0$$

- Αναλύοντας

$$a_N \gamma^{-N} + a_{N-1} \gamma^{-N+1} + \dots + a_1 \gamma^{-1} + a_0 = 0$$

$$\gamma^{-N} (a_N + a_{N-1} \gamma + \dots + a_1 \gamma^{N-1} + a_0 \gamma^N) = 0$$

- Το πολυώνυμο στην παρένθεση ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και αν τη θέσουμε ίση με το μηδέν θα έχουμε τη **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος

- Παραγοντοποιώντας

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)(\gamma - \gamma_3) \dots (\gamma - \gamma_N) = 0$$

με $\gamma_i, = 1, \dots, N$ τις **χαρακτηριστικές ρίζες** ή **φυσικές συχνότητες** του συστήματος

- Άρα υπάρχουν N το πλήθος διαφορετικά γ που ικανοποιούν την ομογενή!

- Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- Αυτά τα γ αντιστοιχούν στις εξόδους

$$c_1\gamma_1^n, \quad c_2\gamma_2^n, \quad c_3\gamma_3^n, \quad \dots, \quad c_N\gamma_N^n, \quad c_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, N$$

- Μπορεί ναδειχθεί ότι λύση της ομογενούς αποτελεί και το άθροισμα των παραπάνω

$$c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n + c_3\gamma_3^n + \dots + c_N\gamma_N^n, \quad c_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, N$$

- Άρα τελικά

$$y_{zi}[n] = \sum_{i=1}^N c_i \gamma_i^n, \quad n \geq 0$$

- Και τα c_i ?

- Προφανώς τα βρίσκουμε από τις αρχικές συνθήκες!

- Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- Παράδειγμα:

- Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 0, y[-1] = 1$.

Ομογενής εξίσωση: $y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = 0$

Χαρακ. πολυώνυμο: $1 \cdot \gamma^2 + 5\gamma + 6 = \gamma^2 + 5\gamma + 6$

—|— εξίσωση: $\gamma^2 + 5\gamma + 6 = 0 \Leftrightarrow (\gamma+2)(\gamma+3) = 0$

Άρα χαρακ. ριές: $\gamma_1 = -2, \gamma_2 = -3$

Οπότε

$$y_{zi}[n] = c_1 \gamma_1^n + c_2 \gamma_2^n = c_1 (-2)^n + c_2 (-3)^n, n \geq 0$$

Είναι

$$\left. \begin{aligned} y_{zi}[-2] &= c_1 (-2)^{-2} + c_2 (-3)^{-2} = 0 \\ y_{zi}[-1] &= c_1 (-2)^{-1} + c_2 (-3)^{-1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= +4 \\ c_2 &= -9 \end{aligned}$$

- Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- Παράδειγμα:

Λρα

$$\begin{aligned} y_{zi}[n] &= 4(-2)^n - 9(-3)^n, \quad n \geq 0 \\ &= \left[4(-2)^n - 9(-3)^n \right] u[n]. \end{aligned}$$

• Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

• MATLAB:

```
% Πόσα δείγματα θέλω να παράξω?
N = 10;

% Αρχικοποίηση
y = zeros(1,N);

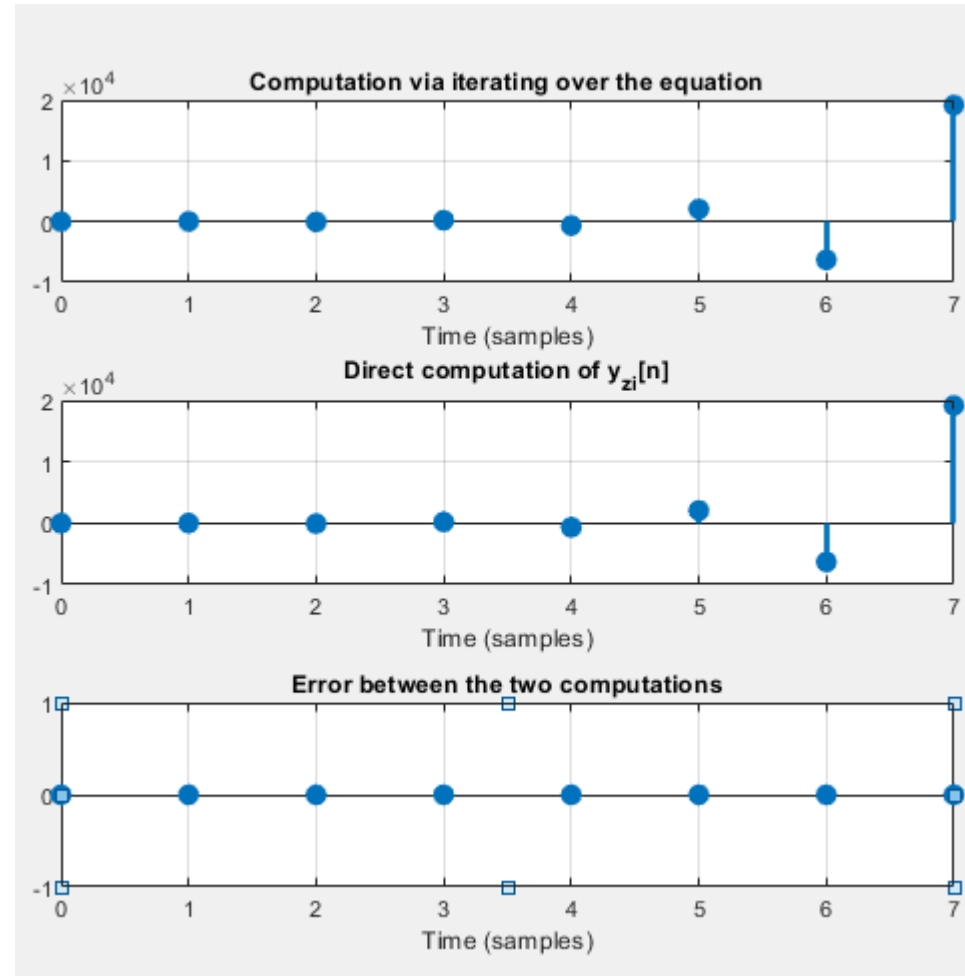
% Αρχικές συνθήκες  $y[-2] = 0$ ,  $y[-1] = 1$ 
y(1) = 0;
y(2) = 1;

% Μετρώ από  $n=3$  θεωρώντας ότι το  $y(3)$  είναι το  $y[0]$ 
for n=3:N
    y(n) = -5*y(n-1) - 6*y(n-2);
end

% Προβολή
figure; subplot(311);
stem(0:N-3, y(3:end));
title('Computation via iterating over the equation');
xlabel('Time (samples)');

n = 0:7;
yzi = 4*(-2).^n - 9*(-3).^n;
subplot(312); stem(n, yzi);
title('Direct computation of  $y_{zi}[n]$ ');
xlabel('Time (samples)');

error = yzi - y(3:end);
subplot(313); stem(n, error);
title('Error between the two computations');
xlabel('Time (samples)');
```



- Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- Παράδειγμα:

- Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$y[n] + \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 3x[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 1, y[-1] = 0$.

Ομογ. εξίσωση: $y[n] + \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 0$

Χαρακτ. πολυώνυμο: $\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12}$

— — — — — εξίσωση: $\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12} = 0 \Leftrightarrow (\gamma + \frac{1}{4})(\gamma + \frac{1}{3}) = 0$

Άρα οι χαρ. ρίζες είναι $\gamma_1 = -\frac{1}{4}, \gamma_2 = -\frac{1}{3}$.

Άρα

$$\begin{aligned} y_{zi}[n] &= c_1 \gamma_1^n + c_2 \gamma_2^n, \quad n \geq 0 \\ &= c_1 \left(-\frac{1}{4}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

- Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- Παράδειγμα:

Από τις αρχικές συνθήκες:

$$\left. \begin{aligned} y_{zi}[-2] = 1 &\Leftrightarrow c_1 \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = 1 \\ y_{zi}[-1] = 0 &\Leftrightarrow c_1 \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = -\frac{1}{3}.$$

Οότε

$$\begin{aligned} y_{zi}[n] &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n, n \geq 0 \\ &= \left[\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n]. \end{aligned}$$

- Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- Σε περίπτωση πολλαπλής ρίζας (έστω πολλαπλότητας $r \geq 2$), μπορεί κανείς να δείξει ότι :

Αν

$$(\gamma - \gamma_1)^r (\gamma - \gamma_{r+1})(\gamma - \gamma_{r+2}) \dots (\gamma - \gamma_N)$$

μια παραγοντοποίηση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου γράφεται

$$y_{zi}[n] = \underbrace{\sum_{i=1}^r c_i n^{i-1} \gamma_1^n}_{\text{Οφείλεται στην πολλαπλή ρίζα } \gamma_1} + \underbrace{\sum_{i=r+1}^N c_i \gamma_i^n}_{\text{Οφείλεται στις υπόλοιπες ρίζες}}, \quad n \geq 0$$

Οφείλεται στην
πολλαπλή ρίζα γ_1

Οφείλεται στις
υπόλοιπες ρίζες

- **Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$**

- Στην απόκριση μηδενικής κατάστασης, οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές, και η έξοδος καθορίζεται μόνο από την είσοδο και τα χαρακτηριστικά του συστήματος
- Αν η συνολική έξοδος $y[n]$ καθορίζεται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης, τότε το σύστημα είναι **Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΧΑ)**
 - Αυτή η ιδιότητα θα αποβεί καθοριστική στην πορεία
- Θα θέλαμε να μπορούμε να βρούμε την απόκριση μηδενικής κατάστασης για οποιαδήποτε είσοδο
 - Ας φτάσουμε σε αυτό βήμα-βήμα
- Ποιό είναι το απλούστερο σήμα που μπορεί να παρουσιαστεί στην είσοδο ενός συστήματος?
 - Η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$

• Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$

- Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$ τότε η έξοδος του συστήματος ονομάζεται **κρουστική απόκριση** (impulse response)
 - Έχει νόημα: η απόκριση (έξοδος) σε μια κρούση (ένα σήμα που «ζει» μόνο σε μια χρονική στιγμή)
 - Η κρουστική απόκριση συμβολίζεται ως $h[n]$



- Μπορούμε να γράψουμε επίσης ότι

$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

- Ας δοκιμάσουμε να βρούμε την κρουστική απόκριση για ένα απλό σύστημα
- Θα χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από την απόκριση μηδενικής εισόδου, και θα “θεωρήσουμε” ότι η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες για $n = 0$
- Θα λύσουμε την ομογενή εξίσωση για $n > 0$!!!! ☺

- Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$

- Έστω το σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = x[n]$$

Ας βρούμε την κρουστική του απόκριση

- Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, και τότε

$$a_0 h[n] + a_1 h[n-1] = \delta[n]$$

- Για $n = 0$,

$$a_0 h[0] + a_1 h[-1] = \delta[0] \Leftrightarrow a_0 h[0] + a_1 h[-1] = 1$$
$$a_0 h[0] + a_1 \cdot 0 = 1 \Leftrightarrow a_0 h[0] = 1 \Leftrightarrow h[0] = \frac{1}{a_0}$$

- Αυτή είναι η (ψευδο-)αρχική μας συνθήκη!

- Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη λύση της ομογενούς εξίσωσης για $n > 0$

- Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$

- Έστω το ομογενές σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = 0, \quad n > 0$$

- Ξέρουμε ότι

$$h[n] = c\gamma^n, \quad n \geq 0$$

- Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$a_0 \gamma + a_1 = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{a_1}{a_0}$$

- Οπότε

$$h[n] = c \left(-\frac{a_1}{a_0} \right)^n, \quad n \geq 0$$

- Βρίσκουμε και τη σταθερά ως

$$h[0] = c \left(-\frac{a_1}{a_0} \right)^0 = c = \frac{1}{a_0}$$

- Άρα

$$h[n] = \frac{1}{a_0} \left(-\frac{a_1}{a_0} \right)^n, \quad n \geq 0$$

- **Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$**

- Θα μπορούσαμε να επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για κάθε σύστημα που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών, ανεξαρτήτως τάξης
- Όμως σίγουρα κάτι τέτοιο είναι αρκετά χρονοβόρο και κουραστικό
 - Υπάρχει κάποια ευκολότερη μέθοδος;
- Με άλλα λόγια, αν το σύστημα είναι της μορφής

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

τότε τι κάνουμε για να βρούμε την κρουστική απόκριση εύκολα και γρήγορα?

- Το γεγονός ότι το σύστημα είναι ΓΧΑ θα παίξει καθοριστικό ρόλο στην απάντηση

- Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$

- Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα

$$S_b: \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = x[n]$$

με κρουστική απόκριση $h_b[n]$

- Τότε η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S_0: \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = b_0 x[n]$$

θα είναι $h_0[n] = b_0 h_b[n]$

- Επίσης, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S_{0-}: \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = b_0 x[n-l]$$

θα είναι $h_{0-}[n] = b_0 h_b[n-l]$

- Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$

- Ακολουθώντας την ίδια λογική, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S: \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

θα είναι

$$h[n] = \sum_{l=0}^M b_l h_b[n-l]$$

- Η ιδιότητα της γραμμικότητας μας επέτρεψε να γενικεύσουμε το πρώτο σύστημα στο δεύτερο, ενώ η ιδιότητα της χρονικής αμεταβλητότητας μας επέτρεψε να γενικεύσουμε το δεύτερο στο τρίτο
- Και οι δυο ιδιότητες μας επιτρέπουν να γράψουμε τη γενικότερη απάντηση που βλέπετε παραπάνω

- Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$

- Παράδειγμα:

- Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$$

Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, και τότε $y[n] = h[n]$. Άρα:

$$h[n] + \frac{5}{6}h[n-1] + \frac{1}{6}h[n-2] = \delta[n]$$

Για $n=0$: $h[0] + \frac{5}{6}h[\cancel{-1}] + \frac{1}{6}h[\cancel{-2}] = \delta[0] = 1$

$$h[0] = 1 \quad (1)$$

Για $n=1$: $h[1] + \frac{5}{6}h[0] + \frac{1}{6}h[\cancel{-1}] = \delta[1] = 0$

$$h[1] + \frac{5}{6} \cdot 1 = 0 \Rightarrow h[1] = -\frac{5}{6} \quad (2)$$

- Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$

- Παράδειγμα:

Το χαρακτ. πολυώνυμο είναι $\gamma^2 + \frac{5}{6}\gamma + \frac{1}{6}$.

— μ — εἰσώων είναι $\gamma^2 + \frac{5}{6}\gamma + \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow (\gamma + \frac{1}{3})(\gamma + \frac{1}{2}) = 0$

Οι χαρακτ. ρίζες είναι $\gamma_1 = -\frac{1}{3}$, $\gamma_2 = -\frac{1}{2}$.

Άρα

$$h[n] = c_1 \gamma_1^n + c_2 \gamma_2^n, \quad n \geq 0$$

$$= c_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

$$\begin{cases} \text{Οπότε} & h[0] = c_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^0 + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^0 = c_1 + c_2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1 \\ & h[1] = c_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^1 + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{2}c_2 \stackrel{\textcircled{2}}{=} -\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

Άρα $h[n] = -2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3 \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0.$

- Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$

- Παρατηρήσεις:

1. Αν η εξίσωση διαφορών ήταν της μορφής

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = 2x[n]$$

τότε η κρουστική απόκριση θα ήταν της μορφής

$$h'[n] = 2h[n] = 2 \left[-2 \left(-\frac{1}{3} \right)^n + 3 \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] u[n]$$

2. Αν η εξίσωση διαφορών ήταν της μορφής

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = 4x[n] - 2x[n-2]$$

τότε η κρουστική απόκριση θα ήταν της μορφής

$$h'[n] = 4h[n] - 2h[n-2]$$

$$= 4 \left[-2 \left(-\frac{1}{3} \right)^n + 3 \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] u[n] - 2 \left[-2 \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-2} + 3 \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-2} \right] u[n-2]$$

- Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$

- Παράδειγμα:

- Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται ως

$$y[n] + \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{9}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] \quad : \mathcal{D}$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση.

Έστω το σύστημα $y[n] + \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{9}y[n-2] = x[n]$.

Θέτω $x[n] = \delta[n]$, τότε $y[n] = h_0[n]$. Άρα:

$$h_0[n] + \frac{2}{3}h_0[n-1] + \frac{1}{9}h_0[n-2] = \delta[n]$$

Για $n=0$: $h_0[0] = 1$ ①

Για $n=1$: $h_0[1] = -\frac{2}{3}$ ②

Το χαρ. πολυώνυμο είναι $\delta^2 + \frac{2}{3}\delta + \frac{1}{9} \rightarrow \delta^2 + \frac{2}{3}\delta + \frac{1}{9} = 0$

Οι χαρ. ρίζες: $\gamma_1 = \gamma_2 = -\frac{1}{3}$.

$$\left(\delta + \frac{1}{3}\right)^2$$



$$* h[n] = (1-5n) \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

- Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$

- Παράδειγμα:

Άρα

$$h_0[n] = (c_0 + c_1 \cdot n) \gamma_1^n, \quad n \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Τέλος, } h_0[0] &= (c_0 + c_1 \cdot 0) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = c_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1 \\ h_0[1] &= (c_0 + c_1 \cdot 1) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{1}{3}(c_0 + c_1) \stackrel{\textcircled{2}}{=} -\frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_0 = 1, c_1 = 1. \text{ Άρα: } h_0[n] = (1+n) \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

Οπότε για το σύστημα δ θα είναι:

$$\begin{aligned} h[n] &= h_0[n] + 2h_0[n-1] \\ &= (1+n) \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2(1+n-1) \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1]. \quad * \end{aligned}$$

• Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$

- Παρ' όλο που βρήκαμε την κρουστική απόκριση οποιουδήποτε ΓΧΑ συστήματος, πως αυτή βοηθά στην εύρεση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης?
- Θυμηθείτε ότι κάθε σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Άρα

$$y_{zs}[n] = T\{x[n]\}$$

$$= T\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\}$$

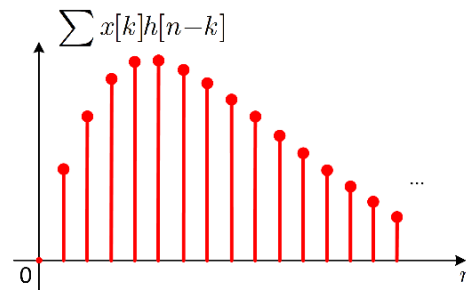
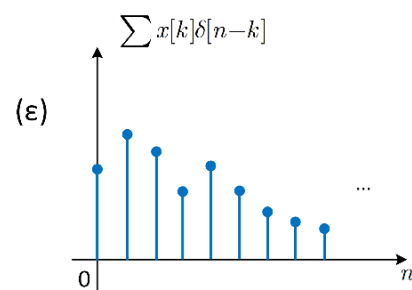
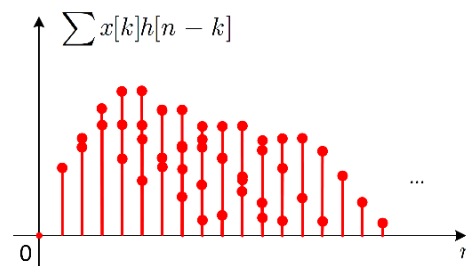
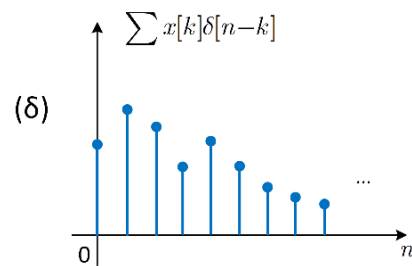
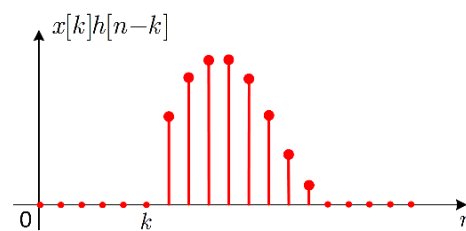
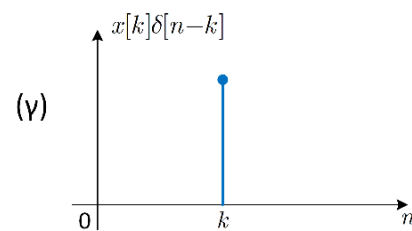
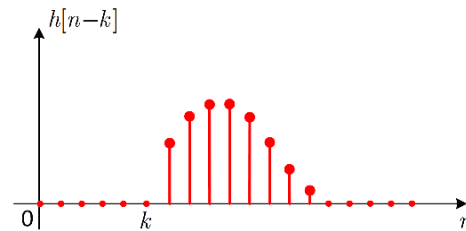
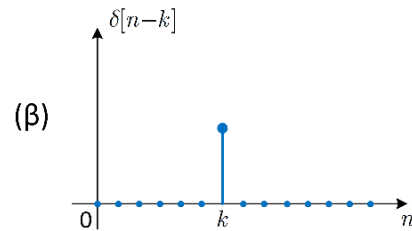
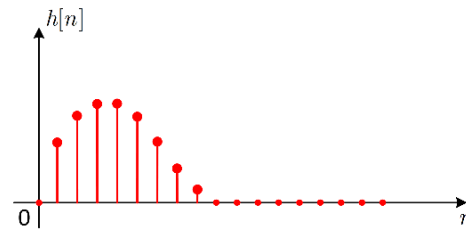
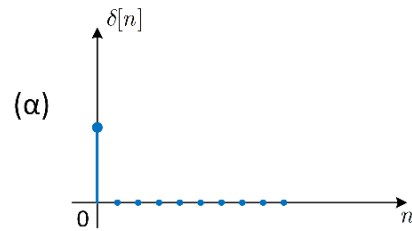
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Γραμμικότητα

Γραμμικότητα

Χρον. Αμεταβλητότητα



Χρον. Αμεταβλητότητα

Γραμμικότητα (ομογένεια)

Γραμμικότητα

Γραμμικότητα

• Συνέλιξη

- Το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι εξαιρετικά σημαντικό

- Η πράξη

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

είναι κεφαλαιώδους σημασίας στην ανάλυση συστημάτων και δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα: **συνέλιξη (convolution)**

- Η συνέλιξη μπορεί να ιδωθεί και ως ξεχωριστή πράξη, έξω από το πλαίσιο της ανάλυσης συστημάτων
- Για παράδειγμα μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνέλιξη δυο σημάτων $x[n]$, $y[n]$ που δε σχετίζονται απαραίτητα με ένα σύστημα

- Συνέλιξη

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

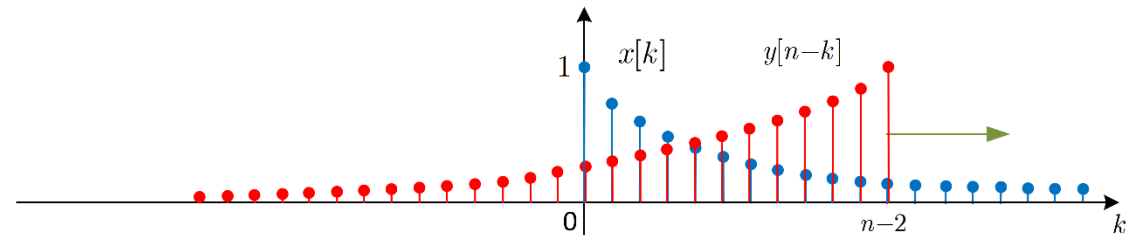
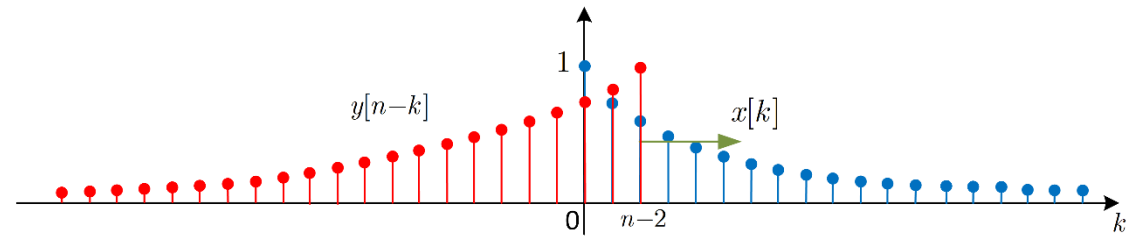
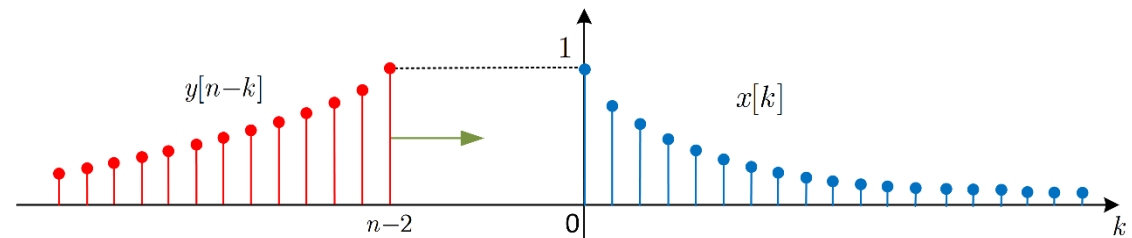
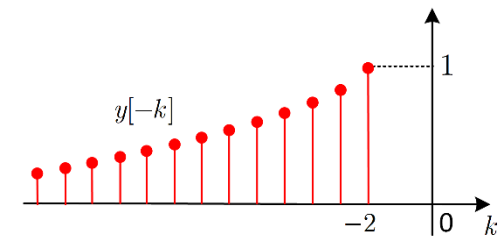
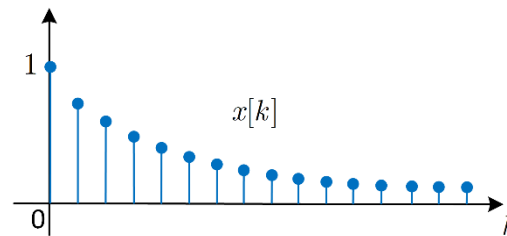
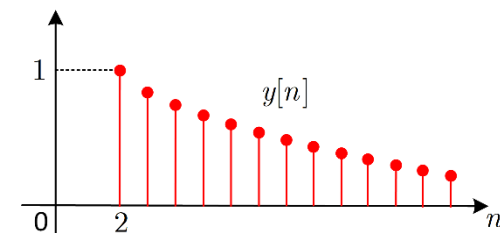
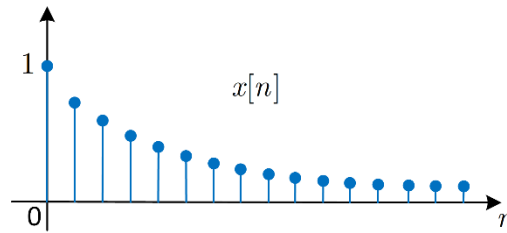
Ιδιότητες Συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax[n] * y[n] = x[n] * ay[n] = a(x[n] * y[n]), a \in \mathfrak{R}$
Αντιμεταθετικότητα	$x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$
Προσεταιριστικότητα	$(x[n] * y[n]) * z[n] = x[n] * (y[n] * z[n])$
Επιμεριστικότητα	$x[n] * (y[n] + z[n]) = x[n] * y[n] + x[n] * z[n]$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1[n] = x_1[n] * y[n] \\ z_2[n] = x_2[n] * y[n] \\ \text{αν } x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \\ \text{τότε } z[n] = x[n] * y[n] = az_1[n] + bz_2[n] \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x[n] : [n_1, n_2] \longrightarrow \mathfrak{R} \\ y[n] : [n_3, n_4] \longrightarrow \mathfrak{R} \\ x[n] * y[n] : [n_1 + n_3, n_2 + n_4] \longrightarrow \mathfrak{R} \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x[n] * \delta[n] = \delta[n] * x[n] = x[n]$

- Πως υπολογίζουμε αυτό το φαινομενικά περίεργο άθροισμα?

• Συνέλιξη

• Τα βήματα υπολογισμού είναι τα εξής:

- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $x[n]$ και το $y[n]$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να μεταβάλλουμε το $y[n]$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε σύμφωνα με τον ορισμό
- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσεις του k και όχι του n , όπως ακριβώς επιτάσσει το άθροισμα της συνέλιξης, και το $y[k]$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά n . Θυμίζουμε ότι αυτό το n το χειριζόμαστε ως σταθερά. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $y[k]$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση
- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $y[n - k]$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το “ολισθαίνουμε” πάνω στον ίδιο άξονα με το $x[k]$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.
- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι συναντάει κάποια στιγμή το $x[k]$. Όταν το συναντάει, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης.
- Στην πέμπτη γραμμή, το $y[n - k]$ έχει προχωρήσει κι άλλο μέσα στο $x[k]$, αλλά δεν αλλάζει κάτι σε σχέση με την παραπάνω περίπτωση. Οπότε άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν.



• Συνέλιξη

Γραφική Λύση Συνέλιξης Σημάτων

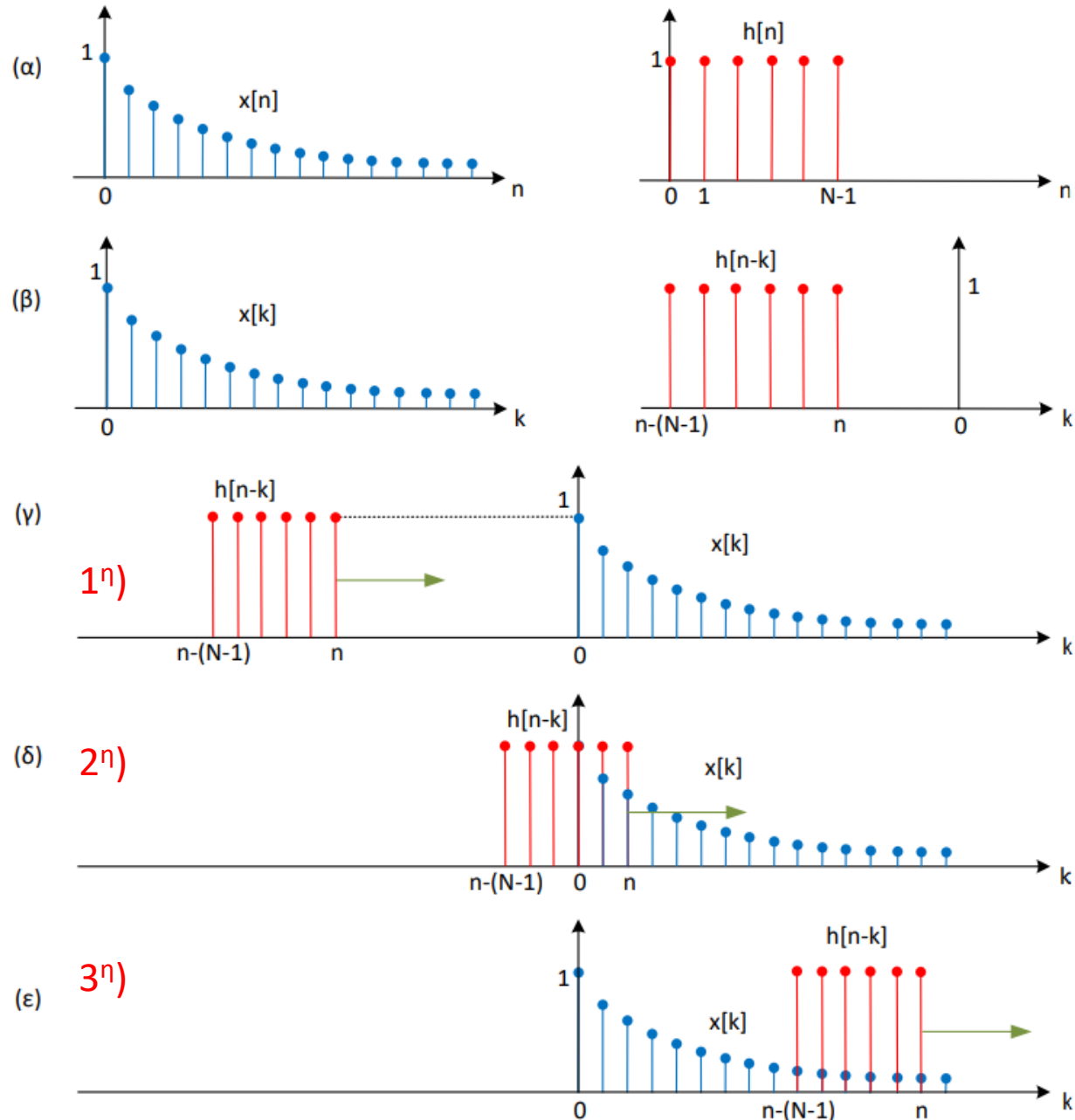
1. Επιλέγουμε ένα εκ των δυο σημάτων, έστω το $x[n]$, και το μετατρέπουμε σε $x[k]$.
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και της χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το σήμα $x[n - k]$.
3. Φέρουμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα ως προς k , και “σύρουμε” το $x[n - k]$ από το $-\infty$ προς το $+\infty$.
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου όπου τα δυο σήματα “συνυπάρχουν”, δηλ. όπου το γινόμενο $x[n - k]y[k]$ είναι μη μηδενικό.
5. Στις παραπάνω περιοχές, υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης.

• **Συνέλιξη**

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = u[n] - u[n - N]$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος για

$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1.$$



$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

• Συνέλιξη

• Παράδειγμα:

1^η περίπτωση: Για $n < 0$ ή $n \leq -1$, $c_{xh}[n] = 0$.

2^η περίπτωση: Για $n \geq 0$ και $n - (N-1) < 0$, έχουμε:

$$c_{xh}[n] = \sum_{k=0}^n a^k \cdot 1 = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

3^η περίπτωση: Για $n - (N-1) \geq 0$, έχουμε:

$$c_{xh}[n] = \sum_{k=n-(N-1)}^n a^k \cdot 1 = \sum_{k=n-(N-1)}^n a^k = \frac{a^{n-(N-1)} - a^{n+1}}{1 - a}$$

Συνολικά:

$$c_{xh}[n] = \begin{cases} 0, & n \leq -1 \\ \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, & 0 \leq n \leq N-2 \\ \frac{a^{n-(N-1)} - a^{n+1}}{1 - a}, & n \geq N-1 \end{cases}$$

• Συνέλιξη

• Παράδειγμα:

```
% Ορισμός διάρκειας
```

```
Nx = 7;
```

```
% Σήματα
```

```
x = ones(1, Nx);
```

```
alpha = 0.8;
```

```
Nh = 100;
```

```
n = 0:Nh;
```

```
h = alpha.^n;
```

```
% Convolution by hand
```

```
c1 = (1 - alpha.^(1:(Nx-1)))./(1-alpha);
```

```
c2 = (alpha.^( [Nx-1:Nh] - (Nx-1)) ...  
      | alpha.^(Nx-1+1:Nh+1))./(1-alpha);
```

```
% Convolution by conv function
```

```
c = conv(h, x);
```

```
% Σχήματα
```

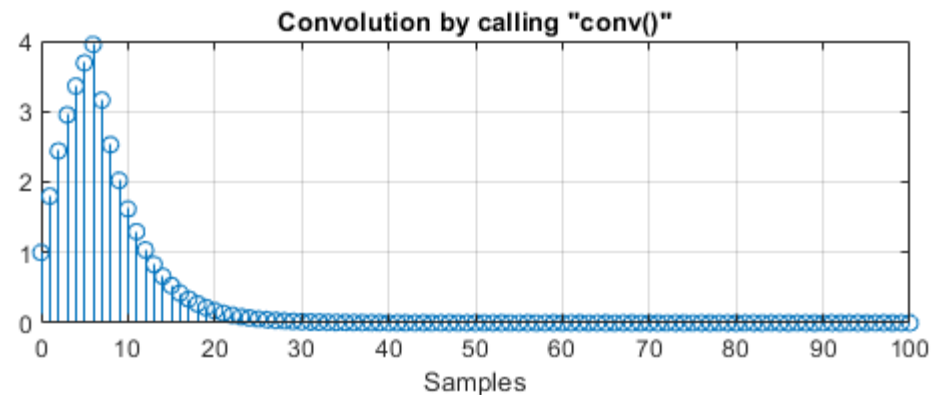
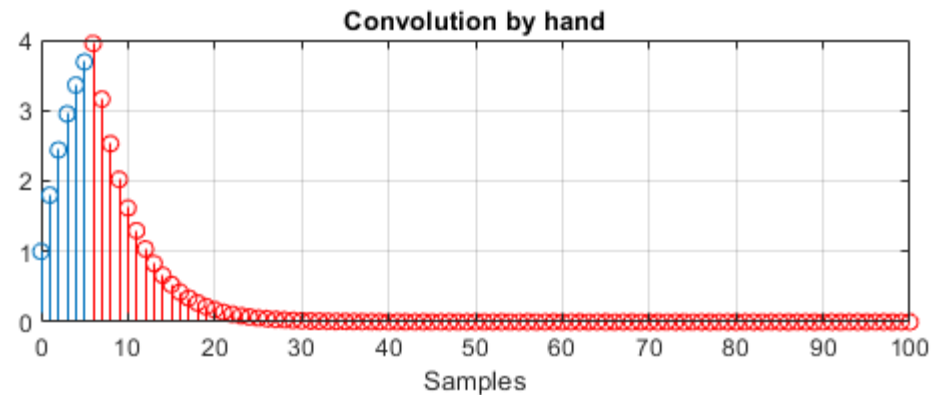
```
figure; subplot(211); stem(0:Nx-2, c1); hold on;
```

```
stem(Nx-1:Nh, c2, 'r'); grid; hold off;
```

```
title('Convolution by hand'); xlabel('Samples');
```

```
subplot(212); stem(0:Nh, c(1:Nh+1)); grid;
```

```
title('Convolution by calling "conv()"'); xlabel('Samples');
```



• Συνέλιξη

• Παράδειγμα:

- Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος για $x[n] = h[n]$.

$$\text{Είναι } c_{xh}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] a^{n-k} u[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^n u[k] u[n-k] = a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k] u[n-k] \quad \textcircled{1}$$

$$\text{Όπως: } u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad u[n-k] = \begin{cases} 1, & n-k \geq 0 \Leftrightarrow k \leq n \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } u[k] u[n-k] = \begin{cases} 1, & \textcircled{0 \leq k \leq n} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

- Συνέλιξη

- Παράδειγμα:

$$H \quad \textcircled{1} \xrightarrow{\textcircled{2}} c_{xh}[n] = a^n \sum_{k=0}^n 1 = a^n (n - 0 + 1)$$

$$= a^n (n + 1), \quad n \geq 0$$

Άρα συνολικά,

$$c_{xh}[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ a^n (n + 1), & n \geq 0 \end{cases}$$

$$= a^n (n + 1) u[n].$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} c = c(N_2 - N_1 + 1)$$

• Συνέλιξη

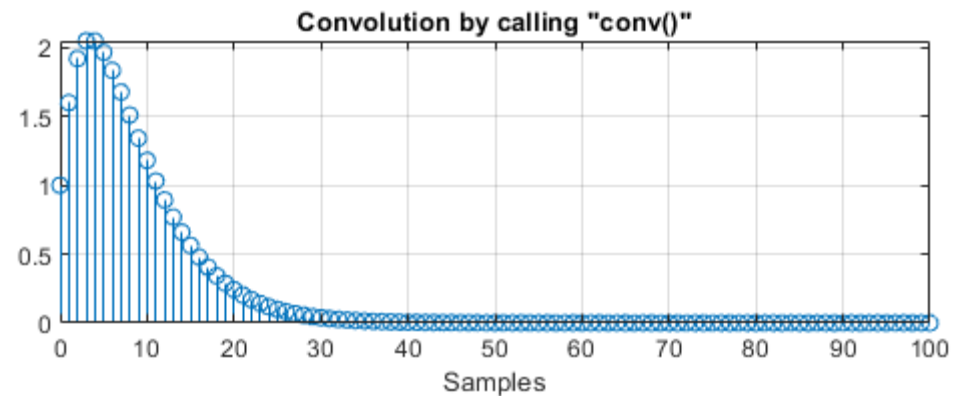
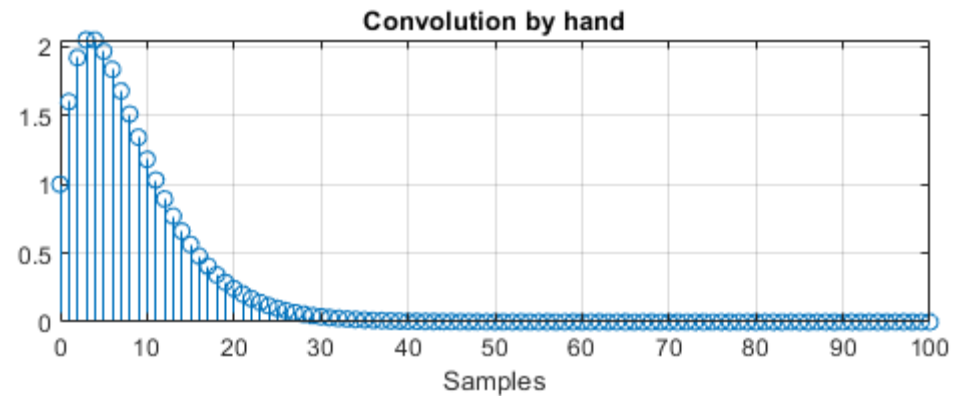
• Παράδειγμα:

```
% Σήματα
alpha = 0.8;
Nh = 100;
n = 0:Nh;
h = alpha.^n;
x = h;
```

```
% Convolution by hand
chx = alpha.^n .* (n+1);
```

```
% Convolution by conv function
c = conv(h, x);
```

```
% Σχήματα
figure; subplot(211); stem(n, chx);
title('Convolution by hand'); grid;
xlabel('Samples');
subplot(212); stem(n, c(1:Nh+1)); grid;
title('Convolution by calling "conv()"');
xlabel('Samples');
```



• Συνέλιξη

- Η γραφική ή η αλγεβρική μέθοδος είναι πολύ χρήσιμη όταν ένα τουλάχιστον εκ των δυο σημάτων που εμπλέκονται στη συνέλιξη είναι άπειρης διάρκειας
- Τι συμβαίνει όμως αν και τα δυο σήματα είναι πεπερασμένης (και συνήθως μικρής) διάρκειας?
- Τότε βολικότερη είναι η μέθοδος της **ολισθαίνουσας ταινίας (sliding tape)**

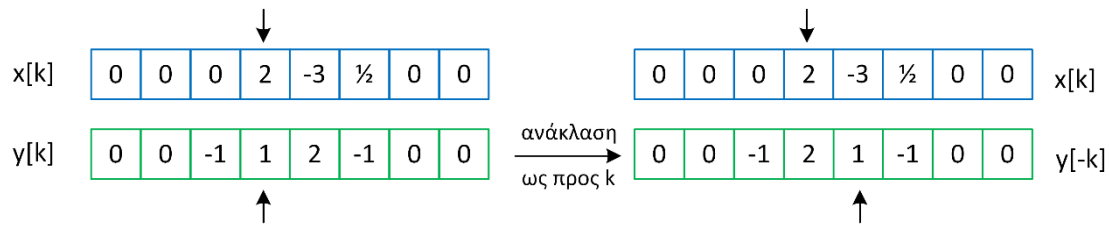
- Έστω ότι έχουμε δυο σήματα

$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n - 1] + \frac{1}{2}\delta[n - 2]$$

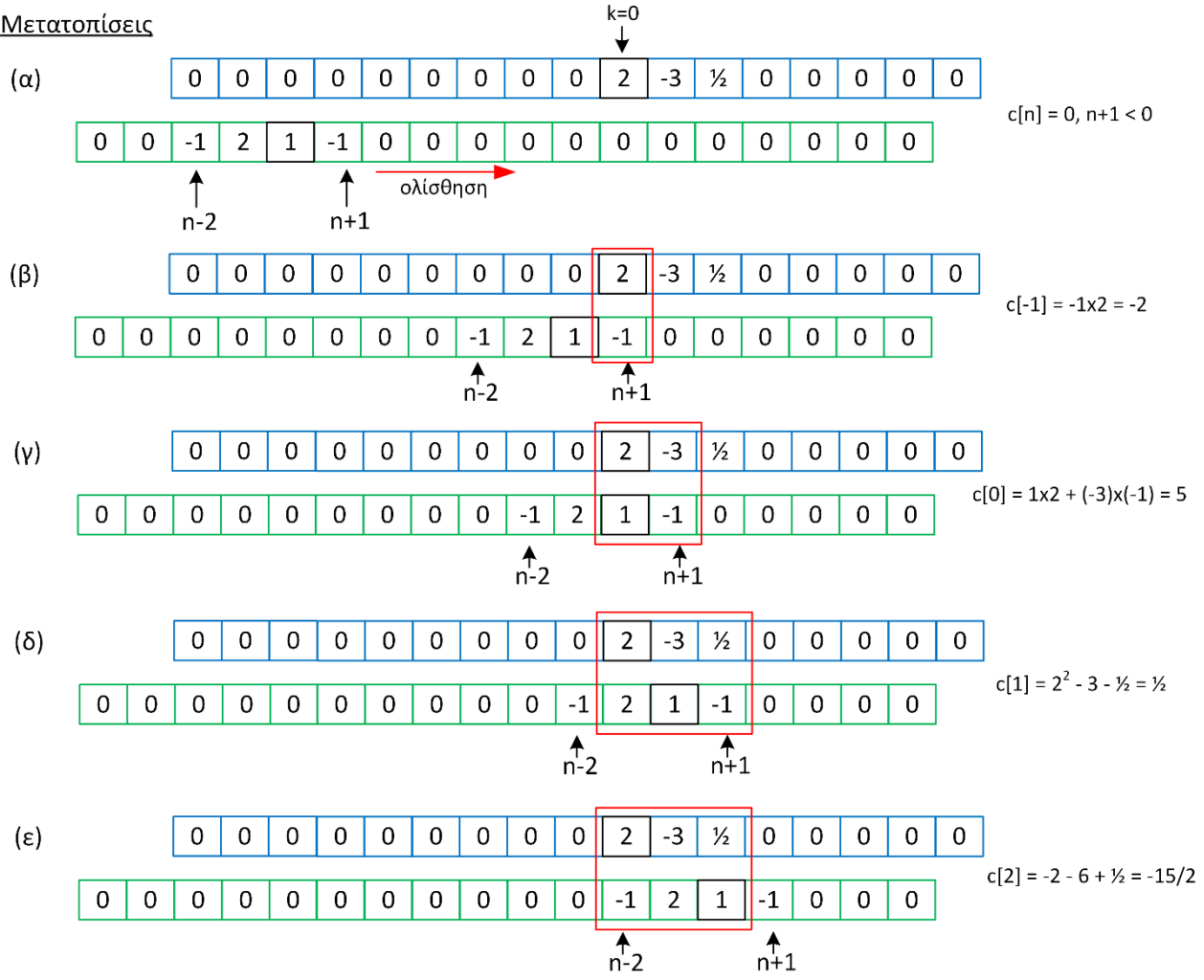
$$y[n] = -\delta[n + 1] + \delta[n] + 2\delta[n - 1] - \delta[n - 2]$$

- Θα κάνουμε την ίδια διαδικασία, απλά χωρίς σχήματα αυτή τη φορά

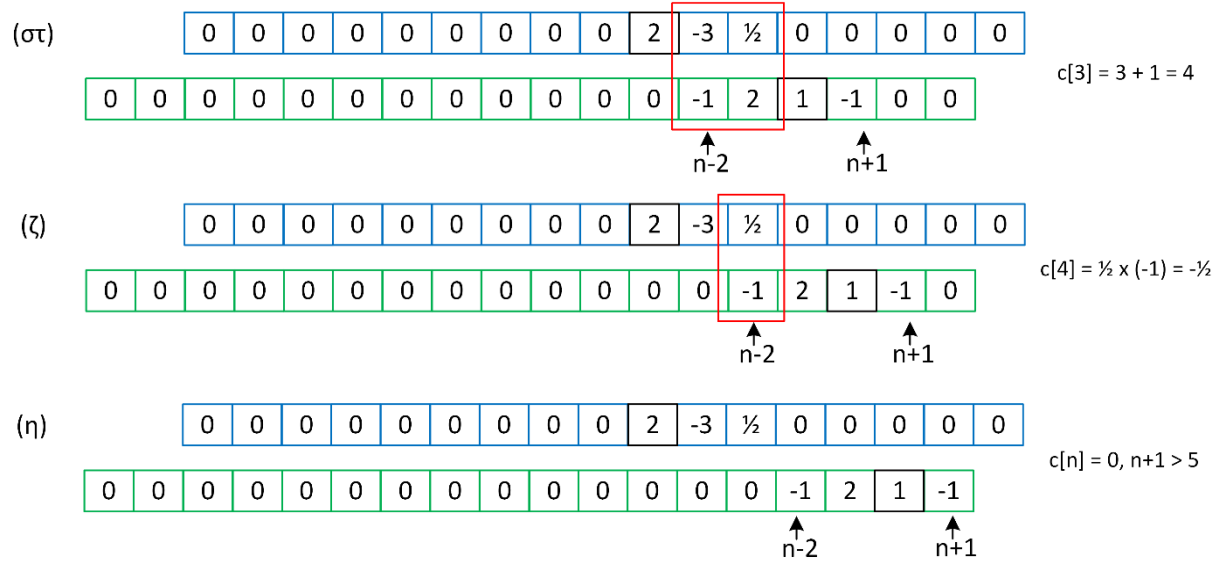
• Συνέλιξη



Μετατοπίσεις



• Συνέλιξη



• Το αποτέλεσμα είναι

$$c[n] = -2\delta[n + 1] + 5\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - 1] - \frac{15}{2}\delta[n - 2] + 4\delta[n - 3] - \frac{1}{2}\delta[n - 4]$$

• Η ιδιότητα του εύρους προβλέπει σωστά τη διάρκεια του παραπάνω σήματος?

• Μπορείτε να το επιβεβαιώσετε με χρήση ιδιοτήτων συνέλιξης?

• Συνέλιξη

```
% Σήματα
```

```
x = [2 -3 1/2];
```

```
nx = [0 1 2];
```

```
y = [-1 1 2 -1];
```

```
ny = [-1 0 1 2];
```

```
% Συνέλιξη
```

```
cxy = conv(x, y);
```

```
n_c = [-1 0 1 2 3 4];
```

```
% Σχήματα
```

```
figure; subplot(311); stem(nx, x);
```

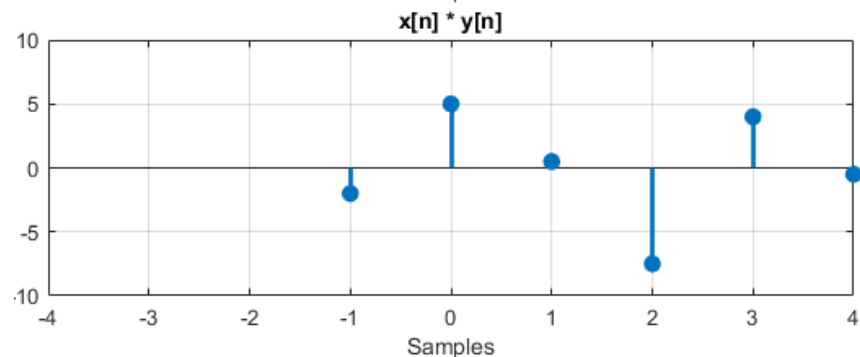
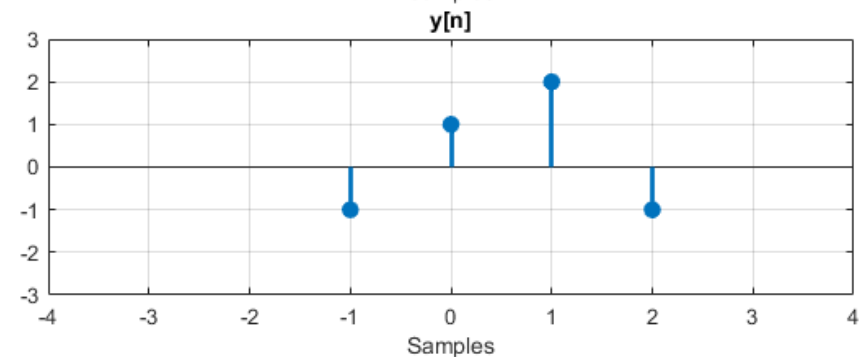
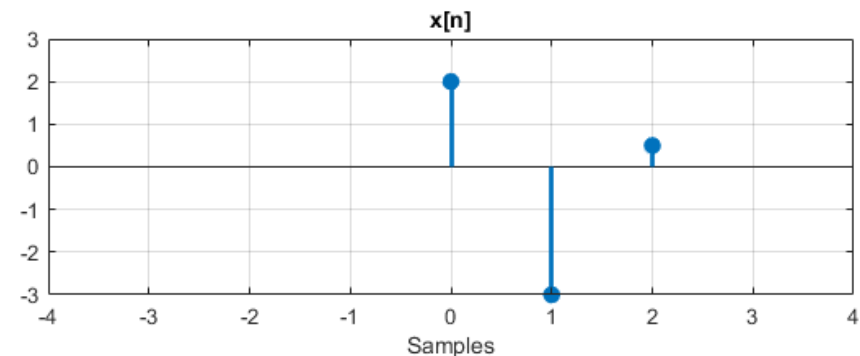
```
xlabel('Samples'); title('x[n]');
```

```
subplot(312); stem(ny, y);
```

```
xlabel('Samples'); title('y[n]');
```

```
subplot(313); stem(n_c, cxy);
```

```
xlabel('Samples'); title('x[n] * y[n]');
```



- **Συνολική έξοδος συστήματος**

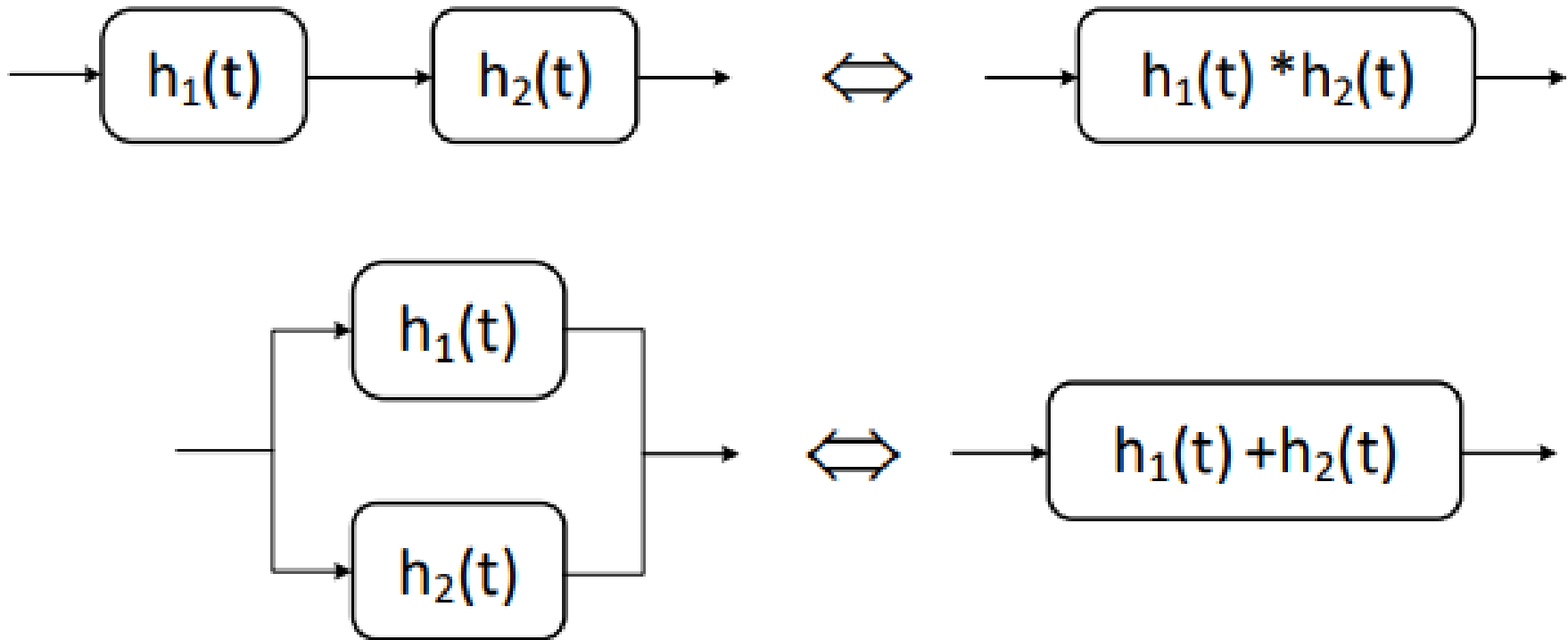
- Η συνολική έξοδος ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n]$ δίνεται ως

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \sum_{i=1}^N c_i \gamma_i^n u[n] + x[n] * h[n]$$

- Θα μας απασχολήσουν κατά κανόνα ΓΧΑ συστήματα, δηλ. τέτοια ώστε

$$y[n] = y_{zs}[n] = x[n] * h[n]$$

- Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων



$$\sum_{k=0}^{N-1} k = \frac{1}{2}(N-1)(N-2)$$

• Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων

- Παράδειγμα:
- Έστω το σύστημα της εικόνας, που αποτελείται από τα υποσυστήματα

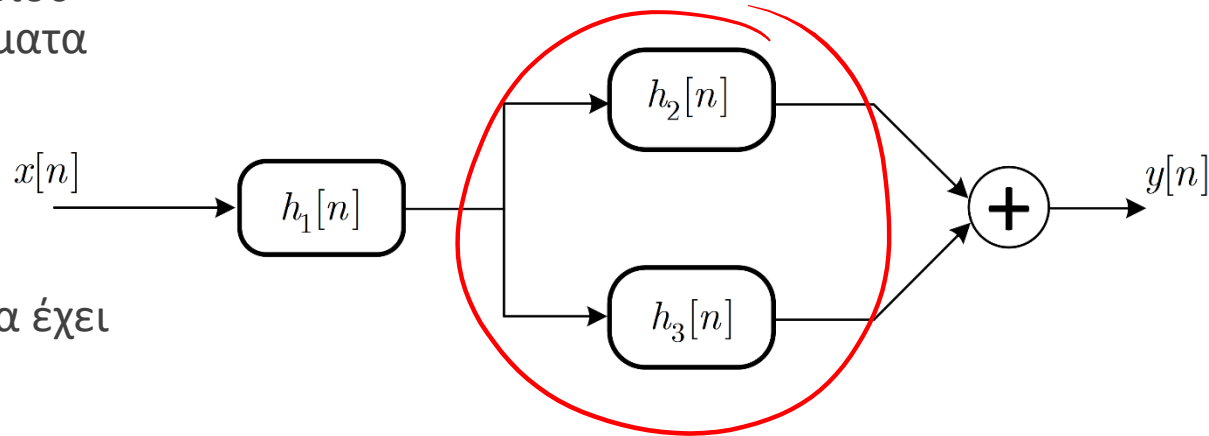
$$h_1[n] = u[n-1]$$

$$h_2[n] = nu[n]$$

$$h_3[n] = \delta[n+1]$$

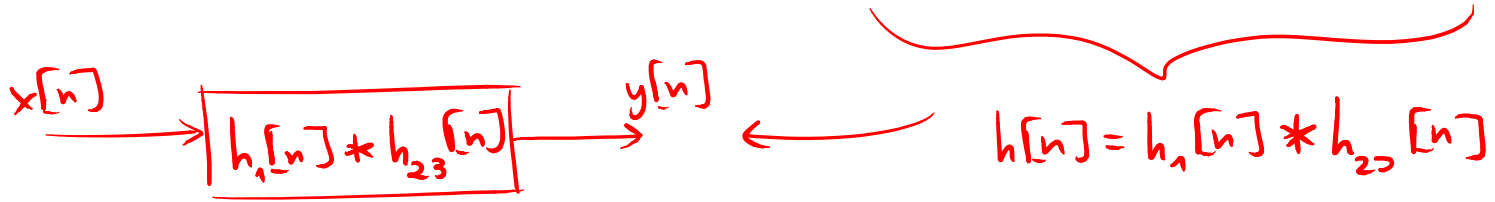
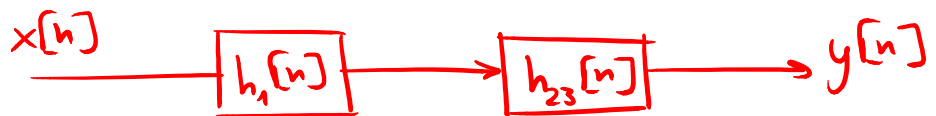
Δείξτε ότι το συνολικό σύστημα έχει κρουστική απόκριση

$$h[n] = u[n] + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)u[n-1]$$



↓

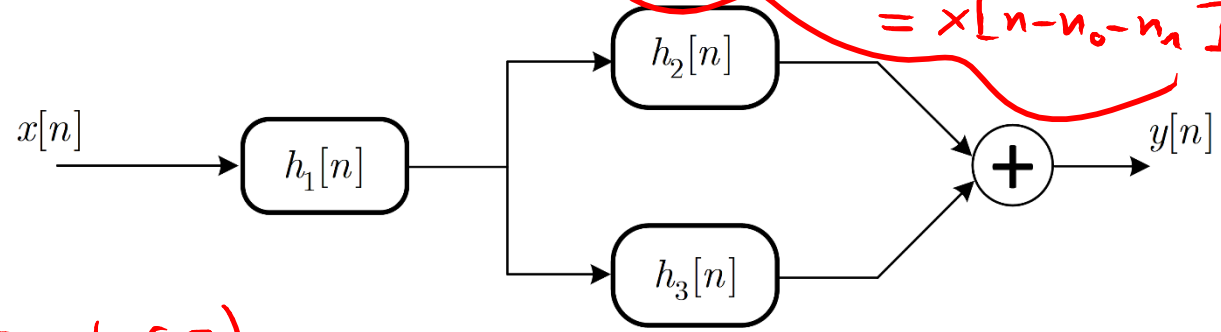
$$h_{23}[n] = h_2[n] + h_3[n]$$



• Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων

• Παράδειγμα:

$$\begin{aligned}
 h_1[n] &= u[n-1] \\
 h_2[n] &= nu[n] \\
 h_3[n] &= \delta[n+1]
 \end{aligned}$$



$x[n-n_0] * \delta[n-n_1] =$
 $= x[n-n_0-n_1]$

Είναι $h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n])$
 $= u[n-1] * (nu[n] + \delta[n+1])$
 $= u[n-1] * nu[n] + u[n-1] * \delta[n+1] \quad \textcircled{1}$

Είναι $u[n-1] * \delta[n+1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k-1] \delta[n-k+1] = \sum_{k=1}^{+\infty} \delta[n-k+1] = c[n]$

↓	↓
1, k ≥ 1	1, k = n+1
0, αλλιώς	0, αλλιώς

$= u[n-1+1] = u[n]$

Είναι $u[n-1] * nu[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k u[k] u[n-k-1]$

- Παράδειγμα:

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k u[k] u[n-k-1] \quad (1)$$

$$\begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \begin{cases} 1, & n-k-1 \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1, & k \leq n-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άρα $u[k] u[n-k-1] = \begin{cases} 1, & \underline{0 \leq k \leq n-1} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2)$

$$(1) \stackrel{(2)}{\implies} u[n-1] * nu[n] = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2} (n-1)(n-2), \text{ για } \underline{\underline{n-1 \geq 0}} \\ \underline{\underline{n \geq 1.}}$$

Συνολικά :

$$h[n] = u[n] + \frac{1}{2} (n-1)(n-2) u[n-1]$$

• Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

- Έχουμε συζητήσει για την έννοια της ευστάθειας ενός συστήματος

$$|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| < B_y, \quad B_x, B_y \in \mathfrak{R}$$

- Γνωρίζουμε ότι για ένα ΓΧΑ σύστημα η έξοδος δίνεται ως

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- Άρα θα πρέπει

$$|y[n]| < B_y \Rightarrow |x[n] * h[n]| < B_y \Rightarrow \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]||h[n-k]| < B_y$$

- Ξέρουμε ότι $|x[n]| < B_x, \quad \forall n$, οπότε

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]||h[n-k]| < B_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < B_y$$

- Η τελευταία σχέση ισχύει αν

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty$$

• Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

- Η σχέση

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty$$

είναι ισοδύναμη με τη

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

Κρουστική απόκριση
απολύτως αθροίσιμη

και η οποία αποτελεί **αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ευστάθεια** ενός ΓΧΑ συστήματος

- Δεν αποδεικνύουμε την αναγκαιότητα εδώ

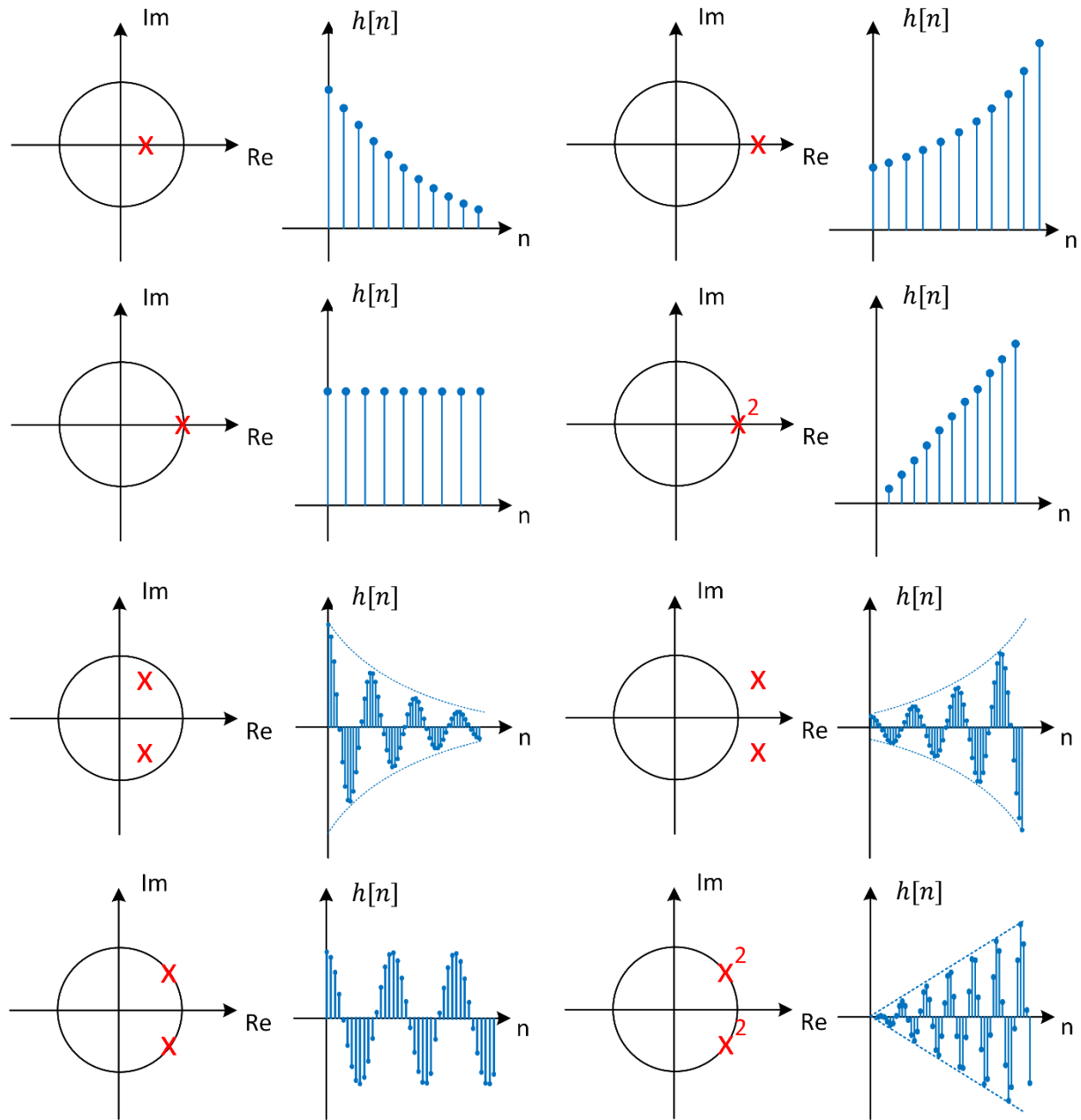
- Η κρουστική απόκριση μπορεί να αποτελείται από όρους της μορφής

$$\delta[n-k], \gamma_k^n, n^k \gamma_k^n$$

- Προφανώς η κρουστική απόκριση είναι απολύτως αθροίσιμη αν και μόνον αν

$$|\gamma_k| < 1, \quad \forall \gamma_k \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \text{οι χαρακτηριστικές ρίζες έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας!}$$

• Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος



• Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος

- Για δυο εισόδους $x_1[n], x_2[n]$ και δυο αντίστοιχες εξόδους $y_1[n], y_2[n]$, το σύστημα θεωρείται αιτιατό αν και μόνο αν

$$x_1[n] = x_2[n] \quad \forall n < n_0 \quad \Rightarrow \quad y_1[n] = y_2[n] \quad \forall n < n_0$$

- Αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε αυτό είναι αιτιατό, δηλ.

$$x[n] = 0, \quad n < n_0 \quad \Rightarrow \quad y[n] = 0, \quad n < n_0$$

- Αν θέλαμε να εκφράσουμε μια σχέση αιτιατότητας και κρουστικής απόκρισης, ποια θα ήταν αυτή;
- Σκεφτείτε ότι ένα σύστημα αποκρίνεται την κρουστική του απόκριση $h[n]$ αν στην είσοδό του εμφανιστεί η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$
 - Όμως αυτή εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$ και όχι νωρίτερα
- Άρα ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνον αν

$$h[n] = 0, \quad n < 0$$

- **Πεπερασμένης και Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης ΓΧΑ Συστήματα**

- Αν η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n - k]$$

τότε λέμε ότι το σύστημα είναι ένα **FIR (Finite Impulse Response) σύστημα**

- Παρατηρήστε ότι στα FIR συστήματα, η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας – όπως «προδίδει» και το όνομά τους... 😊
- Αντίθετα, αν η κρουστική απόκριση δεν είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε τα συστήματα αυτά λέγονται **IIR (Infinite Impulse Response) συστήματα**.

- Ως τώρα μελετήσαμε τα συστήματα στο πεδίο του χρόνου
- Είδαμε τη χρησιμότητα της συνάρτησης Δέλτα $\delta[n]$ στην όλη διαδικασία εύρεσης της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος
- Παρ' όλα αυτά
 - Δεν έχουμε περισσότερη διαίσθηση του γιατί τα συστήματα συμπεριφέρονται έτσι
 - Δεν ξέρουμε πώς να σχεδιάσουμε ένα σύστημα με μια επιθυμητή συμπεριφορά
- Στην προσπάθειά μας αυτή θα εφαρμόσουμε μια διαφορετική είσοδο στο σύστημα αντί της συνάρτησης Δέλτα
 - Ας δούμε που θα μας οδηγήσει αυτό...

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Έστω το σήμα

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \quad -\infty < n < +\infty$$

- Η έξοδος τότε θα είναι

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)}$$

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

με

$$H(e^{j\omega_0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

να είναι αριθμός (εν γένει μιγαδικός)

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Καταλήξαμε στο ότι

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$$

δηλ. η έξοδος είναι ίδια με την είσοδο $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, με τη διαφορά ότι έχει πολλαπλασιαστεί με τον (μιγαδικό εν γένει) αριθμό

$$H(e^{j\omega_0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

- Έτσι, η συνάρτηση $e^{j\omega_0 n}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** του συστήματος ενώ ο αριθμός $H(e^{j\omega_0})$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος
- Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί μας αποκαλύπτει ότι ένα ΓΧΑ σύστημα αφήνει αναλλοίωτα τα σήματα της μορφής $e^{j\omega_0 n}$ στην έξοδό του, μεταβάλλοντάς τα πολλαπλασιαστικά με ένα μιγαδικό αριθμό
- Ας μελετήσουμε λίγο τη συνάρτηση της ιδιοτιμής

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Εν γένει, έχουμε την συνάρτηση

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

η οποία ως μιγαδική συνάρτηση του ω μπορεί να γραφεί ως

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi_H(e^{j\omega})}$$

με

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$

και

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$$

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Το άθροισμα

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα άραγε για κάθε κρουστική απόκριση $h[n]$?

- Αρκεί

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

αφού $|e^{j\omega n}| = 1, \forall \omega, n$

- Η συνθήκη αυτή δεν είναι όμως και αναγκαία
 - Θα πούμε περισσότερα αργότερα...

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Η συνάρτηση ως προς ω

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

δεδομένης της σημασίας της, δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα. Ονομάζεται

Απόκριση σε Συχνότητα (frequency response)

- Παρατηρήστε ότι η απόκριση σε συχνότητα είναι μια πράξη που εμπλέκει την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος
- Μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι αν η κρουστική απόκριση είναι πραγματική συνάρτηση, η απόκριση σε συχνότητα είναι συζυγής συμμετρική συνάρτηση του ω

$$h[n] = h^*[n]$$

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Η ιδιότητα

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$$

συνεπάγεται ότι

$$H_R(e^{j\omega}) = H_R(e^{-j\omega})$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -H_I(e^{-j\omega})$$

και

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$$

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = -\varphi_H(e^{-j\omega})$$

- Οι δυο τελευταίες συναρτήσεις του ω ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης**, αντίστοιχα
- Μπορούμε να καταλάβουμε περισσότερα για αυτές τις συναρτήσεις?

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Αν για είσοδο $x[n] = Ae^{j(\omega_0 n + \theta)}$, $A \in \mathfrak{R}_+$ γράψουμε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος αναλυτικότερα, θα έχουμε

$$\begin{aligned}y[n] &= H(e^{j\omega_0})Ae^{j(\omega_0 n + \theta)} \\ &= A|H(e^{j\omega_0})|e^{j\varphi_H(e^{j\omega_0})}e^{j(\omega_0 n + \theta)} \\ &= A|H(e^{j\omega_0})|e^{j(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))}\end{aligned}$$

- Ξεκάθαρα βλέπουμε ότι

1. Η απόκριση πλάτους επηρεάζει **πολλαπλασιαστικά** το πλάτος A του σήματος εισόδου
2. Η απόκριση φάσης επηρεάζει **αθροιστικά** τη φάση $\omega_0 n + \theta$ του σήματος εισόδου

- Πώς μας βοηθά όλη αυτή η ανάλυση στο να καταλάβουμε περισσότερα για το πώς δουλεύουν τα συστήματα?
 - Ας κάνουμε ένα βήμα ακόμα

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Για είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα με πραγματική κρουστική απόκριση

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 n + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 n + \theta)}, \quad A \in \mathfrak{R}_+$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 n)} e^{j\theta} + H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 n)} e^{-j\theta} \\ &= |H(e^{j\omega_0})| \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 n)} e^{j\theta} e^{j\varphi_H(e^{j\omega_0})} + |H(e^{-j\omega_0})| \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 n)} e^{-j\theta} e^{j\varphi_H(e^{-j\omega_0})} \\ &= |H(e^{j\omega_0})| \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))} + |H(e^{-j\omega_0})| \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 n - \theta + \varphi_H(e^{-j\omega_0}))} \end{aligned}$$

- Όμως

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$$

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = -\varphi_H(e^{-j\omega})$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Άρα

$$\begin{aligned} y[n] &= |H(e^{j\omega_0})| \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))} + |H(e^{j\omega_0})| \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))} \\ &= A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0})) \end{aligned}$$

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi_H(e^{j\omega})}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = C + A \cos(\omega_0 n + \theta)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = CH(e^{j0}) + |H(e^{j\omega_0})| A \cos(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Ξανά από τη σχέση του Euler, μπορούμε να εκφράσουμε ένα άθροισμα ημιτόνων ως άθροισμα εκθετικών μιγαδικών σημάτων!
- Έτσι, δεδομένου ότι τα συστήματα που μελετάμε είναι ΓΧΑ, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi_H(e^{j\omega})}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = A_0 H(e^{j0}) + \sum_{k=1}^N |H(e^{j\omega_k})| A_k \cos(\omega_k n + \theta_k + \varphi_H(e^{j\omega_k}))$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Μην ξεχνάτε την ιδιαίτερη παρατήρηση που έχουμε κάνει στην αρχή του μαθήματος
- Ο χώρος της συχνότητας είναι περιοδικός με περίοδο 2π !

- Πράγματι

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j\omega})$$

- Εφόσον η απόκριση σε συχνότητα αποτελεί μια συνάρτηση του ω , δεν αποτελεί έκπληξη ότι αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π
 - Το ίδιο ισχύει ασφαλώς για την απόκριση πλάτους και την απόκριση φάσης της
- Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί κοιτώντας τον ορισμό της απόκρισης σε συχνότητα
 - Αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων με συντελεστές $h[n]$
 - Τα εκθετικά αυτά είναι 2π -περιοδικά στη συχνότητα
- Εναλλακτικά, αφού τα σήματα $e^{j\omega_0 n}$ και $e^{j(\omega_0+2\pi)n}$ είναι ουσιαστικά ίδια, ένα σύστημα θα πρέπει να αποκρίνεται το ίδιο σε αυτές τις συχνότητες

• Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:

○ Έστω το απλό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y[n] = x[n - n_d]$. Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$.

$$n_d > 0$$

Θεωρούμε $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, τότε $y[n] = x[n - n_d] = e^{j\omega_0(n - n_d)} = \underbrace{e^{-j\omega_0 n_d}}_{H(e^{j\omega_0})} \cdot \underbrace{e^{j\omega_0 n}}$

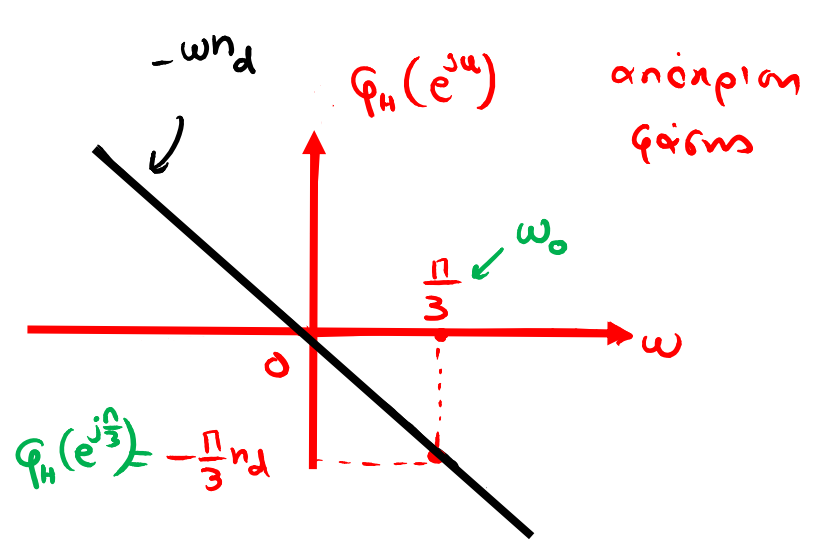
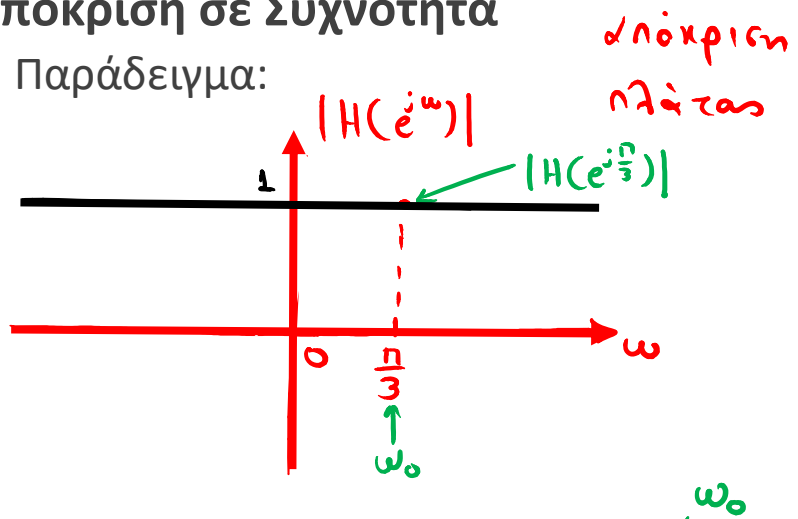
Γενικότερα, $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$

Απόκριση πλάτους: $|H(e^{j\omega})| = |e^{-j\omega n_d}| = |\cos(-\omega n_d) + j \sin(-\omega n_d)|$
 $= \sqrt{\cos^2(-\omega n_d) + \sin^2(-\omega n_d)} = \sqrt{1} = 1, \forall \omega.$

Απόκριση φάσης: $\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = \tan^{-1} \frac{\sin(-\omega n_d)}{\cos(-\omega n_d)} =$
 $= \tan^{-1} \frac{-\sin(\omega n_d)}{\cos(\omega n_d)} = \tan^{-1}(-\tan(\omega n_d)) = -\tan^{-1}(\tan(\omega n_d)) = -\omega n_d.$

• Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:



Για είσοδο, $x[n] = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{4}\right)$, $y[n] = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}(n-n_d) + \frac{\pi}{4}\right)$
 $= 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}n - \underbrace{\frac{\pi}{3}n_d}_{\varphi_H(e^{j\frac{\pi}{3}})} + \frac{\pi}{4}\right)$

Βλέπατε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την είσοδο για μια αυτή είσοδο χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση διαφορών, αλλά γινώσκοντας μόνο της απόκρισης σε συχνότητα!

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος αυτού.

Έστω $M_1=0$, οπότε $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_2+1}, & 0 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$. Θα έχω-ε $(e^{j\omega})^n$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \frac{1 - e^{-j\omega(M_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{e^{-j\omega \frac{(M_2+1)}{2}} \cdot \frac{e^{j\omega \frac{(M_2+1)}{2}} - e^{-j\omega \frac{(M_2+1)}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}}}$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\left(\frac{\omega(M_2+1)}{2} - \frac{\omega}{2}\right)} \cdot \frac{\cancel{2j} \cdot \sin\left(\frac{\omega(M_2+1)}{2}\right)}{\cancel{2j} \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\frac{\omega M_2}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΕ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Παράδειγμα:

$$\text{Απόκριση πλάτους: } |H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{M_2+1} e^{-j\left(\frac{\omega M_2}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\omega(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \cdot \left| e^{-j\frac{\omega M_2}{2}} \right| \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right| \cdot \text{As δούμε πως φαίνεται η } |H(e^{j\omega})| \text{ στο}$$

διάστημα $(0, 2\pi)$, αφού εδώ από αυτό επαναλαμβάνεται (2π-περιόδωση)

$$\text{Ο αριθμητής } \sin\left(\frac{\omega(M_2+1)}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\omega(M_2+1)}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2k\pi}{M_2+1}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Για } \omega=0, \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\lambda\omega)}{\sin(\omega)} \stackrel{\text{DL'H}}{=} \lambda, \text{ άρα } H(e^{j0}) = \frac{1}{M_2+1} (M_2+1) = 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} |e^{j\theta}| = 1 \\ \forall \theta \end{array} \right\}$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:

Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ εξαρτάται ουσιαστικά από το μέτρο του όρου

$$\frac{\sin\left(\frac{\omega(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

Για να έχουμε μια ποιοτική εικόνα, αν θέσουμε $M_2=4$, τότε ο όρος γίνεται

$$\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

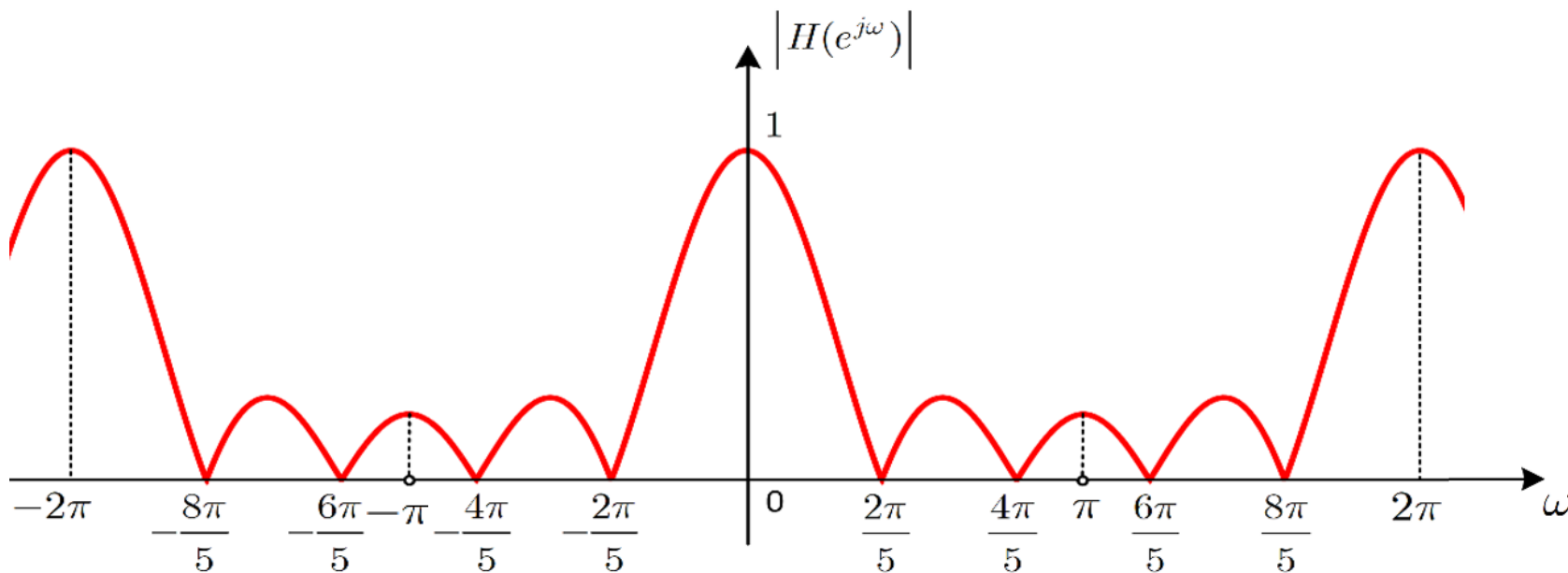
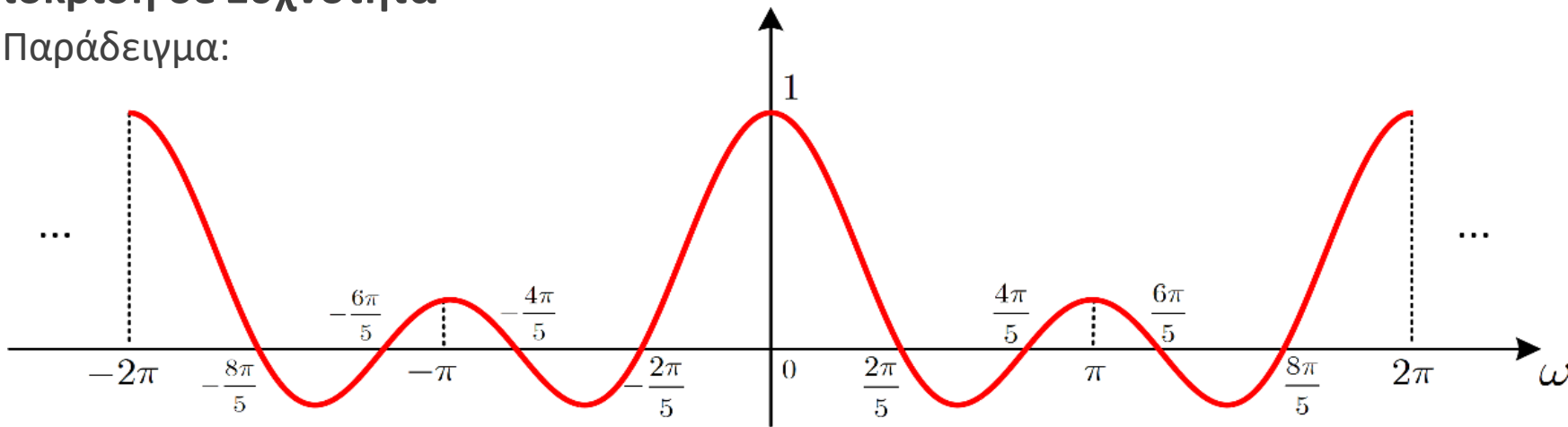
και τα σημεία μηδενισμού του γίνεται $\omega_k = \frac{2\pi}{M_2+1}k = \frac{2\pi}{5}k, k \in \mathbb{Z}$.

Έτσι, ο όρος $\frac{1}{5} \frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$, καθώς και το μέτρο του, θα έχουν τις

ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:

• Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:



• Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:

Με βάση των απόκριση πλάτους, μπορούμε να προβλέψουμε το πλάτος εξόδου αντών σημάτων όπως παρακάτω:

• αν $x[n] = 3 \cdot \cos\left(\frac{2n}{5}n + \varphi\right)$, τότε $y[n] = 3 \cdot \underset{\uparrow}{0} \cdot \cos\left(\frac{2n}{5}n + \varphi + \varphi_H(e^{j\frac{2n}{5}})\right) = 0!$

$|H(e^{j\frac{2n}{5}})| = 0!$ $\approx |H(e^{j\frac{3n}{5}})|$

• αν $x[n] = 2 \cos\left(\frac{3n}{5}n + \varphi\right)$, τότε $y[n] \approx 2 \cdot \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3n}{5}n + \varphi + \varphi_H(e^{j\frac{3n}{5}})\right) =$
 $= \cos\left(\frac{3n}{5}n + \varphi + \varphi_H(e^{j\frac{3n}{5}})\right)$

Όρα να μελετήσουμε και την απόκριση φάσης του συστήματος, $\varphi_H(e^{j\omega})!$

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Παράδειγμα:

Απόκριση φάσης: $\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = \dots \times$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2 + 1} e^{-j \frac{M_2 \omega}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega(M_2 + 1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \varphi = 0 & \vartheta = -\frac{M_2 \omega}{2} & \delta = ? \end{array}$$

Ζητάμε τη φάση του $\frac{\sin\left(\frac{\omega(M_2 + 1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$

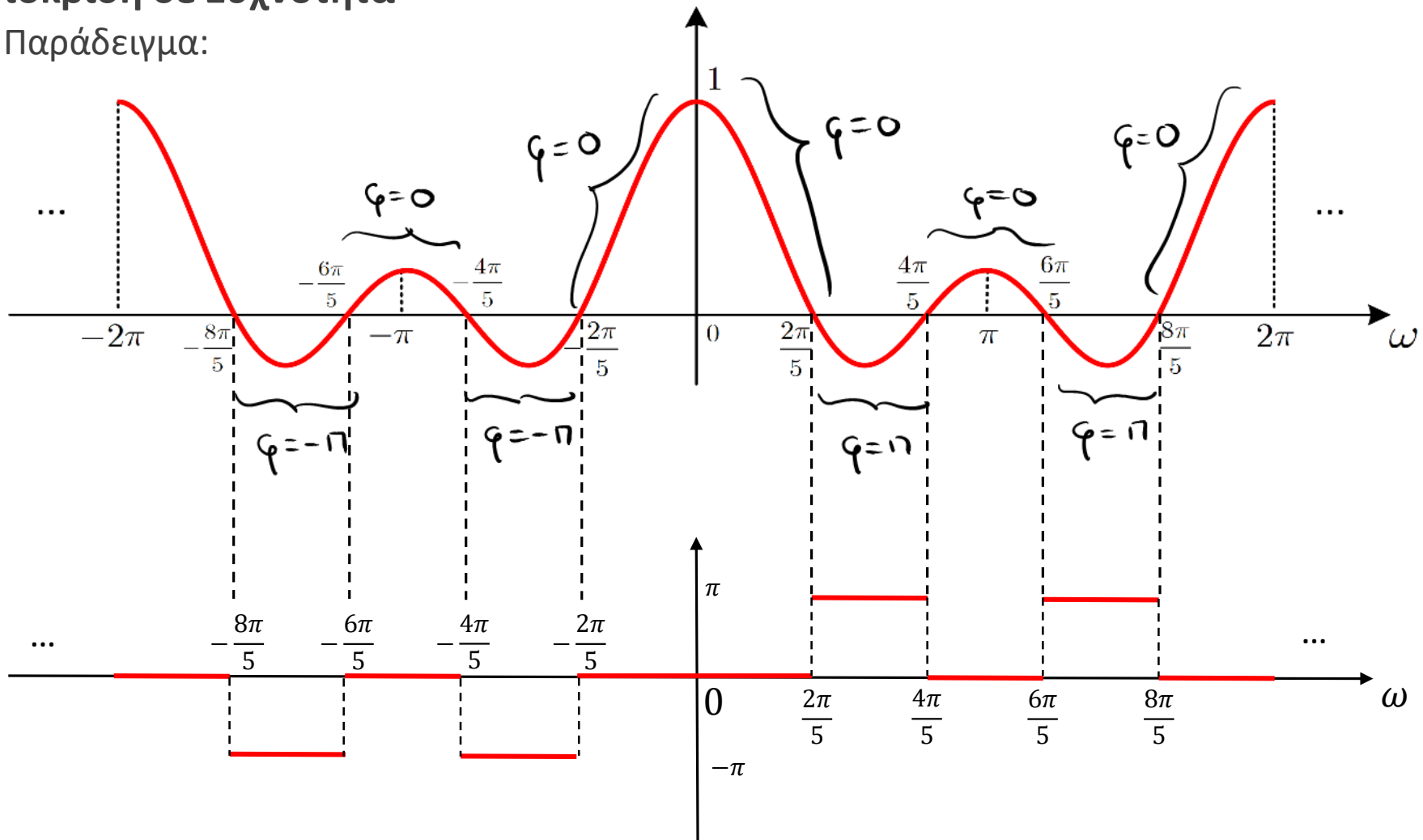
Η συνολική φάση θα είναι $\neq H(e^{j\omega}) = -\frac{M_2 \omega}{2} + \delta$, με δ τη φάση του $\frac{\sin(\dots)}{\sin(\dots)}$.

Θυμηθείτε ότι ένας αρνητικός αριθμός a μπορεί να γραφεί ως:

$$c = |c| e^{\pm j\pi}, \text{ με } \pm \pi \text{ τη φάση του!}$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:



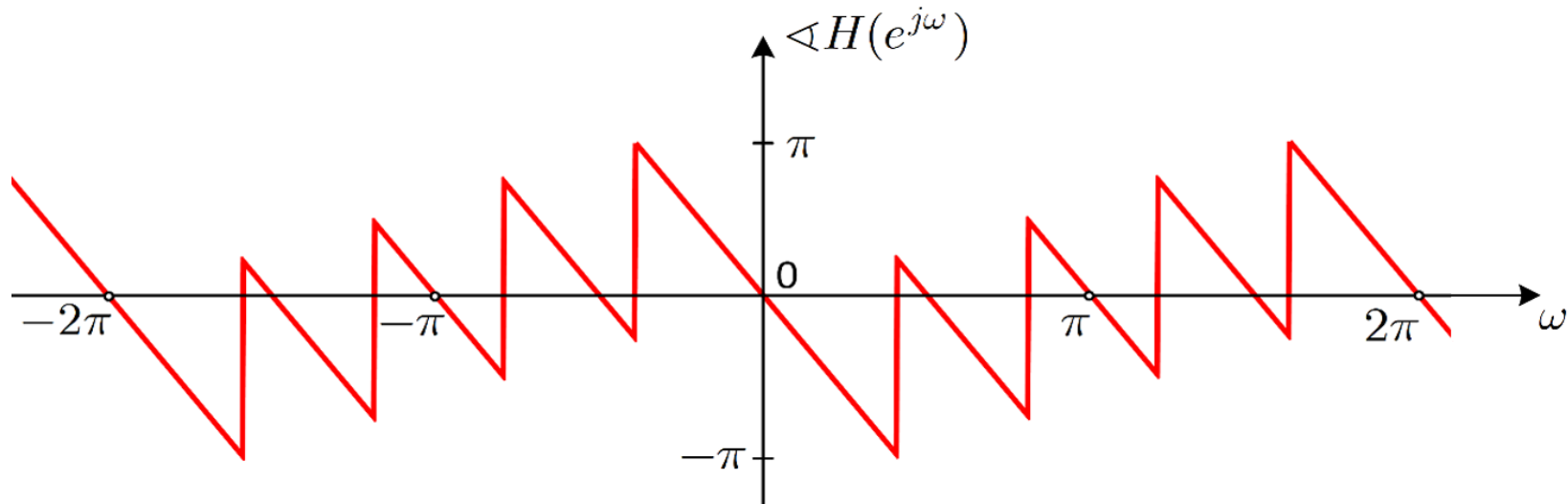
Αντιστοιχίσαμε δεσπνέ τρέσ τος φάσος σε $\omega > 0$
 ——— αφνηκός ——— ——— $\omega < 0$.

• Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:

Συνολικά: $M_2 = 4$

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -2\omega, & 0 \leq \omega < \frac{2\pi}{5} \\ -2\omega + \pi, & \frac{2\pi}{5} < \omega < \frac{4\pi}{5} \\ -2\omega, & \frac{4\pi}{5} < \omega < \frac{6\pi}{5} \\ -2\omega + \pi, & \frac{6\pi}{5} < \omega < \frac{8\pi}{5} \\ -2\omega, & \frac{8\pi}{5} < \omega < 2\pi \end{cases} = \angle H(e^{j\omega})$$



• Απόκριση σε Συχνότητα

- Παράδειγμα:

Πλέον μπορούμε να απαντήσουμε σε ερωτήματα όπως :

- αν $x[n] = A \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{3}\right)$, $y[n] = ?$

$$y[n] = A |H(e^{j\pi})| \cdot \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{3} + \varphi_H(e^{j\pi})\right) = \dots \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

- αν $x[n] = A \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{6}\right)$, $y[n] = ?$

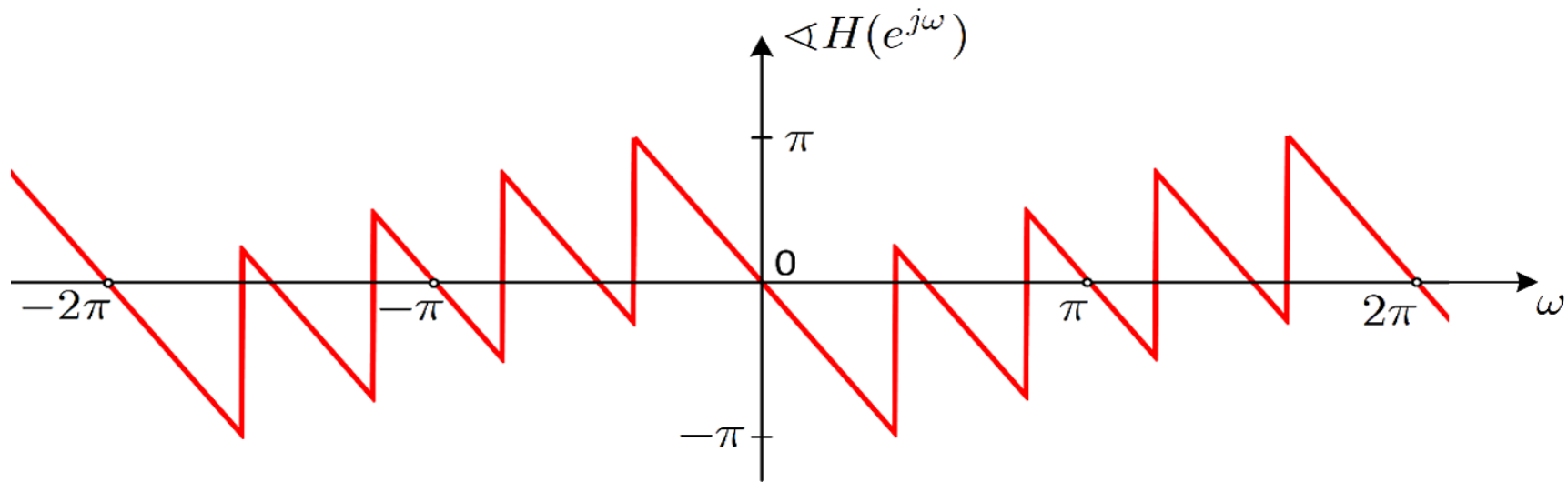
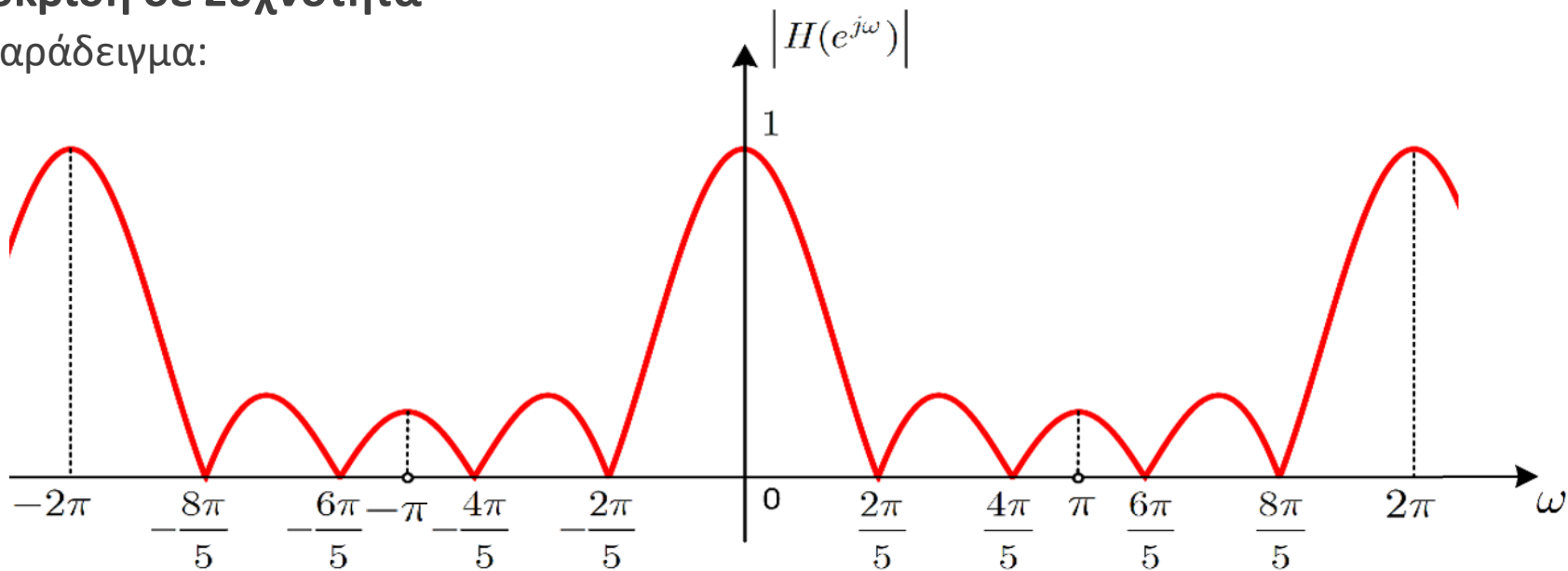
$$y[n] = A |H(e^{j\frac{\pi}{3}})| \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{6} + \varphi_H(e^{j\frac{\pi}{3}})\right) = \dots \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

- αν $x[n] = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6}\right)$, $y[n] = ?$

$$y[n] = 2 |H(e^{j\frac{\pi}{2}})| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6} + \varphi_H(e^{j\frac{\pi}{2}})\right) = \dots \cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6} + \theta\right)$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:



• Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

- Ως τώρα μελετήσαμε την είσοδο της μορφής

$$e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < +\infty$$

σε ένα ΓΧΑ σύστημα

- Όμως τέτοια σήματα ($-\infty < n < +\infty$) δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα
- Οπότε η ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης + ιδιοτιμής δεν ισχύει ακριβώς στην πράξη
- Ας κάνουμε τα πράγματα πιο κοντά στην πραγματικότητα
- Έστω ότι έχουμε ένα σήμα που εφαρμόζεται σε μια τυχαία χρονική στιγμή σε ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα
 - Για λόγους ευκολίας έστω ότι η στιγμή αυτή είναι $n = 0$
- Το σήμα αυτό θα είναι το

$$x[n] = e^{j\omega n} u[n]$$

• Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

- Εφαρμόζοντας το άθροισμα της συνέλιξης θα έχουμε

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^n h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}, & n \geq 0 \end{cases}$$

- Για $n \geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \\ &= H(e^{j\omega n}) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \\ &= y_{ss}[n] + y_t[n] \end{aligned}$$

- Ο όρος $y_{ss}[n]$ ονομάζεται **απόκριση σταθερής κατάστασης (steady state response)** ενώ ο όρος $y_t[n]$ ονομάζεται **μεταβατική απόκριση (transient response)**

- Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

$$\begin{aligned}y[n] &= H(e^{j\omega n})e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \\ &= y_{ss}[n] + y_t[n]\end{aligned}$$

- Η απόκριση σταθερής κατάστασης $y_{ss}[n]$ είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που θα λαμβάναμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης
- Η μεταβατική απόκριση $y_t[n]$ μπορεί κανείς να τη δει ως το «πόσο απέχει» η έξοδος μας από το αποτέλεσμα της ιδιοσυνάρτησης
- Άραγε πως συμπεριφέρεται η μεταβατική απόκριση;
 - Μήπως μπορεί να εξαφανίζεται σε κάποιες περιπτώσεις και να καταλήγουμε στα χέρια μας μόνο με την απόκριση σταθερής κατάστασης;
- Ας δούμε πότε – και αν – συμβαίνει αυτό...

- Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

$$|y_t[n]| = \left| \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]|$$

- Από το παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε δυο πράγματα:

1. Αν η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας έτσι ώστε

$$h[n] \neq 0, \quad 0 \leq n \leq M$$

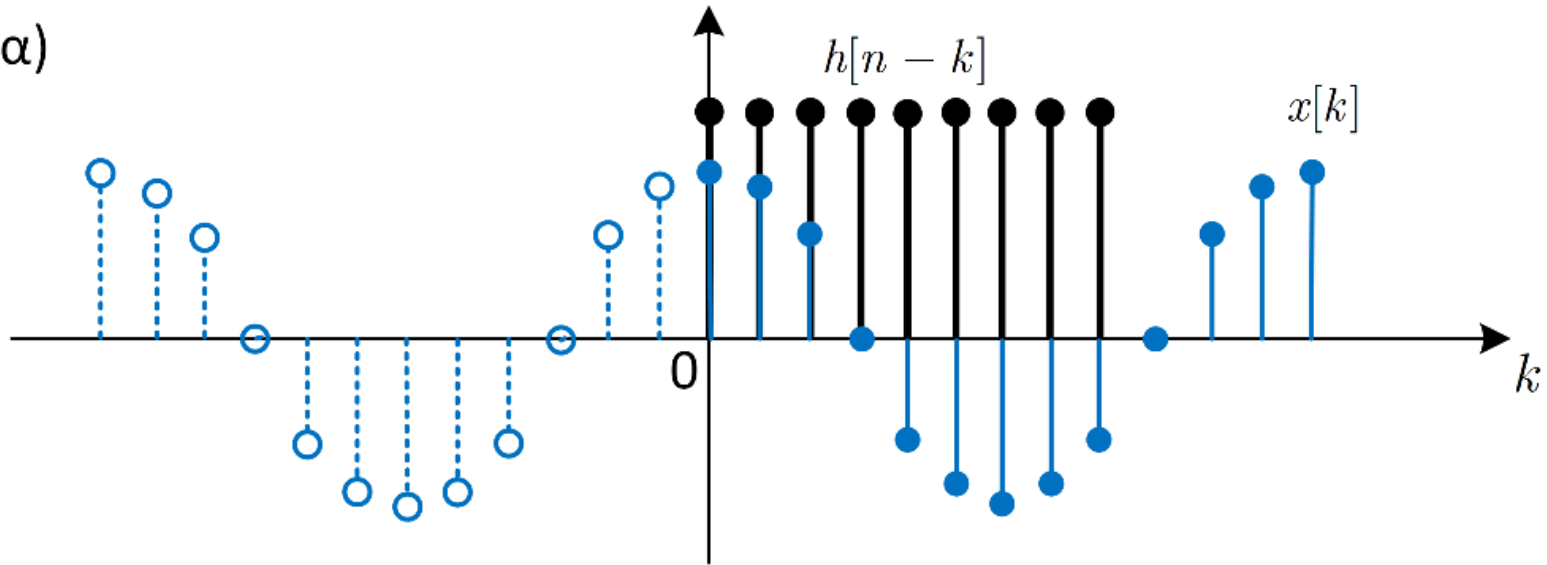
τότε ο παραπάνω όρος είναι μηδέν για $n \geq M$. Οπότε θα έχουμε μόνο την απόκριση σταθερής κατάστασης στην έξοδο για $n \geq M$

2. Αν η κρουστική απόκριση έχει άπειρη διάρκεια, τότε η μεταβατική απόκριση δεν εξαφανίζεται ακαριαία αλλά φθίνει στο μηδέν **αν** οι τιμές της κρουστικής απόκρισης πλησιάζουν το μηδέν όταν $n \rightarrow +\infty$

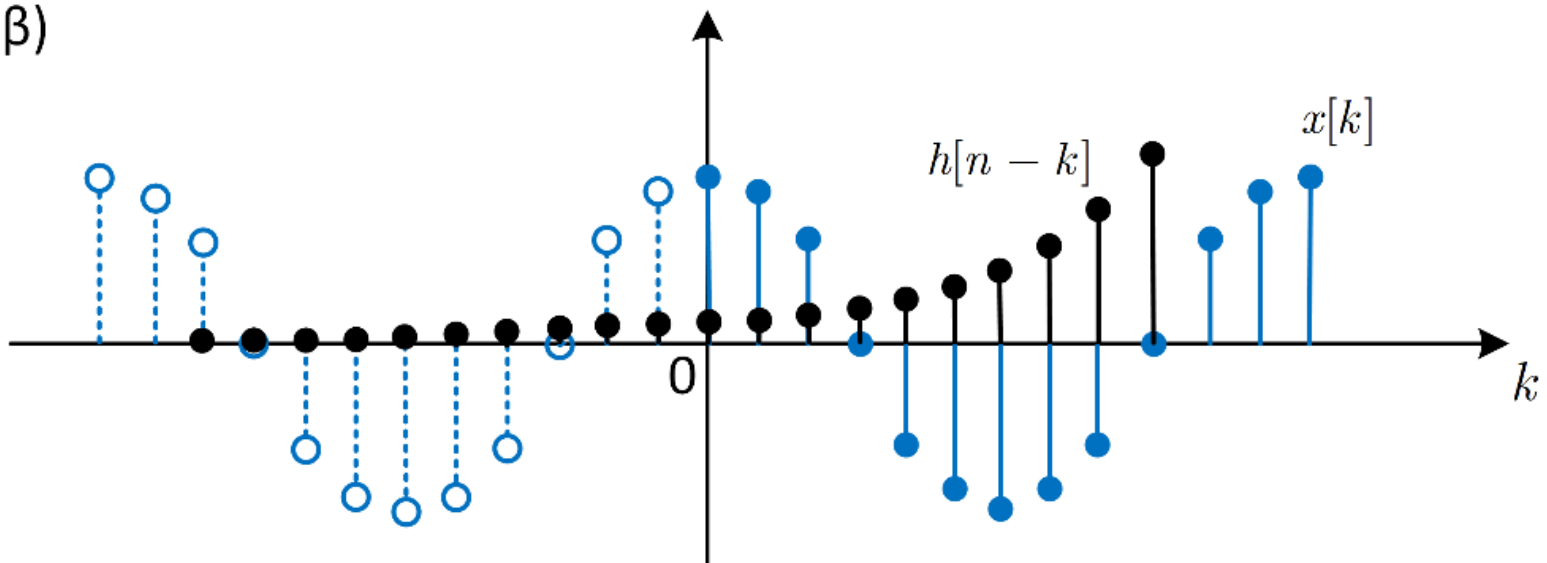
- Πότε συμβαίνει αυτό? Όταν το σύστημα είναι ευσταθές, όπως βλέπουμε από την τελευταία ανίσωση!

• Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

(α)



(β)



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Είδαμε λοιπόν με λεπτομέρεια πως επηρεάζει ένα ΓΧΑ σύστημα ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα συχνότητας ω_0 που εμφανίζεται στην είσοδό του
 - Το πλάτος της εισόδου πολλαπλασιάζεται με μια σταθερά $|H(e^{j\omega_0})|$
 - Στη φάση της εισόδου προστίθεται μια σταθερά $\varphi_H(e^{j\omega_0})$
- Όμως τα περισσότερα σήματα που μας ενδιαφέρουν δεν έχουν τη μορφή ενός μιγαδικού εκθετικού σήματος
- Η ανάλυση που κάναμε θα μας ήταν **πολύ** χρήσιμη αν μπορούσαμε να εκφράσουμε ένα οποιοδήποτε σήμα $x[n]$ ως συνάρτηση κάποιων μιγαδικών εκθετικών σημάτων που το καθένα θα έχει κάποια συγκεκριμένη συχνότητα
 - Τότε θα γνωρίζαμε πως επηρεάζεται κάθε συχνότητα από το ΓΧΑ σύστημα
- Αποδεικνύεται ότι κάτι τέτοιο είναι εφικτό!! 😊
- Το μαθηματικό εργαλείο που μας δίνει αυτήν την πληροφορία ονομάζεται – έκπληξη! 😊 – **Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (discrete time Fourier Transform – DTFT)**

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Μια πιο εύλογη εξαγωγή του DTFT προέρχεται από τις Σειρές Fourier διακριτού χρόνου, ευθέως ανάλογα με την εξαγωγή του Μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου από τις Σειρές Fourier συνεχούς χρόνου
- Θα παραλείψουμε εδώ αυτήν την παρουσίαση και θα δώσουμε απευθείας τον ορισμό
- Ο DTFT ενός σήματος $x[n]$ ορίζεται ως

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Κατ' αρχάς είναι εμφανές ότι ο DTFT είναι μια μιγαδική, εν γένει, συνάρτηση του ω :

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi_X(e^{j\omega})}$$

με

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Πλάτους
(Magnitude Spectrum)

και

$$\varphi_X(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Φάσης
(Phase Spectrum)

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Είναι πολύ σημαντικό να καταλάβουμε τι εκφράζει ο DTFT και τι ο αντίστροφός του

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

- Θα σας βοηθήσει αν θυμηθείτε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό συνεχούς χρόνου

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

1. Ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$ μας πληροφορεί για το μέτρο και τη φάση των μιγαδικών εκθετικών με συχνότητες $d\omega$, οι οποίες παίρνουν συνεχείς τιμές στο $(-\pi, \pi]$, και “υπάρχουν” μέσα στο σήμα $x[n]$. Δηλ. μας βρίσκει τη συνάρτηση $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\phi_x(e^{j\omega})}$.
2. Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου χρησιμοποιεί τη συνάρτηση $X(e^{j\omega})$, δηλ. το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου, για να συνθέσει το σήμα στο χρόνο $x[n]$, ως ένα συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) μιγαδικών εκθετικών όλων των πιθανών συχνοτήτων $d\omega$ του διαστήματος $(-\pi, \pi]$, με το καθένα εκθετικό να έχει συντελεστή $X(e^{j\omega})$, κανονικοποιημένο με συντελεστή $1/2\pi$.

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Αν το σήμα που αναλύεται είναι πραγματικό, τότε μπορεί να δείξει κανείς εύκολα ότι

$$X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$$

- Η παραπάνω ιδιότητα συνεπάγεται ότι

$$|X(e^{-j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$$

Άρτιο Φάσμα Πλάτους

$$\varphi_x(e^{j\omega}) = -\varphi_x(e^{-j\omega})$$

Περιττό Φάσμα Φάσης

- Τότε μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση ☺) ότι

$$x[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |X(e^{j\omega})| \cos(\omega n + \varphi_x(e^{j\omega})) d\omega$$

- Πράγματι λοιπόν ο DTFT περιέχει πληροφορία **πλάτους** και **φάσης** με την οποία μπορούμε να συνθέσουμε ένα σήμα $x[n]$ ως συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) ημιτόνων κάθε συχνότητας ω στο διάστημα $[0, \pi]$!!!

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου - Ύπαρξη

- Για να υπάρχει ο DTFT αρκεί

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty$$

- Η συνθήκη αυτή δεν είναι αναγκαία, εγγυάται όμως την ομοιόμορφη σύγκλιση του αθροίσματος
- Μια πιο γενική συνθήκη είναι η

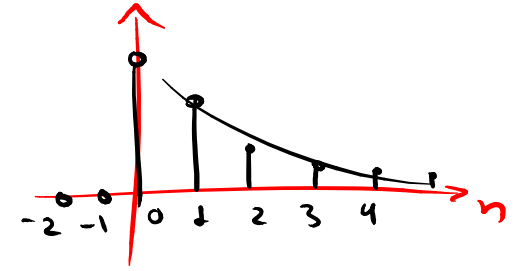
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < +\infty$$

αν χαλαρώσουμε λίγο την απαίτηση της ομοιόμορφης σύγκλισης και μας αρκεί η μέση τετραγωνική σύγκλιση

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$.



$$\text{Είναι } X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad |ae^{-j\omega}| < 1 \Leftrightarrow \underbrace{|a|}_{=1} |e^{-j\omega}| < 1 \Leftrightarrow |a| < 1.$$

$$\text{Άρα } X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα:

$$\begin{aligned} \text{Φάσμα πλάτους: } |X(e^{j\omega})| &= \frac{1}{|1 - ae^{-j\omega}|} = \frac{1}{\underbrace{|1 - a\cos(\omega)|}_{\text{Re}} + j \underbrace{a\sin(\omega)}_{\text{Im}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 + a\cos\omega)^2 + a^2\sin^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}} \end{aligned}$$

$$\text{Φάσμα φάσης: } \varphi_x(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})} \quad \textcircled{1}$$

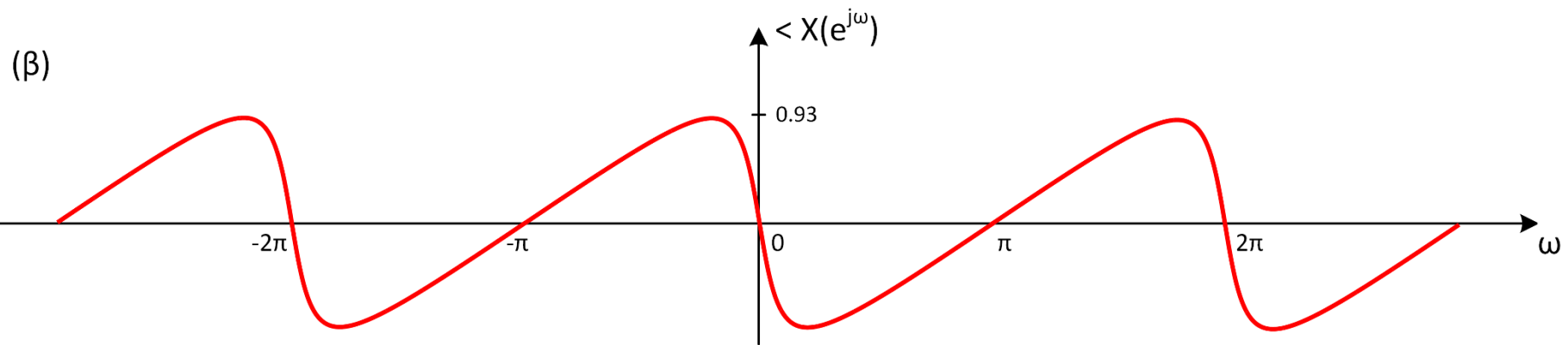
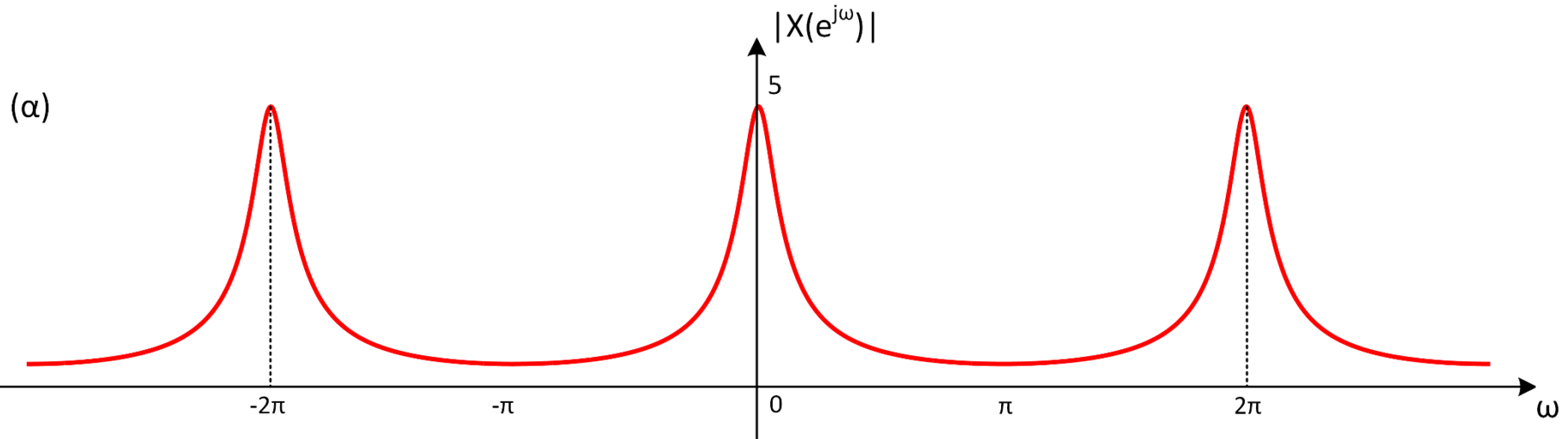
$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{|1 - ae^{-j\omega}|^2} = \frac{1 - ae^{j\omega}}{(1 + a^2 - 2a\cos\omega)} = \frac{1 - a\cos\omega - ja\sin\omega}{(1 + a^2 - 2a\cos\omega)} \\ &= \frac{1 - a\cos\omega}{(1 + a^2 - 2a\cos\omega)} + j \frac{-a\sin\omega}{(1 + a^2 - 2a\cos\omega)} \quad \xRightarrow{\textcircled{1}} \varphi_x(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{-a\sin\omega}{1 - a\cos\omega} \end{aligned}$$

Re
Im

$$a = \frac{4}{5}$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα:



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```

% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
alpha = 0.8;
n = [-10:-1 0 1:20];
x = [zeros(1,10) alpha.^n(11:31)];

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί
X = 1./(1 - alpha*exp(-1i*w));

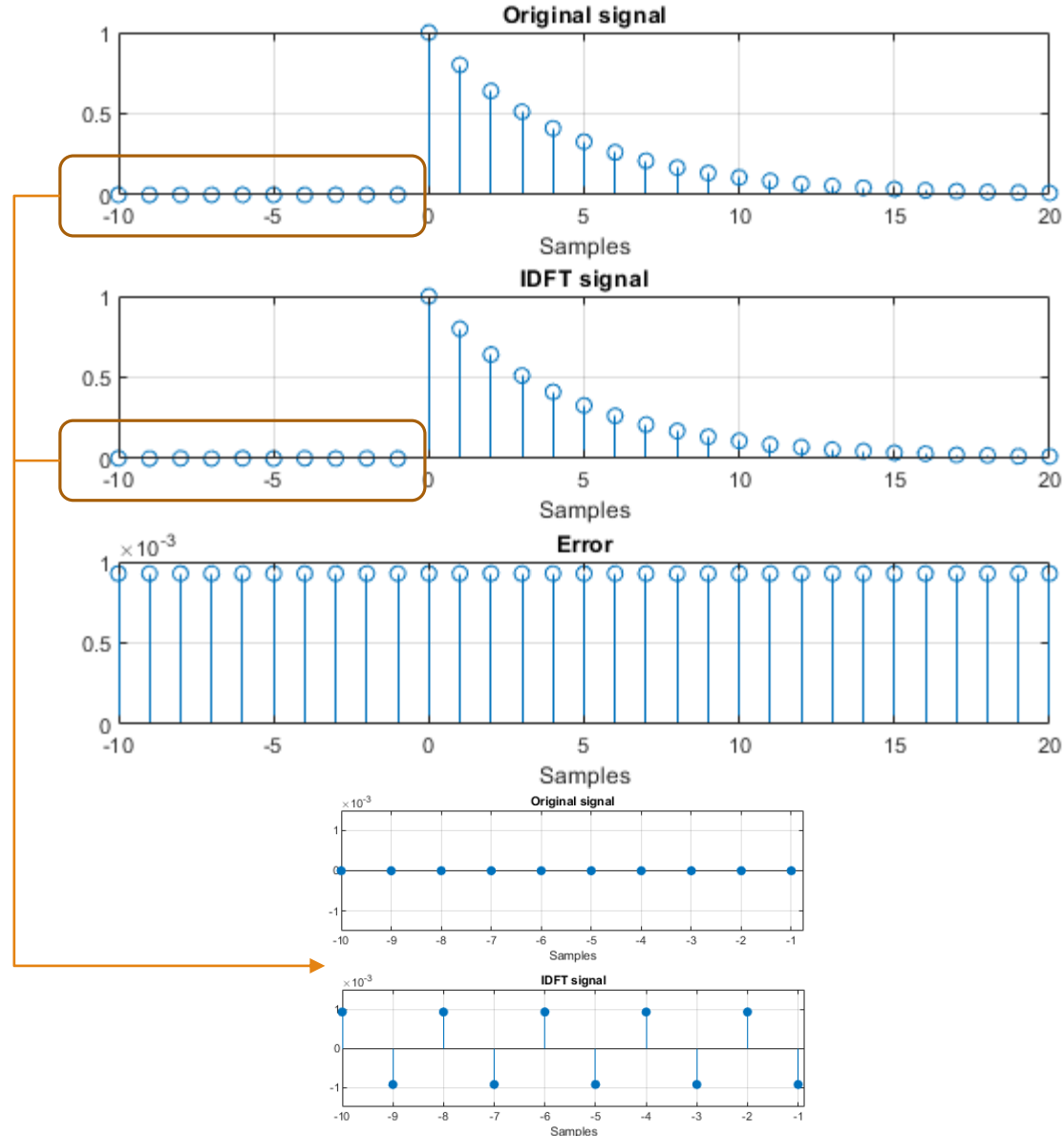
% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end

% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;

```



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Ερώτηση: μπορούμε να γράψουμε ένα σήμα διακριτού χρόνου ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων με συγκεκριμένες συχνότητες, πλάτη, και αρχικές φάσεις?
 - Γιατί να το κάνουμε αυτό? Για να επωφεληθούμε των συμπερασμάτων που βγάλαμε για τα ΓΧΑ συστήματα και τις ιδιοσυναρτήσεις τους!
- ΝΑΙ! Αποδεικνύεται ότι κάτι τέτοιο είναι εφικτό!! 😊
- Το μαθηματικό εργαλείο που μας δίνει αυτήν την πληροφορία ονομάζεται **Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (discrete time Fourier Transform – DTFT)**
- Πώς μπορούμε να το κάνουμε αυτό?

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

με $X(e^{j\omega})$ μια μιγαδική συνάρτηση του ω , με πληροφορία μέτρου και φάσης, δηλ.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})| e^{j\varphi_X(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})| e^{j(\omega n + \varphi_X(e^{j\omega}))} d\omega$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Πώς μπορούμε να βρούμε την ποσότητα $X(e^{j\omega})$?

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Κατ' αρχάς είναι εμφανές ότι ο DTFT είναι μια μιγαδική, εν γένει, συνάρτηση του ω :

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi_X(e^{j\omega})}$$

με

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Πλάτους
(Magnitude Spectrum)

και

$$\varphi_X(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Φάσης
(Phase Spectrum)

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Είναι πολύ σημαντικό να καταλάβουμε τι εκφράζει ο DTFT και τι ο αντίστροφός του

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

- Θα σας βοηθήσει αν θυμηθείτε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό συνεχούς χρόνου

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

1. Ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$ μας πληροφορεί για το μέτρο και τη φάση των μιγαδικών εκθετικών με συχνότητες $d\omega$, οι οποίες παίρνουν συνεχείς τιμές στο $(-\pi, \pi]$, και “υπάρχουν” μέσα στο σήμα $x[n]$. Δηλ. μας βρίσκει τη συνάρτηση $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\phi_x(e^{j\omega})}$.
2. Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου χρησιμοποιεί τη συνάρτηση $X(e^{j\omega})$, δηλ. το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου, για να συνθέσει το σήμα στο χρόνο $x[n]$, ως ένα συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) μιγαδικών εκθετικών όλων των πιθανών συχνοτήτων $d\omega$ του διαστήματος $(-\pi, \pi]$, με το καθένα εκθετικό να έχει συντελεστή $X(e^{j\omega})$, κανονικοποιημένο με συντελεστή $1/2\pi$.

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Αν το σήμα που αναλύεται είναι πραγματικό, τότε μπορεί να δείξει κανείς εύκολα ότι

$$X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$$

- Η παραπάνω ιδιότητα συνεπάγεται ότι

$$|X(e^{-j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$$

Άρτιο Φάσμα Πλάτους

$$\varphi_x(e^{j\omega}) = -\varphi_x(e^{-j\omega})$$

Περιττό Φάσμα Φάσης

- Τότε μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση ☺) ότι

$$x[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |X(e^{j\omega})| \cos(\omega n + \varphi_x(e^{j\omega})) d\omega$$

- Πράγματι λοιπόν ο DTFT περιέχει πληροφορία **πλάτους** και **φάσης** με την οποία μπορούμε να συνθέσουμε ένα σήμα $x[n]$ ως συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) ημιτόνων κάθε συχνότητας ω στο διάστημα $[0, \pi]$!!!

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου - Ύπαρξη

- Για να υπάρχει ο DTFT αρκεί

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty$$

- Η συνθήκη αυτή δεν είναι αναγκαία, εγγυάται όμως την ομοιόμορφη σύγκλιση του αθροίσματος
- Μια πιο γενική συνθήκη είναι η

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < +\infty$$

αν χαλαρώσουμε λίγο την απαίτηση της ομοιόμορφης σύγκλισης και μας αρκεί η μέση τετραγωνική σύγκλιση

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου - Ύπαρξη

- Μέση τετραγωνική σύγκλιση

- Έστω

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{j\omega n}$$

τότε

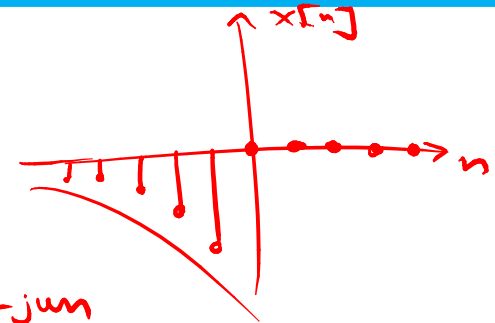
$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0$$

- Με λόγια, το σφάλμα μεταξύ των δυο «εκδόσεων» του DTFT μπορεί να μην τείνει στο μηδέν για κάθε ω όσο $M \rightarrow \infty$, αλλά η ενέργεια σφάλματος τείνει στο μηδέν όσο $M \rightarrow \infty$
- Θα δούμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα...

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$, $|a| > 1$.



$$\text{Είναι } X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{(-a^n u[-n-1])}_{1, n \leq -1} e^{-j\omega n}$$

$$= - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n e^{-j\omega n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} e^{-j\omega(-n)} =$$

$$= - \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(a^{-1} e^{j\omega} \right)^n}_{\left(\frac{e^{j\omega}}{a} \right)} = - \frac{\left(\frac{e^{j\omega}}{a} \right)^1}{1 - \frac{e^{j\omega}}{a}}, |a| > 1.$$

$$\sum_{k=N_1}^{+\infty} \lambda^k = \frac{\lambda^{N_1}}{1 - \lambda}, \quad |\lambda| < 1$$

$$= \frac{a^{-1} e^{j\omega}}{a^{-1} e^{j\omega} - 1} \cdot \frac{a e^{-j\omega}}{a e^{-j\omega}} = \frac{a e^{-j\omega} \cdot a^{-1} e^{j\omega}}{a^{-1} e^{j\omega} \cdot a e^{-j\omega} - a e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}, |a| > 1.$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα:

Είναι $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$, $|a| > 1$

Φάσμα πλάτους: $|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{|1 - ae^{-j\omega}|} = \frac{1}{|1 - a\cos\omega + ja\sin\omega|} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{(1 - a\cos\omega)^2 + a^2\sin^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a\cos\omega + a^2}}$

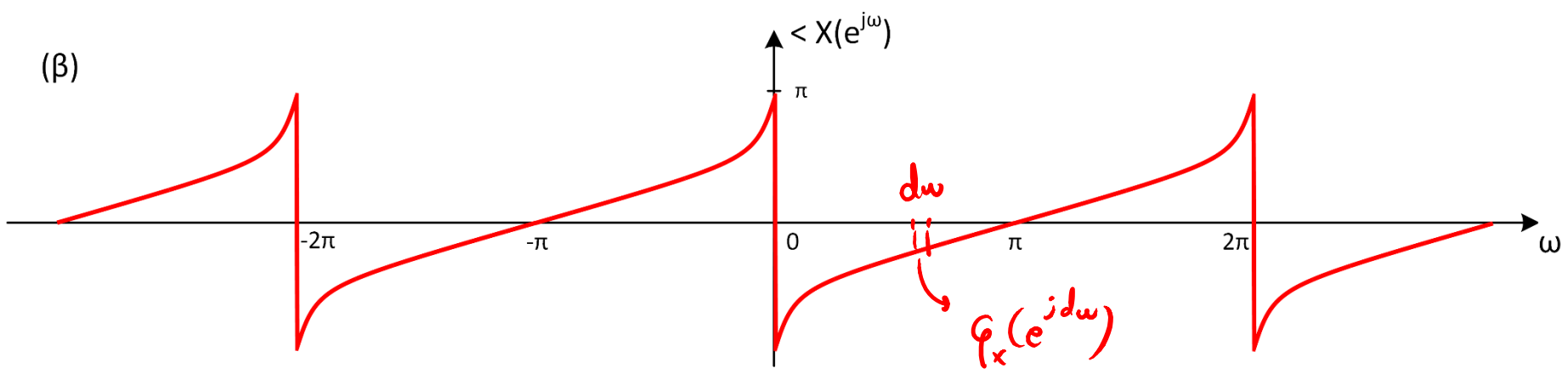
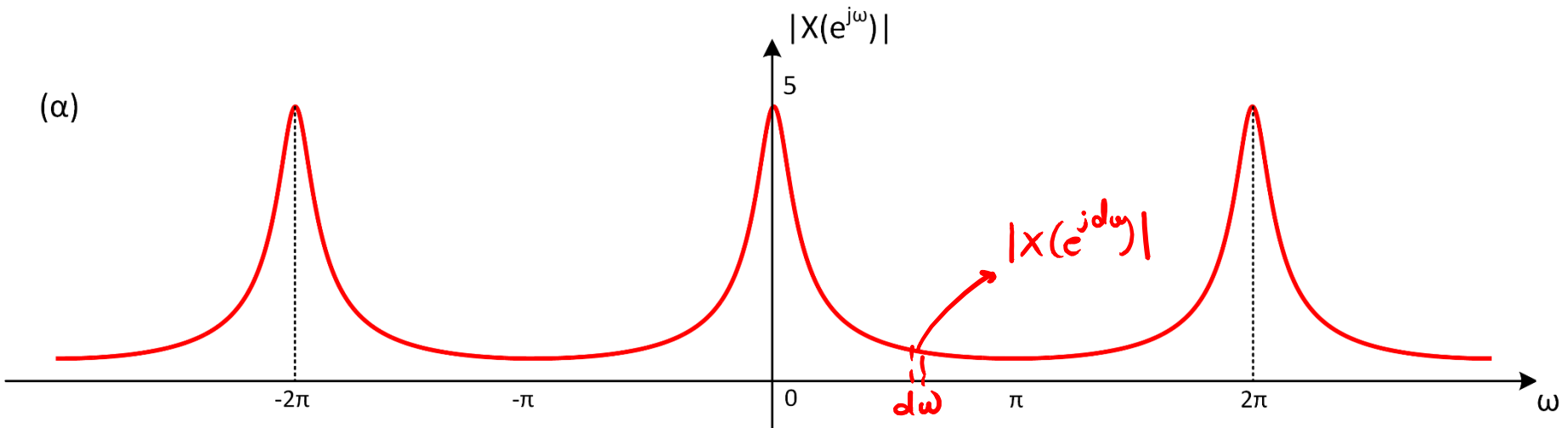
Φάσμα φάσης: Όμοια με το προηγ. παράδειγμα:

$$\varphi_X(e^{j\omega}) = -\tan^{-1} \frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}$$

$a = \frac{6}{5}$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα:



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```

% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
alpha = 6/5;
n = [-30:-1 0 1:10];
x = [-alpha.^n(1:30) zeros(1,11)];

% DTFT στο χέρι

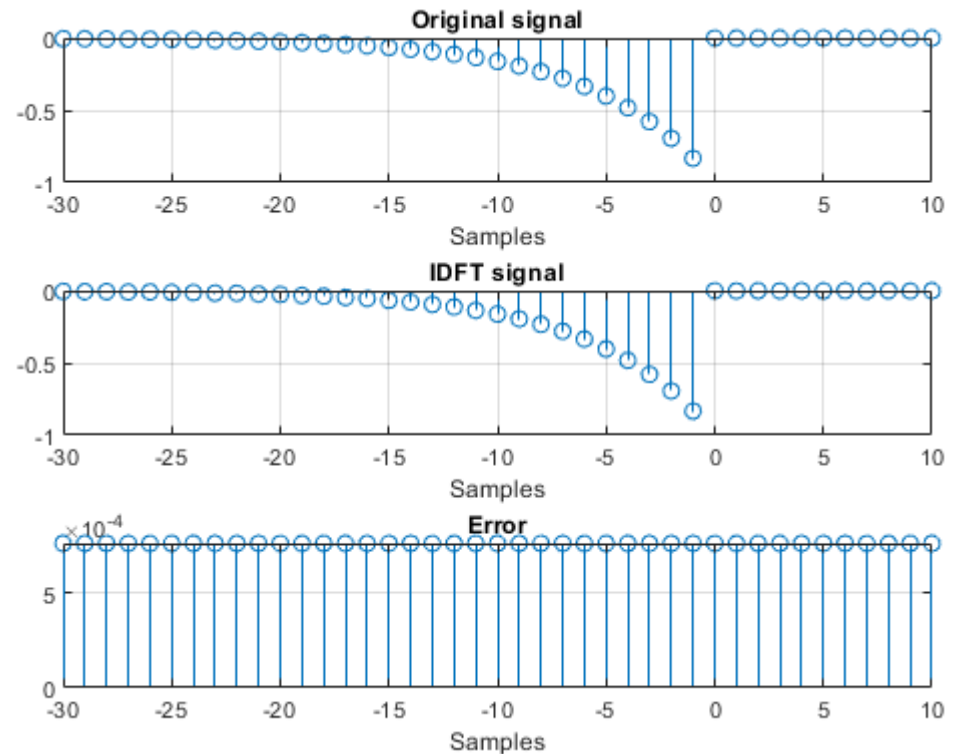
% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί
X = 1./(1 - alpha*exp(-1i*w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;

```



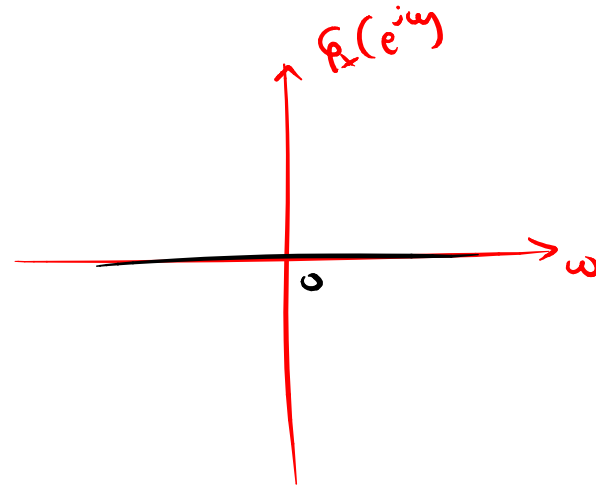
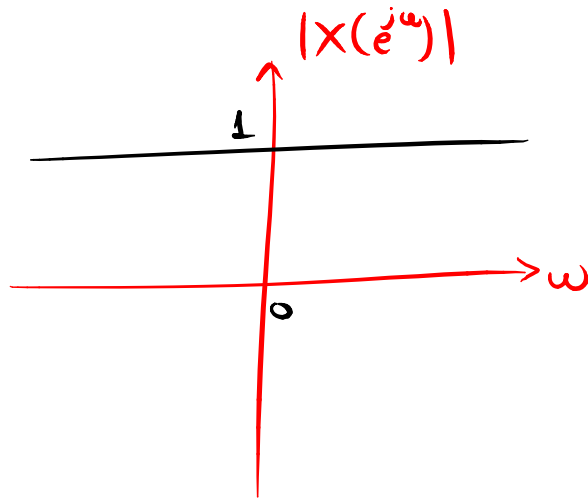
• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = \delta[n]$.

$$\text{Είναι } X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = \delta[0] e^{-j\omega \cdot 0} = 1$$

$$\text{Άρα } X(e^{j\omega}) = 1, \forall \omega$$



$$\delta[n] \xleftrightarrow{F} 1$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

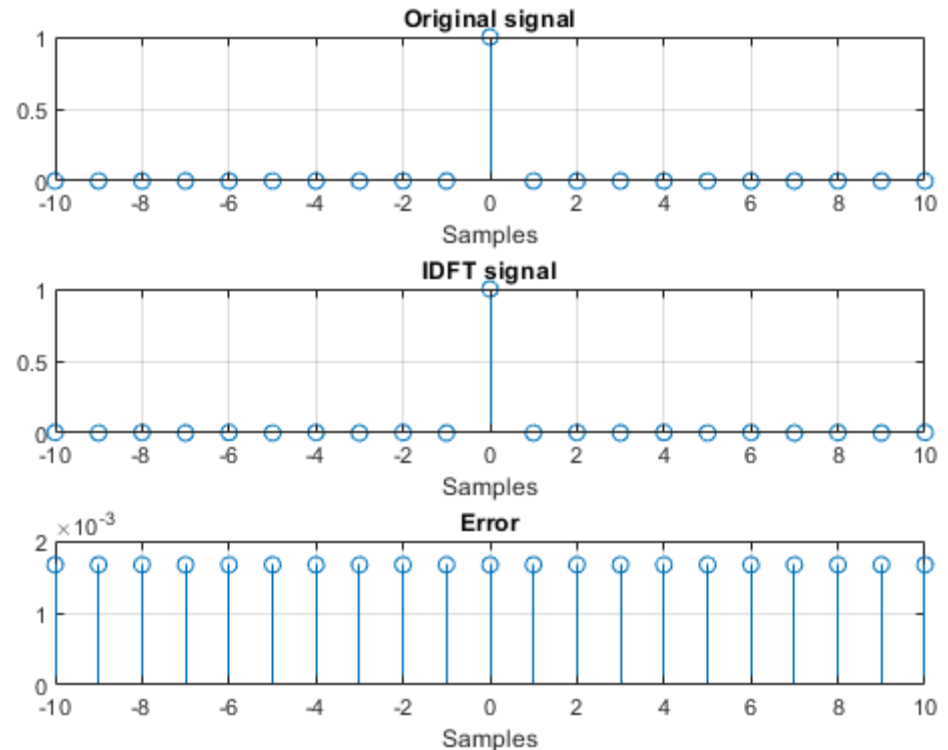
% Σήμα στο χρόνο
n = [-10:10];
x = [zeros(1,10) 1 zeros(1,10)];
% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί = 1 για κάθε ω
X = ones(size(w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

]for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
-end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

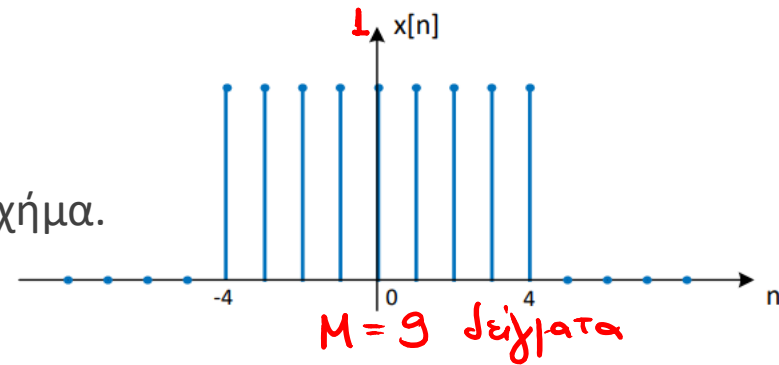
% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

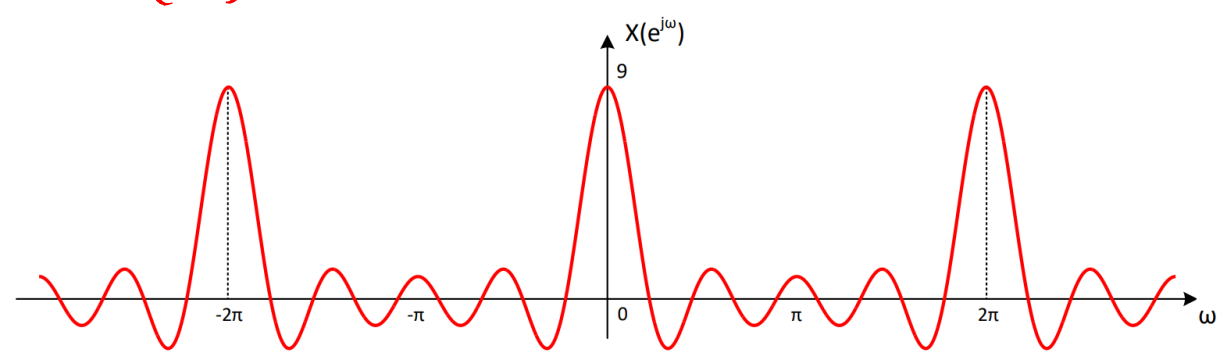
• Παραδείγματα:

○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.



$$\begin{aligned} \text{Είναι } X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=-4}^4 1 \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^4 e^{-j\omega n} = \frac{e^{-j\omega(-4)} - e^{-j\omega(4+1)}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{e^{j4\omega} - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}}{e^{-j\frac{3\omega}{2}}} \cdot \frac{e^{j\frac{9}{2}\omega} - e^{-j\frac{9}{2}\omega}}{e^{j\frac{3}{2}\omega} - e^{-j\frac{3}{2}\omega}} \\ &= \frac{2j \sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{2j \sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}. \end{aligned}$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1 - a}$$



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

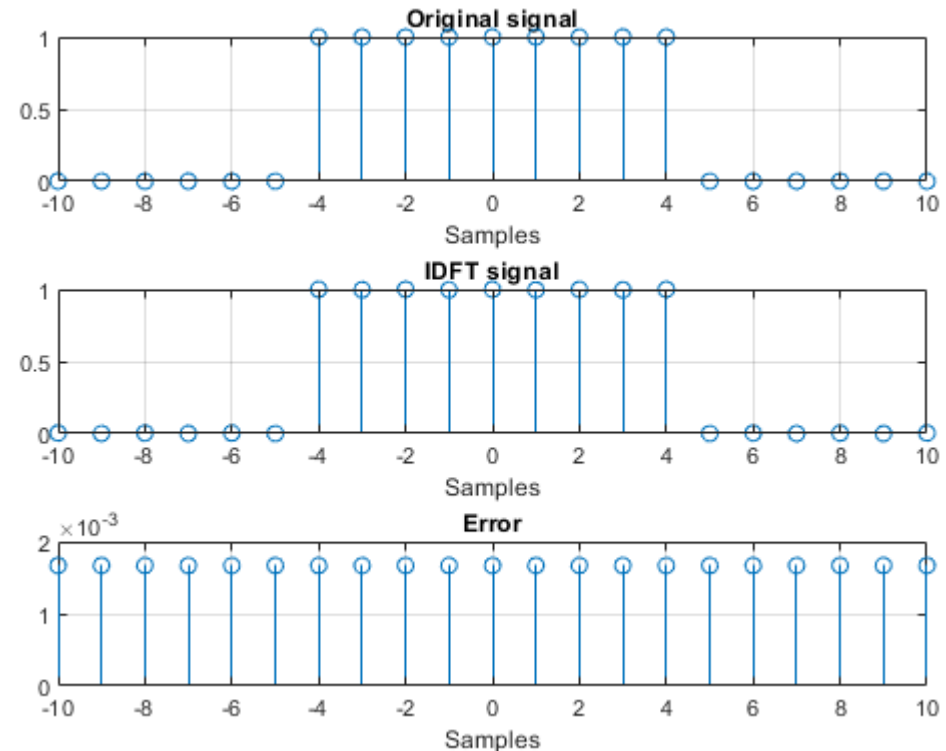
% Σήμα στο χρόνο
n = [-10:10];
x = [zeros(1,6) ones(1,9) zeros(1,6)];
% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί = sin(9w/2)/sin(w/2)
% για κάθε w
X = sin(9*w/2)./sin(w/2);

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

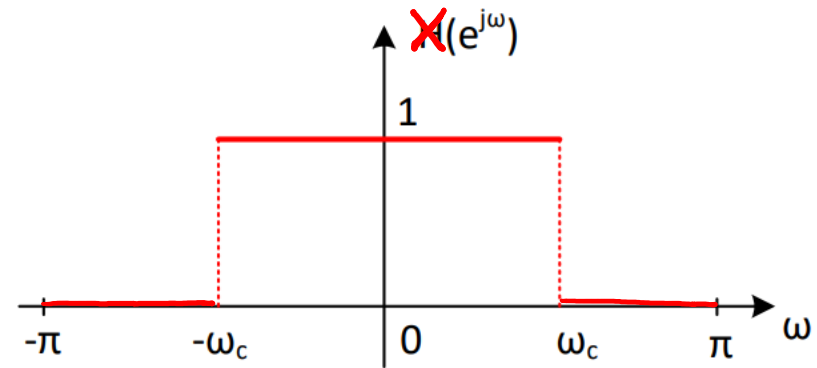
% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

- Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.



Είναι

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{jn} e^{j\omega n} \right]_{\omega=-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{j2\pi n} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) \\
 &= \frac{1}{j2\pi n} \cancel{2j} \sin(\omega_c n) = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}.
 \end{aligned}$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-150:150];
wc = 0.2;
x = sin(wc*n)./(pi*n);
% Ρύθμιση απροσδιοριστίας
x(151) = wc/pi;

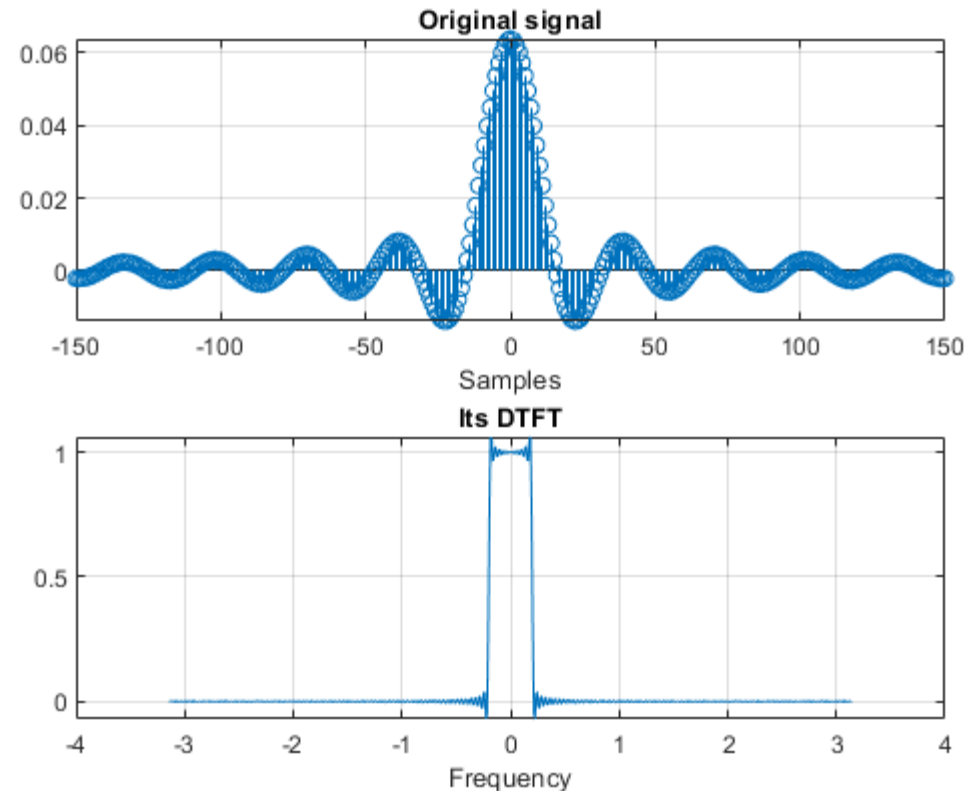
% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);

% Σύνθεση του X(exp(jw)) μέσω του DTFT
X_syn = zeros(size(w));

for i = 1:length(n)
    X_syn = X_syn + x(i).*exp(-li*w*n(i));
end

% απεικόνιση
figure(1); subplot(211);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(212); plot(w, X_syn);
title('Its DTFT'); xlabel('Frequency'); grid;
```



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = 1$.

Θα δείξουμε ότι ο DTFT του $x[n] = 1 \forall n$ είναι

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \delta(\omega), \quad \omega \in [-\pi, \pi)$$

Είναι

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} \delta(\omega) d\omega = e^{j\omega n} \Big|_{\omega=0} = 1, \quad \forall n. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } x[n] = 1 \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi \delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(x) dx = \varphi(0)$$

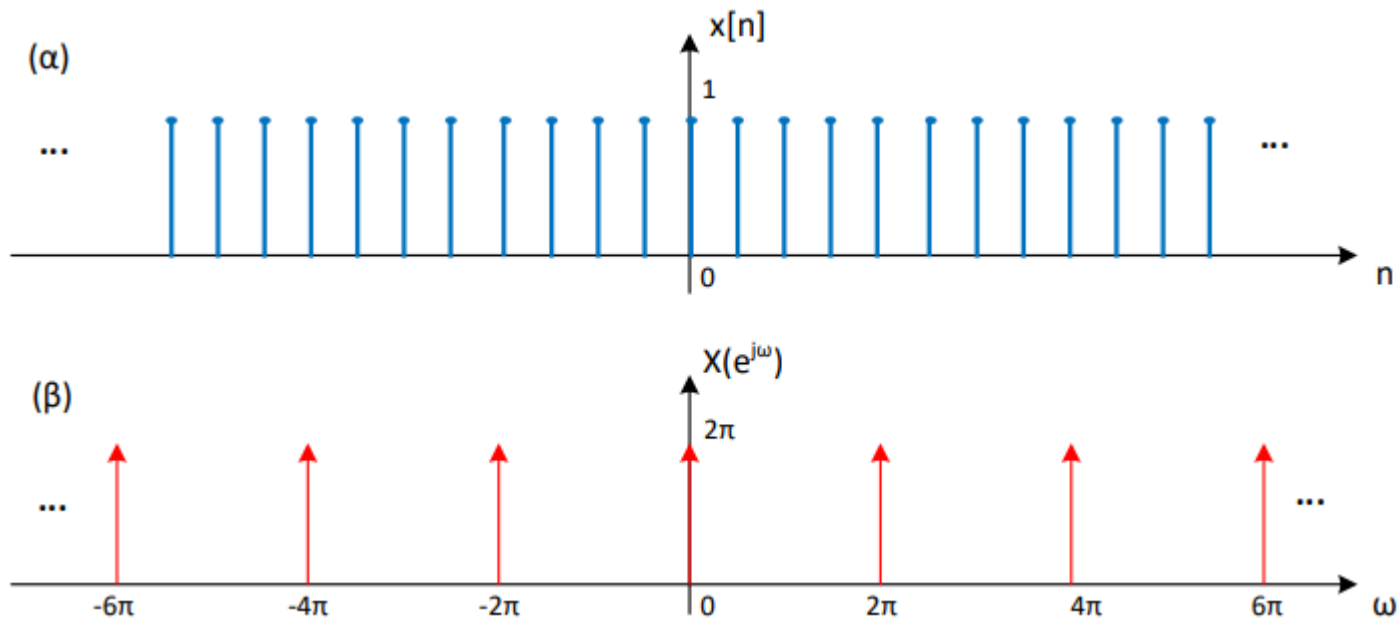
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα:

Το σήμα στο χρόνο $x[n]=1$ και ο DTFT του φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

- Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, $\forall n$, $\omega_0 \in (-\pi, \pi]$.

Θα δείξαμε ότι $x[n] = e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$

Είναι

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} \delta(\omega - \omega_0) d\omega = e^{j\omega_0 n} \Big|_{\omega=\omega_0} = e^{j\omega_0 n}, \forall n. \end{aligned}$$

Άρα $x[n] = e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$, $\forall n$, $\omega_0 \in (-\pi, \pi]$.

$$\text{Είναι } X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n} \right) e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{A}{2} e^{j\varphi} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n}}_{\text{DTFT } \{e^{j\omega_0 n}\}} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 n} e^{-j\omega n}}_{\text{DTFT } \{e^{-j\omega_0 n}\}}$$

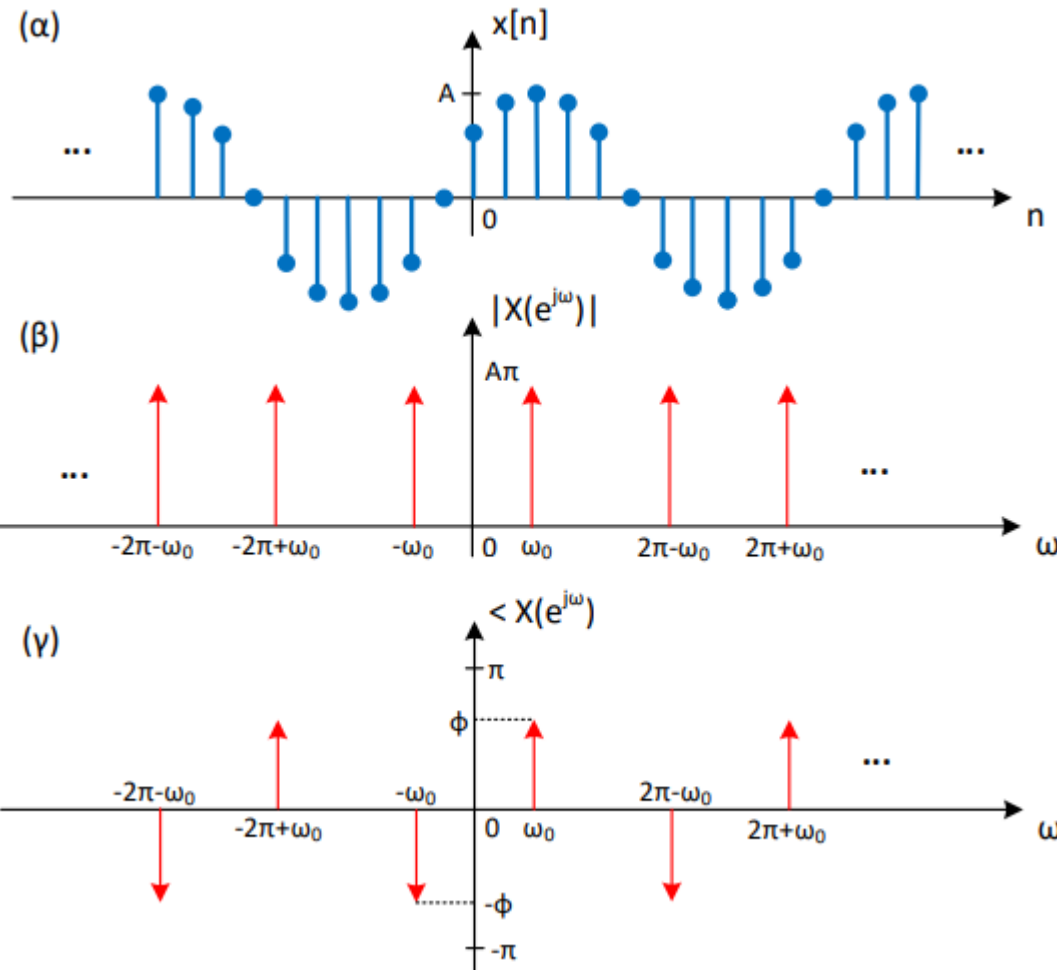
$$= \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot 2\pi \delta(\omega - \omega_0) + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} 2\pi \delta(\omega + \omega_0)$$

$$= A\pi \cdot e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0) + A\pi \cdot e^{-j\varphi} \delta(\omega + \omega_0)$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

Το σήμα στο χρόνο,
το φάσμα πλάτους και
το φάσμα φάσης φαί-
νονται στο διπλανό
σχήμα.



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Για να δώμε το DTFT στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, θέτουμε $k=0$ ένα χρειάζεται στις διηλεκτικές σχέσεις.

Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου	
Ακολουθία	Μετασχ. Fourier
✓ $\delta[n]$	1
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
✓ 1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
✓ $a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
✓ $-a^n u[-n - 1], a > 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
✓ $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$(n + 1)a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
$a^{ n }, a < 1,$	$\frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2}$
$\frac{r^n \sin(\omega_c(n + 1))}{\sin(\omega_c)} u[n], r < 1$	$\frac{1}{1 - 2r \cos(\omega_c)e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
✓ $\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
✓ $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega (M + 1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
✓ $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
✓ $\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -j[\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) - \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = u[n]$.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-j\omega})^n \quad X$$

↑
1, $n \geq 0$

Παρατηρούμε ότι $u[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}[n]$, με $\operatorname{sgn}[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases}$

↑
συνάρτηση
σημείου
(sign function)

Ας προσπαθήσω να βρω τον DTFT μέσω της σχέσης

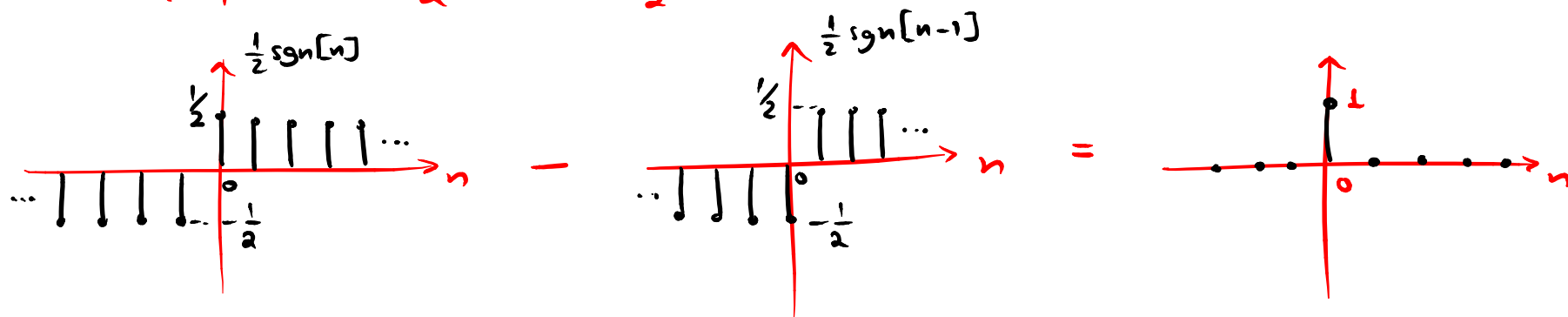
$$u[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}[n] \Rightarrow F\{u[n]\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} + F\left\{\frac{1}{2} \operatorname{sgn}[n]\right\}$$

$$\Rightarrow F\{u[n]\} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \pi \delta(\omega + 2\pi k) + \left(F\left\{\frac{1}{2} \operatorname{sgn}[n]\right\} \right)$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

Παρατηρείται ότι $\frac{1}{2} \text{sgn}[n] - \frac{1}{2} \text{sgn}[n-1] = \delta[n]$. Έτσι $\frac{1}{2} \text{sgn}[n] = u_1[n]$



Είναι $F\{\delta[n]\} = F\{u_1[n]\} - F\{u_1[n-1]\}$

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_1[n] e^{-j\omega n} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_1[n-1] e^{-j\omega n}$$

$$1 = u_1(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_1[n] e^{-j\omega n}}_{u_1(e^{j\omega})}$$

$\left. \begin{array}{l} k = n-1 \\ n = k+1 \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_1[k] \cdot e^{-j\omega(k+1)} \end{array} \right\}$

$$1 = u_1(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} u_1(e^{j\omega})$$

Άρα $u_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$

- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα:

Συνολικά

$$u[n] \xrightarrow{F} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi k)$$

Στο $(-n, n]$:

$$u[n] \xrightarrow{F} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \delta(\omega)$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχ. Fourier
Γραμμικότητα	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$, ή $X^*(e^{j\omega})$ αν $x[n]$ είναι πραγματικό.
Συζυγία στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Παραγωγή στη συχνότητα	$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
k -οστή παραγωγή στη συχνότητα	$(-jn)^k x[n]$	$\frac{d^k X(e^{j\omega})}{d\omega^k}$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Γινόμενο στο χρόνο	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
Άθροισμα στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{j\omega}} X(e^{j\omega})$
Συζυγής συμμετρία	$x[n]$ πραγματικό	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}), \\ \Re\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\}, \\ \Im\{X(e^{j\omega})\} = -\Im\{X(e^{-j\omega})\}, \\ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) , \\ \phi_x(e^{j\omega}) = -\phi_x(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x[n] = x[-n]$, πραγματικό	$X(e^{j\omega}) \in \Re$ και άρτιο
Περιττό σήμα	$x[n] = -x[-n]$, πραγματικό	$X(e^{j\omega}) \in \Im$ και περιττό
Άρτιο μέρος	$x_e[n] = \text{Ev}\{x[n]\}$, πραγματικό	$\Re\{X(e^{j\omega})\}$
Περιττό μέρος	$x_o[n] = \text{Od}\{x[n]\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
Θεώρημα Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: Γραμμικότητα

$$\text{Αν } z[n] = ax[n] + by[n] \xrightarrow{F} Z(e^{j\omega}) = aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$$

Είναι

$$\begin{aligned} Z(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{(ax[n] + by[n])}_{z[n]} e^{-j\omega n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} ax[n] e^{-j\omega n}}_{F\{ax[n]\}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} by[n] e^{-j\omega n}}_{F\{by[n]\}} \\ &= aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

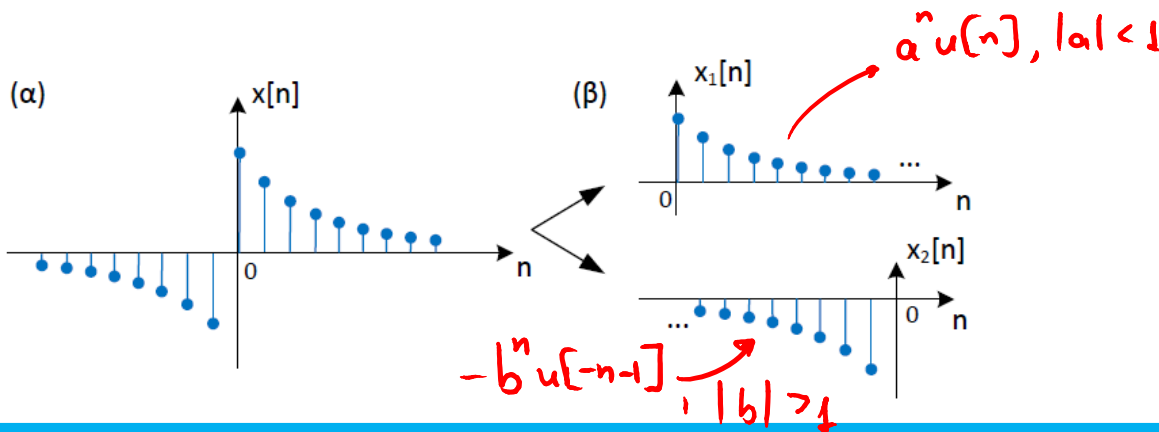
• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: Γραμμικότητα
- Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα

Είναι
$$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega}) = F\{a^n u[n]\} + F\{-b^n u[-n-1]\}$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1 - be^{-j\omega}}$$

$$= \frac{1 - be^{-j\omega} + 1 - ae^{-j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})} = \frac{2 - (a+b)e^{-j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})}$$



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: Χρονική μετατόπιση

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] = x[n \pm n_0] \xrightarrow{F} e^{\pm j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n \pm n_0] e^{-j\omega n}$$

$$\left. \begin{array}{l} k = n \pm n_0 \\ n = k \mp n_0 \end{array} \right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\omega (k \mp n_0)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\omega k} \cdot \underbrace{e^{\pm j\omega n_0}}$$

$$= \underbrace{e^{\pm j\omega n_0}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\omega k} = e^{\pm j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα: Χρονική μετατόπιση

○ Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα

Ξέρουμε το ζεύγος $a^n u[n]$, $|a| < 1 \xrightarrow{F} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = Y(e^{j\omega})$ ①

" $y[n]$

Είναι

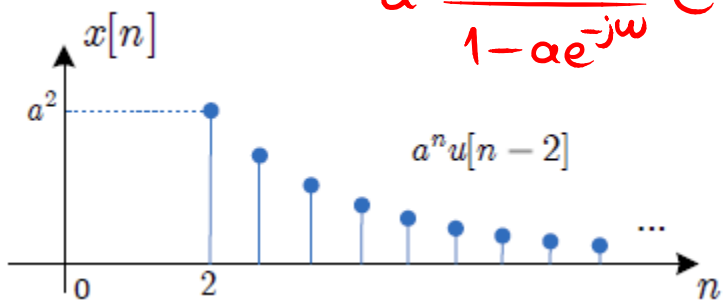
$$y[n-2] = a^{n-2} u[n-2] = a^{-2} \cdot \underbrace{a^n u[n-2]}_{x[n]} = a^{-2} x[n]$$

↑ F

$$Y(e^{j\omega}) e^{-j2\omega} = a^{-2} X(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{①}}$$

$$a^2 \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} e^{-j2\omega} = X(e^{j\omega})$$

Άρα $X(e^{j\omega}) = a^2 \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} e^{-j2\omega}$.



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] = e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

Είναι

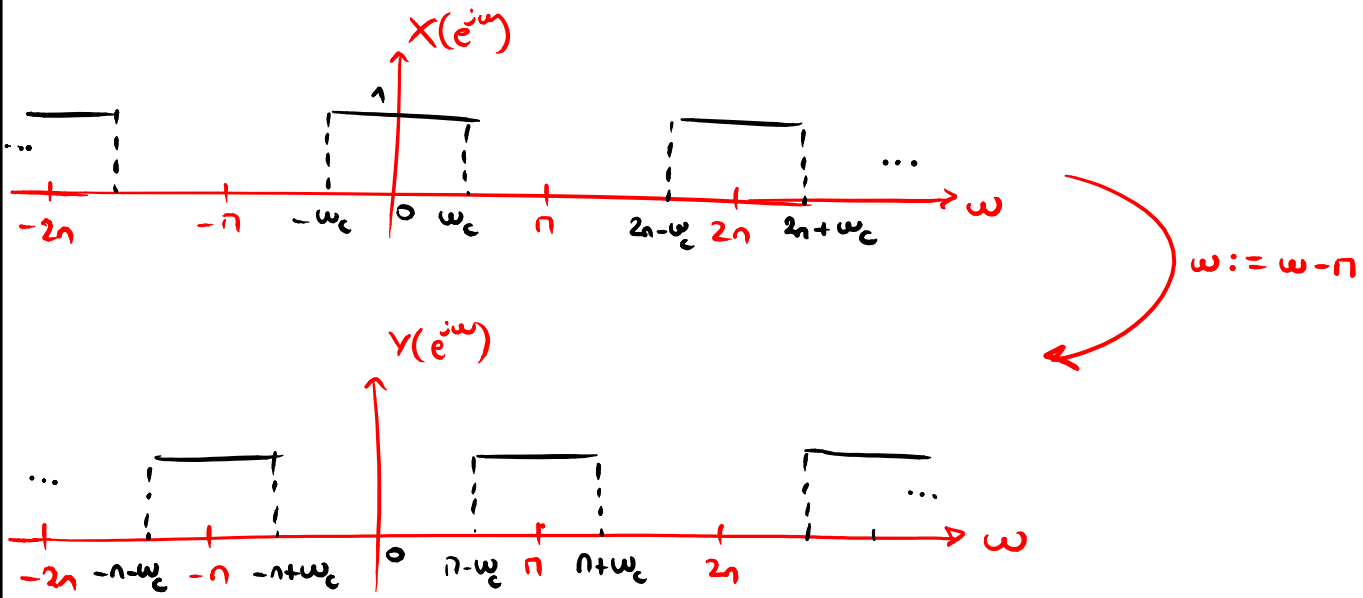
$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 n} x[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j(\omega - \omega_0)n} = X(e^{j(\omega - \omega_0)}). \end{aligned}$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα

○ Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$ αν

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \quad \xleftrightarrow{F^{-1}} \quad x[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{n\pi}$$



Από ιδιότητα, $y[n] = e^{jn\pi} x[n] = (-1)^n x[n] = (-1)^n \frac{\sin(\omega_c n)}{n\pi}$.

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: στάθμιση στο χρόνο

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] = x[kn], k \text{ ρητός} \xrightarrow{F} X(e^{j\frac{\omega}{k}})$$

Είναι

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[kn] e^{-j\omega n} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ l = kn \Rightarrow n = \frac{l}{k} \end{array} \right\} \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] e^{-j\frac{\omega}{k} l} = X(e^{j\frac{\omega}{k}})$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: στάθμιση στο χρόνο

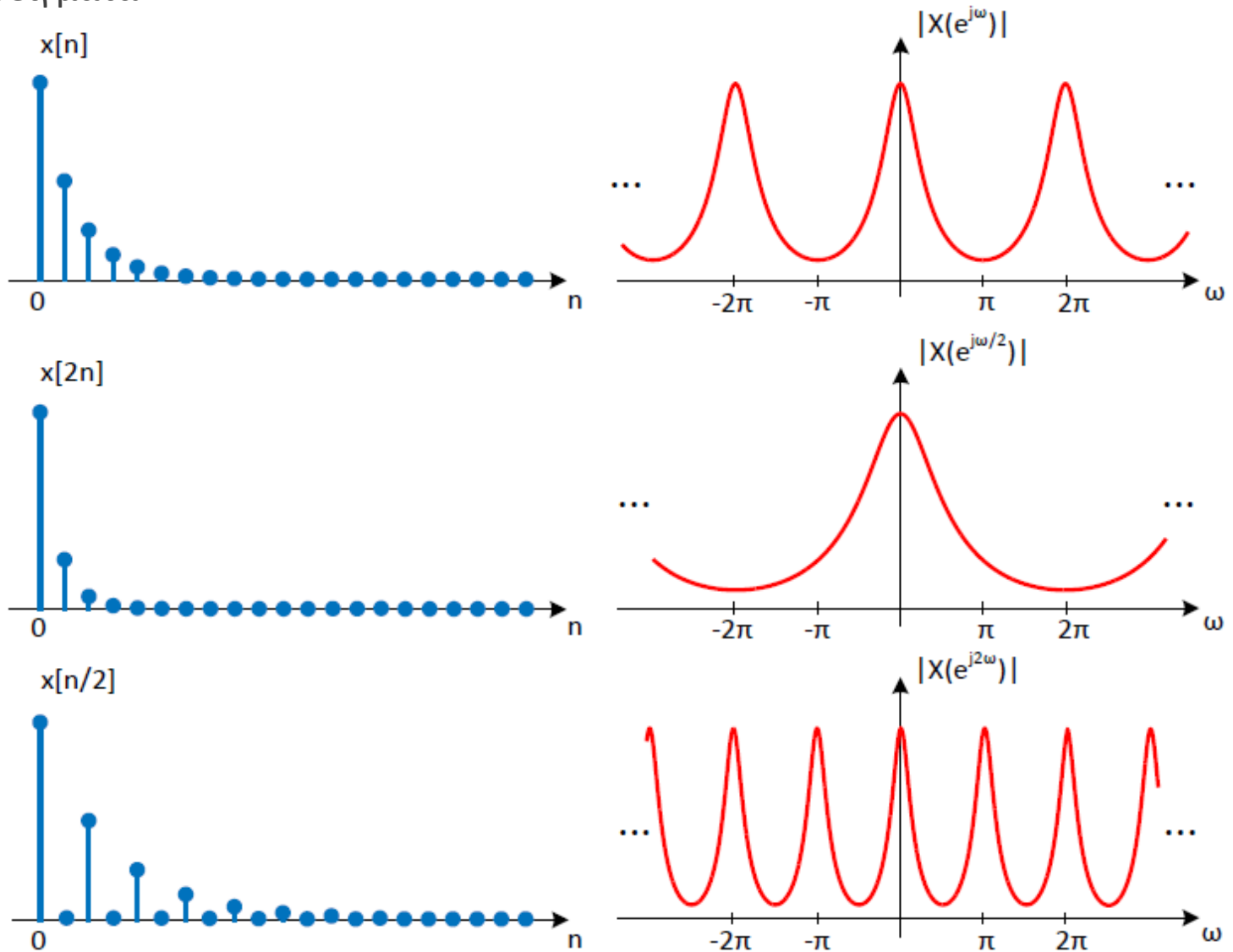
○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x\left[\frac{n}{2}\right]$, αν $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$

$$x\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} a^{\frac{n}{2}} u\left[\frac{n}{2}\right], & n \text{ άρτος} \\ 0, & n \text{ περιττός} \end{cases} \quad \xrightarrow{F} \quad X(e^{j2\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j2\omega}}$$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= F\left\{x\left[\frac{n}{2}\right]\right\} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ άρτος}}^{+\infty}} a^{\frac{n}{2}} u\left[\frac{n}{2}\right] e^{-j\omega n} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ άρτος}}^{+\infty}} a^{\frac{n}{2}} e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k e^{-j\omega 2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (ae^{-j2\omega})^k = \frac{1}{1 - ae^{-j2\omega}}. \end{aligned}$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα:



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] \xrightarrow{F} Y(e^{j\omega})$$

$$x[n] * y[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$$

Αποδεικνύεται με βάση τον ορισμό

(δείτε σημειώσεις)

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

Υπολογίστε τη συνέλιξη $\underbrace{a^n u[n]}_{x[n]} * \underbrace{b^n u[n]}_{y[n]}$, $|a| < 1$, $|b| < 1$

Δείξτε ότι

$$x[n] * y[n] = b^n \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1 - \frac{a}{b}} u[n].$$

Αλλάζοντας :

$$\left. \begin{aligned} x[n] &\xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \\ y[n] &\xrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - be^{-j\omega}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\rightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) = F\{x[n] * y[n]\} \\ &= G(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } G(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})} = \frac{A}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - be^{-j\omega}}$$

κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα. Οπότε :

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

$$C_1(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-ae^{j\omega}} + \frac{B}{1-be^{-j\omega}} \quad (1)$$

$$A = \left[C_1(e^{j\omega})(1-ae^{-j\omega}) \right]_{e^{-j\omega} = \frac{1}{a}} = \frac{1}{(1-ae^{j\omega})(1-be^{-j\omega})} (1-ae^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega} = \frac{1}{a}}$$

$$= \frac{1}{1-b \cdot \frac{1}{a}} = \frac{1}{1-\frac{b}{a}} = \frac{a}{a-b} \quad (2)$$

$$B = \left[C_1(e^{j\omega})(1-be^{-j\omega}) \right]_{e^{-j\omega} = \frac{1}{b}} = \frac{1}{(1-ae^{j\omega})(1-be^{-j\omega})} (1-be^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega} = \frac{1}{b}}$$

$$= \frac{1}{1-a \cdot \frac{1}{b}} = \frac{1}{1-\frac{a}{b}} = \frac{b}{b-a} \quad (3)$$

$$H \quad (1) \xrightarrow{(2)} \xrightarrow{(3)} C_1(e^{j\omega}) = \frac{a}{a-b} \frac{1}{1-ae^{j\omega}} + \frac{b}{b-a} \frac{1}{1-be^{-j\omega}} \xleftrightarrow{F^{-1}} c[n] = \frac{a}{a-b} a^n u[n] + \frac{b}{b-a} b^n u[n]$$

- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: Θεώρημα Parseval

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$x[n] = \delta[n] \quad \leadsto \quad E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\delta[n]|^2 = |\delta[0]|^2 = 1^2 = 1$$

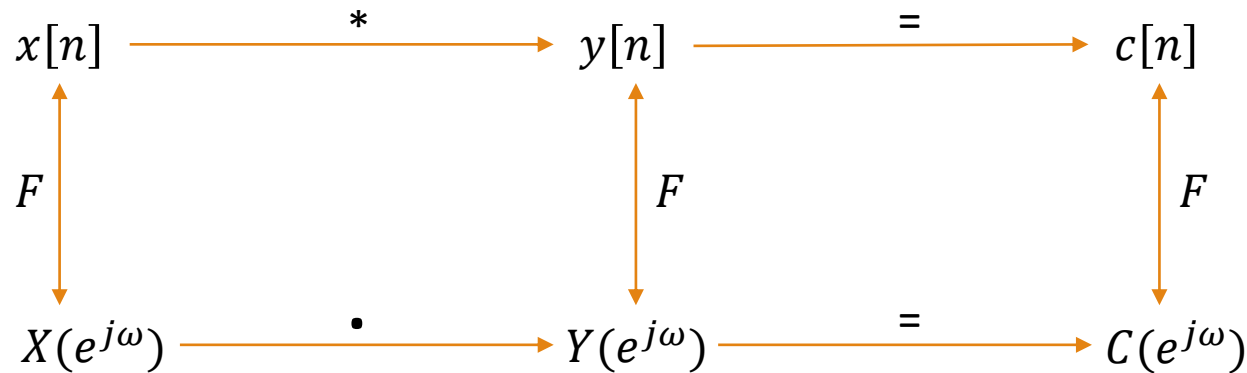
↕ F

$$X(e^{j\omega}) = 1 \quad \forall \omega$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \omega \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} (\pi - (-\pi)) \\ &= \frac{2\pi}{2\pi} = 1. \end{aligned}$$

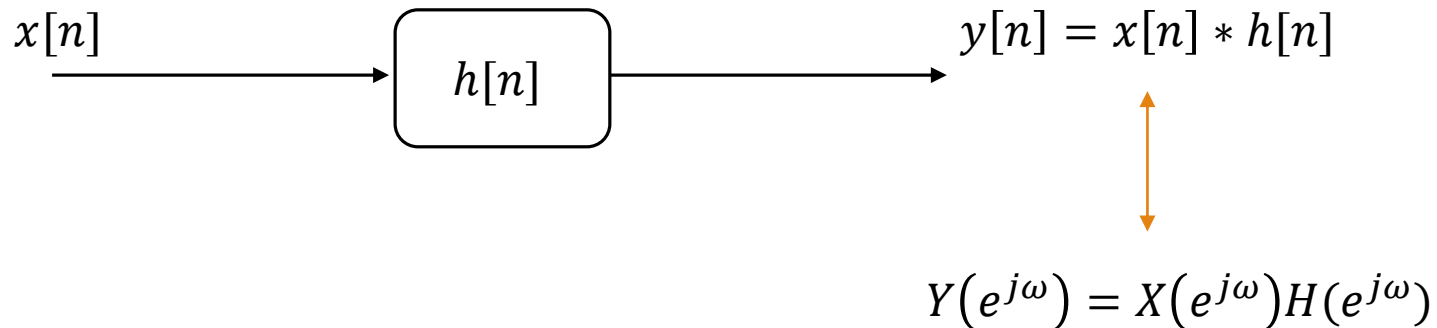
• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις ιδιότητες του DTFT είναι:



- Αυτή η διαδικασία θα έχει πολύ μεγάλη χρησιμότητα στη μελέτη των συστημάτων που θα ακολουθήσει

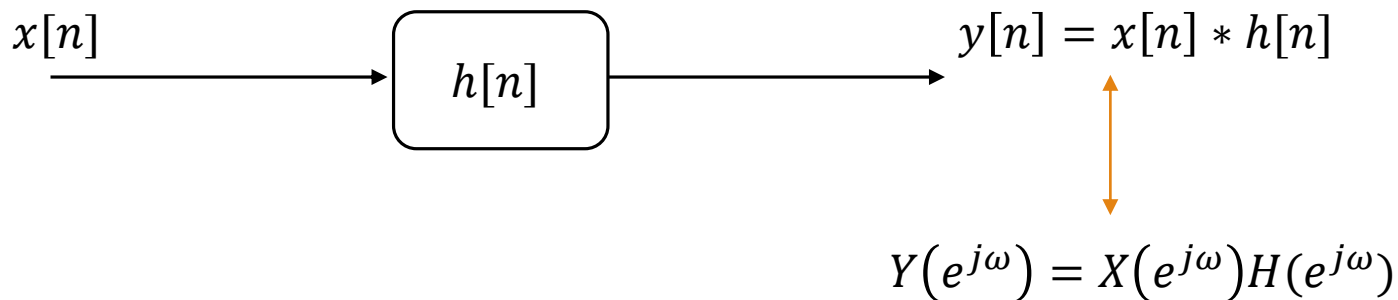
- Έχουμε πλέον στη διάθεσή μας ένα εργαλείο μελέτης σημάτων στο χώρο της συχνότητας
- Γνωρίζουμε μια «εικόνα» των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας
 - Η περίφημη απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$



- Θα πρέπει ήδη να έχετε καταλάβει ότι η απόκριση σε συχνότητα δεν είναι κάτι περισσότερο από το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Θυμηθείτε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας



- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

- Οπότε

$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$

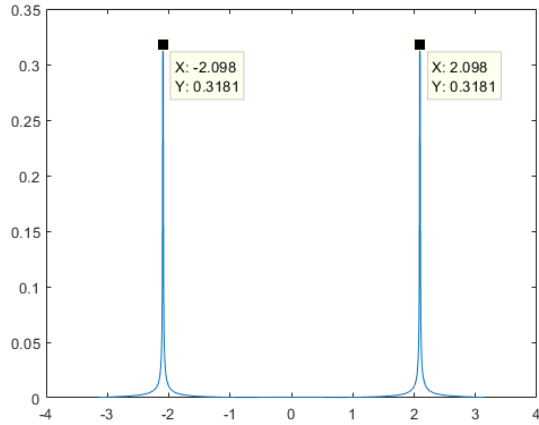
$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

- Άρα
 1. Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
 2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

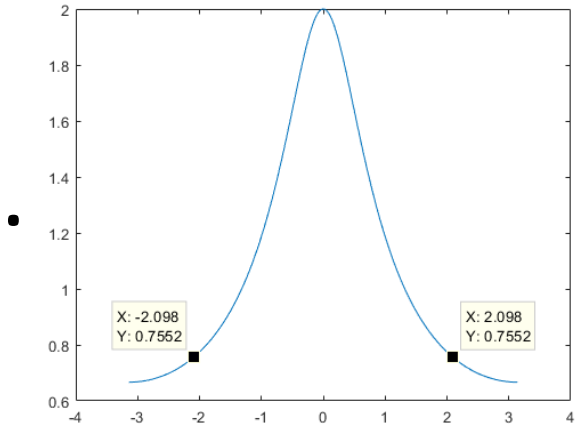
• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας

- Ας δούμε ένα εποπτικό παράδειγμα
 - Κατά πλάτος

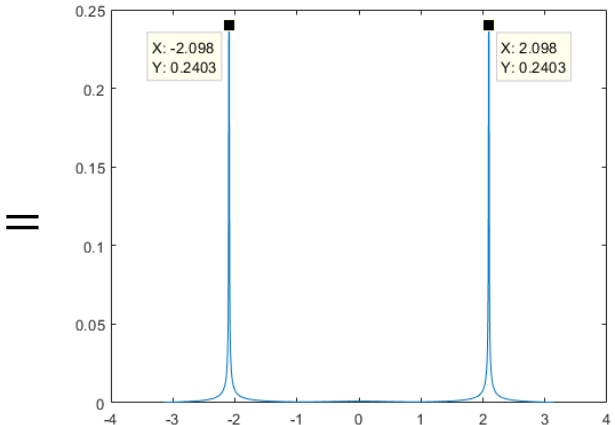
Είσοδος



Σύστημα



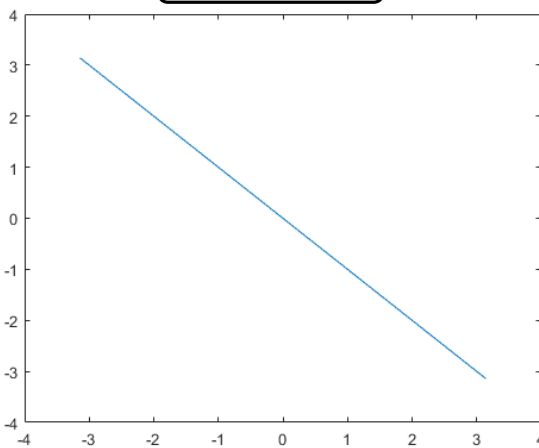
Έξοδος



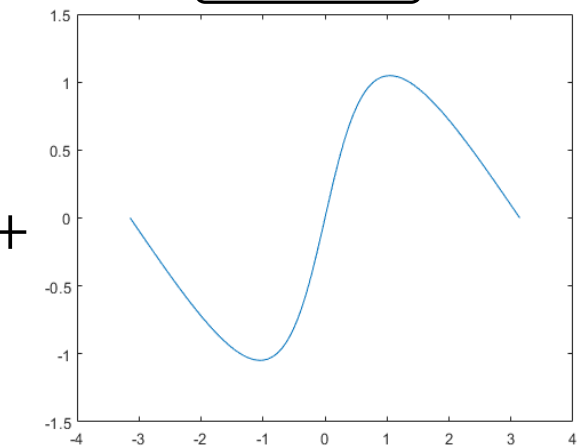
• =

- Κατά φάση

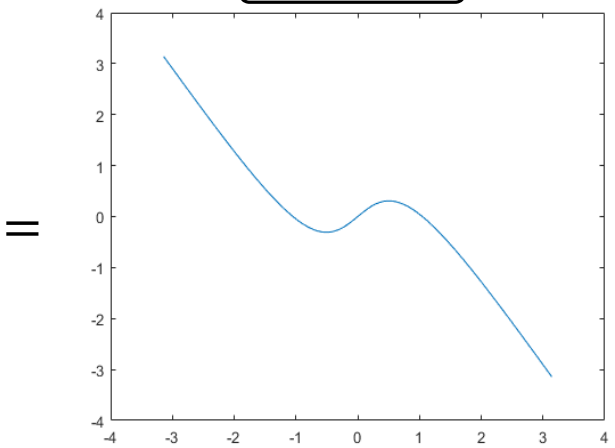
Είσοδος



Σύστημα



Έξοδος



+ =

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας

- Η σχέση

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

μας δίνει έναν εύκολο και γρήγορο τρόπο για να βρούμε την απόκριση σε συχνότητα, και κατά συνέπεια την κρουστική απόκριση, ενός ΓΧΑ συστήματος

- Πώς? Λύνοντας ως προς $H(e^{j\omega})$, δηλ.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

και στη συνέχεια μπορούμε να εφαρμόσουμε τεχνικές εύρεσης του $h[n]$, με συνηθέστερη το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

- Ας δούμε ένα παράδειγμα

$$x[n-n_d] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n_d}$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας

• Παράδειγμα:

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ το οποίο δίνει έξοδο $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$
Βρείτε την κρουστική απόκριση.

Ξέρουμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

$$Y(e^{j\omega}) = F \left\{ \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \right\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = F \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \right\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}} = H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}} - \frac{\frac{1}{2} e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

$$\xleftrightarrow[F^{-1}]{\text{Πινακας}} h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών

- Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες
- Ας εφαρμόσουμε τον DTFT σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l} X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) \sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l}$$

- Έτσι

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}}$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

- Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$$

Βρείτε την κρουστική απόκρισή του.

Θεωρώ το σύστημα S_0 : $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$

Θέτω $x[n] = \delta[n]$, τότε $y[n] = h_0[n]$. Άρα: $h_0[n] - \frac{1}{2}h_0[n-1] = \delta[n]$

Για $n=0$: $h_0[0] - \frac{1}{2}h_0[-1] = \delta[0] = 1 \Leftrightarrow \boxed{h_0[0] = 1}$

Χαρακτ. πολυώνυμο: $\gamma - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{2}}$ ← Χαρακτ. ρίζα

Άρα $h_0[n] = c\gamma^n, n \geq 0 \Rightarrow h_0[n] = c\left(\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 0.$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

$$\Xi \text{ έρω } \text{ότι } h[0] = 1 \Leftrightarrow c \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \Leftrightarrow \boxed{c=1}$$

$$\text{Άρα } h_0[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Η χαρακτηριστική απόκριση του αρχικού συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} h[n] &= h_0[n] - \frac{1}{4} h_0[n-1] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]. \end{aligned}$$

Στο χώρο της συχνότητας:

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4} x[n-1] \xrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2} e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4} e^{-j\omega} X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) \left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right) = X(e^{j\omega}) \left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

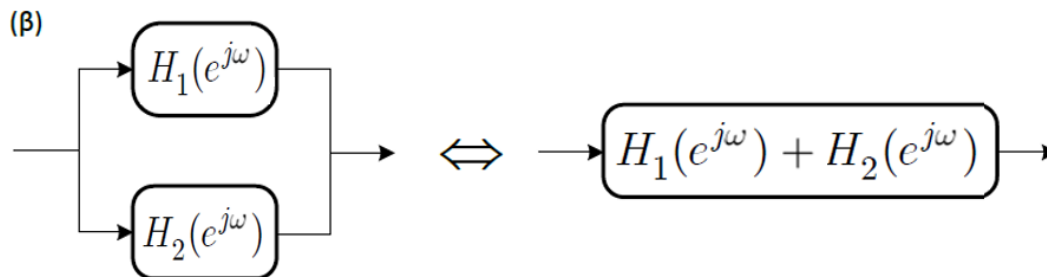
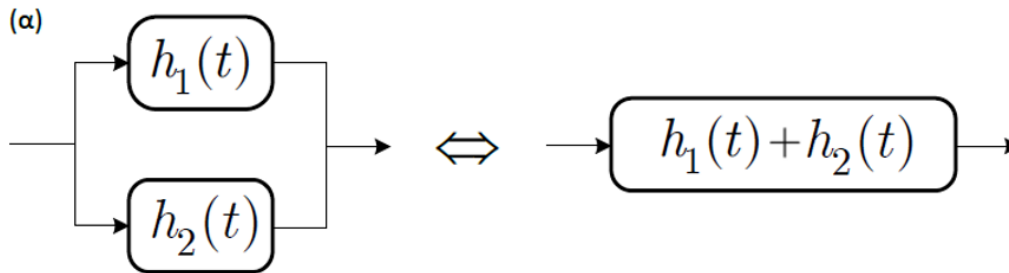
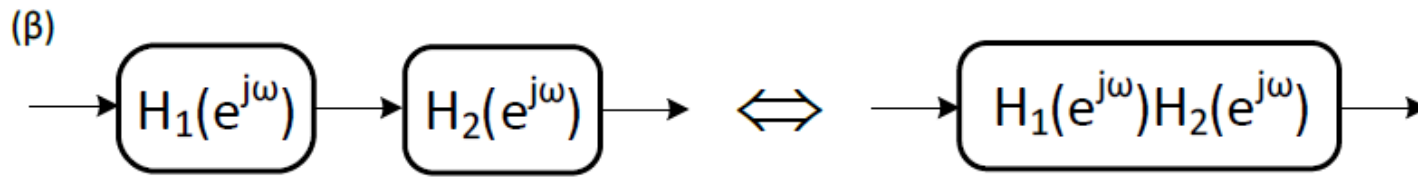
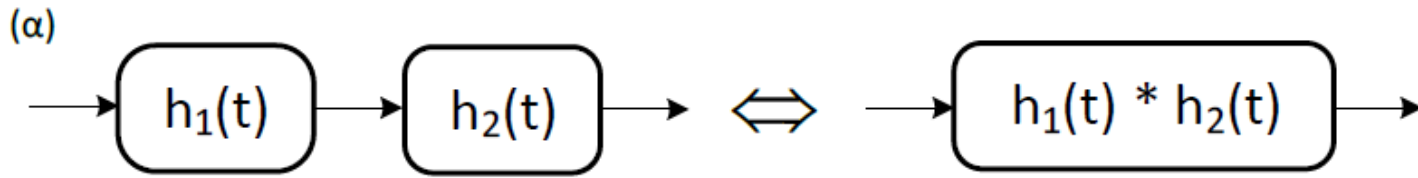
- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

$$\text{Άρα } H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{4} \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}, \text{ επί Πόλων:}$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1].$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων

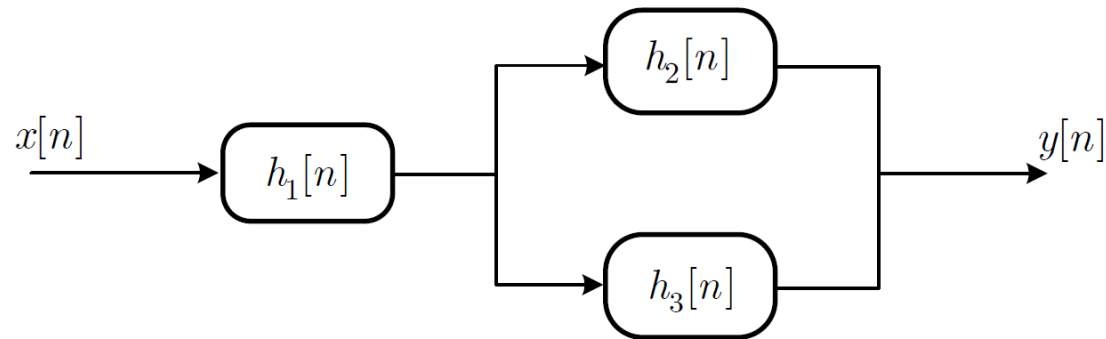
• Παράδειγμα:

○ Έστω το σύστημα της εικόνας, με

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$

$$h_2[n] = \delta[n - 2],$$

$$h_3[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$



α) υπολογίστε την απόκριση σε συχνότητα του συνολικού συστήματος

β) την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος

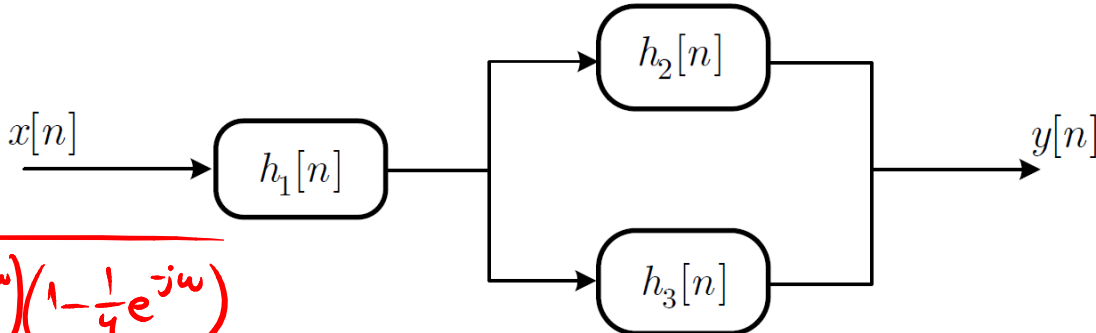
γ) μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα

$$\begin{aligned} \text{α) } H_{\text{ολ}}(e^{j\omega}) &= H_1(e^{j\omega}) \cdot (H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega})) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \left(e^{-j2\omega} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \right) \\ &= \frac{e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \cdot \textcircled{1} \end{aligned}$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων

• Παράδειγμα:

○ Έστω το σύστημα της εικόνας, με



$$\beta) H_g(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$\uparrow F^{-1}$ $\uparrow F^{-1}$ $\uparrow F^{-1}$
 $h[n]$ $(\frac{1}{2})^{n-2} u[n-2]$? $g[n]$

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$A = G(e^{j\omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} \cdot 2} = 2$$

$$B = G(e^{j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega}=4} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \Big|_{e^{-j\omega}=4} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot 4} = -1$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων

• Παράδειγμα:

○ Έστω το σύστημα της εικόνας, με

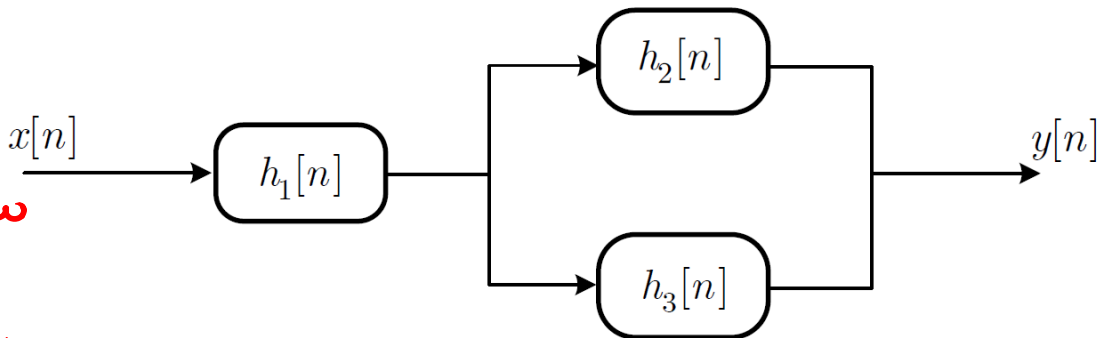
$$\text{Άρα } G(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{j\omega}}$$

$$\downarrow F^{-1} \qquad \downarrow F^{-1}$$

$$g[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Συνολικά, $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$

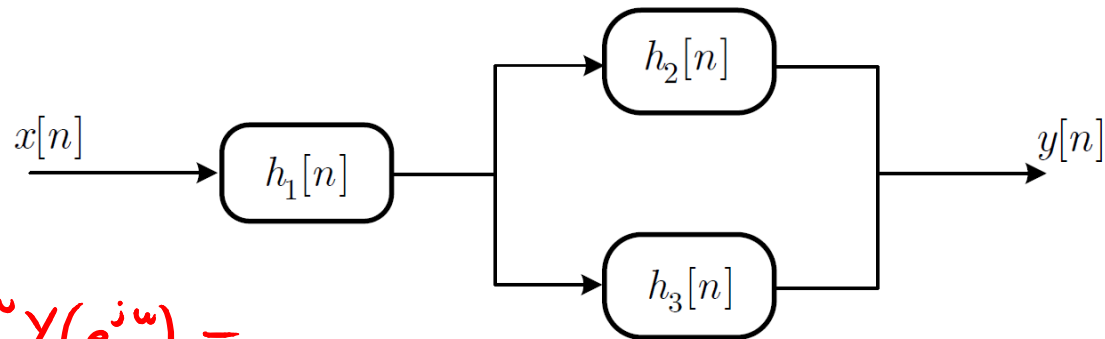
$$\begin{aligned} \delta) \text{ Από } \textcircled{1}, H_2(e^{j\omega}) &= \frac{e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{j\omega})} = \frac{e^{-j2\omega}(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}) + 1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega} - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} \\ &= \frac{1 + e^{-j2\omega} - \frac{1}{4}e^{-j3\omega}}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \Leftrightarrow Y(e^{j\omega})\left(1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}\right) = X(e^{j\omega}) \cdot \left(1 + e^{-j2\omega} - \frac{1}{4}e^{-j3\omega}\right) \end{aligned}$$



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων

• Παράδειγμα:

○ Έστω το σύστημα της εικόνας, με



Άρα:

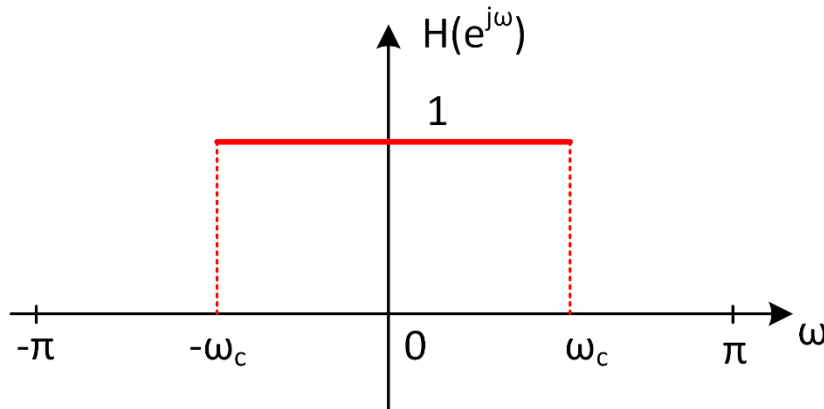
$$Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4} e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{8} e^{-j2\omega} Y(e^{j\omega}) =$$

$$= X(e^{j\omega}) + e^{-j2\omega} X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4} e^{-j3\omega} X(e^{j\omega}) \quad \xleftrightarrow{F^{-1}}$$

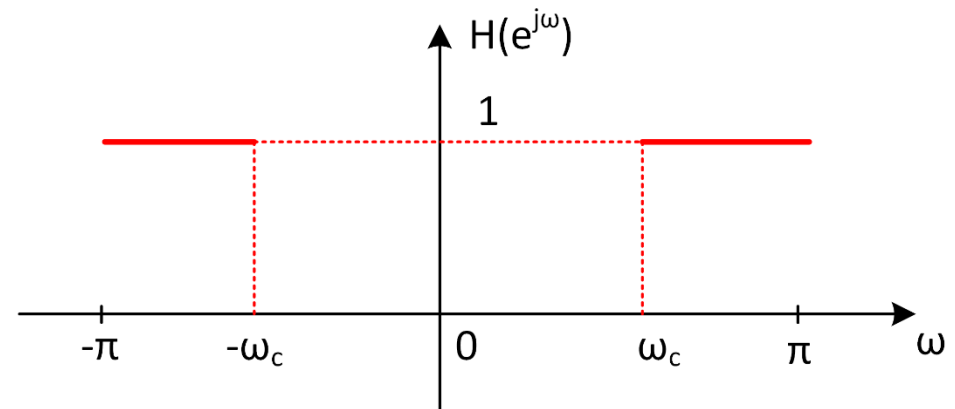
$$\xleftrightarrow{F^{-1}} y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = x[n] + x[n-2] - \frac{1}{4} x[n-3].$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

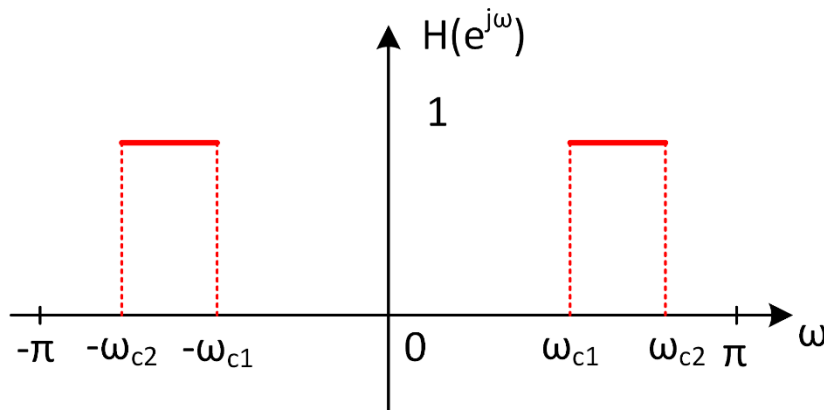
- Μια σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας



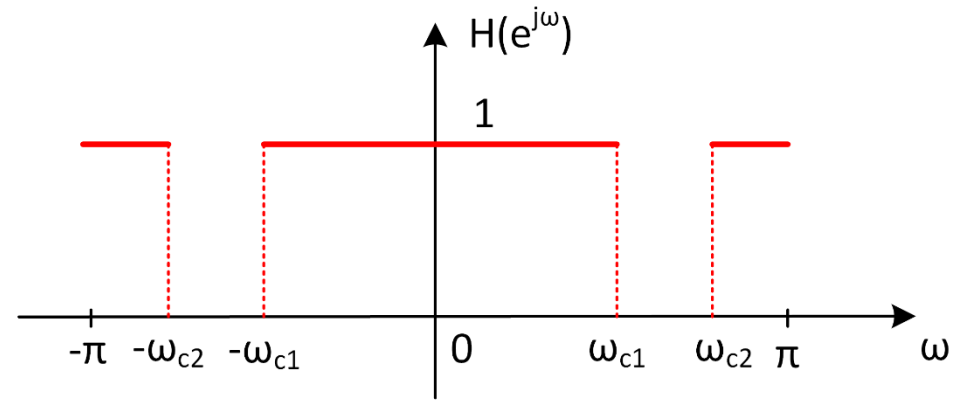
(α) Χαμηλοπερατό



(β) Υψηλοπερατό



(γ) Ζωνοπερατό



(δ) Ζωνοφρακτικό

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

- Ήδη γνωρίζουμε το ζεύγος DTFT για το χαμηλοπερατό ιδανικό φίλτρο

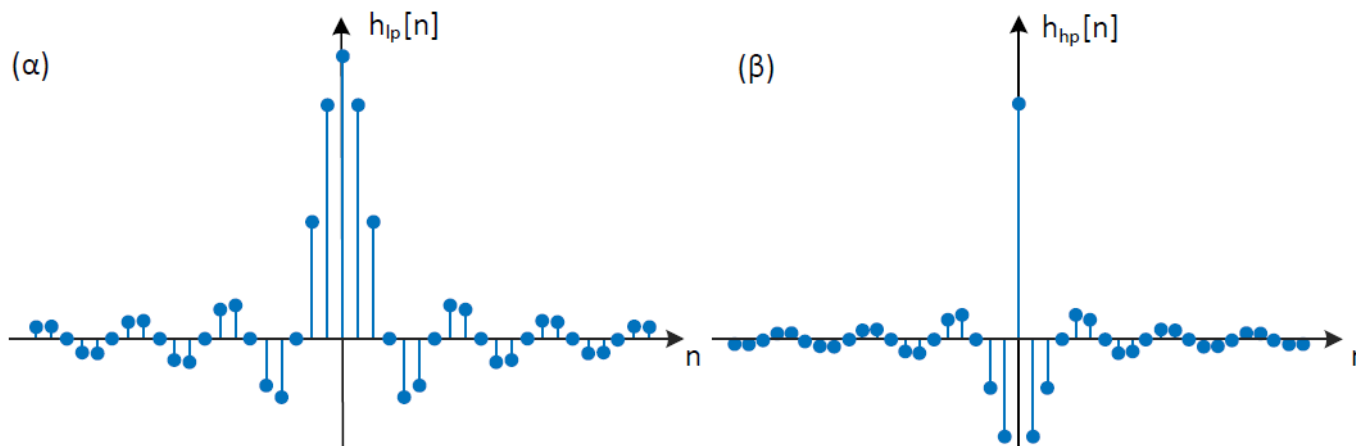
$$h_{lp}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \leftrightarrow H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

- Το υψηλερατό φίλτρο μπορεί να γραφεί ως

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$$

- Επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

```

% Ideal lowpass filter
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Tones
f1 = 1800; %Hz
f2 = 2800; %Hz

% Sampling frequency and time axis
fs = 8000;
t = 0:1/fs:0.1; % .1 seconds

% Discrete time frequencies
w1 = 2*pi*f1/fs;
w2 = 2*pi*f2/fs;

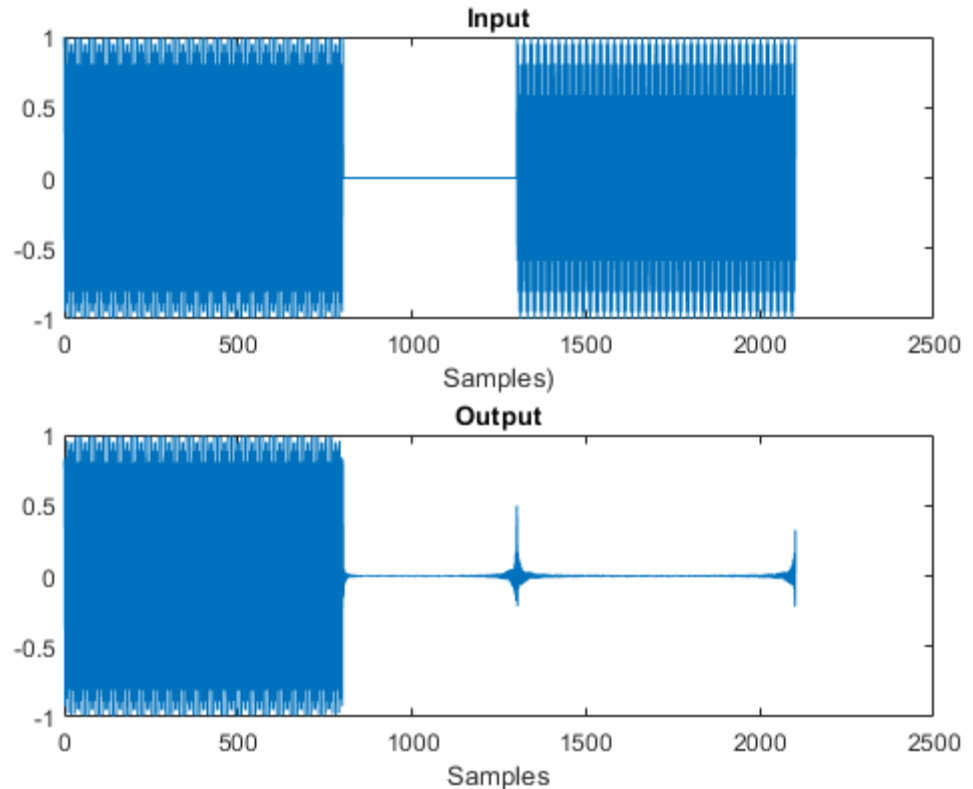
% Sound
x = [cos(2*pi*f1*t) zeros(1,500) cos(2*pi*f2*t)];

% Lowpass filter
fc = 2600; % Hz
wc = 2*pi*fc/fs;
n = -length(x)/2:length(x)/2;
hlp = wc/pi * sinc(wc*n/pi);

% Filter!
y = conv(x,hlp,'same');

% Show!
figure; subplot(211);
plot(x); xlabel('Samples'); title('Input');
subplot(212);
plot(y); xlabel('Samples'); title('Output');

```



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

• Παράδειγμα:

○ Έστω η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα ως $x[n] = 2 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 8 \sin\left(\frac{3\pi n}{4} - \frac{\pi}{5}\right)$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος αν η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$h[n] = \frac{4 \sin\left[\frac{(n-1)\pi}{2}\right]}{(n-1)\pi}$$

Ξέρουμε ότι $H_{\text{lp}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \xrightarrow{F^{-1}} h_{\text{lp}}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$.
($\frac{\pi}{2} = \omega_c$)

Παρατηρούμε ότι $h[n] = 4 h_{\text{lp}}[n-1] \xrightarrow{F} H(e^{j\omega}) = 4 \underbrace{H_{\text{lp}}(e^{j\omega})}_{=1} e^{-j\omega} =$

$= \begin{cases} 4 \cdot 1 \cdot e^{-j\omega}, & |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$. Η είσοδος $x[n]$ αποτελείται από άθροιση ημιτόνων. Άρα:

$$y[n] = 2 |H(e^{j\frac{\pi}{4}})| \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \varphi_H(e^{j\frac{\pi}{4}})\right) + 8 |H(e^{j\frac{3\pi}{4}})| \cdot \sin\left(\frac{3\pi n}{4} - \frac{\pi}{5} + \varphi_H(e^{j\frac{3\pi}{4}})\right)$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας
 - Παράδειγμα:

Το $8|H(e^{j\frac{3n}{4}})|\sin\left(\frac{3n\pi}{4} - \frac{\pi}{5} + \varphi_H(e^{j\frac{3n}{4}})\right)$ δεν περνάει στην είσοδο του φίλτρου

αφά η συχνότητα $\pm \frac{3n}{4}$ δεν περνάει από το φίλτρο. Άρα:

$$y[n] = 2|H(e^{j\frac{n}{4}})| \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{4} + \varphi_H(e^{j\frac{n}{4}})\right)$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 4e^{-j\omega}, & |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow H(e^{j\frac{n}{4}}) = 4e^{-j\frac{n}{4}} \begin{cases} |H(e^{j\frac{n}{4}})| = 4 \\ \varphi_H(e^{j\frac{n}{4}}) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Άρα $y[n] = 2 \cdot 4 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 8 \cos\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right).$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

- Τα πράγματα όσον αφορά την επίδραση της απόκρισης πλάτους ενός ΓΧΑ συστήματος στην είσοδό του είναι σχετικά ξεκάθαρα
 - Η απόκριση πλάτους πολλαπλασιάζεται με το φάσμα πλάτους της εισόδου
- Φαινομενικά και η επίδραση της απόκρισης φάσης δε συνιστά κάτι πολύπλοκο
 - Η απόκριση φάσης προστίθεται στο φάσμα φάσης της εισόδου
- Υπενθυμίζεται ότι η φάση σχετίζεται με τη χρονική δομή ενός σήματος
- Οπότε η επίδραση της απόκρισης φάσης διατηρεί ή όχι την αρχική χρονική δομή του σήματος
- Όμως τελικά τα πράγματα δεν είναι τα όσο απλά για την απόκριση φάσης. Γιατί?
- Γιατί η φάση ενός μιγαδικού αριθμού δεν ορίζεται μονοσήμαντα!
 - Η πρόσθεση οποιουδήποτε ακέραιου πολλαπλάσιου του 2π διατηρεί την ίδια τιμή στη φάση

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

- Όταν υπολογίζουμε τη φάση μέσω της αντίστροφης εφαπτομένης, το αποτέλεσμα είναι πάντα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$
 - Αυτή η τιμή ονομάζεται πρωτεύουσα τιμή φάσης (principal phase value)

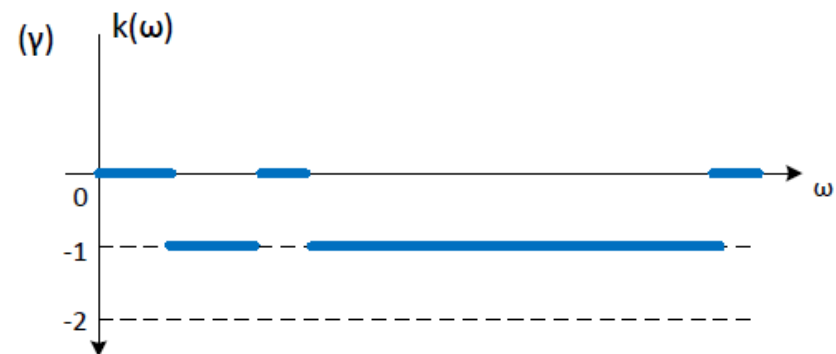
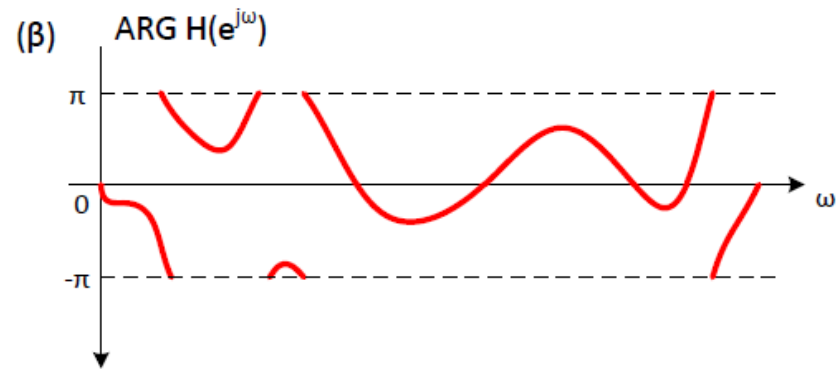
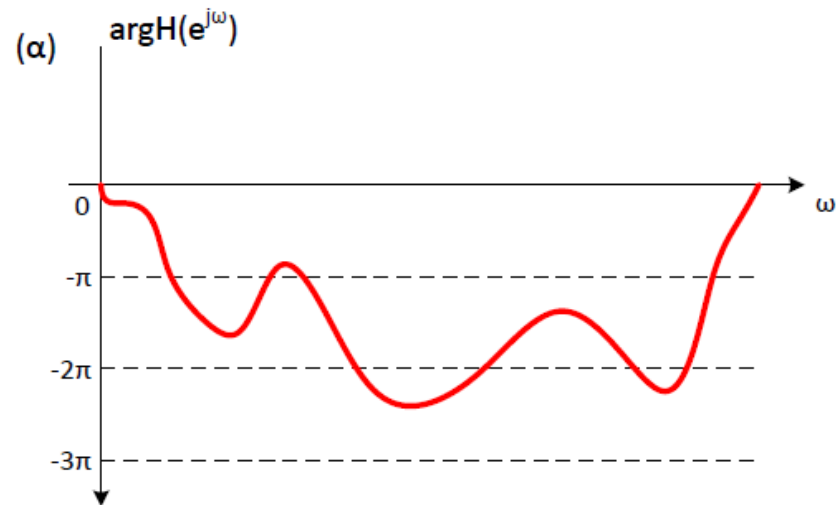
$$-\pi < ARG[H(e^{j\omega})] \leq \pi$$

- Οποιαδήποτε άλλη γωνία μπορεί να γραφεί με βάση την πρωτεύουσα φάση ως

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) = \arg[H(e^{j\omega})] = ARG[H(e^{j\omega})] + 2\pi k(\omega) \longrightarrow \in Z$$

- Η διαδικασία εύρεσης της συνεχούς (ως προς ω) συνάρτησης φάσης από την πρωτεύουσα φάση που παίρνουμε από την αντίστροφη εφαπτομένη ονομάζεται **ξετύλιγμα φάσης (phase unwrapping)**
- Δείτε το ακόλουθο σχήμα

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

- Θυμηθείτε ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος για ημιτονοειδή είσοδο της μορφής

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \theta), \quad -\infty < n < +\infty$$

δίνεται ως

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))$$

- Προσέξτε:

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos\left(\omega_0 \left(n + \frac{\varphi_H(e^{j\omega_0})}{\omega_0}\right) + \theta\right)$$

- Η ποσότητα

$$-\frac{\varphi_H(e^{j\omega_0})}{\omega_0}$$

μας δείχνει τη **χρονική καθυστέρηση σε δείγματα** του σήματος εξόδου σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου

- Η συνάρτηση

$$\tau_p(e^{j\omega}) = -\frac{\varphi_H(e^{j\omega})}{\omega}$$

ονομάζεται **καθυστέρηση φάσης (phase delay)**

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

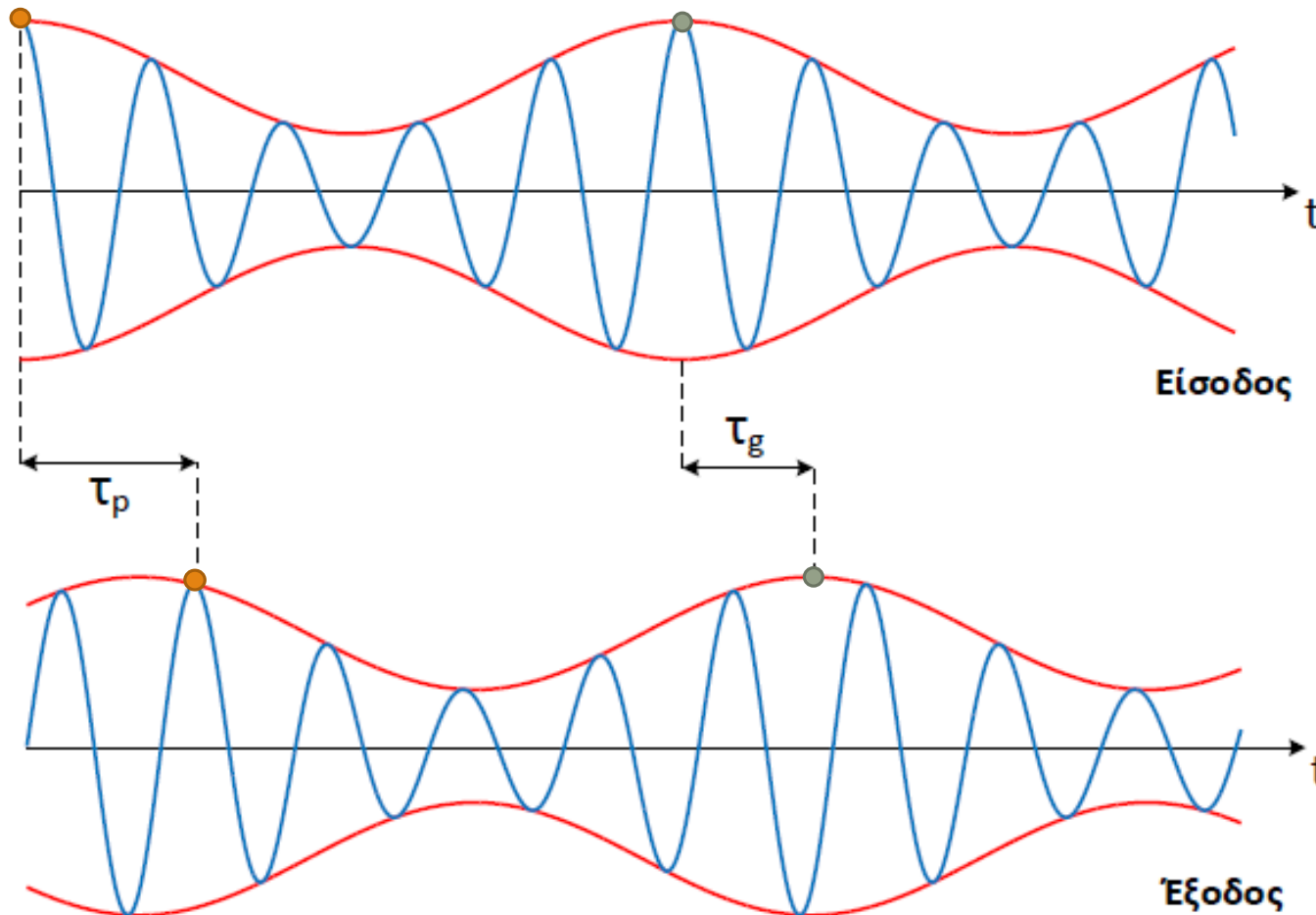
- Στην πράξη, μια άλλη μετρική μας είναι πιο χρήσιμη
 - ...καθώς άπειρης διάρκειας ημίτονα δεν υπάρχουν στην πράξη!
 - ...ούτε αυτά έχουν σταθερό πλάτος προϊόντος του χρόνου
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι η συνάρτηση

$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega} \varphi_H(e^{j\omega})$$

η οποία ονομάζεται **καθυστέρηση ομάδας (group delay)** είναι αυτή που καθορίζει την καθυστέρηση της **περιβάλλουσας** του σήματος (και άρα του σήματος) στην έξοδό του, αν

- η απόκριση πλάτους του συστήματος είναι περίπου σταθερή γύρω από μια συχνότητα ω_0 η οποία σχετίζεται με την είσοδο
- η καθυστέρηση ομάδας είναι περίπου σταθερή γύρω από μια συχνότητα ω_0 η οποία σχετίζεται με την είσοδο
- Δείτε το ακόλουθο σχήμα για ένα άπειρης διάρκειας ημίτονο διαμορφωμένο κατά πλάτος

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης



- Ποια από τις δυο μετρικές εκφράζει την καθυστέρηση του σήματος στην έξοδο του συστήματος;

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

• Παράδειγμα:

○ Μελετήστε το σύστημα $h[n] = \delta[n - n_0]$ ως προς τις καθυστερήσεις φάσης και ομάδας

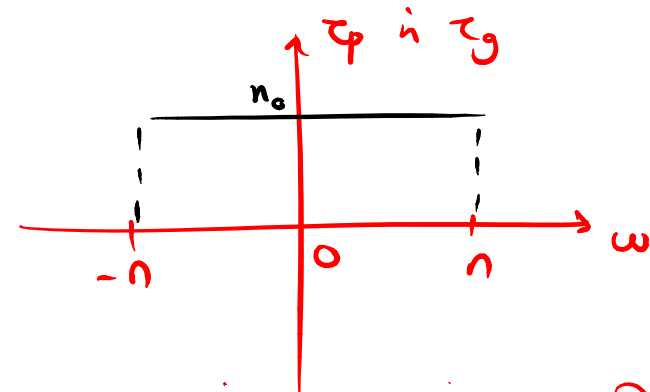
Είναι $h[n] = \delta[n - n_0] \xrightarrow{F} H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$, $\phi_H(e^{j\omega}) = -\omega n_0$

Phase delay: $\tau_p = -\frac{\phi_H(e^{j\omega})}{\omega} = -\frac{-\omega n_0}{\omega} = n_0$

Group delay: $\tau_g = -\frac{d}{d\omega} \phi_H(e^{j\omega}) = -(-n_0)' = n_0$

Εδώ $\tau_p = \tau_g = n_0$ δείχνεται.

Φάση γραμμική $\iff \tau_p = \tau_g$



Όταν λοιπόν η φάση είναι γραμμική, τα πράγματα είναι απλά: οι συνιστώσες της εισόδου θα καθυστερήσουν όλες το ίδιο.

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

- Όμως αν το σήμα εισόδου δεν είναι άπειρης διάρκειας, θα μοιάζει κάπως σαν το παρακάτω



- Παρατηρήστε ότι τα ημίτονα είναι διαμορφωμένα (πολλαπλασιασμένα) με μια Gaussian-like περιβάλλουσα
- Μας ενδιαφέρει πόσο θα καθυστερήσει στην έξοδο το «πακέτο συχνοτήτων» που αποτελεί κάθε ημιτονοειδή παλμό!
- Αν ένα σήμα εισόδου αποτελείται από ένα άθροισμα από **διαμορφωμένα** ημίτονα διαφορετικής συχνότητας το καθένα, τότε κάθε συχνότητα κάθε «πακέτου» θα υποστεί διαφορετική καθυστέρηση στην έξοδο του συστήματος, κι έτσι η έξοδος θα είναι εν γένει διαφορετική στη μορφή της σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου
- Αν όμως τα διαμορφωμένα ημίτονα είναι σήματα **στενής ζώνης**, δηλ. ο μετασχ. Fourier τους έχει σημαντικές τιμές μόνο γύρω από ένα εύρος συχνοτήτων

$$[-\omega_0 - B, -\omega_0 + B], [\omega_0 - B, \omega_0 + B]$$

με ω_0 τη συχνότητα του ημιτόνου, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την καθυστέρηση ομάδας για μια πολύ καλή προσέγγιση της καθυστέρησης της εξόδου!

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης



- Πρέπει να καταλαβαίνετε ότι κάθε ημιτονοειδής παλμός από τους παραπάνω δεν έχει συχνοτικό περιεχόμενο μόνο στη συχνότητα ω_0 αλλά σε ένα εύρος συχνοτήτων γύρω από αυτή
- Γιατί;

$$w[n] \cdot A \cos(\omega_0 n) \stackrel{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} W(e^{j\omega}) * (A\pi\delta(\omega - \omega_0) + A\pi\delta(\omega + \omega_0))$$

$$\frac{A}{2} W(e^{j(\omega - \omega_0)}) + \frac{A}{2} W(e^{j(\omega + \omega_0)})$$

- Άρα το εύρος συχνοτήτων που καταλαμβάνει κάθε ημιτονοειδής παλμός εξαρτάται από το εύρος του μετασχηματισμού Fourier $W(e^{j\omega})$ του σήματος της περιβάλλουσας $w[n]$!
- Αν το εύρος συχνοτήτων του μετασχ. της είναι μικρό, τότε τα σήματα είναι στενής ζώνης!
 - Για να ισχύει αυτό, η περιβάλλουσα πρέπει να έχει «μεγάλη» διάρκεια...

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

- Η καθυστέρηση ομάδας μας δίνει ένα μέτρο της γραμμικότητας (ή μη) της φάσης ως συνάρτηση της συχνότητας ω
- Έστω ένα σήμα εισόδου

$$x[n] = \sum_{k=1}^N w_k[n] \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

- Έστω ότι η περιβάλλουσα $w_k[n]$ κάθε συχνότητας ω_k είναι ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, χαμηλοπερατής φύσεως και στενής ζώνης στη συχνότητα, δηλ.

$$\begin{aligned} w[n] &\neq 0, & N_1 &\leq n \leq N_2 \\ W_k(e^{j\omega}) &= 0, & |\omega| &> B_k, & B_k &\ll \omega_k \end{aligned}$$

- Μπορούμε εύκολα (Άσκηση ☺) να δείξουμε ότι τότε

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} e^{j\theta_k} W_k(e^{j(\omega-\omega_k)}) + \frac{1}{2} e^{-j\theta_k} W_k(e^{j(\omega+\omega_k)}) \right)$$

- Πράγματι έχουμε ένα άθροισμα σημάτων στενής ζώνης!

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

- Υπό τις προϋποθέσεις που είπαμε νωρίτερα (slide 6), η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος μπορεί να γραφεί ως

$$y[n] = \sum_{k=1}^N w_k [n - \tau_g(e^{j\omega_k})] \cos(\omega_k (n - \tau_p(e^{j\omega_k})) + \theta_k)$$

- Ξεκάθαρα βλέπετε ότι κάθε διαμορφωμένο ημίτονο συχνότητας ω_k έχει καθυστερήσει κατά $\tau_g(e^{j\omega_k})$

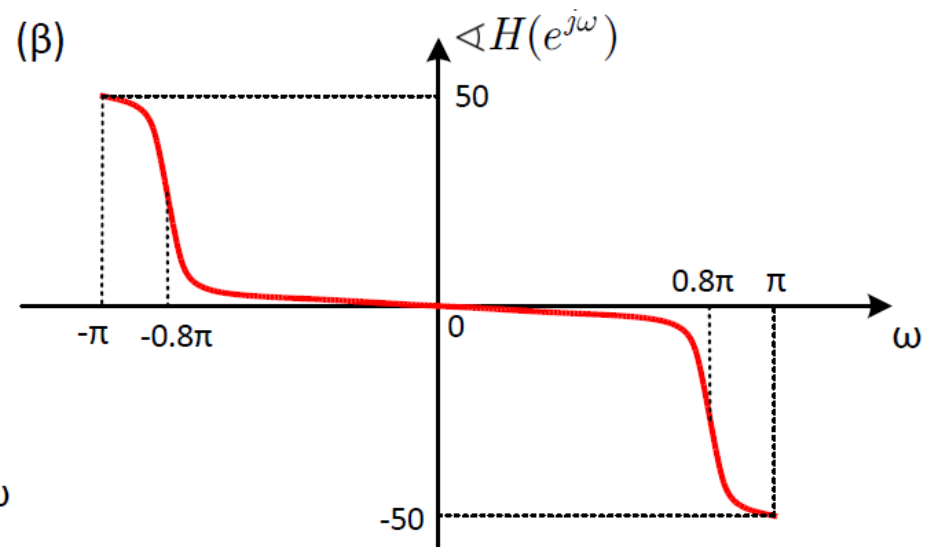
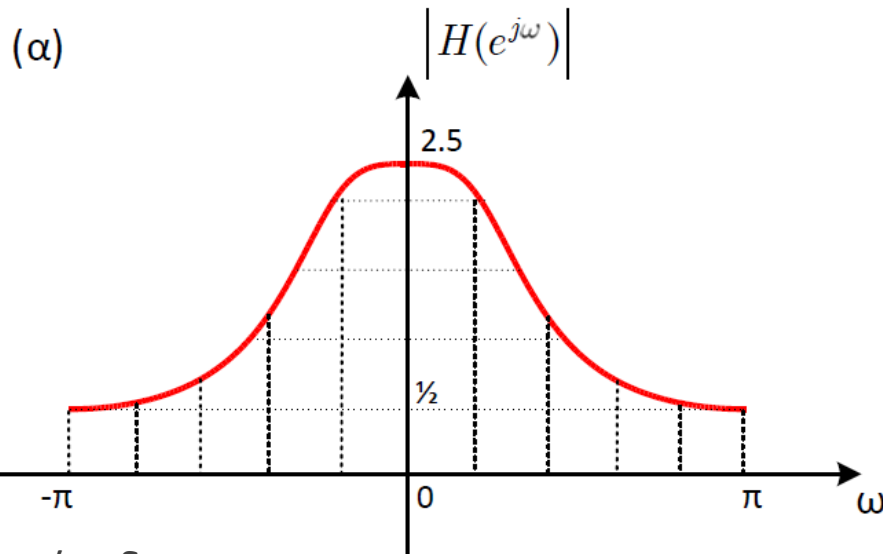
Καθυστέρηση Ομάδας ΓΧΑ Συστήματος

- Αν η απόκριση φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος είναι γραμμική, τότε η καθυστέρηση ομάδας του είναι σταθερή ως προς τη συχνότητα. Αυτό σημαίνει ότι κάθε συνιστώσα στενής ζώνης της εισόδου θα υποστεί την ίδια καθυστέρηση στην έξοδο του συστήματος.
- Αν η απόκριση φάσης είναι μη γραμμική, τότε η καθυστέρηση ομάδας δεν είναι σταθερή, και άρα θα υπάρχουν διαφορετικές καθυστερήσεις για διαφορετικά “πακέτα” συχνοτήτων της εισόδου, με αποτέλεσμα τη διασπορά στο χρόνο της ενέργειας του σήματος στην έξοδο του συστήματος. Έτσι, η μη γραμμικότητα στη φάση ή - ισοδυνάμως - η μη σταθερή καθυστέρηση ομάδας συνεπάγεται διασπορά του σήματος στο χρόνο.

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που φαίνεται στο σχήμα.



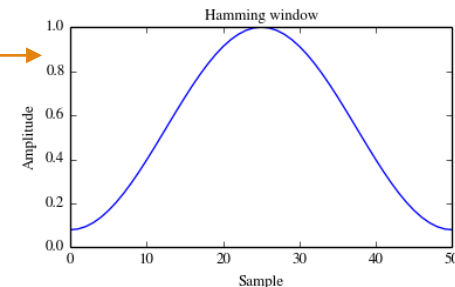
• Είσοδος

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$$

$$= w[n - M] \sin(0.2\pi n) + w[n - M] \sin(0.8\pi n) + w[n - 7M] \sin(0.4\pi n)$$

με $M = 50$ και $w[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$, $0 \leq n \leq N = 100$

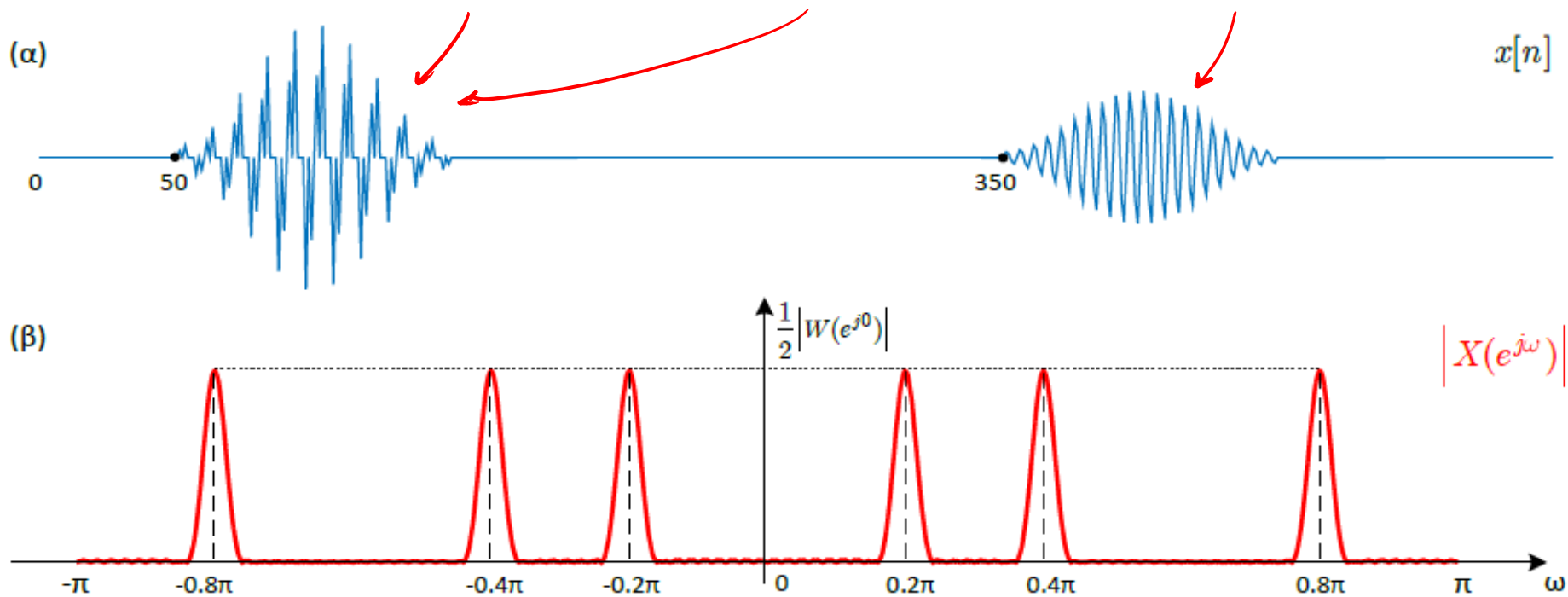
• Το σημαντικό εύρος συχνοτήτων για αυτό το $w[n]$ είναι $\sim \frac{8\pi}{100} \frac{rad}{sample}$



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

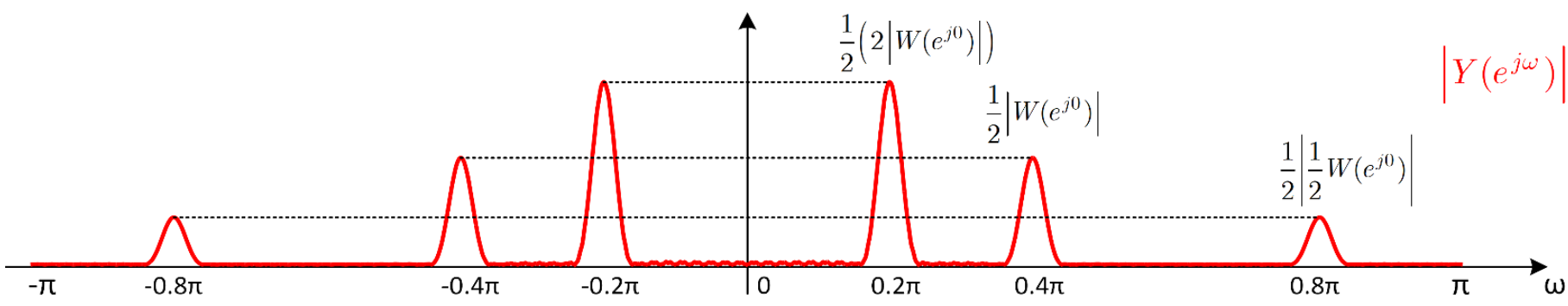
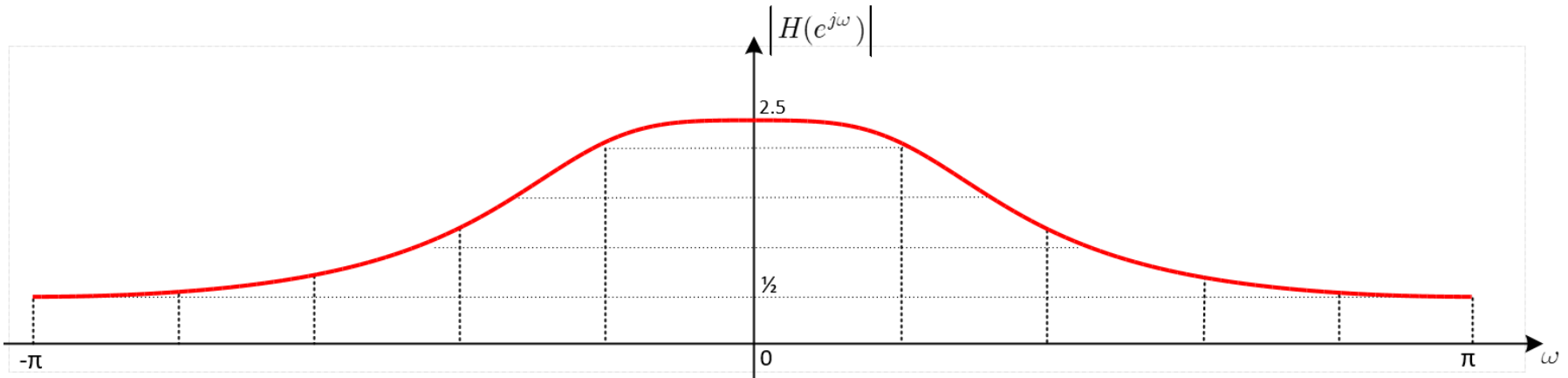
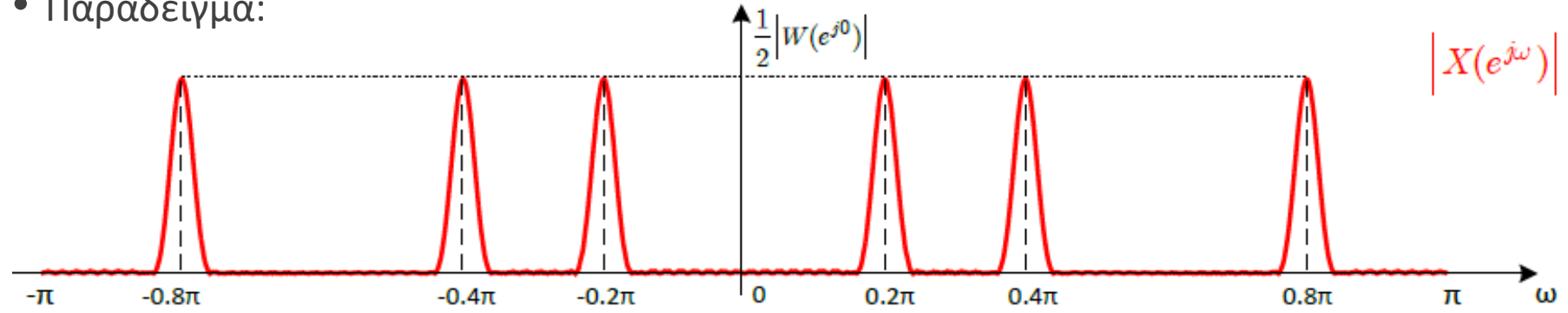
• Παράδειγμα:

$$x[n] = w[n - 50] \sin(0.2\pi n) + w[n - 50] \sin(0.8\pi n) + w[n - 350] \sin(0.4\pi n)$$



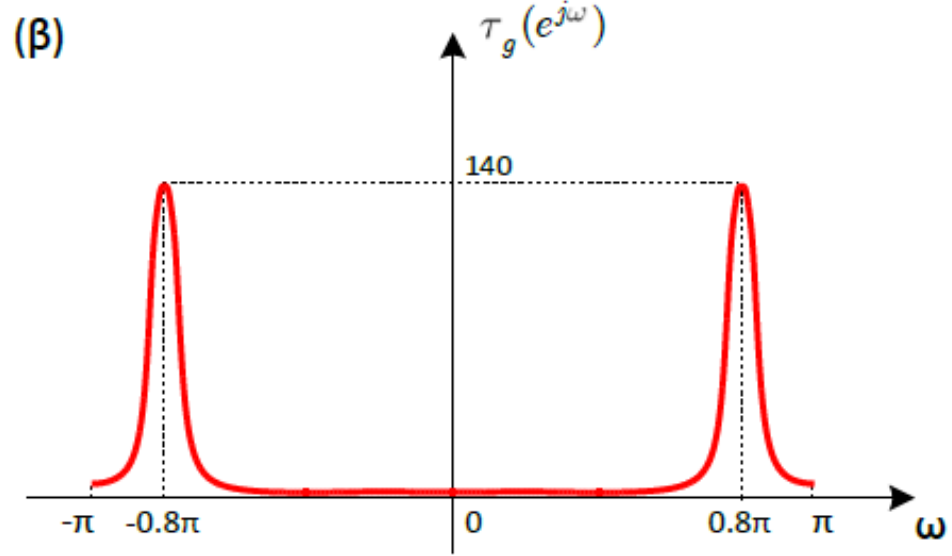
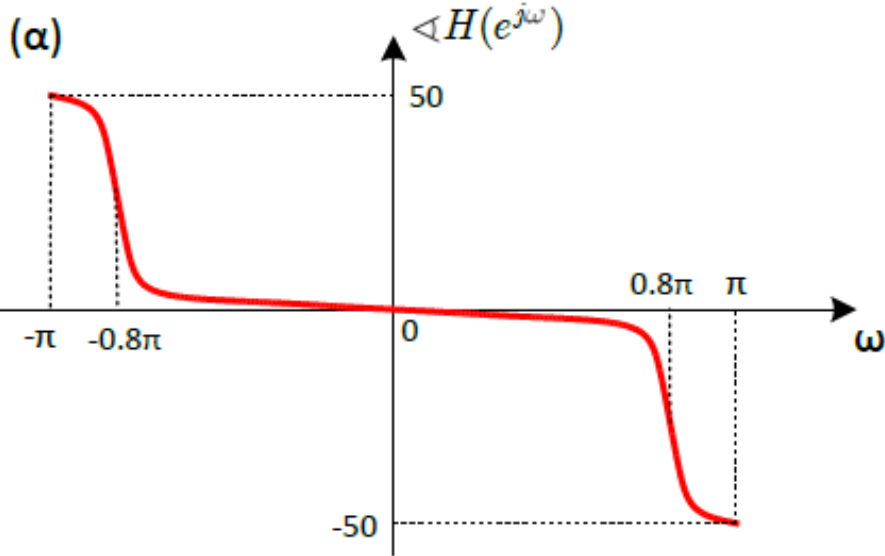
• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

• Παράδειγμα:



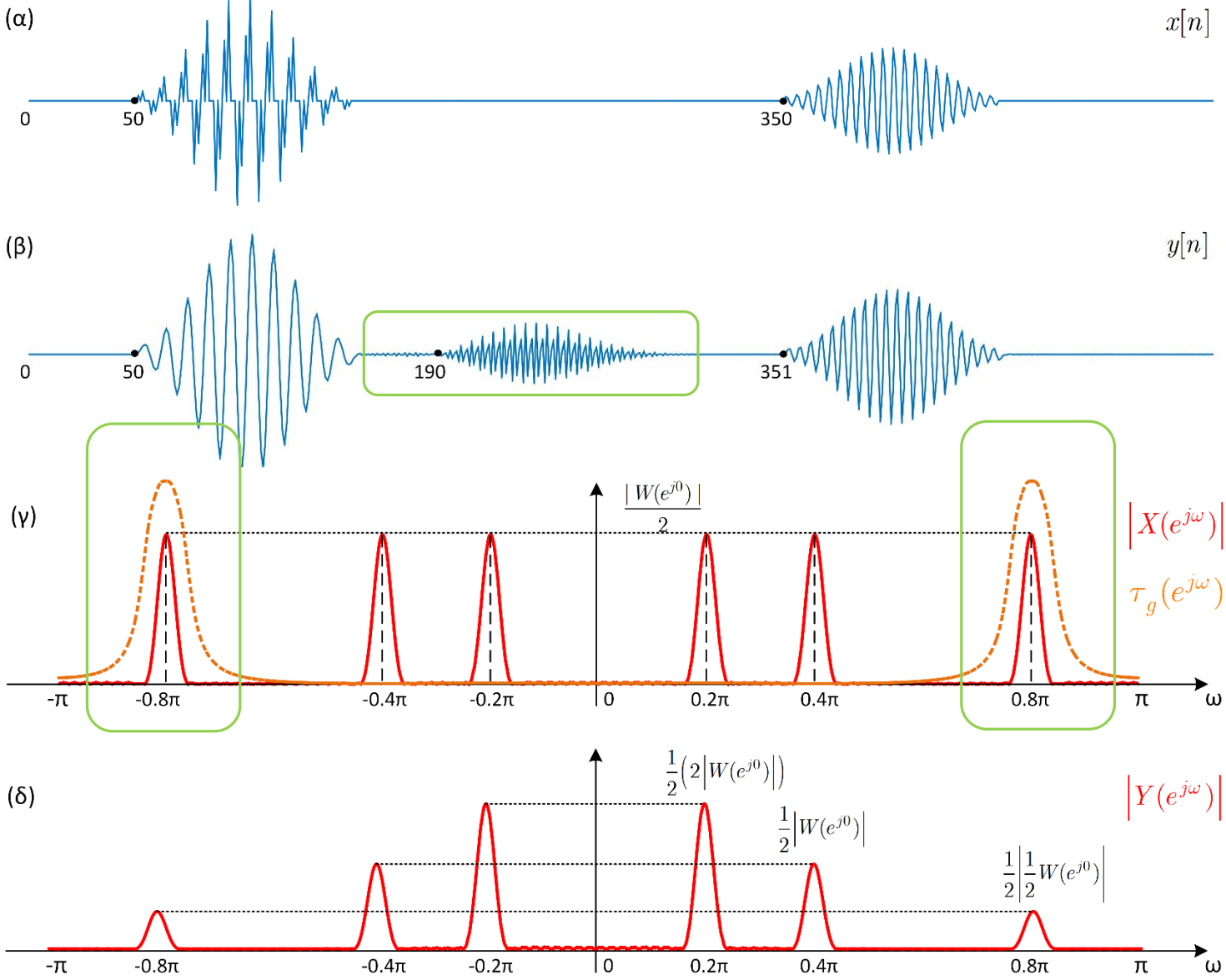
• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

• Παράδειγμα:



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

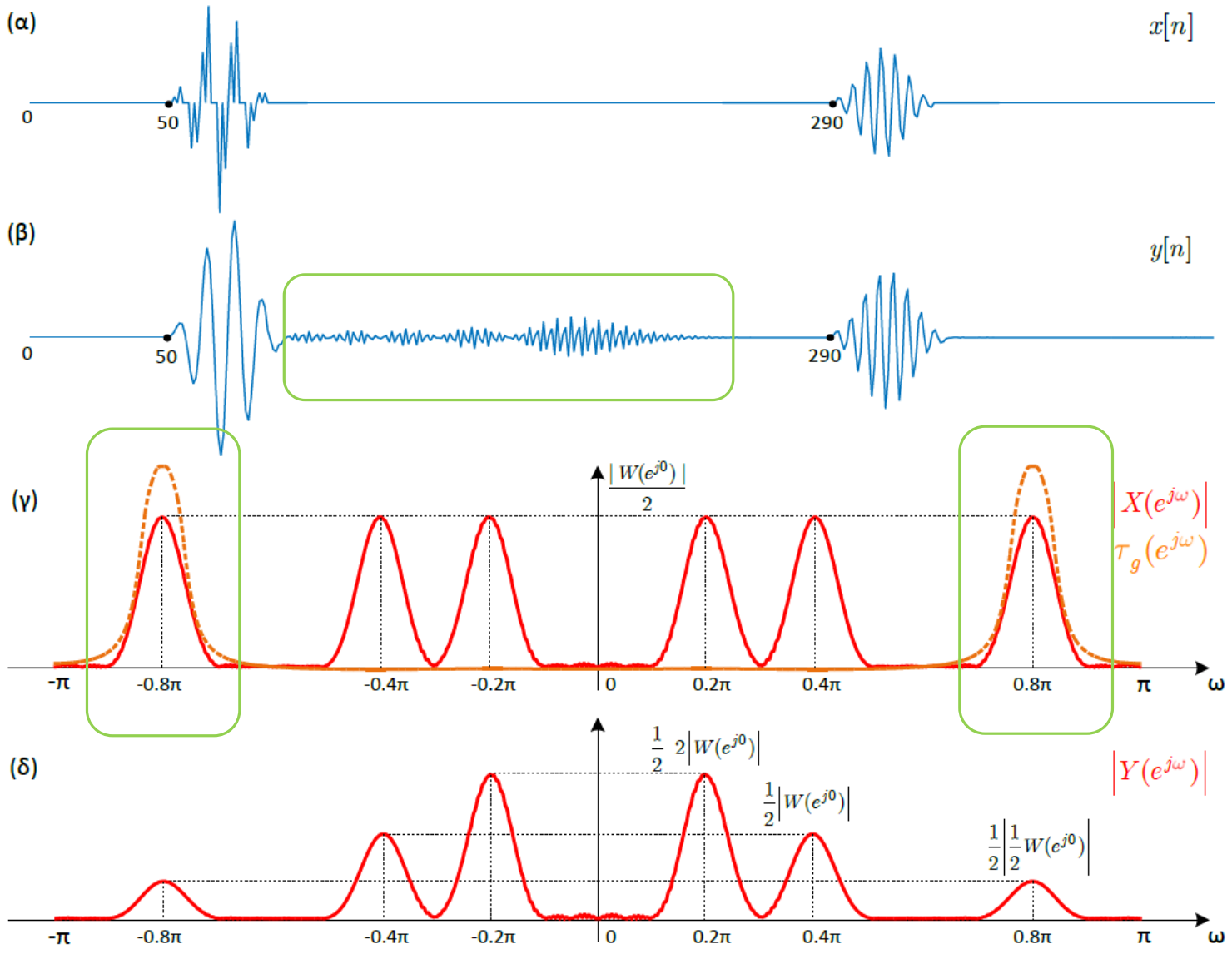
• Παράδειγμα:



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

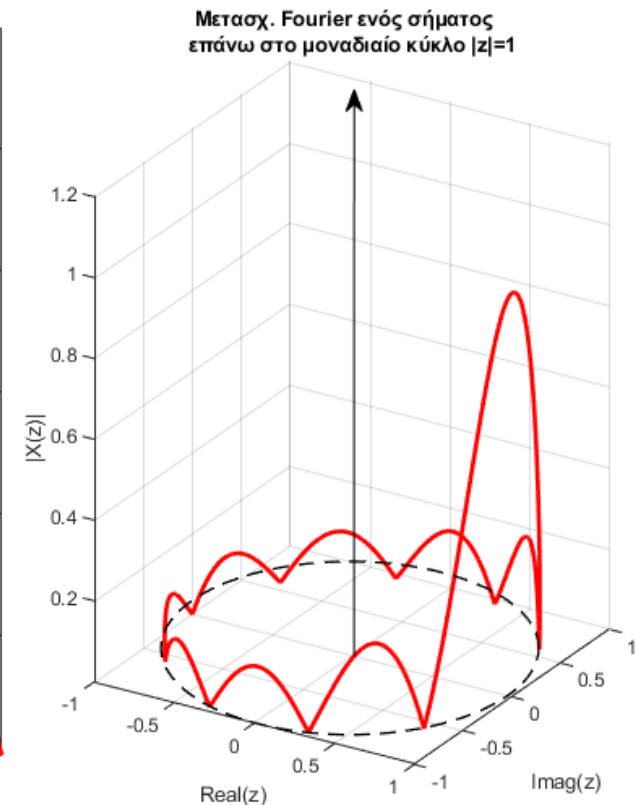
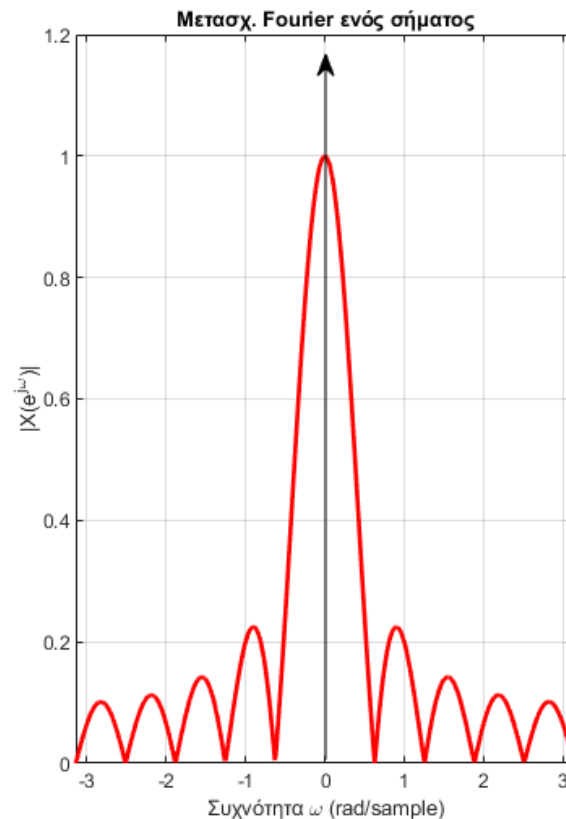
• Παράδειγμα:

Είσοδος ευρείας ζώνης (wideband)



- Ως τώρα έχουμε αρκετά εργαλεία ανάλυσης σημάτων και συστημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και σε αυτόν της συχνότητας
- Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν ακόμα τα εξής προβλήματα:
 1. Υπάρχουν σήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
 2. Υπάρχουν συστήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
 3. Δεν έχουμε έναν εύκολο τρόπο να σχεδιάζουμε συστήματα
- Αυτό σημαίνει πως για τα μεν σήματα, δεν μπορούμε να ελέγξουμε το συχνοτικό τους περιεχόμενο, για τα δε συστήματα πως δεν μπορούμε να τα μελετήσουμε!
- Μπορούμε να κάνουμε κάτι γι' αυτό?
- Μπορούμε να ορίσουμε ένα γενικότερο μετασχηματισμό που να περιλαμβάνει και τέτοιου είδους σήματα και συστήματα?

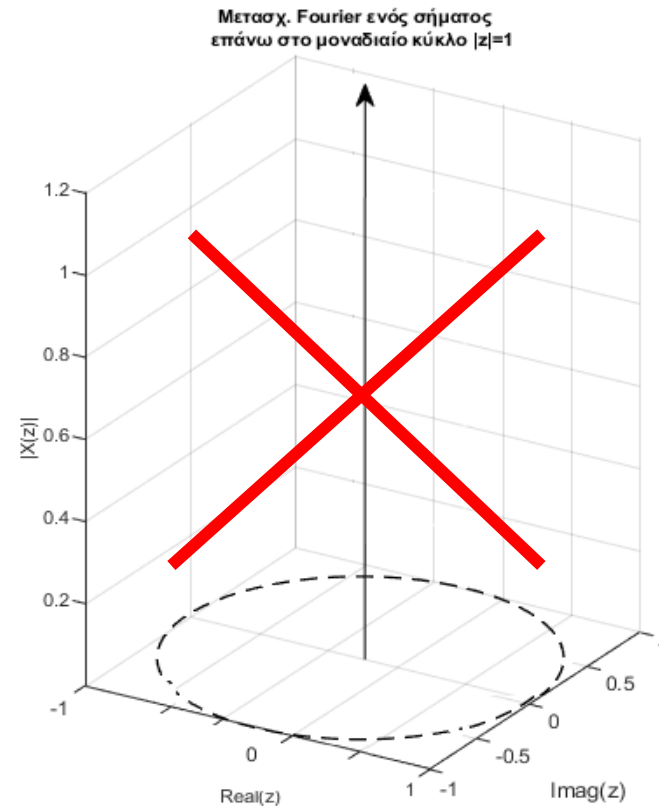
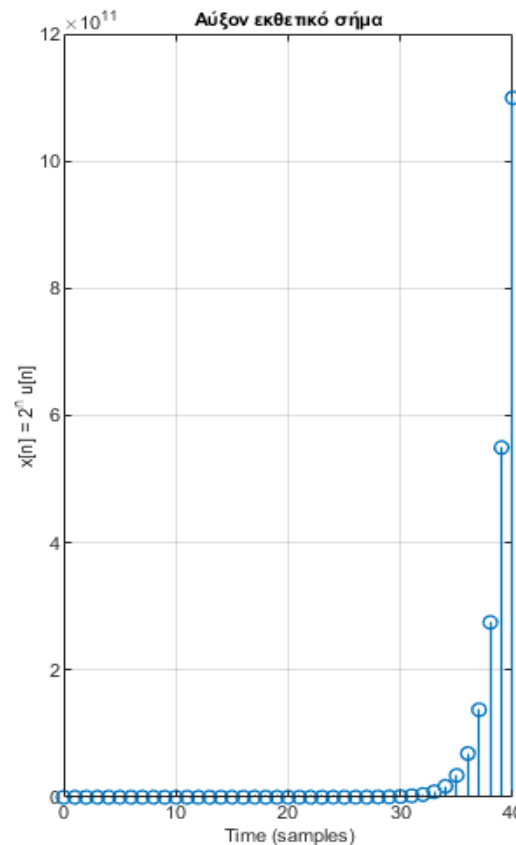
- Κάθε μετασχηματισμός Fourier αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων μοναδιαίου πλάτους $e^{-j\omega n}$
- Λόγω της περιοδικότητάς του, μπορούμε εναλλακτικά να τον φανταστούμε να «ζει» επάνω στον μοναδιαίο κύκλο ενός μιγαδικού επιπέδου
- Όλα τα σήματα που έχουμε συζητήσει έχουν μετασχ. Fourier που απεικονίζεται όπως στο σχήμα
- Κι αυτά τα σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier?
 - Μήπως «ζουν» επάνω σε άλλους κύκλους του μιγαδικού επιπέδου?



- Έστω το σήμα

$$x[n] = 2^n u[n]$$

- Το σήμα αυτό δεν έχει μετασχ. Fourier
- Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να το εκφράσουμε συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών σημάτων μοναδιαίου πλάτους
- Διαφορετικού πλάτους ίσως?



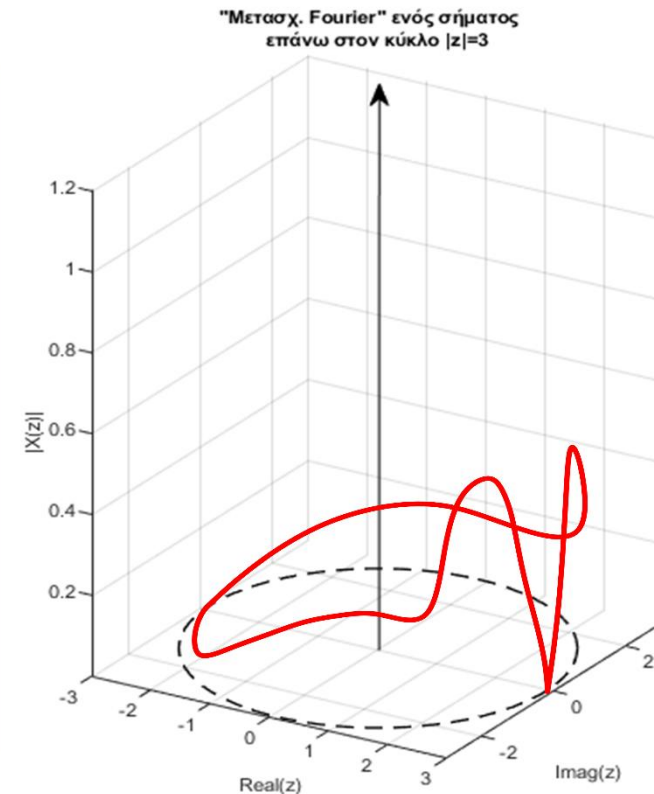
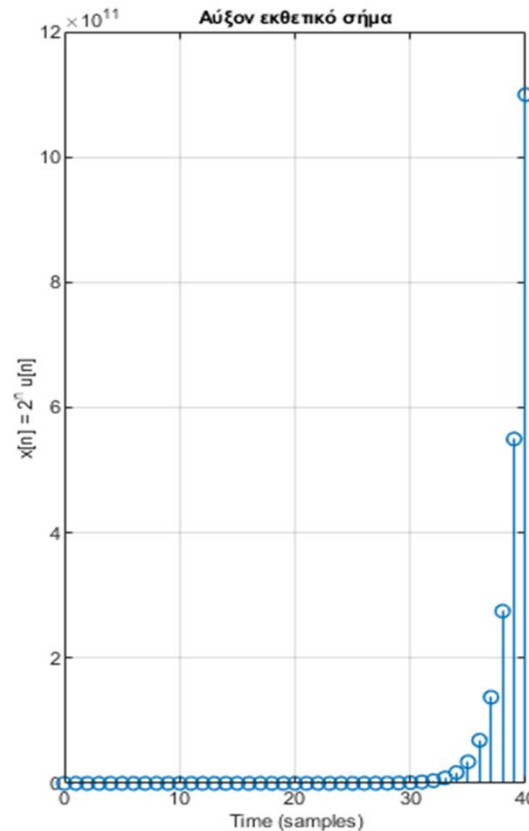
- Ας χρησιμοποιήσουμε μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$\left(\frac{1}{r} e^{-j\omega}\right)^n, \quad r \in \mathfrak{R}_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}$$

- Ορίζεται σε κύκλο ακτίνας r



- Ας ορίσουμε το μετασχηματισμό που χρησιμοποιεί μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$(re^{j\omega})^{-n}, \quad r \in \mathfrak{R}_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}$$

- Πότε υπάρχει αυτός ο μετασχηματισμός?

- Προφανώς όταν

$$|X(re^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]r^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{r^n} \right| < +\infty$$

- Σήματα που μεγαλώνουν πιο αργά από το r^n ικανοποιούν την παραπάνω απαίτηση

- Στα πλαίσια του μαθήματος, δε θα μας απασχολήσει η ύπαρξη – θα τη θεωρούμε δεδομένη

- Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας, το σήμα $x[n]$ θα έχει μετασχηματισμό όταν

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{r^n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{2^n}{r^n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{2}{r} \right|^n < +\infty \Leftrightarrow r > 2$$

- Θέτοντας

$$z = re^{j\omega}, \quad r \in \mathfrak{R}_+$$

η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$|z| > 2$$

και ονομάζεται **Πεδίο Σύγκλισης** του Μετασχηματισμού

- Ο νέος αυτός μετασχηματισμός ονομάζεται **Μετασχηματισμός Z** και ορίζεται ως

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz$$

- Δε θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του αντιστρόφου

- Πίσω στο παράδειγμά μας

$$x[n] = 2^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, |z| > 2$$

- Παράδειγμα:

- Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n]$, $a \in \mathbb{R}$

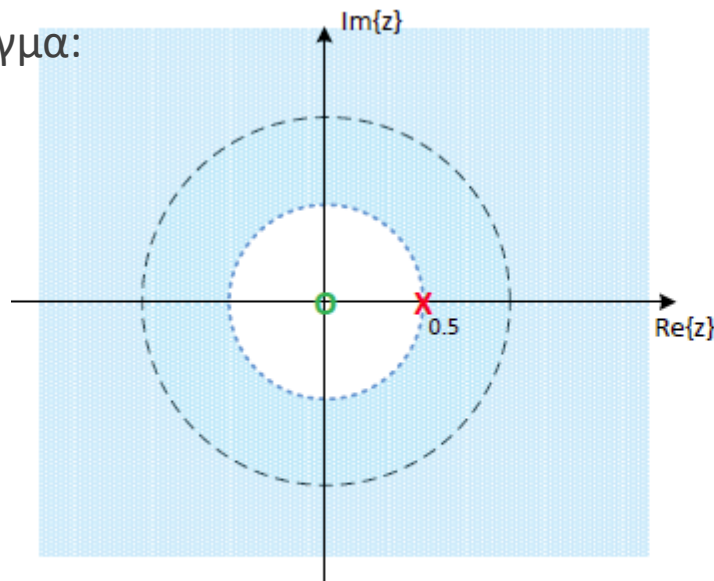
$$\begin{aligned} \text{Είναι } X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a z^{-1})^n = \frac{1}{1 - a z^{-1}}, \quad |a z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |a| < |z| \Leftrightarrow \boxed{|z| > |a|} \\ &\hspace{15em} \text{Πεδίο Σιγκλιαν} \end{aligned}$$

Άρα

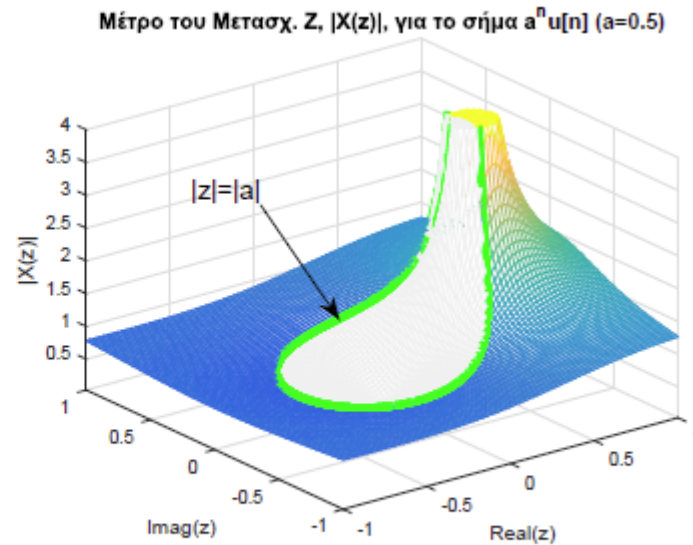
$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

Για $a = \frac{1}{2}$, δείξε το επόμενο slide.

• Παράδειγμα:



(α) Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$



(β') Μέτρο μετασχ. Z.

Ο αριθμός $|a| = \frac{1}{2}$ αναφέρεται πόλος του Μετασχ. Z.



$$|X(z)| \rightarrow +\infty$$

Στο παράδειγμά μας, $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$: $1-az^{-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{z} = 1 \Rightarrow \boxed{z=a}$
 Πόλος

Μηδενικό: $X(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \Rightarrow \boxed{z=0}$ Μηδενικό

X

- Παράδειγμα:

- Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$, $a \in \mathbb{R}$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-a^n u[-n-1]) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-a^n) z^{-n}$$

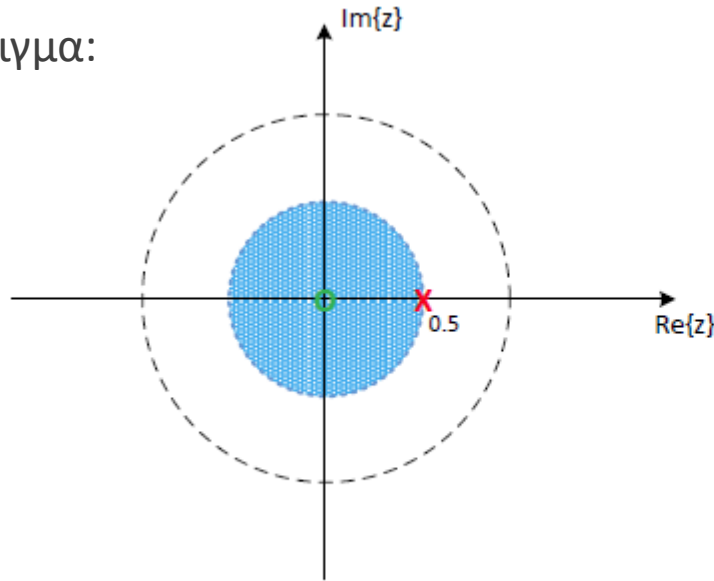
$$= - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n = - \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(a^{-1}z)^n} =$$

$$= - \frac{a^{-1}z}{1 - a^{-1}z}, \text{ όταν } \left| \frac{z}{a} \right| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|; \text{ Πεδίο Σύγκλισης}$$

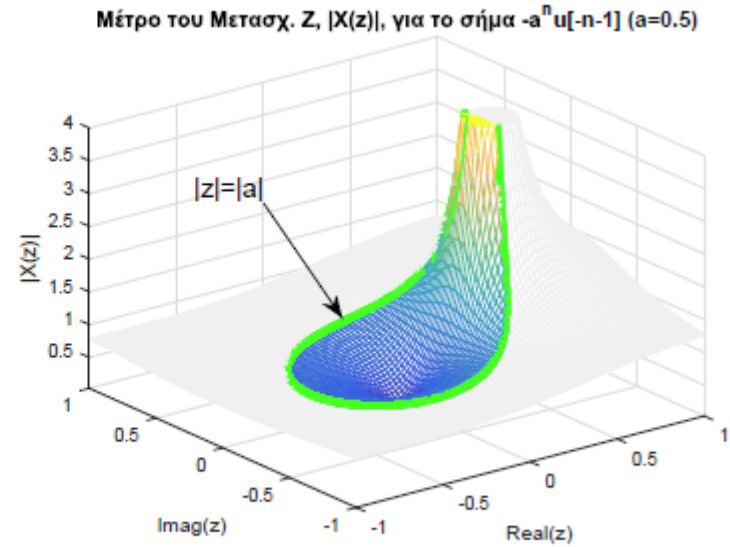
Είναι $X(z) = - \frac{a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, |z| < |a|.$

Για $a = \frac{1}{2}$, έχουμε:

• Παράδειγμα:



(α) Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$



(β) Μέτρο μετασχ. Z για $a = 0.5$

Πόλοι: $X(z) = \frac{z}{z-a} \Rightarrow z-a=0 \Rightarrow \boxed{z=a}$ Πόλος

Μηδενικά: $X(z) = \frac{z}{z-a} \Rightarrow \boxed{z=0}$ Μηδενικά

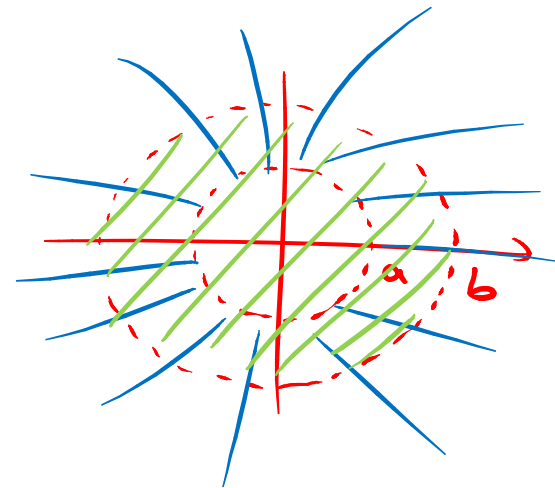
• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n] - b^n u[-n - 1]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a^n u[n] - b^n u[-n-1]) z^{-n}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}} - \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n}}$$



$$= \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{1-bz^{-1} + 1-az^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}$$

$|z| > |a|$

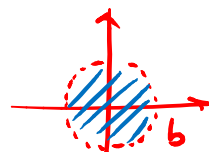
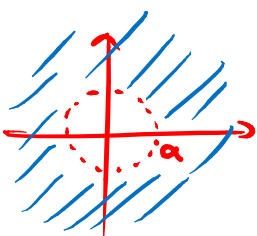
$$= \frac{2 - (a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}$$

$|z| < |b|$

, όταν $|a| < |b|$

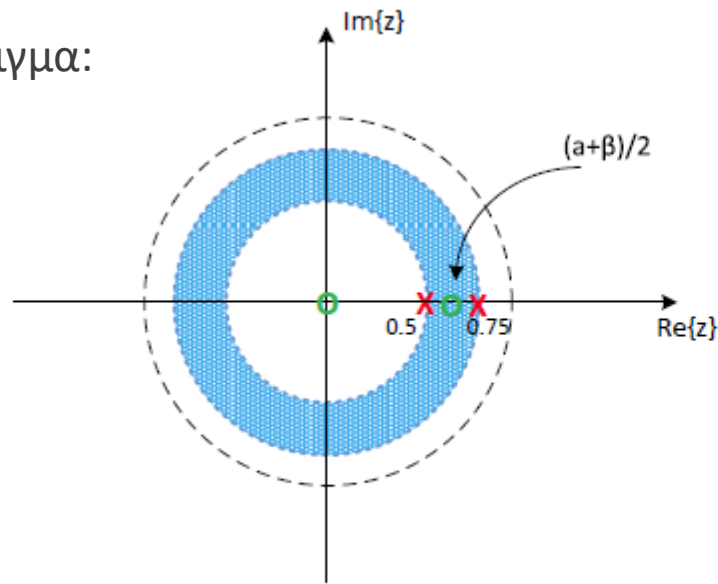
Πεδίο Συσχέτισης:

$$|a| < |z| < |b|$$

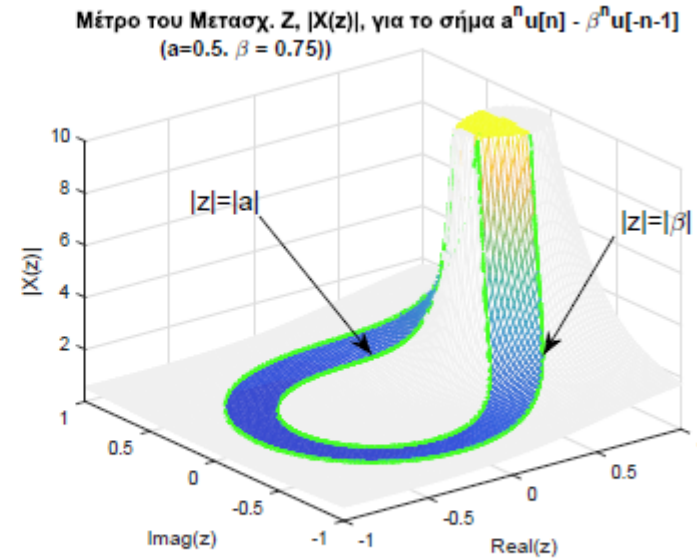


↪ Αν $|b| < |a|$, τότε δεν ορίζεται ο Μετ. Z.

• Παράδειγμα:



(α) Πεδίο σύγκλισης, με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.



(β) Μέτρο μετασχ. Z με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.

Πόλοι:
$$X(z) = \frac{2 - (a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} = \frac{2z^2 - (a+b)z}{(z-a)(z-b)} = \frac{z(2z - (a+b))}{(z-a)(z-b)}$$

$$(z-a)(z-b) = 0 \Rightarrow z = a, z = b$$

Μηδενικά:
$$z(2z - (a+b)) = 0 \Rightarrow z = 0, z = \frac{a+b}{2}$$

- Παράδειγμα:

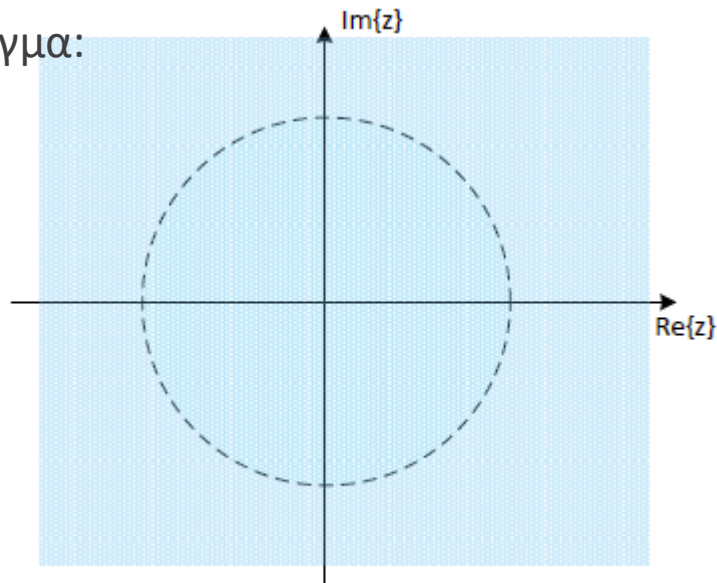
- Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n]$

$$\text{Είναι } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} \quad \left. \vphantom{\sum} \right\} = \delta[0] \cdot z^{-0} = 1$$

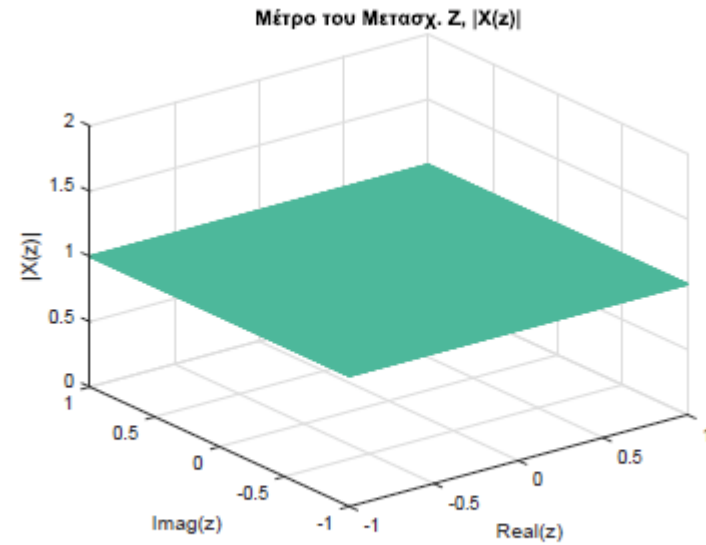
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } x[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = 1, \quad \forall z$$

- Παράδειγμα:



(α') Πεδίο σύγκλισης.

(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n]$.

Πόλοι και μηδενικά δεν υπάρχουν.

- Παράδειγμα:

- Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0] z^{-n} \quad \left. \vphantom{\sum} \right\} = \delta[n_0] z^{-n_0} = z^{-n_0}$$

$$\delta[n - n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

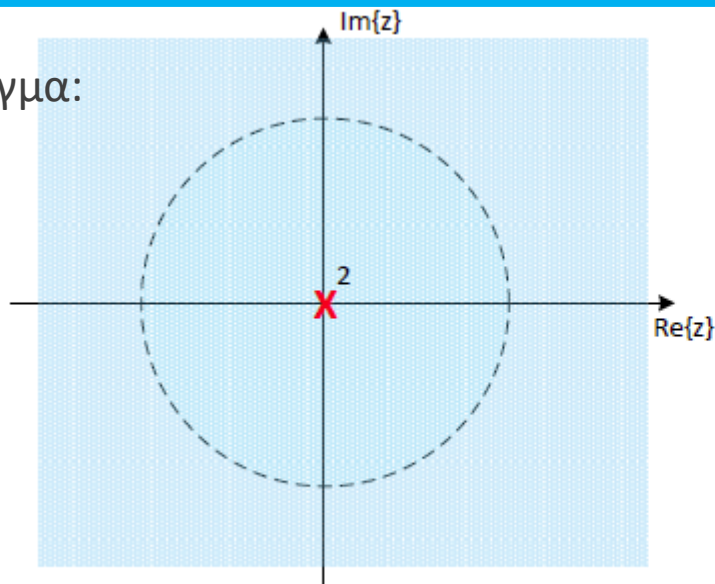
Άρα

$$x[n] = \delta[n - n_0] \xrightarrow{Z} X(z) = z^{-n_0} = \frac{1}{z^{n_0}}$$

Π.χ. για $n_0 = 2$, $X(z) = \frac{1}{z^2} = z^{-2}$

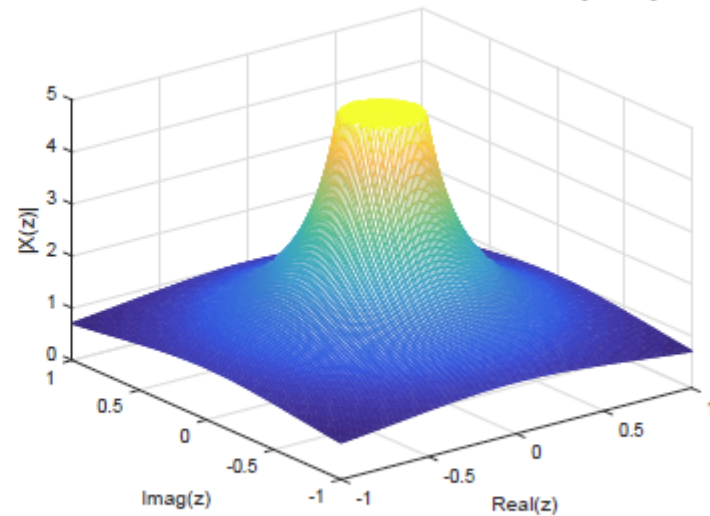
$n_0 = -2$, $X(z) = z^2$

• Παράδειγμα:

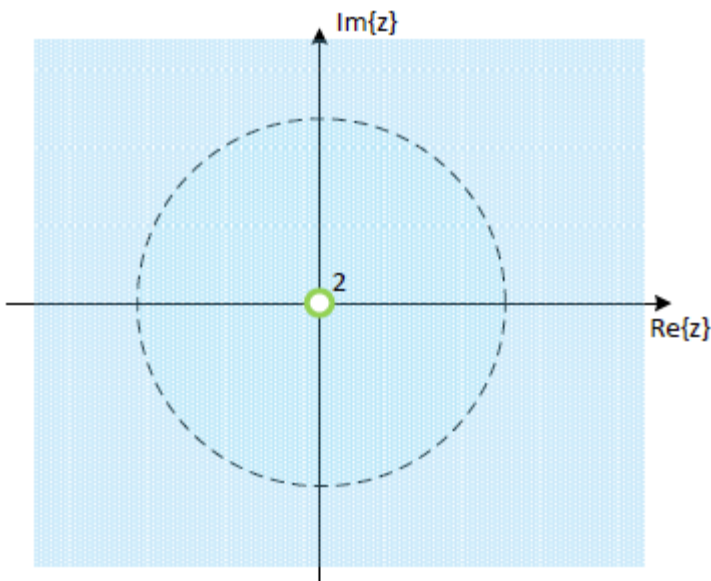


(α') Πεδίο σύγκλισης.

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$, για το σήμα $x[n] = \delta[n-n_0]$, με $n_0 = 2$

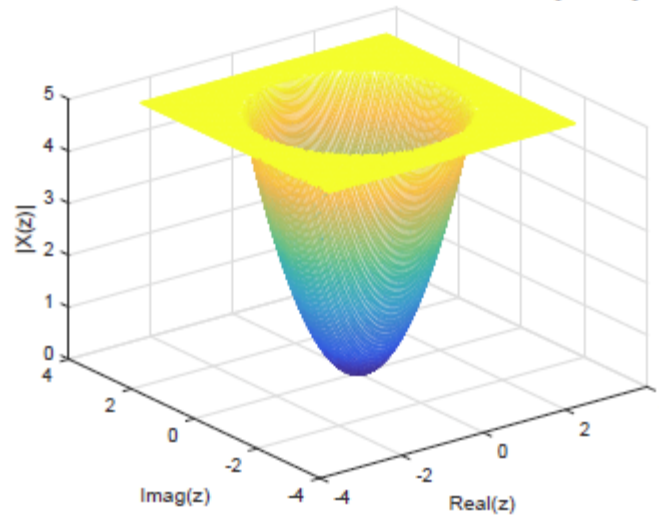


(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$, για $n_0 = 2$.



(α') Πεδίο σύγκλισης.

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$, του σήματος $x[n] = \delta[n-n_0]$, για $n_0 = -2$



(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$, για $n_0 = -2$.

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

- Είναι προφανές πως αν $z = e^{j\omega}$, τότε

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

- Εκτιμούμε το μετασχ. Z επάνω στο μοναδιαίο κύκλο
- Για παράδειγμα: $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- Μπορούμε πάντα να το κάνουμε αυτό?
 - ΌΧΙ!
 - Πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z!

- Αντιπαράδειγμα: $x[n] = u[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}, \quad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1 \quad \text{⚡}$$

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

- Παράδειγμα:

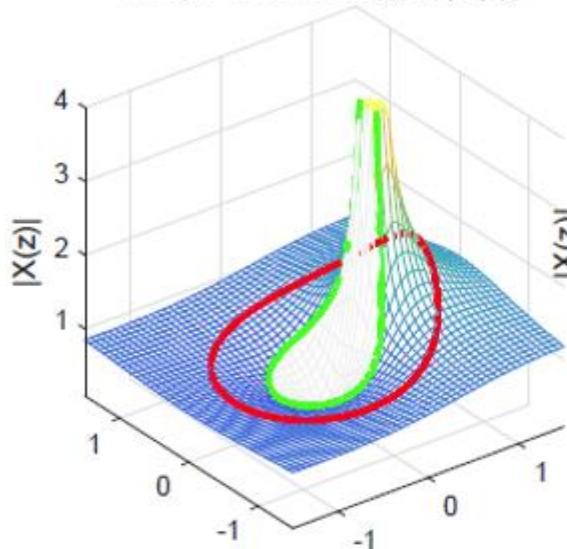
- Βρείτε τους μετασχ. Z και Fourier του σήματος $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$

Είναι
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}, \quad |a| < 1$$

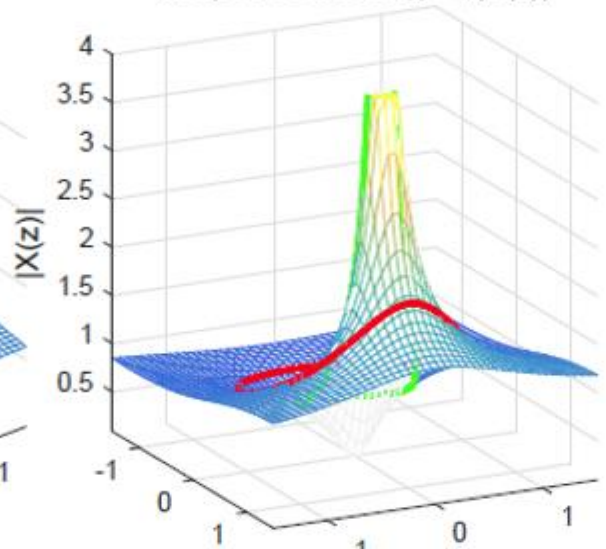
$$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}, \quad |z| > |a|, \quad |a| < 1$$

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

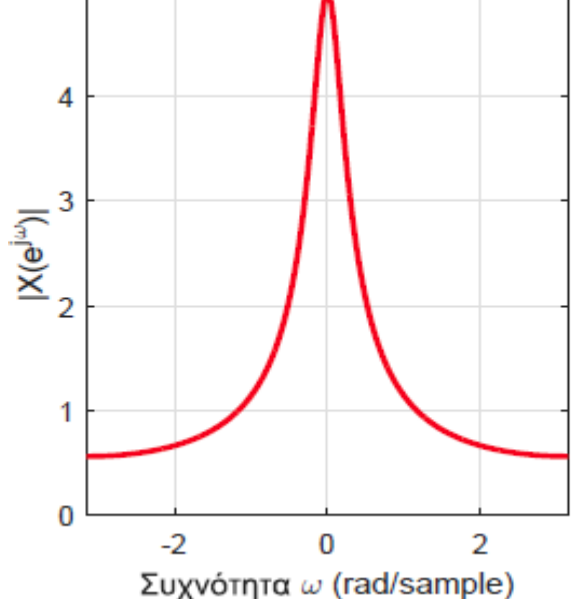
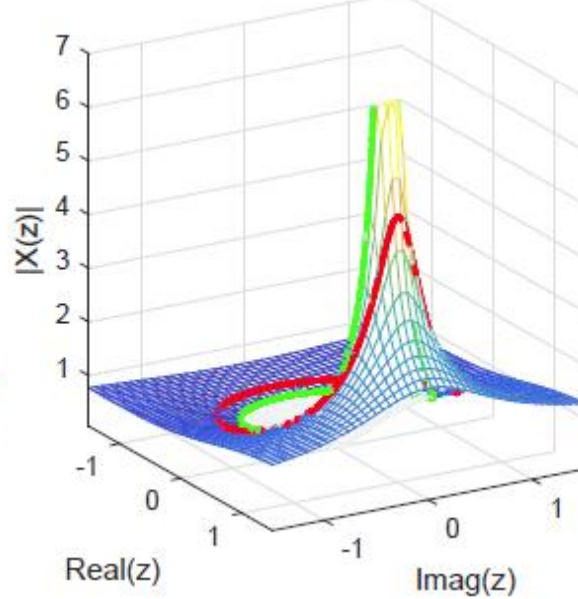
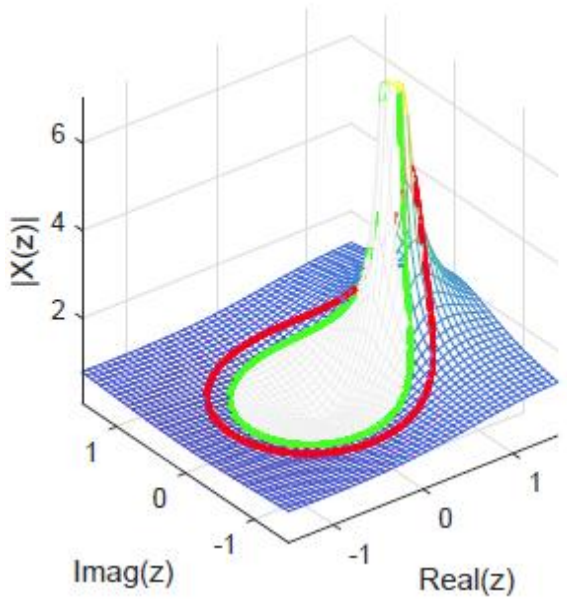
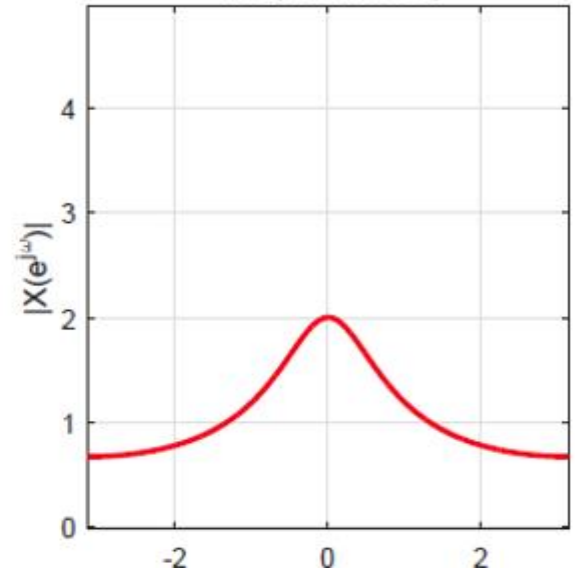
Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$



Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$

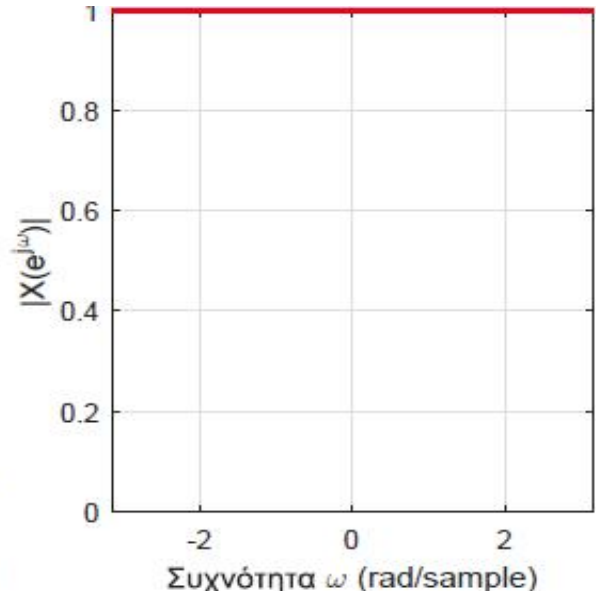
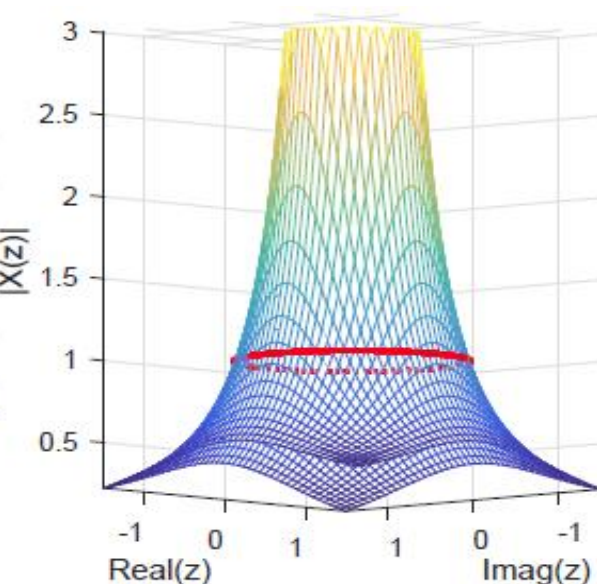
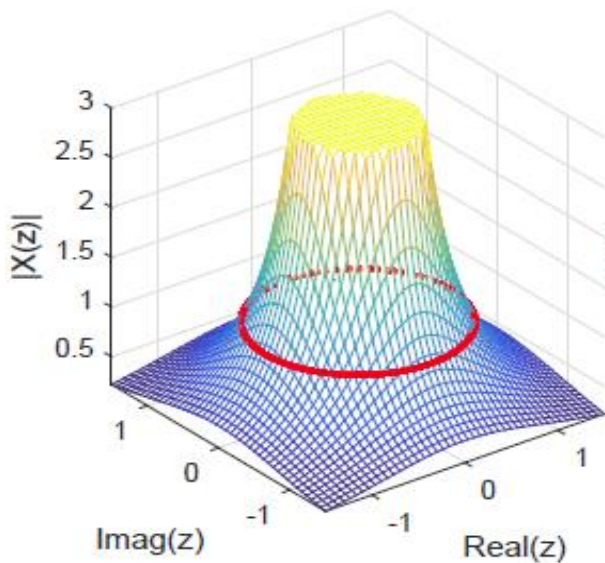
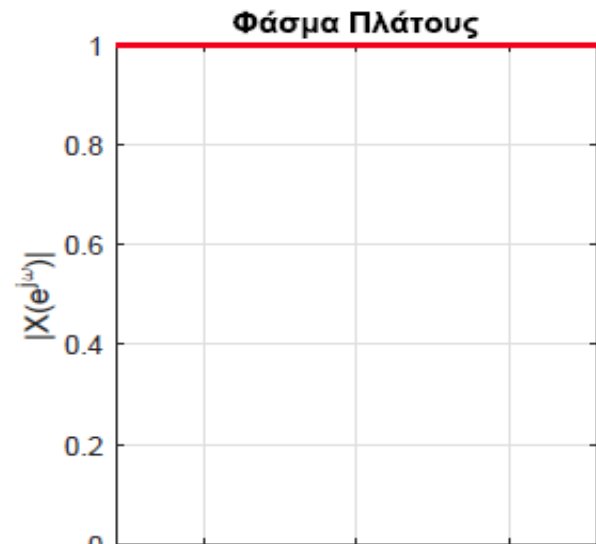
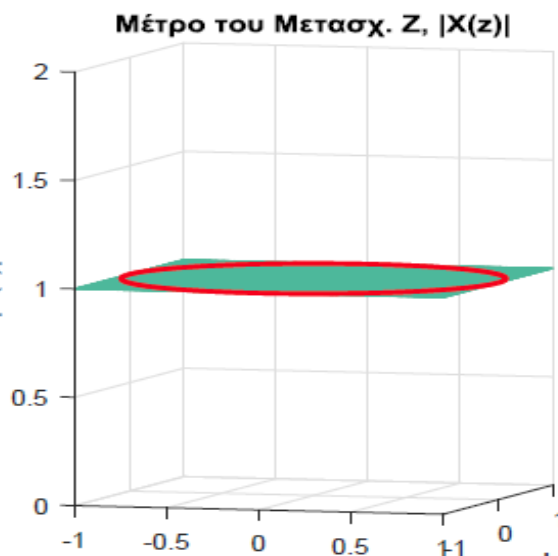
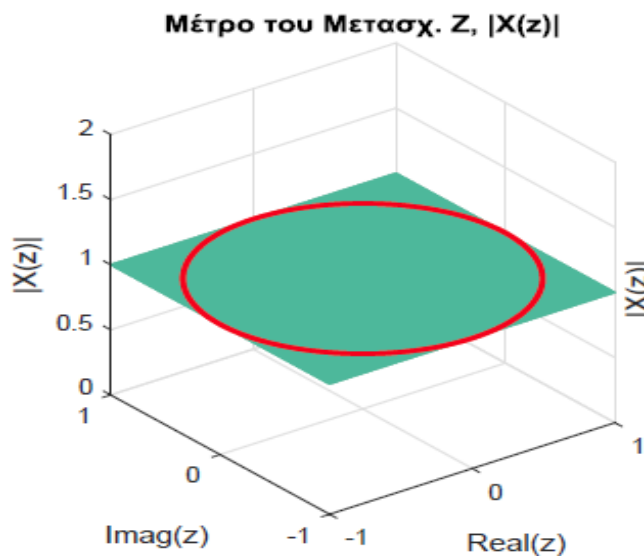


Φάσμα Πλάτους



• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

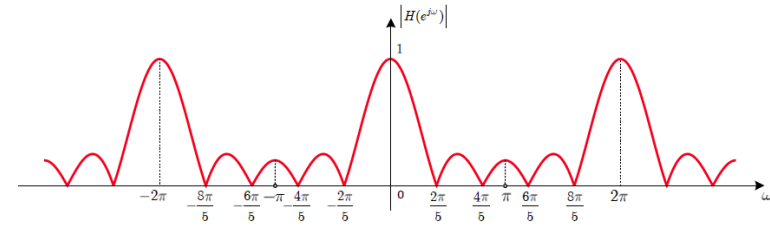
- Τι περιμένετε να δείτε για τα σήματα $x[n] = \delta[n]$, $x[n] = \delta[n - 2]$?



• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

• Παράδειγμα:

○ Μελετήστε τι συμβαίνει στο σήμα



$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_2 + 1}, & 0 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

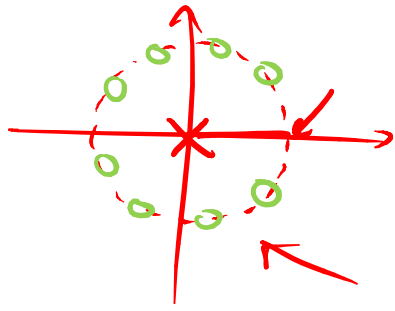
Είναι $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2 + 1} z^{-n} = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{n=0}^{M_2} z^{-n}$

$$= \frac{1}{M_2 + 1} \cdot \frac{1 - (z^{-1})^{M_2 + 1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{M_2 + 1} \cdot \frac{z^{M_2 + 1} - 1}{z^{M_2 + 1} - z^{M_2}}$$

$$= \frac{1}{M_2 + 1} \cdot \frac{1}{z^{M_2}} \cdot \frac{z^{M_2 + 1} - 1}{z - 1} \rightarrow M_2 + 1 \text{ μηδενικά } z = e^{j \frac{2\pi k}{M_2 + 1}}, k = 0, \dots, M_2$$

M_2 πόλεις
 $z = 0$

$z = 1$
πόλεις

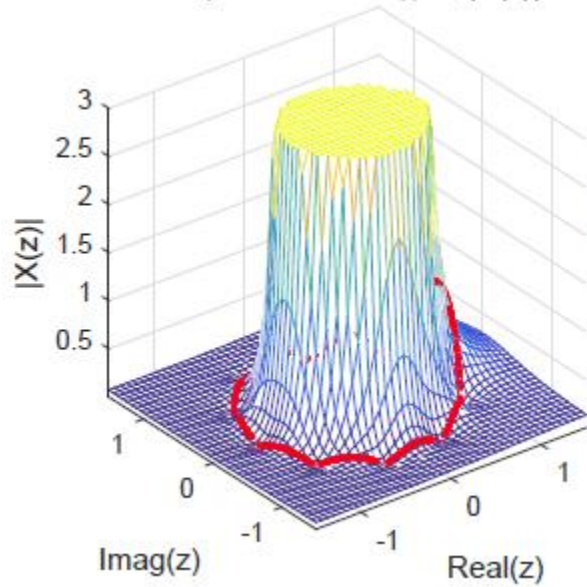


$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}$$

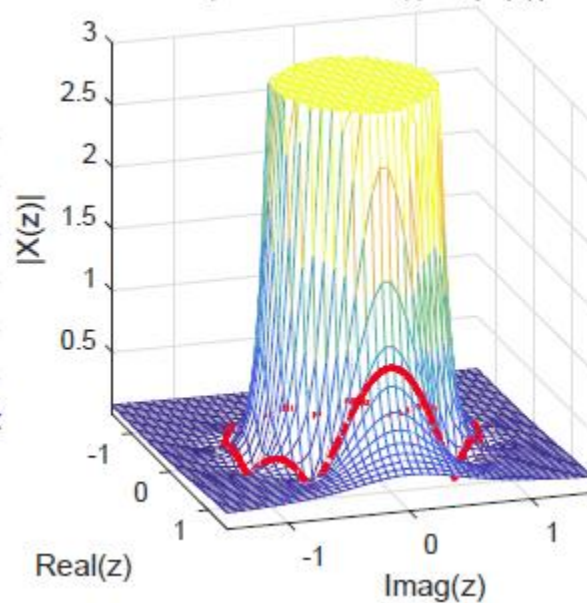
• **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**

- Παράδειγμα:

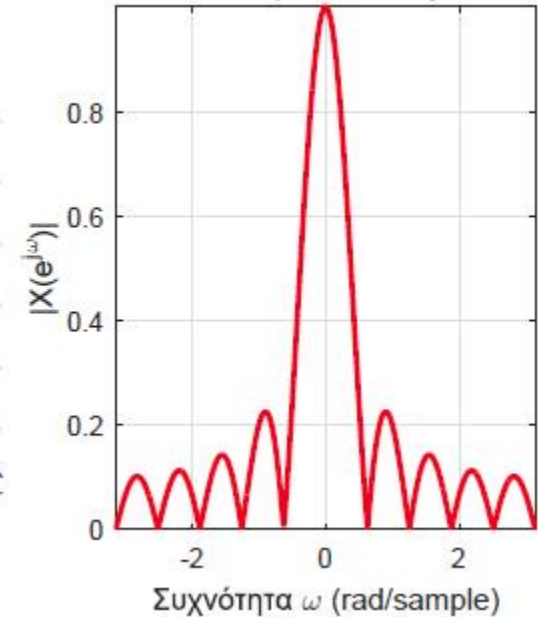
Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$



Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$



Φάσμα Πλάτους



• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

Σχέση Μετασχ. Z και Μετασχ. Fourier

- (α') Ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ ενός σήματος $x[n]$ μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Z $X(z)$ αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.
- (β') Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια κάθετη “φέτα” της επιφάνειας του μετασχ. Z στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας $|z| = 1$.
- (γ') Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά “φέτες” των διδιάστατων συναρτήσεων $|X(z)|$ και $\phi(z)$ επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

• Ιδιότητες Μετασχ. Z

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Z	Πεδίο Σύγκλισης
	$x[n]$	$X(z)$	R_x
	$y[n]$	$Y(z)$	R_y
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n - n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το R_x
Στάθμιση στο χώρο Z	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγωγή στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το R_x
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{ z > 0\}\}$
Άθροιση στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{ z > 1\}\}$
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0]$	
Θεώρημα Τελικής Τιμής	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$	

• Ιδιότητες Μετασχ. Z

- Γραμμικότητα: Βρείτε τον μετασχ. Z του σήματος

$$W(z) = X(z) + Y(z)$$

με

$$X(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad Y(z) = -\frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \quad |z| > 1/2$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } W(z) &= X(z) + Y(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \\ &= \frac{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} - \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \\ &= \frac{\cancel{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}}{\cancel{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \text{ πόλος στο } z = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$R_w \supseteq R_x \cap R_y = \left\{ |z| > \frac{1}{2} \right\} \cap \left\{ |z| > \frac{1}{2} \right\} = \left\{ |z| > \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{Άρα } R_w = \left\{ |z| > \frac{1}{3} \right\}$$

• Ιδιότητες Μετασχ. Z

- Μετατόπιση στο χρόνο: Έστω το σήμα $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2]$. Υπολογίστε το Μετασχ. Z του.

$$\text{Είναι } x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2]}_{y[n+2]}$$

$$\text{Γε } y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{3}$$

$$= 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2] \xleftrightarrow{Z} X(z) = 9 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} z^2$$

$$R_y : \left\{ |z| > \frac{1}{3} \right\}$$

$$X(z) = 9 \frac{z^2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = 9 \frac{z^2}{1 - \frac{1}{3z}}$$

$$R_x : \left\{ \frac{1}{3} < |z| < +\infty \right\}$$

$z \rightarrow \infty, X(z) \rightarrow \infty$: υπάρχει πόλος στο $z = \infty$

• Ιδιότητες Μετασχ. Z

- Συζυγία στο χρόνο: Έστω ένα σήμα $x[n] \in \mathbb{R}$ με ρητό μετασχ. Z που έχει

- Ακριβώς δυο πόλους, με τον έναν στη θέση $z = \exp\left(-\frac{j\pi}{8}\right)$

- Ακριβώς δυο μηδενικά, με το ένα στη θέση $z = \sqrt{2} \exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)$

Βρείτε μια μορφή για το $X(z)$

$$\text{Αφού } x[n] \in \mathbb{R} \Rightarrow x[n] = x^*[n] \Rightarrow X(z) = X^*(z^*)$$

Από την τριγωνική σχέση:

$$\left. \begin{array}{l} X(z_0) = 0 \Rightarrow X^*(z_0^*) = 0 \\ X(z_0) = \infty \Rightarrow X^*(z_0^*) = \infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} z_0 \text{ είναι πόλος ή μηδενικό τότε} \\ z_0^* \text{ ————— } \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Από εμφάνιση, } z_1 = e^{-j\frac{\pi}{8}} &\Rightarrow z_2 = z_1^* = e^{j\frac{\pi}{8}} \\ z_3 = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} &\Rightarrow z_4 = z_3^* = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Άρα

$$X(z) = A \frac{(z - \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}})(z - \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}})}{(z - e^{-j\frac{\pi}{8}})(z - e^{j\frac{\pi}{8}})}$$

Αν $x[n] \in \mathbb{R}$,
τότε οι πόλοι και
τα μηδενικά του $X(z)$
είναι συζυγή.

• Ιδιότητες Μετασχ. Z

- Συνέλιξη στο χρόνο: Έστω τα σήματα $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, $y[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. Βρείτε τη συνέλιξή τους

$$1^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } c[n] = x[n] * y[n] = \dots$$

$$2^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } C(z) = X(z)Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} =$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{|z| > \frac{1}{2}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{|z| > \frac{1}{4}}$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$A = C(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$B = C(z)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=-4} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=-4} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

- Ιδιότητες Μετασχ. Z

- Συνέλιξη στο χρόνο:

$$\text{Άρα } C(z) = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$$

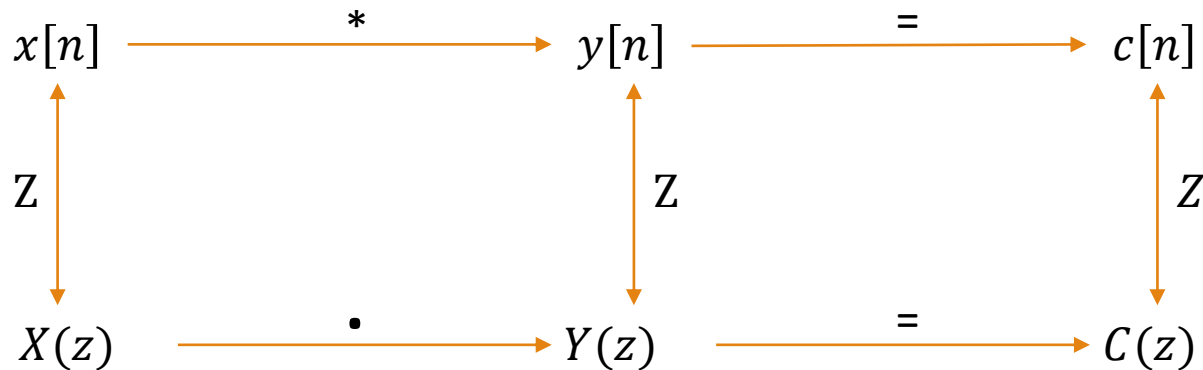
$$R_c \supseteq R_x \cap R_y = \left\{ |z| > \frac{1}{2} \right\}$$

Από Πινακούς, έχω ε :

$$c[n] = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

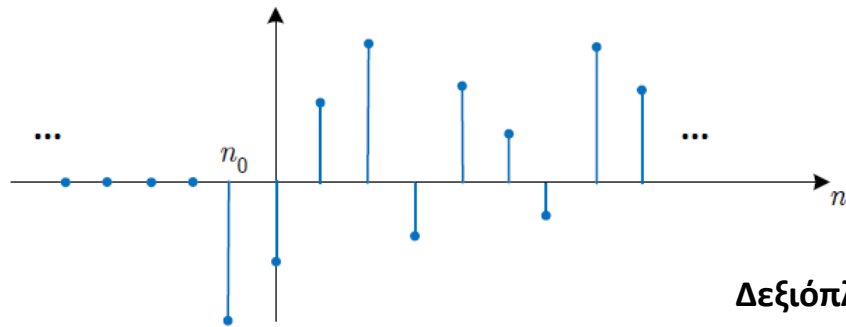
• Ιδιότητες Μετασχ. Z

- Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις ιδιότητες του Μετ. Z είναι:



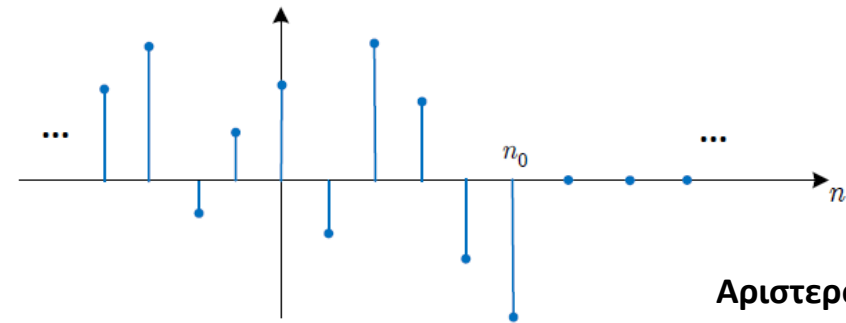
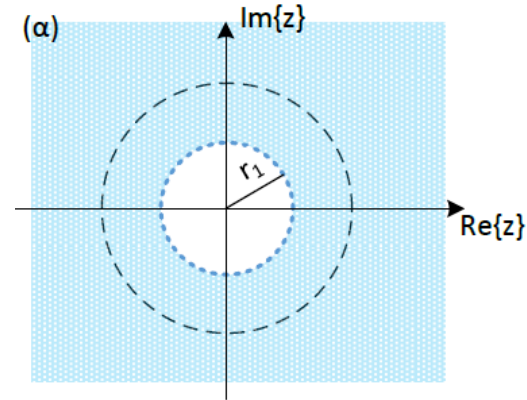
- Θα θυμάστε παρόμοια διαδικασία από τον DTFT
 - Μόνο που τώρα καλύπτουμε μεγαλύτερη «γκάμα» σημάτων ☺
 - Ξανά, αυτή η διαδικασία θα έχει πολύ μεγάλη χρησιμότητα στη μελέτη των συστημάτων που θα ακολουθήσει

• Κατηγορίες σημάτων και Περιοχή Σύγκλισης



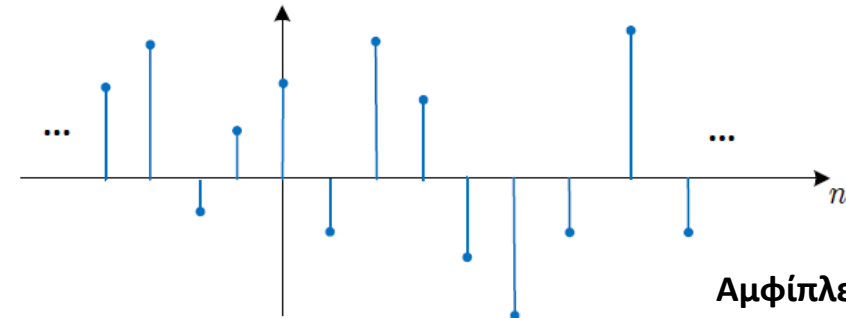
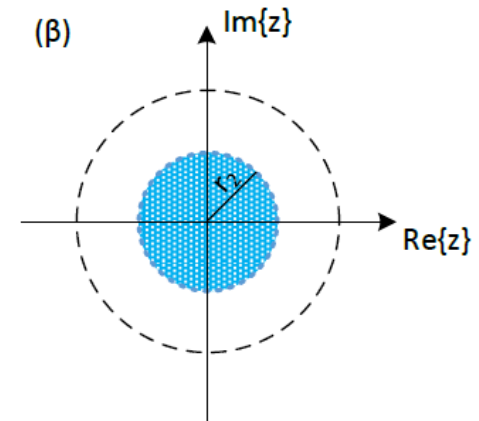
$$x[n] = 0, \\ n < n_0$$

Δεξιόπλευρο → Εξωστρεφές ROC

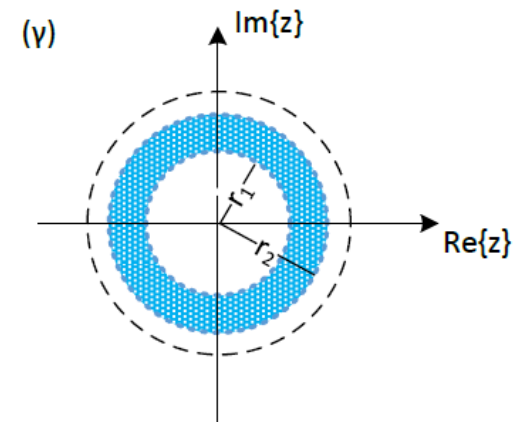


$$x[n] = 0, \\ n > n_0$$

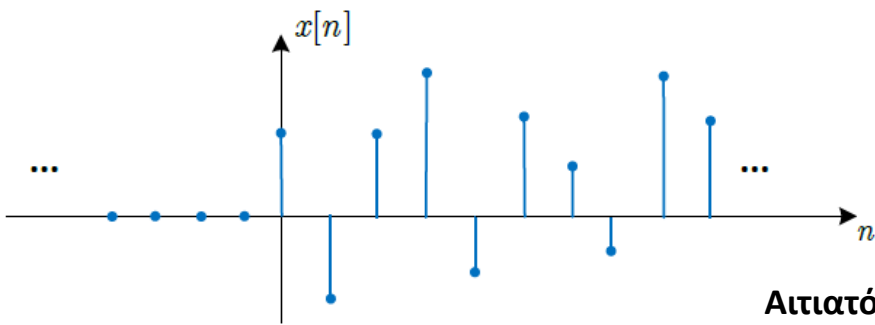
Αριστερόπλευρο → Εσωστρεφές ROC



Αμφίπλευρο → Δακτυλιοειδές ROC

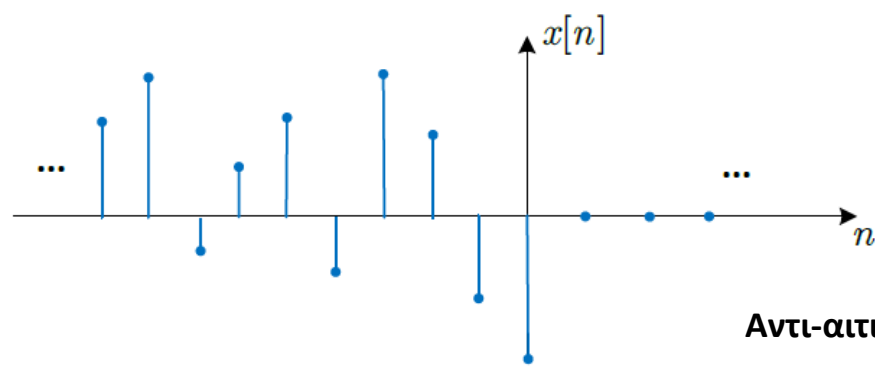
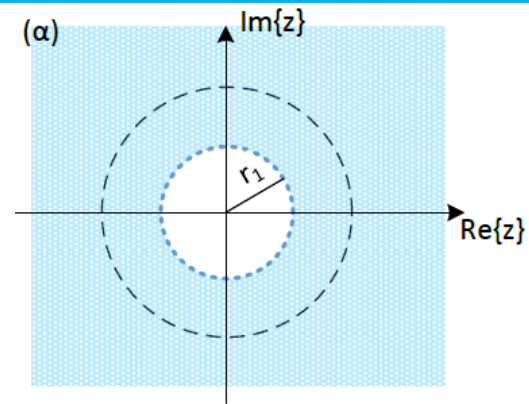


• Κατηγορίες σημάτων και Περιοχή Σύγκλισης



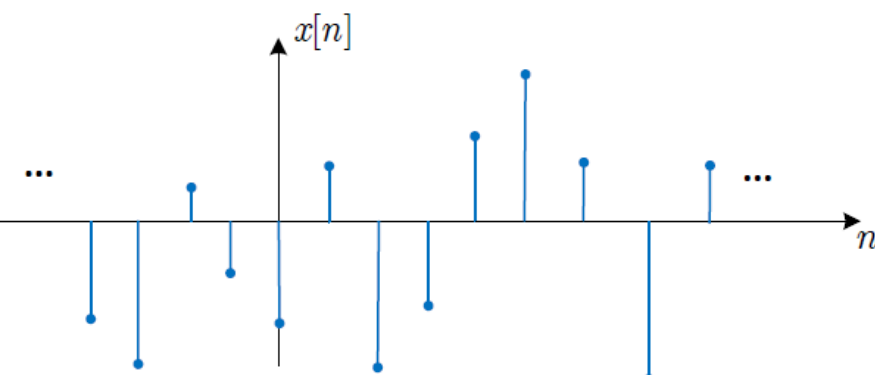
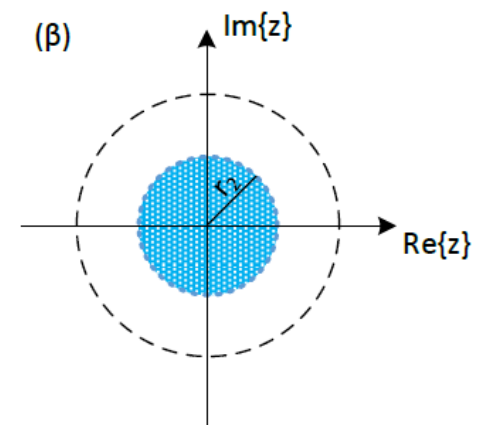
$$x[n] = 0, n < 0$$

Αιτιατό → Εξωστρεφές ROC

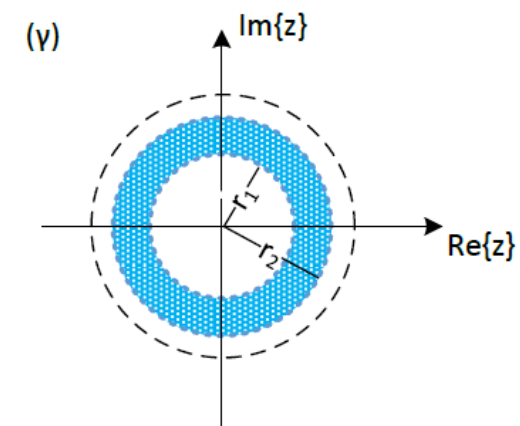


$$x[n] = 0, n > 0$$

Αντι-αιτιατό → Εσωστρεφές ROC



Μη αιτιατό → Δακτυλιοειδές ROC



• Ζεύγη Μετασχηματισμών Z

Πίνακας Μετασχηματισμών Z			
Σήμα	Μετ. Z	ROC	Κατηγορία σήματος
$\delta[n]$	1	όλο το z	αιτιατό
$\delta[n - n_0], n_0 > 0$	z^{-n_0}	$z \neq 0$	αιτιατό
$\delta[n + n_0], n_0 > 0$	z^{n_0}	$z \neq \infty$	αντι-αιτιατό
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$	αιτιατό
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$	αντι-αιτιατό
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $	αιτιατό
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $	αντι-αιτιατό
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z > 1$	αιτιατό
$-nu[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z < 1$	αντι-αιτιατό
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $	αιτιατό
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $	αντι-αιτιατό
$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$	αιτιατό
$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$	αιτιατό
$a^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $	αιτιατό
$a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $	αιτιατό

• Ιδιότητες Πεδίου Σύγκλισης (ROC)

1. Το ROC μπορεί να είναι α) ένας δακτύλιος, β) μια περιοχή εκτός ενός κυκλικού δίσκου, γ) ένας κυκλικός δίσκος
2. Το ROC **δεν** πρέπει να περιέχει πόλους!
3. Το ROC πρέπει να είναι μια συνεκτική περιοχή του μιγαδικού επιπέδου.
4. Αν το σήμα έχει πεπερασμένη διάρκεια στο χρόνο, τότε το ROC περιλαμβάνει όλο το μιγαδικό επίπεδο, πλην ίσως των σημείων $z = 0$ ή $z = \infty$
5. Αν το σήμα είναι δεξιόπλευρο, τότε το ROC του είναι εξωστρεφές, δηλ. της μορφής $|z| > \max|p_k|$, με p_k τους πόλους του σήματος
 - a) Το $z = \infty$ δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα δεν είναι αιτιατό
 - b) Το $z = \infty$ περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα είναι αιτιατό
6. Αν το σήμα είναι αριστερόπλευρο, τότε το ROC του είναι εσωστρεφές, δηλ. της μορφής $|z| < \min|p_k|$, με p_k τους πόλους του σήματος
 - a) Το $z = 0$ δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα δεν είναι αντι-αιτιατό
 - b) Το $z = 0$ περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα είναι αντι-αιτιατό
7. Αν το σήμα είναι αμφίπλευρο, τότε το ROC του είναι ένας δακτύλιος, δηλ. της μορφής $|p_i| < |z| < |p_j|$, με p_i, p_j δυο πόλους του σήματος με $|p_i| < |p_j|$
 - Πρέπει ασφαλώς να ικανοποιείται η ιδιότητα 2.

• Ιδιότητες Πεδίου Σύγκλισης (ROC)

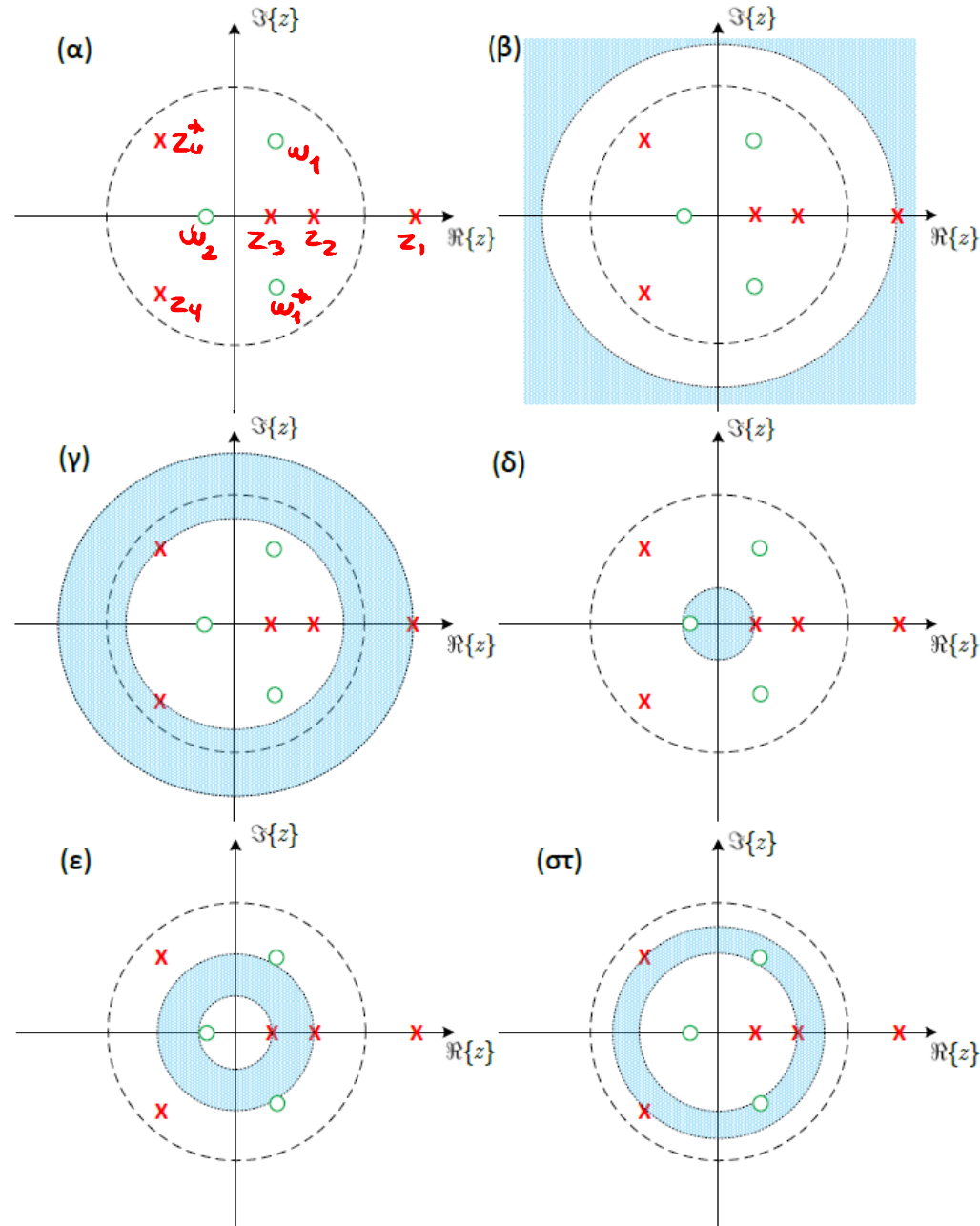
$$|z| > |z_1|$$

$$|z| < |z_3|$$

$$|z_3| < |z| < |z_2|$$

$$|z_2| < |z| < |z_4|$$

$$|z_4| < |z| < |z_1|$$



• Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

- Γνωρίζουμε ήδη (διαισθητικά) τη σημασία των πόλων και των μηδενικών στο μετασχ. Z
- Η αναπαράσταση των πόλων και μηδενικών στο μιγαδικό επίπεδο συνιστά το **περίφημο διάγραμμα πόλων-μηδενικών**
- Ας μιλήσουμε λίγο περισσότερο για αυτό το διάγραμμα

- Έστω ότι έχουμε ένα ρητό μετασχ. Z

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}$$

- Παραγοντοποιώντας

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{\prod_{l=1}^N (z - \psi_l)}$$

- Προφανώς, τα ξ_k, ψ_l είναι τα μηδενικά και οι πόλοι αντίστοιχα
 - Είναι εμφανές ότι υπάρχουν M μηδενικά και N πόλοι
- Όμως υπάρχει και ο όρος z^{N-M} ! Ας τον δούμε...

• Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{\prod_{l=1}^N (z - \psi_l)}$$

- Αν $N > M$ τότε υπάρχουν επιπλέον $N-M$ μηδενικά στο $z = 0$
- Αν $N < M$ τότε υπάρχουν επιπλέον $M-N$ πόλοι στο $z = 0$
- Άρα βλέπετε ότι κάθε ρητός μετασχ. Z έχει τον **ίδιο αριθμό πόλων και μηδενικών!**

• Αν τώρα

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} \frac{\prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{\prod_{l=1}^N (z - \psi_l)} = \frac{a_0}{b_0} z^{M-N} \frac{\prod_{k=1}^M \left(1 - \frac{\xi_k}{z}\right)}{\prod_{l=1}^N \left(1 - \frac{\psi_l}{z}\right)}$$

τότε

- Αν $N > M$, τότε $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 0$, οπότε υπάρχουν επιπλέον $N-M$ μηδενικά στο $z = \infty$
- Αν $N < M$, τότε $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \infty$, οπότε υπάρχουν επιπλέον $M-N$ πόλοι στο $z = \infty$

• Ξανά, όσοι πόλοι, τόσα μηδενικά!

• Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

• Παράδειγμα:

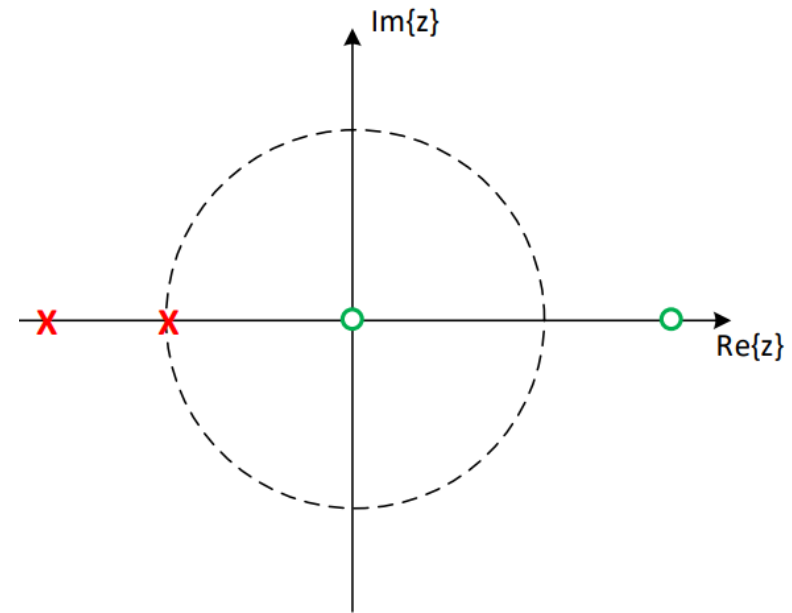
○ Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

Είναι
$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^2 - 2z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z(z-2)}{(z+2)(z+1)}$$

Μηδενικά : $z=0, z=2$

Πόλους : $z=-2, z=-1$



• Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

• Παράδειγμα:

○ Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού

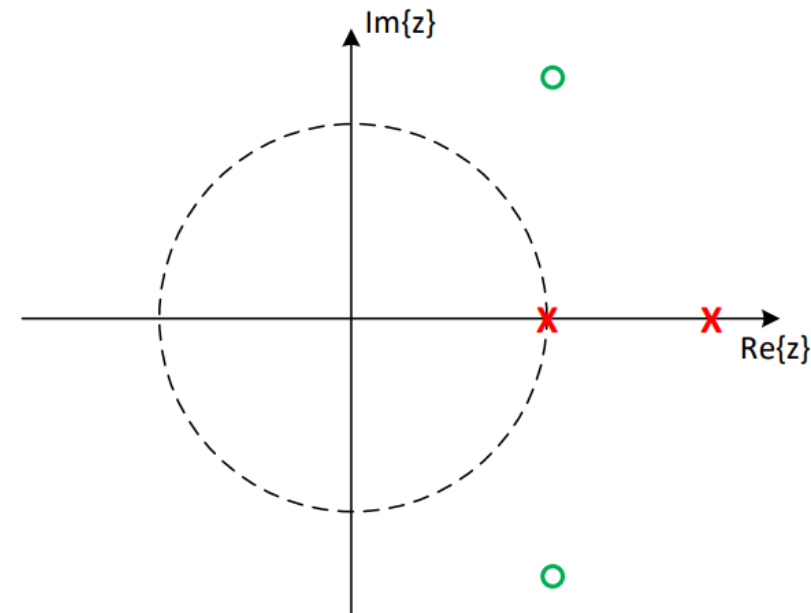
$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

$$\text{Είναι } X(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^2 - 2z + 3}{z^2 - 3z + 2} =$$

$$= \frac{(z - z_1)(z - z_1^*)}{(z - 2)(z - 1)}, \text{ με } z_1 = 1 + j\sqrt{2}$$

Μηδενικά: $z = z_1, z = z_1^*$

Πόλα: $z = 2, z = 1$



• Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

• Παράδειγμα:

○ Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού

$$X(z) = \frac{z^2 - 3z}{z + 1}$$

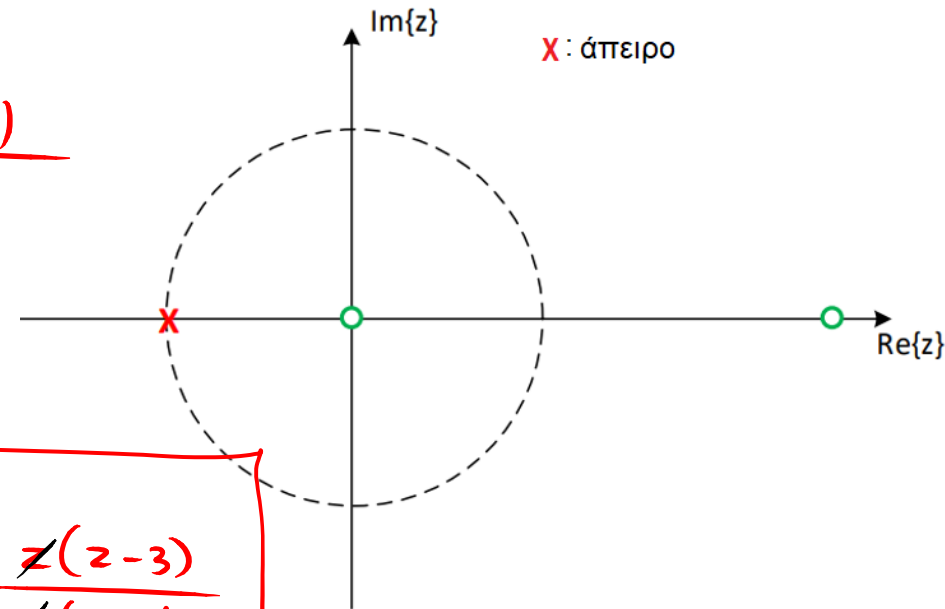
Είναι $X(z) = \frac{z^2 - 3z}{z + 1} = \frac{z(z-3)}{z+1}$

Μηδενικά: $z = 0, z = 3$

Πόλοι: $z = -1, z = \infty$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 - 3z}{z + 1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(z-3)}{z(1 + \frac{1}{z})}$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-3}{1 + \frac{1}{z}} = \infty$$



• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

- Ορισμός:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

- Στα πλαίσια των σημάτων και συστημάτων χρησιμοποιούνται εναλλακτικά τρεις τρόποι υπολογισμού του αντιστρόφου

1. Το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρές
2. Τη μακρά διαίρεση
3. Το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

Θα επικεντρωθούμε μόνο στον τελευταίο, καθώς σχετίζεται στενά με τα ΓΧΑ συστήματα και την ιδιότητα της συνέλιξης

• Ανάπτυγμα σε Δυναμοσειρές

- Δυναμοσειρά:

$$X(z) = \sum a_n z^{-n}$$

- Προσπαθούμε να αναπτύξουμε το Μετ. Z όπως παραπάνω, με a_n μια ακολουθία
- Η δυναμοσειρά πρέπει να συγκλίνει εντός της περιοχής σύγκλισης του μετ. Z
- Όμοιος ορισμός με μετασχ. Z
- Μοναδικότητα αναπτύγματος σε δυναμοσειρά

$$a_n = x[n] \quad \forall n$$

- Παράδειγμα: Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Z του $X(z) = \ln(1 + az^{-1})$, $|z| > |a|$

Ξέρουμε $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

Θέτουμε $x = az^{-1}$, έχουμε $\ln(1+az^{-1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (az^{-1})^n =$
 $= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n u[n-1] z^n$. Άρα $x[n] = \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n u[n-1]$.

• Μακρά Διαίρεση

○ Παράδειγμα: Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Z του $X(z) = \frac{2+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, $|z| > \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|l}
 2 + z^{-1} & 1 - \frac{1}{2} z^{-1} \\
 \hline
 -(2 - z^{-1}) & 2 + 2z^{-1} + z^{-2} + \dots \\
 \hline
 0 + 2z^{-1} & \\
 -(2z^{-1} - z^{-2}) & \\
 \hline
 0 + z^{-2} & \\
 \vdots &
 \end{array}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{2+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = 2 + 2z^{-1} + z^{-2} + \dots \quad \leftarrow z^{-1}$$

$$x[n] = 2\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots$$

- Ο Μετασχ. Z είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο αναπαράστασης σημάτων
- Η εμπειρία σας ως τώρα ίσως σας έχει αποκαλύψει τη χρήση του για ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων...
 - ...μέσω της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο \rightarrow γινόμενο στο χώρο του Z
- Ας «πλεύσουμε» στο χώρο των συστημάτων με τον ίδιο τρόπο που κάναμε και στο Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου
- Ξεκινάμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης και ιδιοτιμής!
 - Μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι το σήμα $x[n] = z^{-n}$ αποτελεί ιδιοσυνάρτηση ενός ΓΧΑ συστήματος
 - Η ιδιοτιμή του δίνεται από την εξίσωση

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

η οποία βλέπετε ότι αποτελεί το Μετασχ. Z της κρουστικής απόκρισης του ΓΧΑ συστήματος

- Ο μετασχ. Z της κρουστικής απόκρισης

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

δε θα μπορούσε να μην έχει κι αυτός το δικό του όνομα: **συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)**

- Θα θυμάστε ίσως ότι τα ΓΧΑ συστήματα κατηγοριοποιούνται ανάλογα με τη διάρκεια της κρουστικής τους απόκρισης:
 - Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR)
 - Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR)

• FIR συστήματα

- Περιγράφονται από την κρουστική απόκριση

$$h[n] = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k \delta[n - k]$$

- Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται ως

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^{-k}$$

- Βλέπετε ότι αποτελείται από θετικές και αρνητικές δυνάμεις του z
- Μπορούμε να το γράψουμε ως

$$H(z) = \frac{1}{z^{N_2}} \sum_{k=0}^{N_1+N_2} b_{k-N_1} z^{N_1+N_2-k} = \frac{b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Παρατηρήστε ότι έχει N_2 πόλους στο $z = 0$ και N_1 πόλους στο άπειρο
 - ROC: $\{0 < |z| < \infty\}$
- Επίσης έχει $N_1 + N_2$ μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο

• FIR συστήματα

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^{-k} = \frac{b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Αν $N_1 = 0$, τότε έχουμε ένα αιτιατό FIR σύστημα

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_2} b_k z^{-k} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} = b_0 \prod_{k=1}^{N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Παρατηρούμε ότι έχει μόνο N_2 πόλους στο $z = 0$
 - ROC: $\{|z| > 0\}$
- Επίσης έχει N_2 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο
- Αν $N_2 = 0$, τότε έχουμε ένα αντι-αιτιατό FIR σύστημα

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^0 b_k z^{-k} = b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1} (z - c_k) = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Παρατηρούμε ότι έχει μόνο N_1 πόλους στο $z = \infty$
 - ROC: $\{|z| < \infty\}$
- Επίσης έχει N_1 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο

- FIR συστήματα

- Συμπεράσματα

- Ένα αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο (μόνο στο μηδέν)
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > 0\}$
- Ένα αντι-αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν (μόνο στο άπειρο)
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \infty\}$
- Ένα μη-αιτιατό FIR σύστημα θα έχει πόλους **και** στο μηδέν **και** στο άπειρο
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{0 < |z| < \infty\}$

• IIR συστήματα

- Τα IIR συστήματα αποτελούνται από άπειρες σε διάρκεια κρουστικές αποκρίσεις
- Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως λόγος πολυωνύμων του z^{-1}
- Πόλοι και μηδενικά οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}$$

- Με παρόμοια διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι
 - Ένα αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > \max_k |c_k|\}$
 - Ένα αντι-αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \min_k |c_k|\}$
 - Ένα μη-αιτιατό IIR σύστημα μπορεί να έχει πόλους **οπουδήποτε**
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|c_i| < |z| < |c_j|\}$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες
- Ας εφαρμόσουμε τον μετασχ. Z σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{l=0}^M b_l z^{-l} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{l=0}^M b_l z^{-l}$$

- Έτσι

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

- Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

Είναι $Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z) - 3z^{-2}X(z) = X(z)(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}$: συνάρτηση μεταφοράς

$$\downarrow z^{-1}$$

$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2]$: FIR

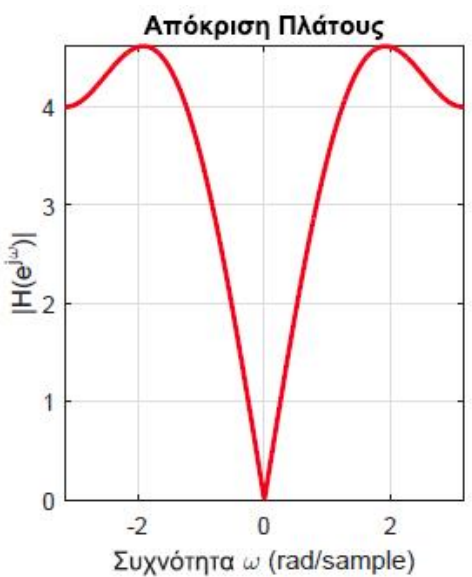
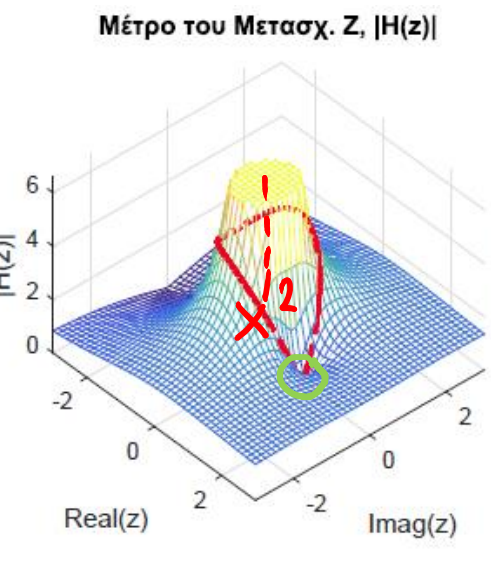
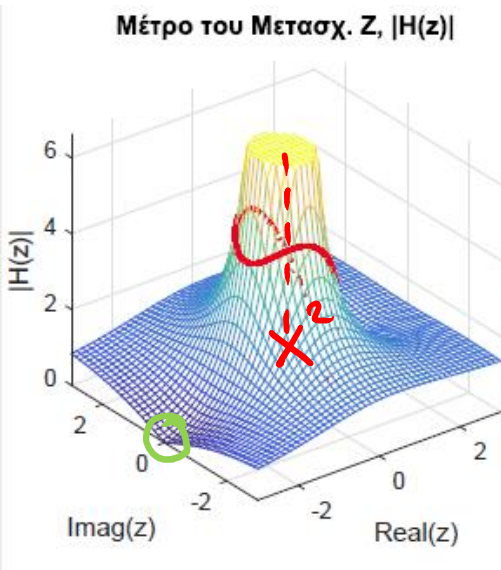
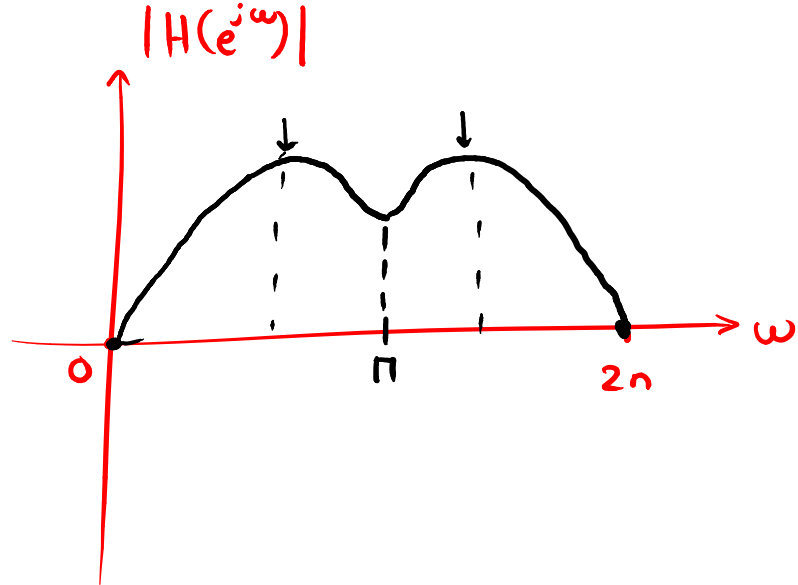
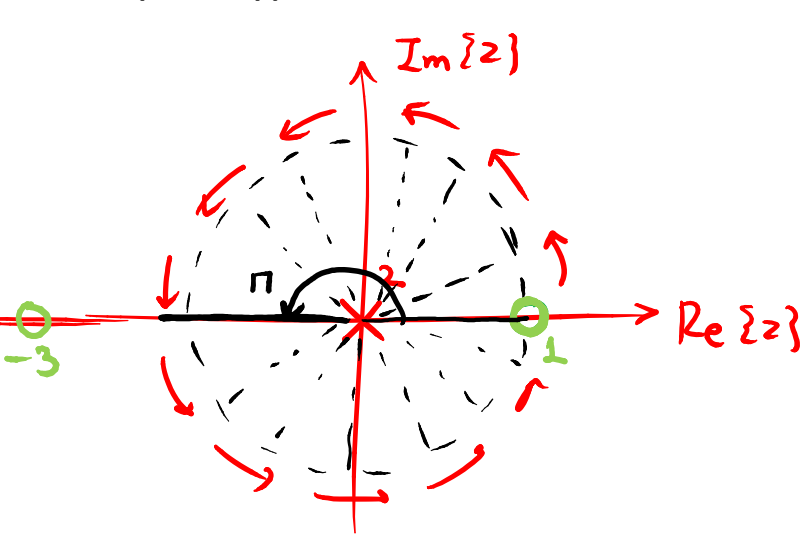
$$H(z) = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} = \frac{z^2 + 2z - 3}{z^2}$$

Πόλοι : $z = 0$ (δύο)

Μηδενικά : $z = -3, z = 1$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

• Παράδειγμα:



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-3] - \frac{2}{3}x[n-4]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του, την κρουστική απόκριση, και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

Είναι
$$Y(z) = \frac{1}{2}X(z) - \frac{2}{3}z^{-1}X(z) + \frac{1}{2}z^{-3}X(z) - \frac{2}{3}z^{-4}X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4} : \text{συνάρτηση μεταφοράς}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow Z^{-1} \\ h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-3] - \frac{2}{3}\delta[n-4] : \text{FIR} \end{array}$$

Είναι
$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^4 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{2}z - \frac{2}{3}}{z^4}$$

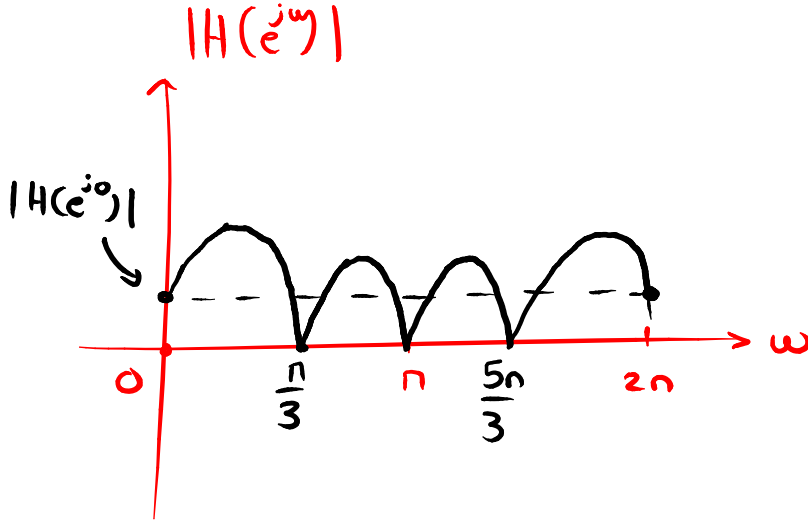
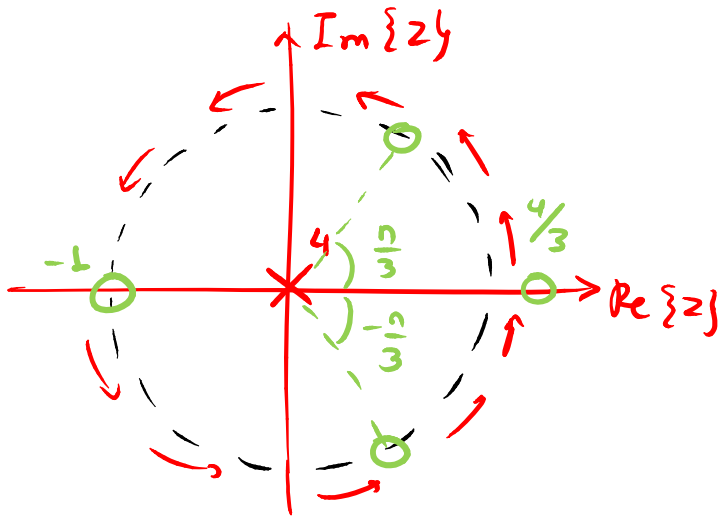
Πόλοι: $z=0$ (4)

Μηδενικά: $z=-1$

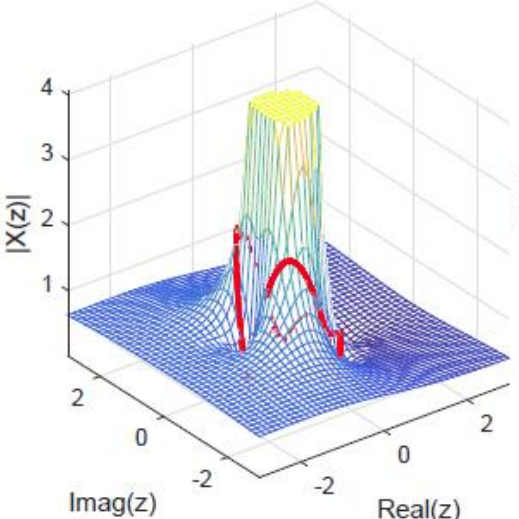
$z = \frac{1-j\sqrt{3}}{2} = e^{-j\frac{\pi}{6}}$
 $z = \frac{1+j\sqrt{3}}{2} = e^{j\frac{\pi}{6}}$
 $z = \frac{-1-j\sqrt{3}}{2} = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$
 $z = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

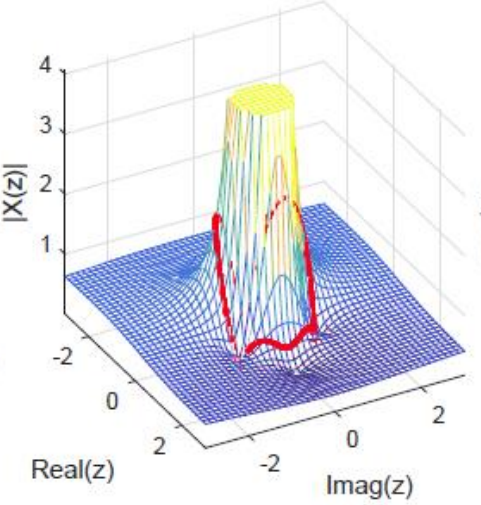
• Παράδειγμα:



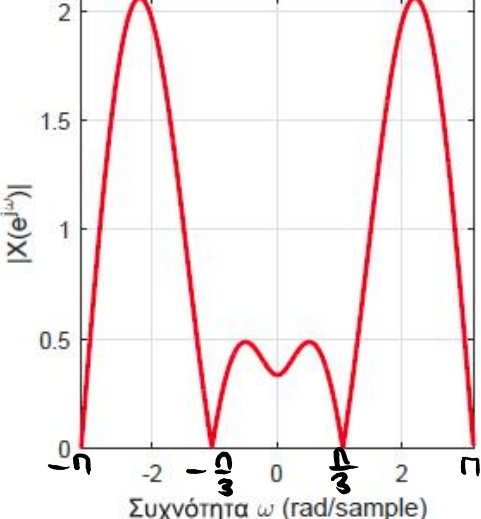
Μέτρο του Μετασχ. Z, |X(z)|



Μέτρο του Μετασχ. Z, |X(z)|



Φάσμα Πλάτους



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

• Παράδειγμα:

○ Έστω το μη-αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του, την κρουστική απόκριση, και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

Είναι $y[n] + 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$

↕ Z

$$Y(z)(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}) = X(z)(1 - 2z^{-1})$$

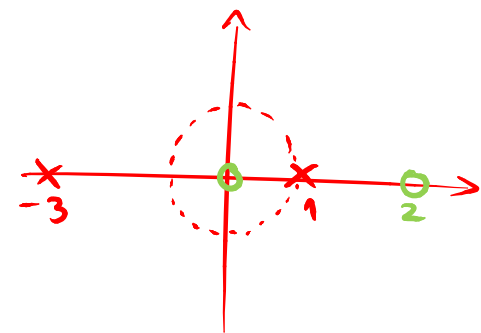
Άρα $H(z) = Y(z)/X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}}$. Είναι $H(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 + 2z - 3} =$

$$= \frac{z(z-2)}{(z+3)(z-1)} \Rightarrow \text{Πόλοι: } z = -3, z = 1$$

$$\text{Μηδενικά: } z = 0, z = 2$$

Οπότε λόγω μη-αιτιατότητας, θα είναι

$$R_H : \{ 1 < |z| < 3 \}$$



$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$
 $-a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

• Παράδειγμα:

Για την κλαστική αλοήριση: $H(z) = \frac{A}{1+3z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}}, |z| > 1$

$$A = \frac{1-2z^{-1}}{1-z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{1+\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{4}$$

$$B = \frac{1-2z^{-1}}{1+3z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1-2}{1+3} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

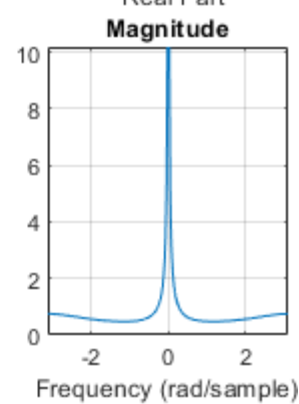
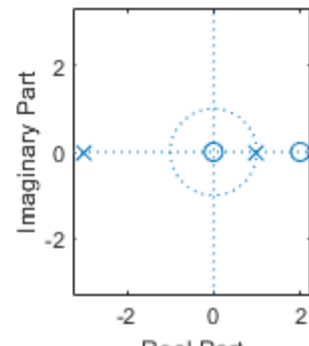
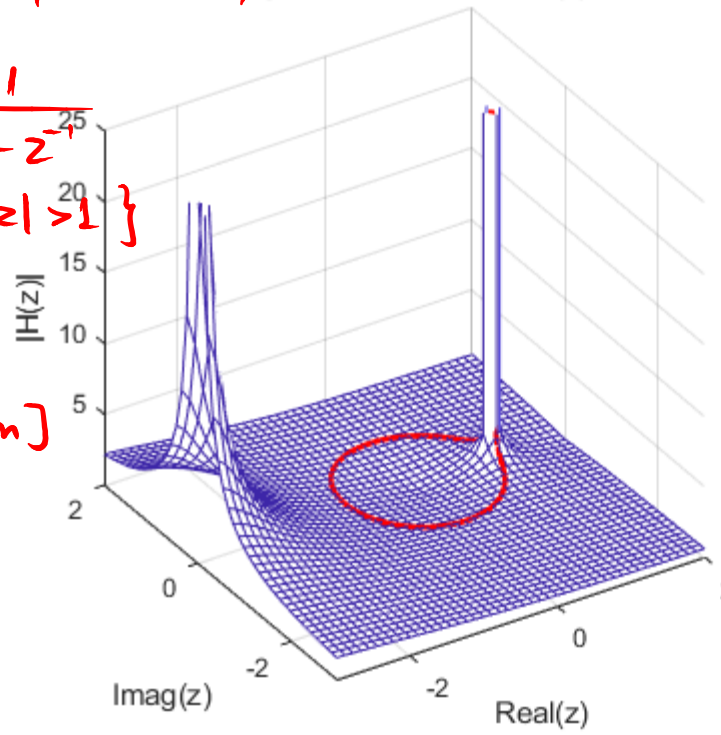
Οπότε $H(z) = \frac{5}{4} \frac{1}{1+3z^{-1}} - \frac{1}{4} \frac{1}{1-z^{-1}}$

$$R_H : \{ 1 < |z| < 3 \} = \{ |z| < 3 \} \cap \{ |z| > 1 \}$$

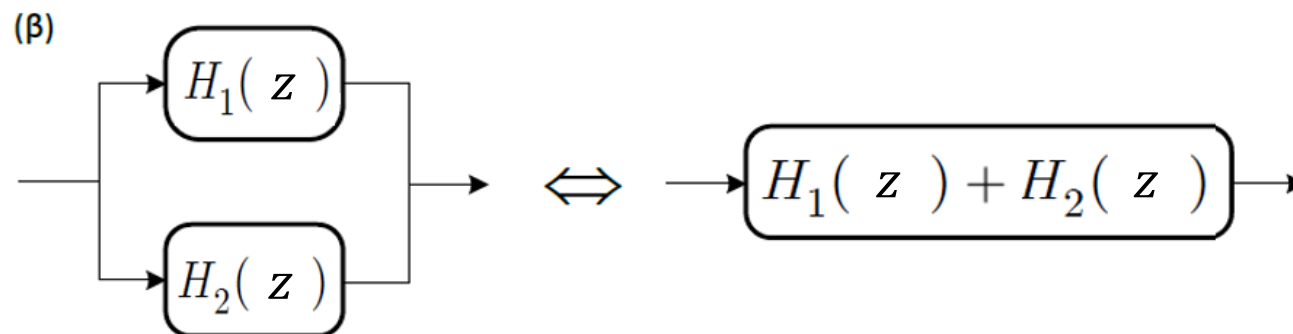
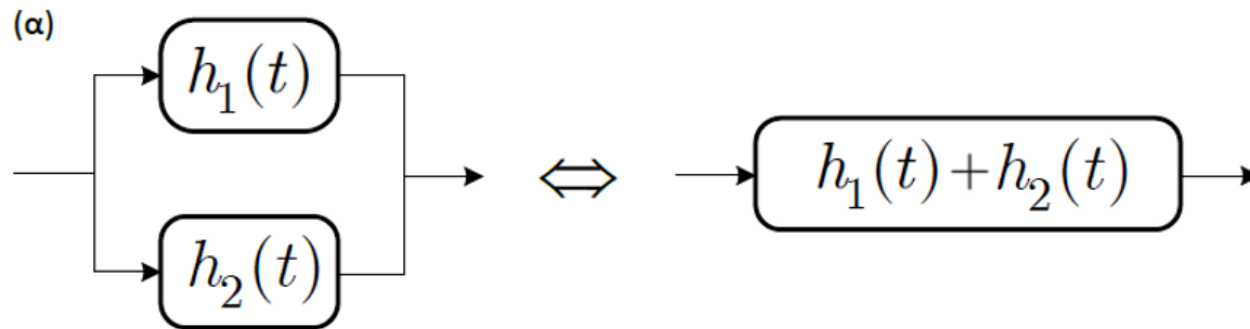
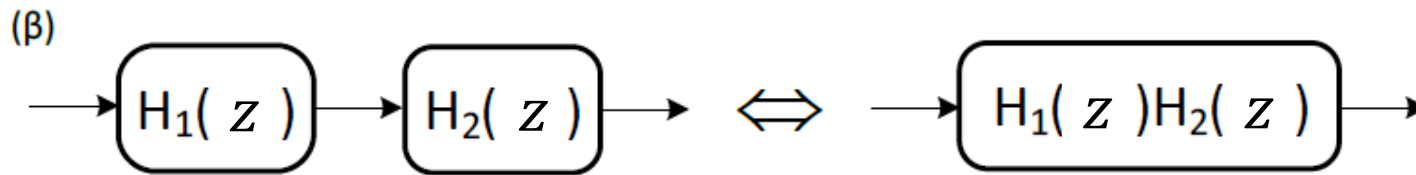
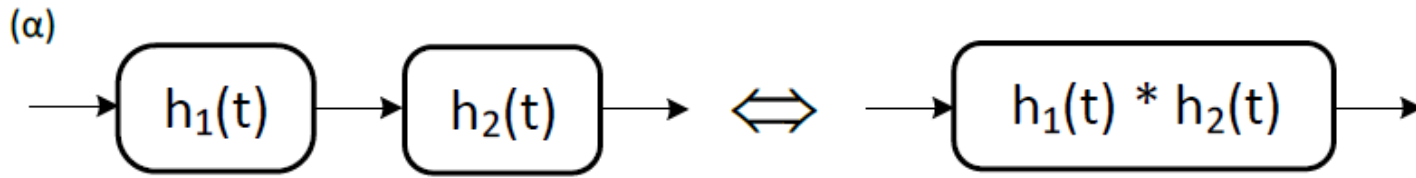
Λεα:

$$\begin{aligned}
 h[n] &= -\frac{5}{4} (-3)^n u[-n-1] - \frac{1}{4} (1)^n u[n] \\
 &= -\frac{5}{4} (-3)^n u[-n-1] - \frac{1}{4} u[n]
 \end{aligned}$$

Magnitude of function H(z)



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Διατάξεις Συστημάτων



• Ευστάθεια στο χώρο του Z

• Έχουμε δείξει ότι αν $|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| < B_y$ τότε το σύστημα είναι ευσταθές



• Αν $|\gamma_i| < 1, \forall i$, όπου γ_i οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος, τότε το σύστημα είναι ευσταθές



• Αν ισχύει ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

τότε το σύστημα είναι ευσταθές



• Αν ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε ο μετασχ. Fourier του $h[n]$ συγκλίνει ομοιόμορφα $\forall \omega$



• Αν ο μετασχ. Fourier συγκλίνει, τότε μπορούμε να τον υπολογίσουμε από το μετασχ. Z, άρα το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z περιέχει το μοναδιαίο κύκλο

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

• Παράδειγμα:

○ Έστω την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

στην περίπτωση που το σύστημα είναι (α) ευσταθές, (β) αιτιατό. Γράψτε την εξίσωση διαφορών που το περιγράφει.

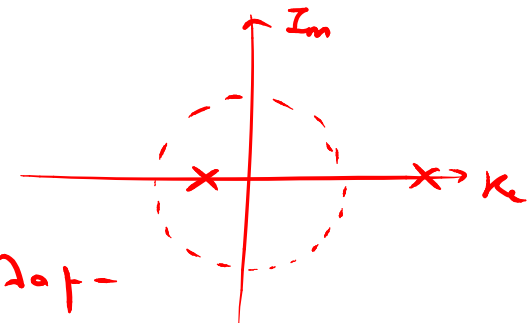
Είναι:

α) Οι πόλοι είναι οι: $z_1 = 2, z_2 = -\frac{1}{2}$

Πρέπει $R_H: \left\{ \frac{1}{2} < |z| < 2 \right\}$ ώστε να περιλαβάνεται ο μοναδιαίος κύκλος.

$$H(z) = \frac{A}{1 - 2z^{-1}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$R_H: \left\{ \frac{1}{2} < |z| < 2 \right\} = \left\{ |z| > \frac{1}{2} \right\} \cap \left\{ |z| < 2 \right\}$$



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

$$\text{Είναι } A = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z^{-1} = \frac{1}{2}} = \frac{2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{2 - \frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = 1$$

$$B = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} \Big|_{z^{-1} = -2} = \frac{2 + \frac{3}{2} \cdot 2}{1 + 4} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\text{Οπότε } H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \xrightarrow{z^{-1}} h[n] = -2^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\{|z| < 2\}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\{|z| > \frac{1}{2}\}}$

β) Το πεδίο σύγκλισης για να είναι αυταυτό πρέπει να είναι "εξωτερικό", οπότε $\{|z| > 2\}$. Άρα:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{z^{-1}} h[n] = 2^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]. \end{array} \right.$$

$$R_H : \{|z| > 2\} = \{|z| > 2\} \cap \{|z| > \frac{1}{2}\}$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

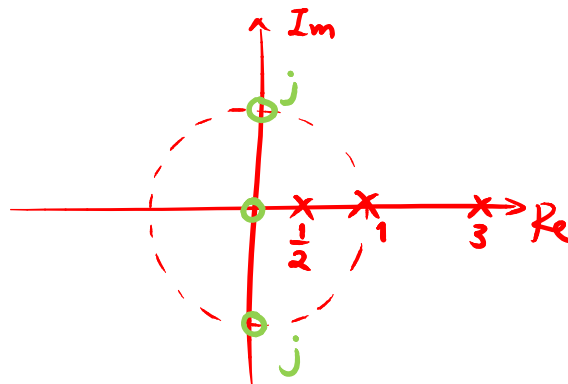
$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1}) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) (1 + 3z^{-1})}, \quad R_H$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης, σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, και χαρακτηρίστε το ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα

Οι πόλοι βρίσκονται στα θέματα $z=1, z=\frac{1}{2}, z=-3$, άρα θα έχω $3+1=4$ πιθανά πεδία σύγκλισης:

$R_1: \{ |z| > 3 \}$, $R_2: \{ |z| < \frac{1}{2} \}$, $R_3: \{ 1 < |z| < 3 \}$, $R_4: \{ \frac{1}{2} < |z| < 1 \}$

Άρα



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια

- Παράδειγμα:

$$\text{Είναι } H(z) = \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{C}{1+3z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$A = \left. \frac{1+z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+3z^{-1})} \right]_{z^{-1}=1} = \frac{1+1}{\frac{1}{2} \cdot 4} = \frac{2}{2} = 1$$

$$B = \left. \frac{1+z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+3z^{-1})} \right]_{z^{-1}=2} = \frac{1+2}{-1 \cdot 7} = -\frac{2}{7}$$

$$C = \left. \frac{1+z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \right]_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{6}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{28}{18}} = \frac{36}{84} = \frac{3}{7}$$

$$\text{Άρα } H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{2}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}}$$

Ανάλυση με το πεδίο σύγκλισης, θα έχουμε τις παρακάτω κλασματικές αποκρίσεις:

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια

- Παράδειγμα:

$$R_1: h[n] = u[n] - \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7} (-3)^n u[n] \quad (A)$$

$$R_2: h[n] = -u[-n-1] + \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1] \quad (B)$$

$$R_3: h[n] = u[n] - \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1] \quad (C)$$

$$R_4: h[n] = -u[-n-1] + \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1] \quad (D)$$

Το (A) είναι αιτιατό και ασταθές

Το (B) είναι ανυ-αιτιατό και ασταθές

Το (C) είναι μη-αιτιατό και ασταθές

Το (D) είναι ————— " ————— " —————

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια και Αιτιατότητα

Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος και Αιτιατότητα

Ένα αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα "έχει" μετασχ. Fourier - όταν το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς έχει όλους τους πόλους του εντός του μοναδιαίου κύκλου, ενώ ένα αντι-αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα "έχει" μετασχ. Fourier - όταν έχει όλους τους πόλους του εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

Κριτήριο ευστάθειας (και άρα ύπαρξης του μετασχ. Fourier) για οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα είναι η συμπερίληψη του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ μέσα στο πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς.

• Αντίστροφα Συστήματα

• Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι αυτό της ακύρωσης της επίδρασης ενός συστήματος επάνω σε μια είσοδο

• Έστω ότι έχουμε το σύστημα με έξοδο $y[n] = x[n] * h[n]$, και η επίδραση της κρουστικής απόκρισης είναι ανεπιθύμητη

• Όπως π.χ. όταν περνάμε ένα σήμα από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι που διαταράσσει το σήμα εισόδου

• Τότε χρειαζόμαστε ένα σύστημα $h_i[n]$ τέτοιο ώστε

$$y[n] * h_i[n] = x[n] * h[n] * h_i[n] = x[n]$$

δηλ. να ανακτήσουμε την είσοδο από την έξοδο

• Από την παραπάνω σχέση εύκολα καταλαβαίνετε ότι $h_i[n] * h[n] = \delta[n]$

• Φέρνοντας τη σχέση αυτή στο χώρο του Z προκύπτει ότι

$$H_i(z)H(z) = 1, \quad R_H \cap R_{H_i} \neq \emptyset$$

• Το σύστημα $h_i[n]$ ονομάζεται **αντίστροφο σύστημα** του $h[n]$

• Στο χώρο του Z, αν

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}$$

τότε

$$H_i(z) = \frac{1}{A} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}$$

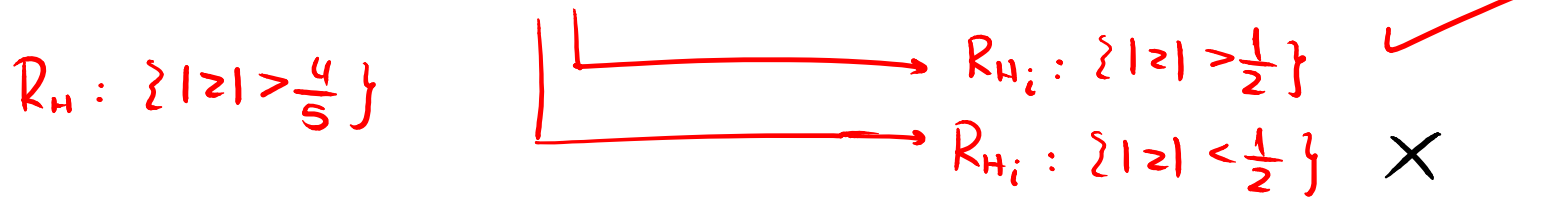
Οι πόλοι του συστήματος γίνονται μηδενικά του αντιστρόφου και τα μηδενικά του συστήματος γίνονται πόλοι του αντιστρόφου

• Αντίστροφα Συστήματα

• Παράδειγμα:

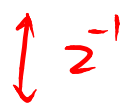
○ Έστω $H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}, |z| > 0.8$. Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_i[n]$

Είναι $H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1-0.8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}, R_{H_i} ?$



Σχικρο αντίστροφο σύστημα δίνεται μόνο από το $R_{H_i} : \{ |z| > \frac{1}{2} \}$.

Άρα $H_i(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{5} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} z^{-1}, R_{H_i} : \{ |z| > \frac{1}{2} \}$



$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$

• Αντίστροφα Συστήματα

• Παράδειγμα:

○ Έστω $H(z) = \frac{0.5 - z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$, $|z| > 0.8$. Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_i[n]$

Είναι $H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1 - \frac{4}{5}z^{-1}}{\frac{1}{2} - z^{-1}}$, R_{H_i} ? έτσι ώστε $R_H \cap R_{H_i} \neq \emptyset$

\swarrow \searrow
 $\{ |z| > 2 \}$ $\{ |z| < 2 \}$

Εδώ υπάρχουν δύο εδίσω έγκυρα αντίστροφα συστήματα!

→ $H_i(z)$, $\{ |z| > 2 \}$: αιτιατό, ασταθές (A)

→ $H_i(z)$, $\{ |z| < 2 \}$: ευσταθές, αντι-αιτιατό (B)

Είναι $H_i(z) = \frac{2 - \frac{3}{5}z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} = \frac{2}{1 - 2z^{-1}} - \frac{3}{5} \frac{1}{1 - 2z^{-1}} z^{-1}$

(A) : $h_i[n] = 2 \cdot 2^n u[n] - \frac{3}{5} (2)^{n-1} u[n-1]$

(B) : $h_i[n] = -2 \cdot 2^n u[-n-1] + \frac{3}{5} \cdot 2^{n-1} u[-n]$

• Αντίστροφα Συστήματα

- Μας ενδιαφέρουν περισσότερο τα συστήματα που έχουν **ευσταθές και αιτιατό** αντίστροφο σύστημα
- Όπως είδατε πριν, μπορεί κανένα από τα υποψήφια αντίστροφα συστήματα να μην είναι **ταυτόχρονα** ευσταθές και αιτιατό
- Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(z)$
 - Ως τέτοιο, θα έχει **όλους** τους πόλους του εντός του μοναδιαίου κύκλου
 - Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε
- Τι πρέπει να συμβαίνει στο σύστημα $H(z)$ έτσι ώστε το αντίστροφο σύστημα να είναι και αυτό **ευσταθές και αιτιατό**?
- Αν σκεφτούμε ότι στο αντίστροφο σύστημα τα μηδενικά του αρχικού συστήματος γίνονται πόλοι, τότε πρέπει αυτοί να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου
 - Άρα **όλα** τα μηδενικά του αρχικού συστήματος πρέπει να βρίσκονται **ΚΑΙ ΑΥΤΑ** εντός του μοναδιαίου κύκλου
- Τέτοια συστήματα, με **όλους** τους πόλους και **όλα** τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου ονομάζονται **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης – Minimum Phase**
 - Θα τα μελετήσουμε λίγο αργότερα...

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**
- Μερικές διαλέξεις νωρίτερα, εισάγαμε το μετασχ. Z ως μια «γενίκευση» του μετασχ. Fourier επάνω στο μιγαδικό επίπεδο
- Είδαμε όμως ότι όταν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, τότε ο μετασχ. Fourier συγκλίνει (== «υπάρχει» μέσω του ορισμού του)
- Όμως είδαμε ότι οι πόλοι και τα μηδενικά του μετασχ. Z «δρουν» επάνω στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης του μετασχ. Fourier!
 - Πώς?
 - Ένας πόλος κοντά στο μοναδιαίο κύκλο αυξάνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται
 - Ένα μηδενικό κοντά στο μοναδιαίο κύκλο μειώνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται
 - Για το φάσμα φάσης δεν είπαμε κάτι σχετικό
- Η παραπάνω περιγραφή είναι κάπως «γενική» και «δαισθητική»
- Δε θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε ακριβώς πως επηρεάζονται οι φασματικές αποκρίσεις από τους πόλους και τα μηδενικά?

ΝΑΙ!! 😊

(...από το ακροατήριο)

• Διάγραμμα Διανυσμάτων

- Ας γράψουμε τις αποκρίσεις πλάτους, φάσης, και την καθυστέρηση ομάδας μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς, όταν αυτή υπολογίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

□ Απόκριση Πλάτους

$$|H(e^{j\omega})| = |A| \frac{\prod_{k=1}^M |1 - b_k e^{-j\omega}|}{\prod_{l=1}^N |1 - a_l e^{-j\omega}|}$$

□ Απόκριση Φάσης

$$\begin{aligned} \angle H(e^{j\omega}) &= \angle A + \angle \prod_{k=1}^M (1 - b_k e^{-j\omega}) - \angle \prod_{k=1}^M (1 - a_k e^{-j\omega}) \\ &= \angle A + \sum_{k=1}^M \angle(1 - b_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=1}^M \angle(1 - a_k e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

□ Καθυστέρηση Ομάδας

$$\tau_g(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^M \frac{d}{d\omega} \angle(1 - a_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=1}^M \frac{d}{d\omega} \angle(1 - b_k e^{-j\omega})$$

- Κοινό στοιχείο: όροι της μορφής $(1 - c_k e^{-j\omega})!!$

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

- Ας θεωρήσουμε τον όρο $1 - ce^{-j\omega}$, με $c \in \mathbb{C}$

- Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις

- Το c είναι πόλος
- Το c είναι μηδενικό

- Θα μελετήσουμε τις επιπτώσεις επάνω στις αποκρίσεις πλάτους και φάσης

- Ξεκινώντας από τη θεώρηση του $c = re^{j\theta}$ ως **μηδενικό**:

$$H(z) = 1 - cz^{-1} = 1 - re^{j\theta} z^{-1}$$

- Οπότε:

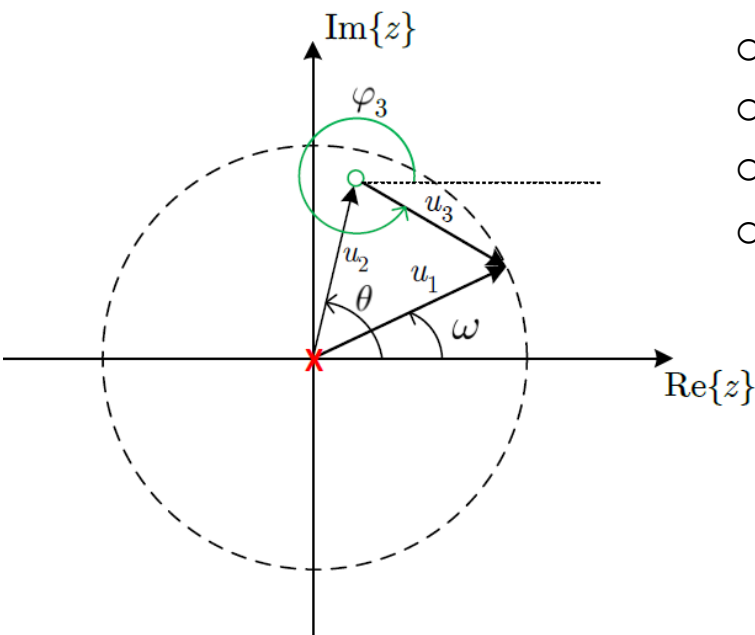
$$|H(e^{j\omega})| = |1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}| = |e^{j\omega} - re^{j\theta}|$$

• Διάγραμμα Διανυσμάτων

$$|H(e^{j\omega})| = |1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}| = |e^{j\omega} - re^{j\theta}|$$

- Διάνυσμα \vec{u}_1 : διάνυσμα μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$
- Διάνυσμα \vec{u}_2 : διάνυσμα από 0 ως τη θέση του $re^{j\theta}$
- Διάνυσμα \vec{u}_3 : διάνυσμα από $re^{j\theta}$ ως το μοναδ. κύκλο
- $|e^{j\omega} - re^{j\theta}| = |\vec{u}_1 - \vec{u}_2| = |\vec{u}_3|$

Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται ΜΟΝΟ από το μήκος του \vec{u}_3 !!

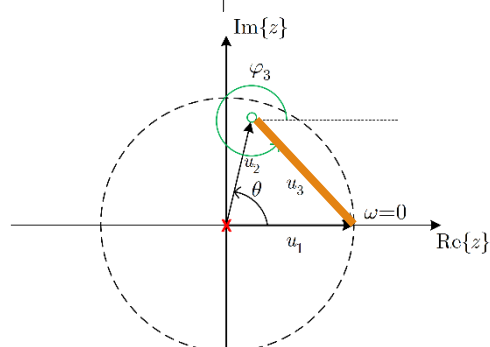
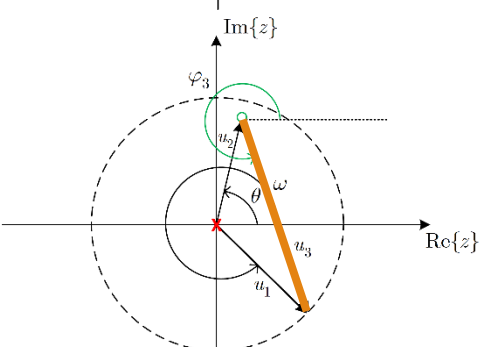
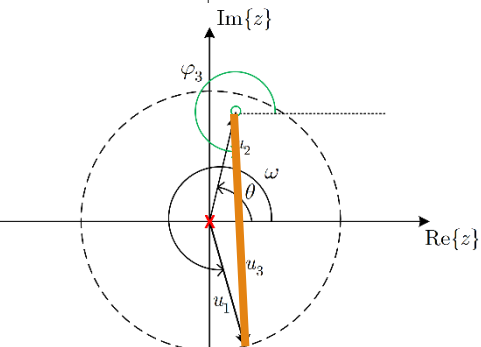
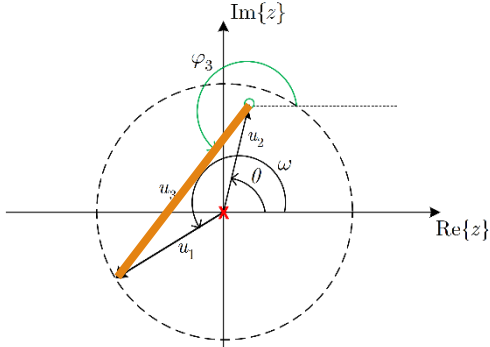
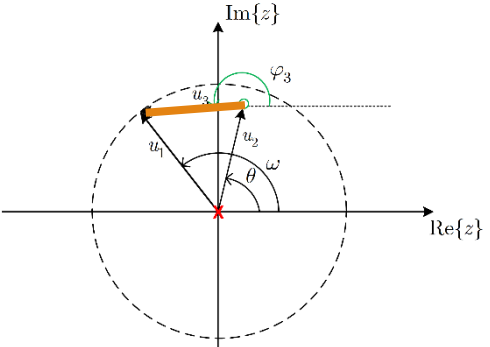
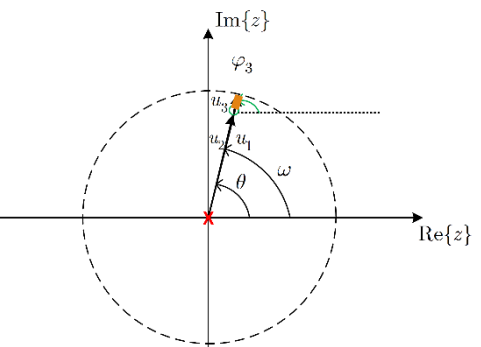
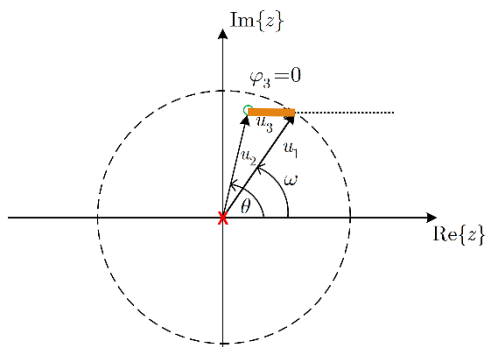
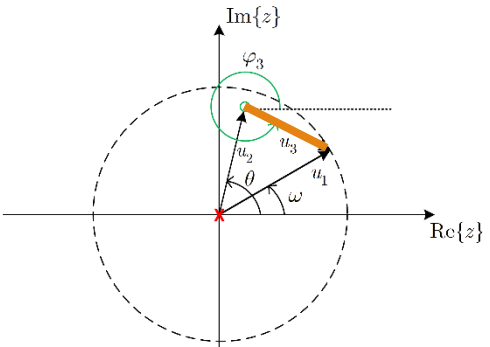
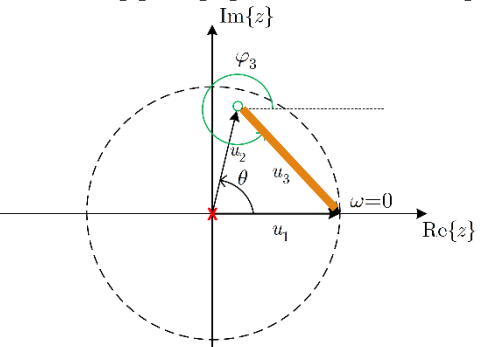


• Για την απόκριση φάσης

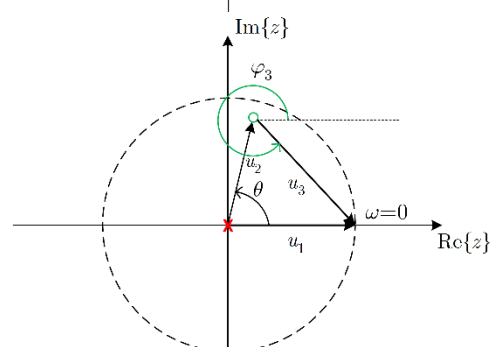
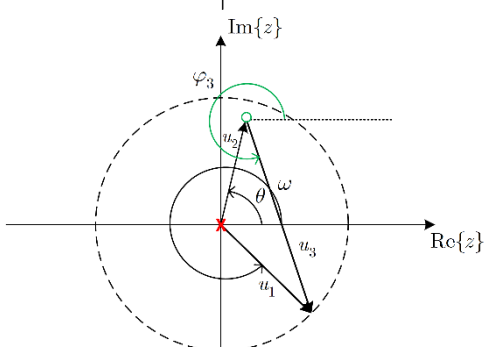
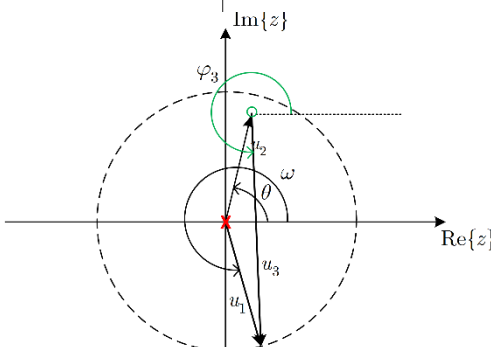
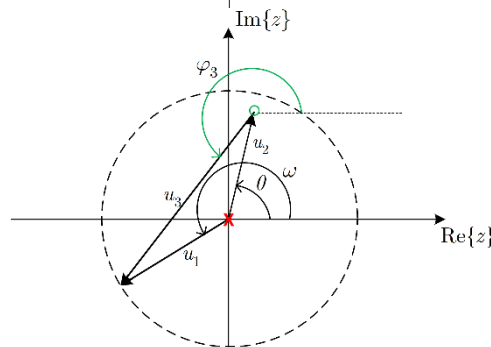
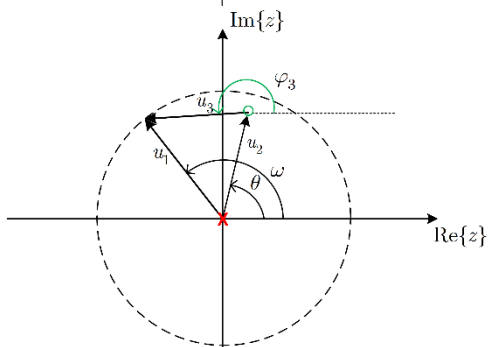
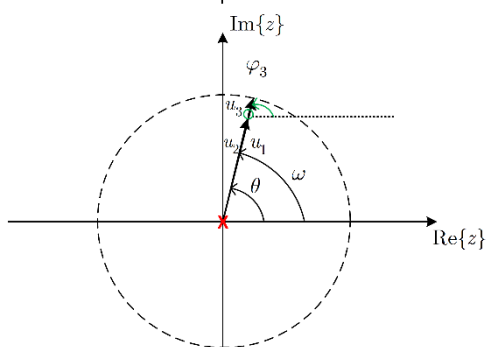
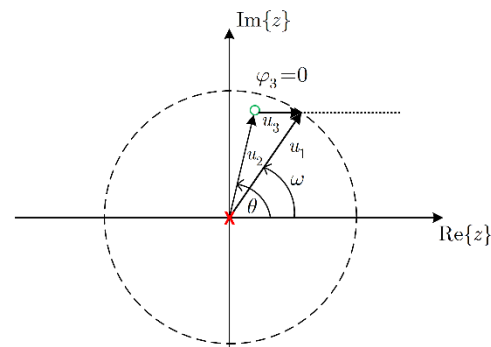
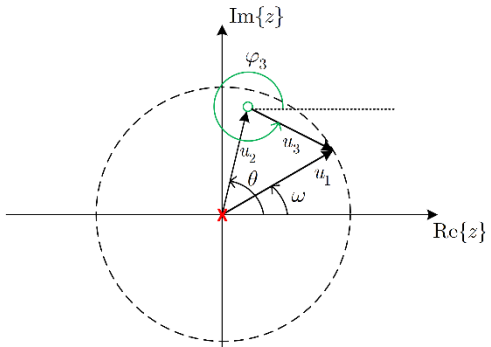
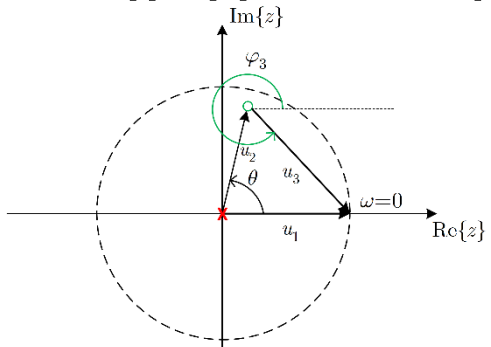
$$\angle(1 - re^{j\theta} e^{j\omega}) = \angle(e^{j\omega} - re^{j\theta}) - \angle e^{j\omega} = \phi_3 - \omega$$

Άρα η απόκριση φάσης εξαρτάται ΜΟΝΟ από τη διαφορά $\phi_3 - \omega$!!

• Διάγραμμα Διανυσμάτων

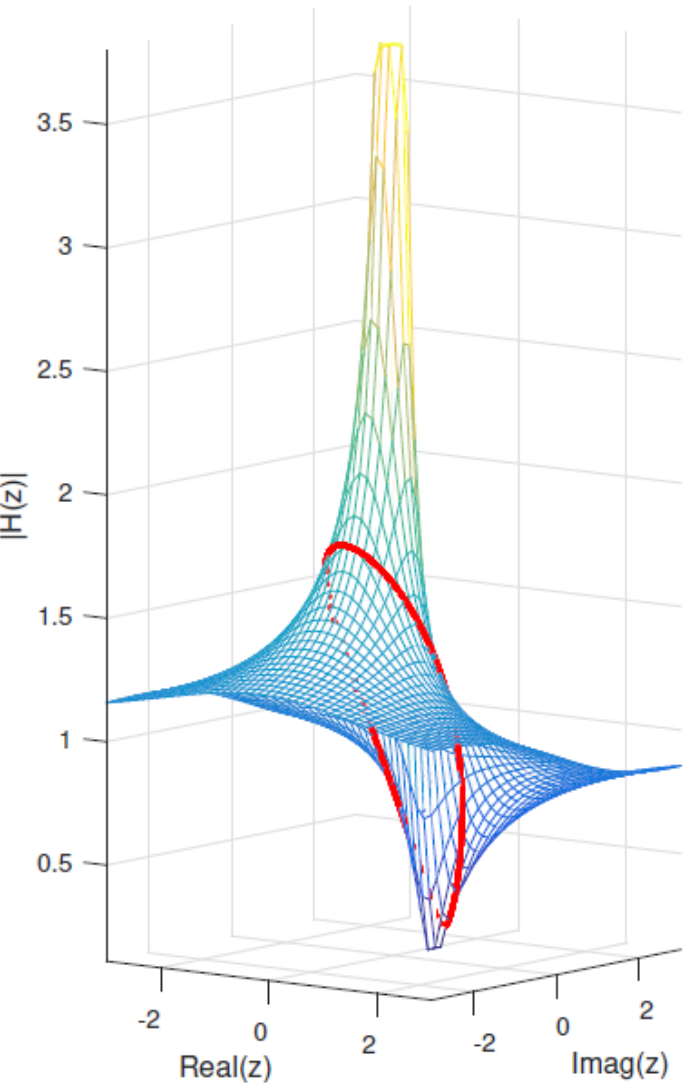


• Διάγραμμα Διανυσμάτων

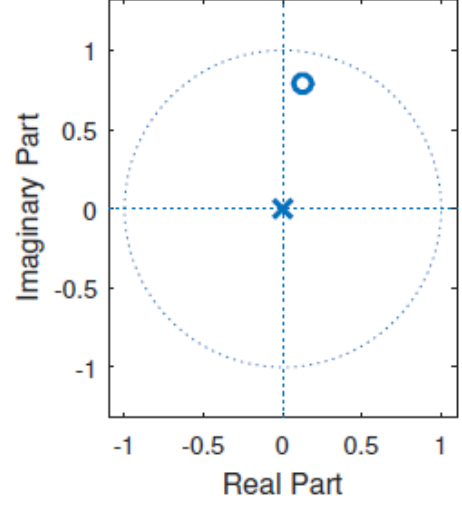


• Διάγραμμα Διανυσμάτων

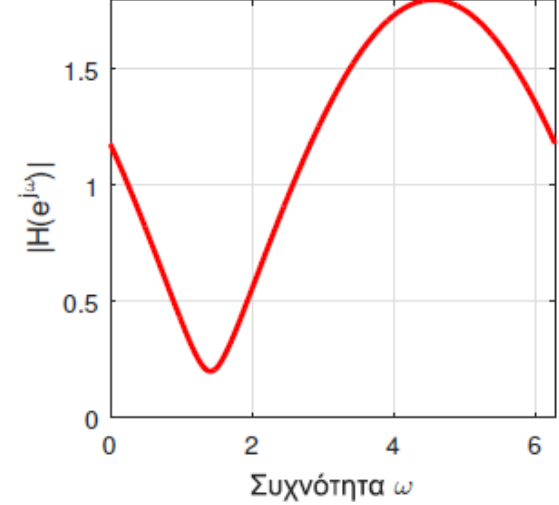
Μέτρο του Μετασχ. Z, $|H(z)|$



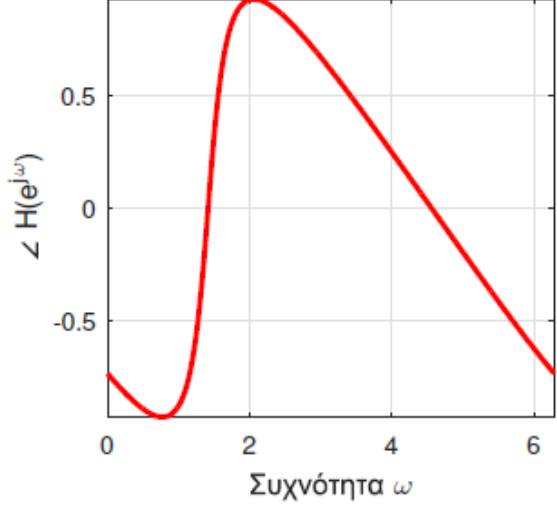
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



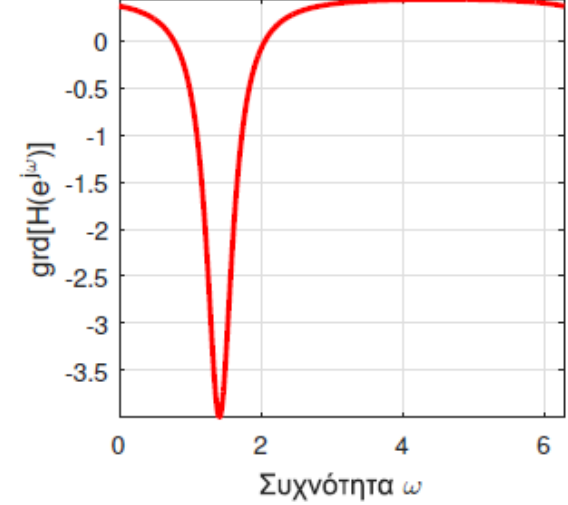
Απόκριση Πλάτους



Απόκριση Φάσης



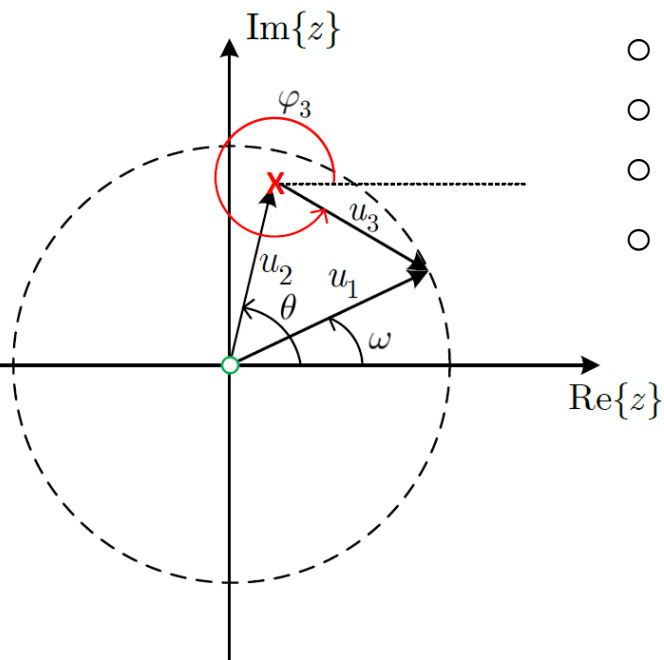
Καθυστέρηση Ομάδας



• Διάγραμμα Διανυσμάτων

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}|} = \frac{1}{|e^{j\omega} - re^{j\theta}|}$$

- Διάνυσμα \vec{u}_1 : διάνυσμα μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$
- Διάνυσμα \vec{u}_2 : διάνυσμα από 0 ως τη θέση του $re^{j\theta}$
- Διάνυσμα \vec{u}_3 : διάνυσμα από $re^{j\theta}$ ως το μοναδ. κύκλο
- $\frac{1}{|e^{j\omega} - re^{j\theta}|} = \frac{1}{|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|} = \frac{1}{|\vec{u}_3|}$



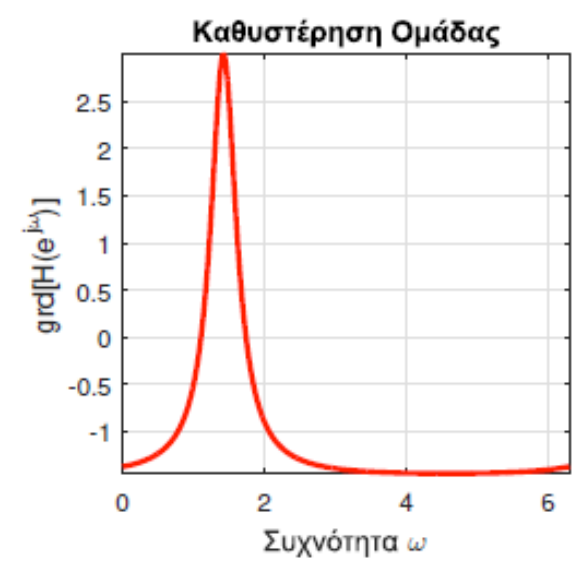
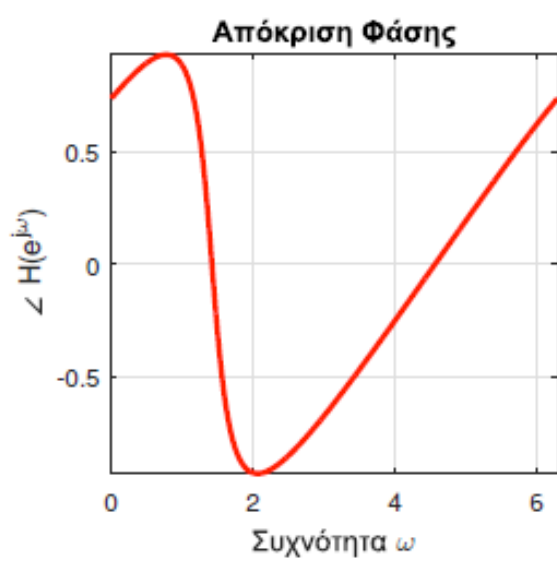
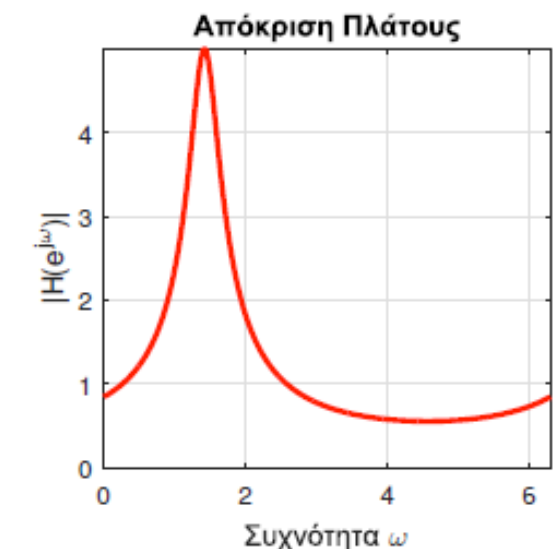
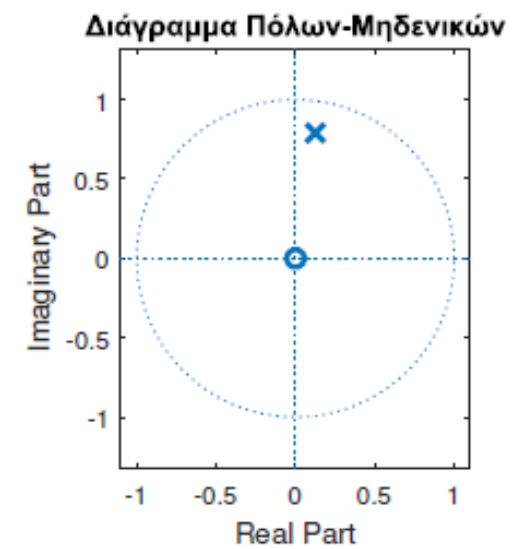
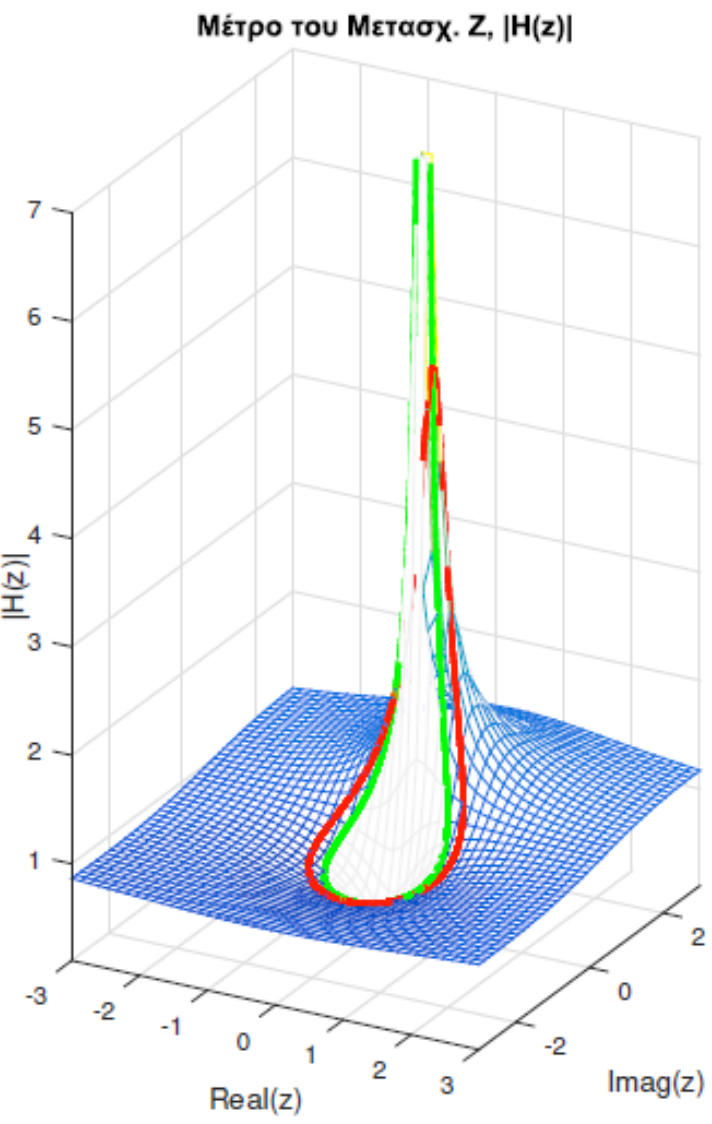
Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται ΜΟΝΟ από το (αντίστροφο) μήκος του \vec{u}_3 !!

• Για την απόκριση φάσης

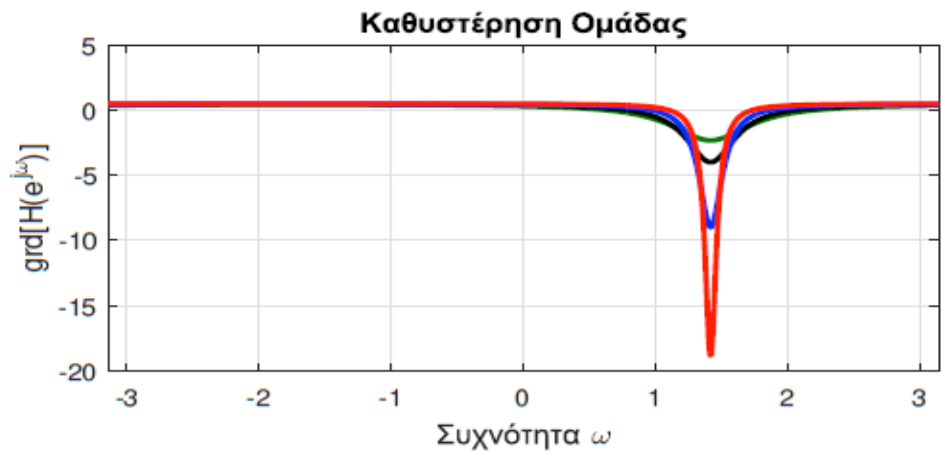
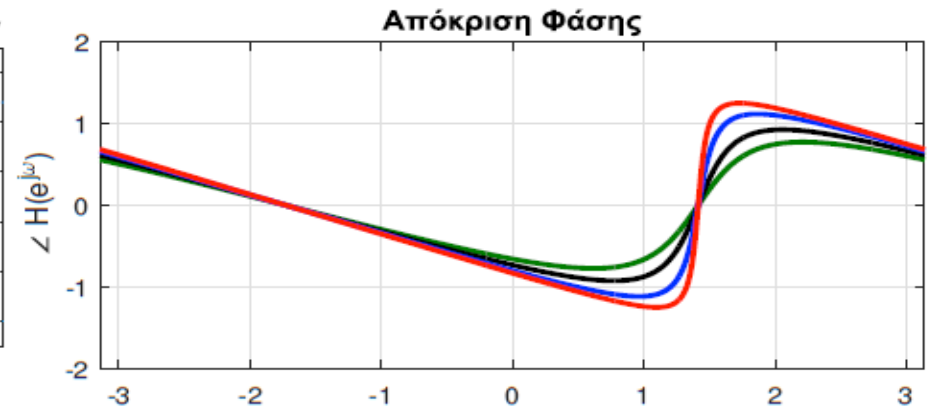
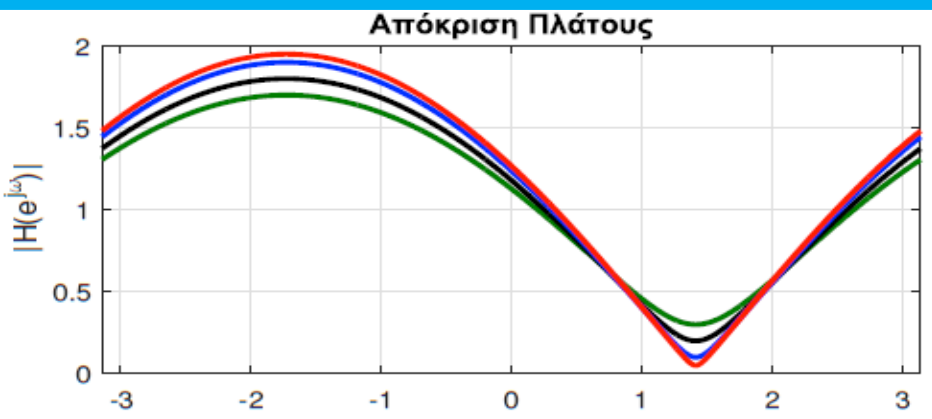
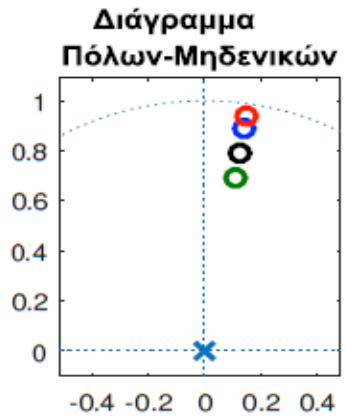
$$\angle \frac{1}{(1 - re^{j\theta} e^{j\omega})} = \angle e^{j\omega} - \angle(e^{j\omega} - re^{j\theta}) = \omega - \phi_3$$

Άρα η απόκριση φάσης εξαρτάται ΜΟΝΟ από τη διαφορά $\omega - \phi_3$!!

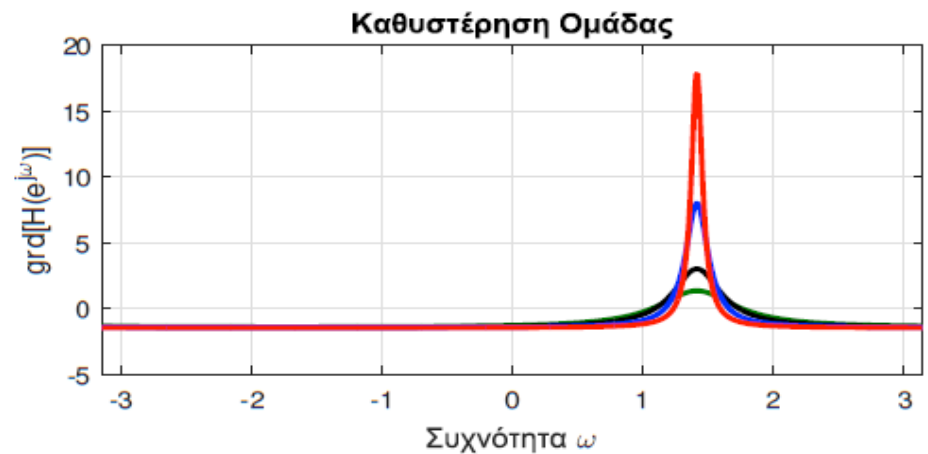
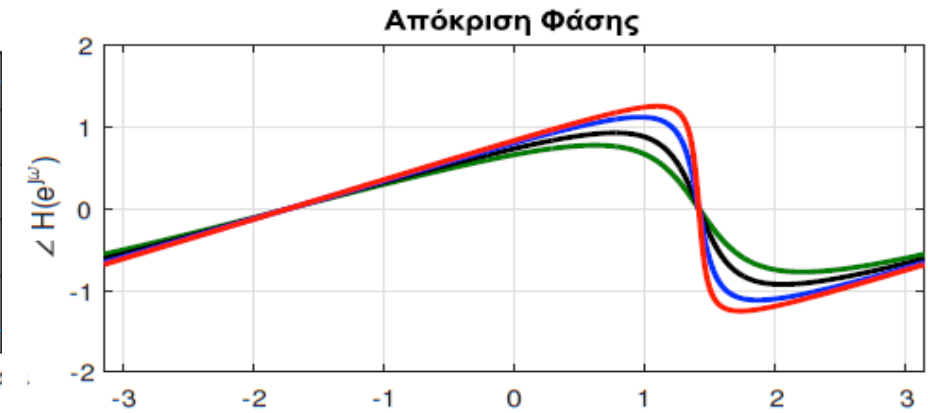
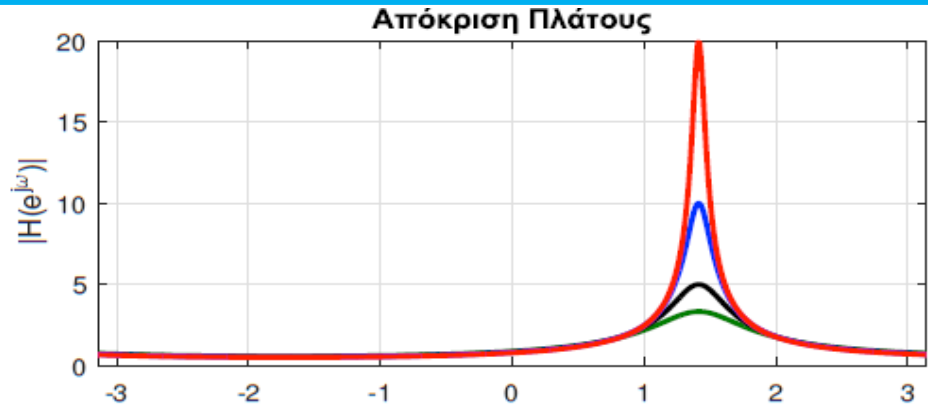
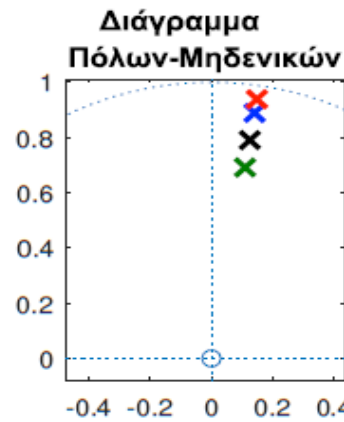
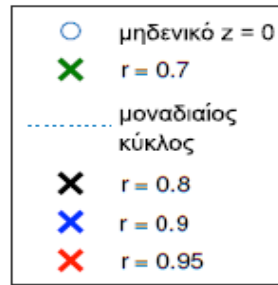
• Διάγραμμα Διανυσμάτων



• Διάγραμμα Διανυσμάτων



• Διάγραμμα Διανυσμάτων

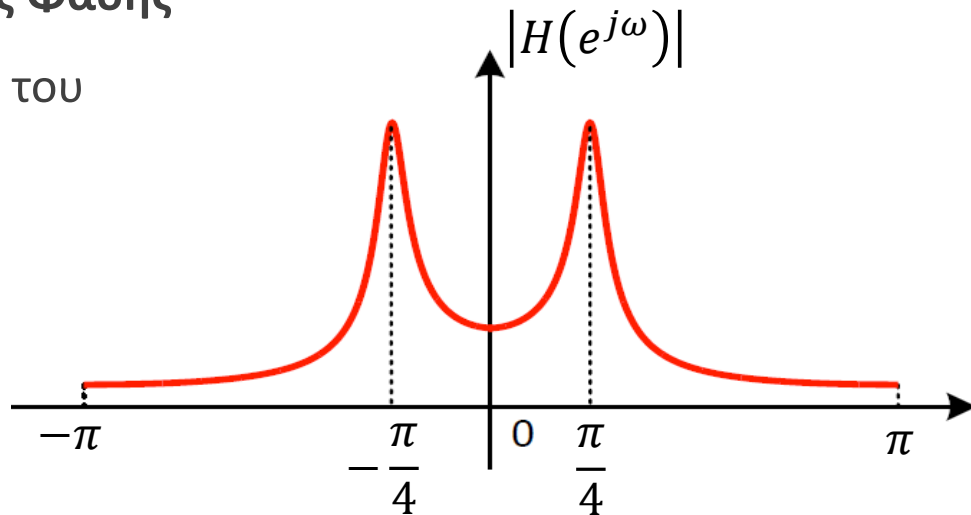


- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- **Ερώτημα:** υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των αποκρίσεων πλάτους και φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται ως ρητή συνάρτηση μεταφοράς?
- **Εναλλακτική διατύπωση:** μπορεί κανείς να υπολογίσει την απόκριση φάσης από την απόκριση πλάτους? Αν ναι, πότε?
- **Πρακτικότερη διατύπωση:** μπορεί κανείς να υπολογίσει τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ από την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$?
- Η τελευταία διατύπωση προφανώς μας λέει ότι αν είναι εφικτός αυτός ο υπολογισμός, τότε μπορούμε από τη συνάρτηση μεταφοράς να βρούμε τα πάντα για ένα δεδομένο ΓΧΑ σύστημα
- Το ερώτημα λοιπόν μπορεί να επαναδιατυπωθεί (για τελευταία φορά 😊) ως:
Μπορούμε να βρούμε τους πόλους και τα μηδενικά μιας συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ από την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$?

• Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης

• Έστω ότι μας δίνεται η απόκριση πλάτους του σχήματος

• Μπορούμε με κάποια ασφάλεια να υποθέσουμε ότι το διάγραμμα πόλων-μηδενικών που «γεννά» αυτή την απόκριση πλάτους φαίνεται παρακάτω

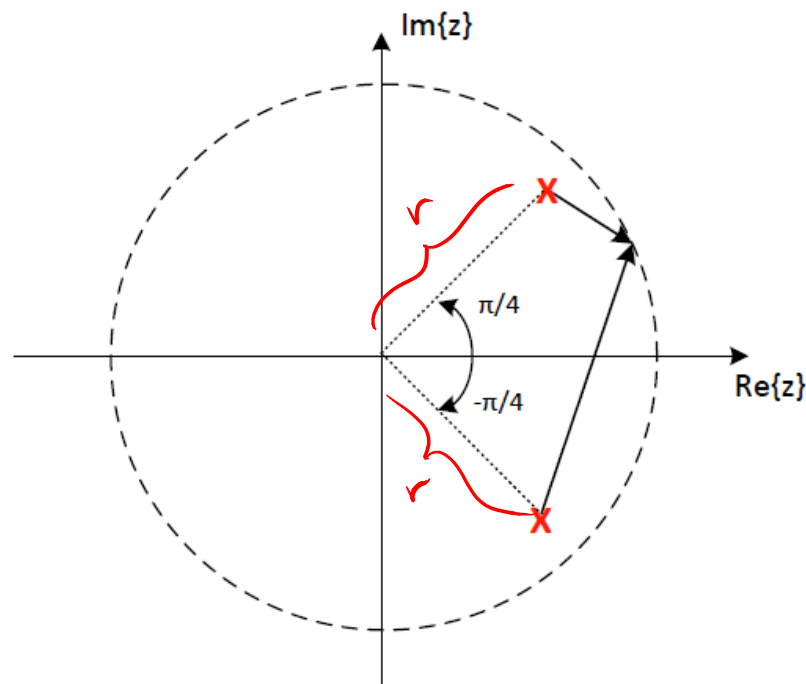


• Μπορούμε να πούμε ότι

$$H_1(z) = \frac{A}{(1 - re^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 - re^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}$$

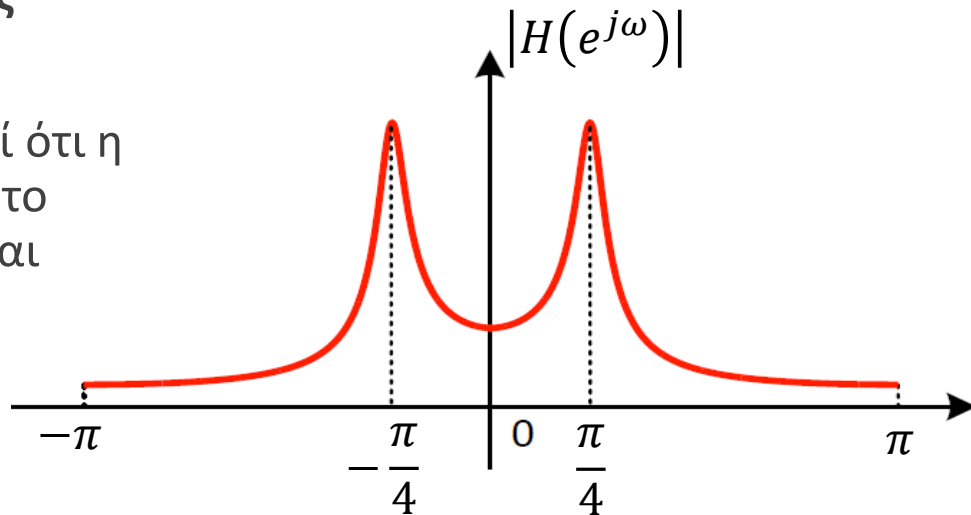
δηλ.

$$|H_1(e^{j\omega})| = \frac{|A|}{|e^{j\omega} - re^{j\frac{\pi}{4}}||e^{j\omega} - re^{-j\frac{\pi}{4}}|}$$



• Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης

• Όμως θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι η δεδομένη απόκριση πλάτους δίνεται από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών που φαίνεται παρακάτω

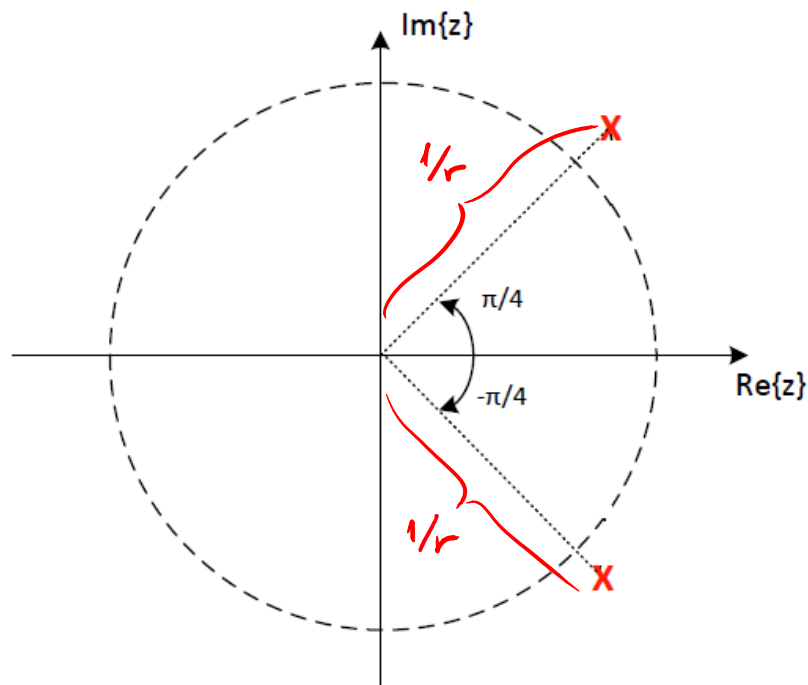


• Στην περίπτωση μας έχουμε

$$H_2(z) = \frac{A}{(z^{-1} - re^{j\pi/4})(z^{-1} - re^{-j\pi/4})}$$

δηλ.

$$|H_2(e^{j\omega})| = \frac{|A|}{|e^{-j\omega} - re^{-j\pi/4}||e^{-j\omega} - re^{j\pi/4}|}$$



• Γιατί ισχύει ότι

$$|H_1(e^{j\omega})| = |H_2(e^{j\omega})|?????$$

• Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης

- Παρατηρήστε ότι όροι της μορφής $\frac{1}{1-z_1 z^{-1}}$ και $\frac{1}{z^{-1}-z_1^*}$ έχουν το ίδιο μέτρο για $z = e^{j\omega}$:

$$\frac{1}{|1 - z_1 e^{-j\omega}|} = \frac{1}{|e^{-j\omega}(e^{j\omega} - z_1)|} = \frac{1}{|e^{j\omega} - z_1|} \quad \text{και} \quad \frac{1}{|e^{-j\omega} - z_1^*|}$$

αφού οι όροι εντός του μέτρου είναι συζυγείς!

- Έτσι, πράγματι τα δυο συστήματα έχουν την ίδια απόκριση πλάτους!
- Αφού όμως $H_1(z) \neq H_2(z)$ προφανώς δε θα έχουν την ίδια απόκριση φάσης
- Το δεύτερο σύστημα έχει τους πόλους του στις **συζυγείς αμοιβαίες θέσεις** των πόλων του πρώτου συστήματος
- Οι πόλοι του πρώτου συστήματος βρίσκονται στις θέσεις (a, a^*) και του δεύτερου συστήματος στις θέσεις $\left(\frac{1}{a^*}, \frac{1}{a}\right)$
 - Το σύστημα εξακολουθεί να είναι πραγματικό και στις δυο περιπτώσεις

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- Άρα υπάρχουν δύο συστήματα $H(z)$ με τη δεδομένη απόκριση πλάτους, τα οποία διαφέρουν ασφαλώς στην απόκριση φάσης, σωστά?
- Λάθος! 😊
- Μπορούμε να ορίσουμε δυο ακόμα συστήματα τα οποία θα έχουν τον έναν πόλο εντός και τον άλλο εκτός του μοναδιαίου κύκλου, και τα οποία θα έχουν κι αυτά την ίδια απόκριση πλάτους!
 - ...αν χαλαρώσουμε την απαίτηση να ανταποκρίνονται σε πραγματικά συστήματα 😊
- Είναι λοιπόν σαφές ότι η γνώση της απόκρισης πλάτους και του πλήθους των πόλων-μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς δε μας εξασφαλίζει τη μονοσήμαντη γνώση της συνάρτησης μεταφοράς
 - ...και κατά συνέπεια της απόκρισης φάσης
- Ας θέσουμε οπότε εκ νέου το ερώτημα: ***τι χρειάζεται να γνωρίζουμε επιπλέον για να μπορούμε μονοσήμαντα να εξάγουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από την απόκριση πλάτους και το πλήθος των πόλων-μηδενικών?***
- Χρειάζεται να περιορίσουμε τις επιλογές μας στις **θέσεις** των πόλων-μηδενικών!

- Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης
- *Τι χρειάζεται να γνωρίζουμε επιπλέον για να μπορούμε μονοσήμαντα να εξάγουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από την απόκριση πλάτους και το πλήθος των πόλων-μηδενικών?*
- Η γνώση των σχετικών **θέσεων** (εντός/εκτός μον. κύκλου, κλπ) των πόλων και των μηδενικών και της απόκρισης πλάτους ορίζει μονοσήμαντα τη συνάρτηση μεταφοράς
- Για ένα σύστημα ευσταθές και αιτιατό που να έχει και ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο, όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου : σύστημα **ελάχιστης φάσης**
- Κάτι τελευταίο...
- Το πλήθος πόλων-μηδενικών είναι απαραίτητη γνώση, μαζί με την απόκριση πλάτους;
- **Ναι!** Ο λόγος είναι ότι μπορεί κανείς να προσθέσει *άπειρους* πόλους και μηδενικά χωρίς να αλλοιώσει καθόλου την απόκριση πλάτους!!
- Πώς? Πολλαπλασιάζοντας τα τέσσερα $H(z)$ που είδαμε με όρους της μορφής

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

- Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

- Τι συνεισφέρει ο παραπάνω όρος στην απόκριση πλάτους?

$$\left| \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \right|_{z=e^{j\omega}} = \left| \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \left| \frac{e^{-j\omega}(1 - a^*e^{j\omega})}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \left| \frac{1 - a^*e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = 1$$

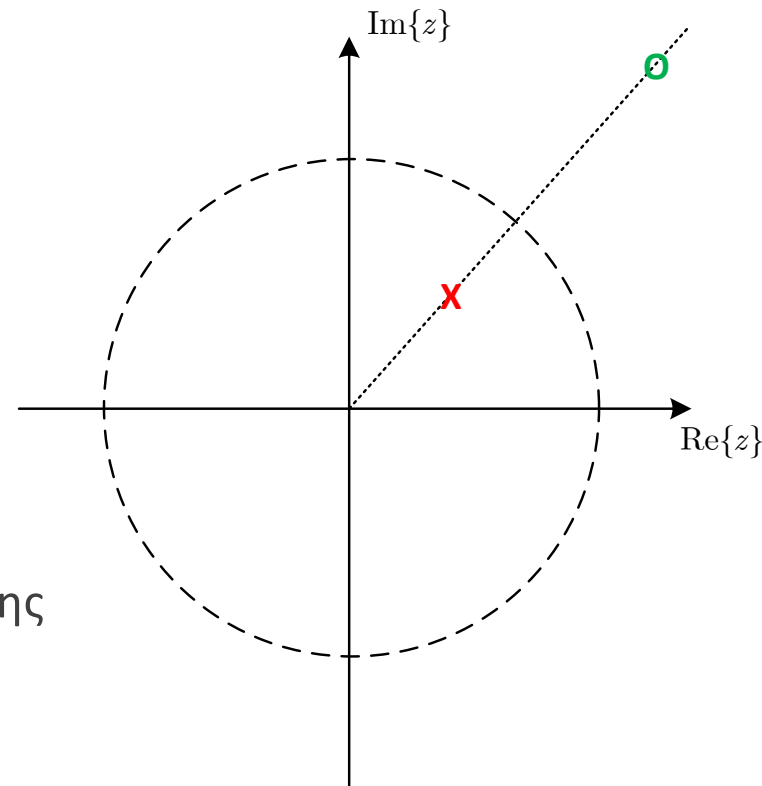
- (Μηδενικό, πόλος) = $\left(\frac{1}{a^*}, a\right)$
- Άπειρα τέτοια ζεύγη πόλων-μηδενικών δεν αλλοιώνουν την απόκριση πλάτους!
- Αλλοιώνουν ασφαλώς την απόκριση φάσης

- Τέτοια συστήματα ονομάζονται **all-pass συστήματα**

- Θα τα μελετήσουμε στη συνέχεια

- Πολλές φορές μας δίνεται το τετράγωνο της απόκρισης σε συχνότητα $|H(e^{j\omega})|^2$

- Μπορούμε να εξάγουμε πληροφορίες από αυτό?



- Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης

- Έχουμε $|H(e^{j\omega})|^2 = |H(z)|^2_{z=e^{j\omega}} = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\Big|_{z=e^{j\omega}}$

- Άρα αν

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}$$

τότε

$$|H(z)|^2 = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})(1 - b_k^* z)}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z)}$$

$$|H(z)|^2\Big|_{z=e^{j\omega}} = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^N 1 + |b_k|^2 - 2|b_k| \cos(\omega - \angle b_k)}{\prod_{k=1}^M 1 + |c_k|^2 - 2|c_k| \cos(\omega - \angle c_k)}$$

- Για κάθε πόλο $z = c_k$ του συστήματος $H(z)$, υπάρχει ένας ακόμη πόλος $z = \frac{1}{c_k^*}$ στο $|H(z)|^2$ και για κάθε μηδενικό $z = b_k$ του συστήματος $H(z)$ υπάρχει ένα ακόμη μηδενικό $z = \frac{1}{b_k^*}$ στο $|H(z)|^2$

- Το $|H(z)|^2$ διαθέτει συζυγή αμοιβαία ζεύγη πόλων-μηδενικών

- Το ένα στοιχείο του κάθε ζεύγους σχετίζεται με το $H(z)$ και το άλλο στοιχείο με το $H\left(\frac{1}{z^*}\right)$

- Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης

- Παράδειγμα:

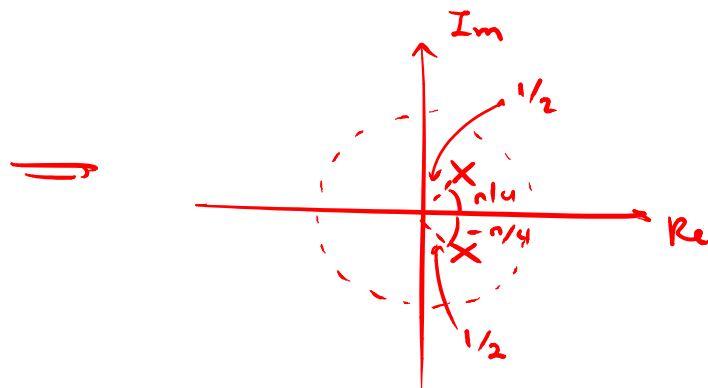
○ Βρείτε το ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(z)$ για το οποίο ισχύει

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{\frac{5}{4} - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Από την πραγ. σχέση:

$$\frac{5}{4} = 1 + |c|^2 \Rightarrow |c|^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow |c| = \frac{1}{2}$$

$$\angle c = \frac{\pi}{4}$$



$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)},$$

$|z| > \frac{1}{2}$, το \ln αιτιατό σύστημα

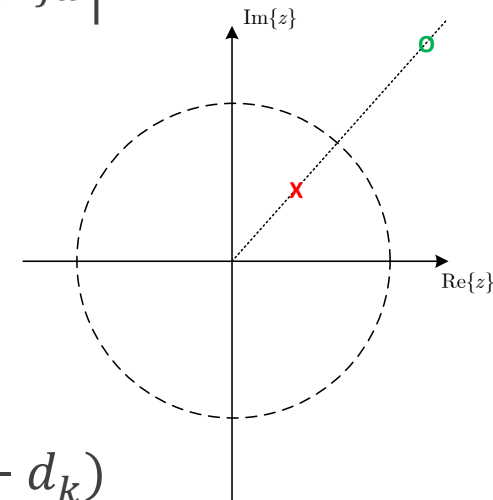
• All-pass Συστήματα

$$H(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \Rightarrow |H(e^{j\omega})| = \prod_{k=1}^N \frac{|e^{-j\omega} - a_k^*|}{|1 - a_k e^{-j\omega}|} = 1$$

- Πόλοι-μηδενικά: $\left(a_k, \frac{1}{a_k^*}\right) = \left(r_k e^{j\theta_k}, \frac{1}{r_k} e^{j\theta_k}\right)$

- Για πραγματική κρουστική απόκριση

$$H(z) = A \prod_{k=1}^{N_1} \frac{z^{-1} - b_k^*}{1 - b_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{N_2} \frac{(z^{-1} - d_k^*)(z^{-1} - d_k)}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$



- Για σύστημα πρώτης τάξης, μπορεί ναδειχθεί ότι η απόκριση φάσης είναι

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega - 2 \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)}$$

- **All-pass Συστήματα**

- Καθυστέρηση ομάδας

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)}$$

- Αν $H(z)$ ευσταθές και αιτιατό ($r < 1$) τότε $\text{grd}[H(e^{j\omega})] > 0$

- Αν $\text{grd}[H(e^{j\omega})] > 0 \Rightarrow \angle H(e^{j\omega}) \leq 0, \quad 0 \leq \omega < \pi$

- Απόκριση φάσης μη-θετική!

- **Αιτιατά all-pass συστήματα έχουν πάντα θετική καθυστέρηση ομάδας!**

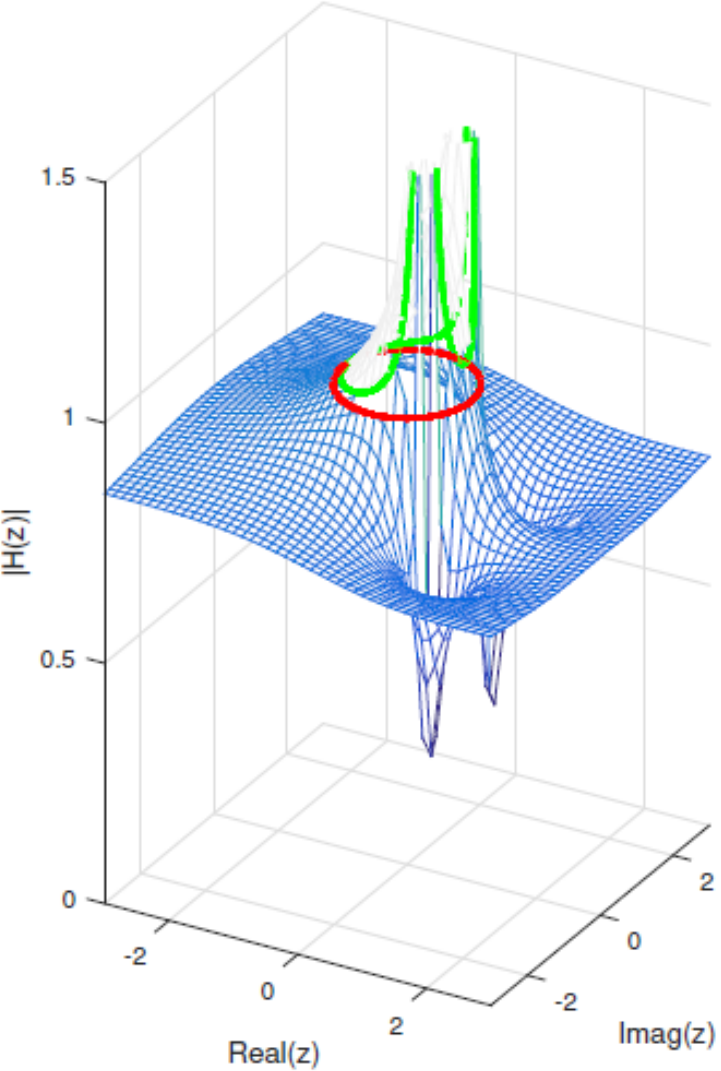
- Αυτό σημαίνει ότι μπορούν να καθυστερήσουν συνιστώσες στενής ζώνης της εισόδου τους χωρίς να επηρεάσουν το πλάτος τους!

- Που είχαμε δει κάτι παρόμοιο;

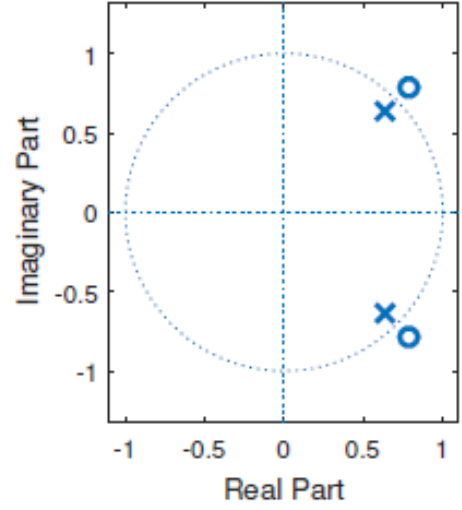
- Στην πρώτη μας συζήτηση για την καθυστέρηση ομάδας!

• All-pass Συστήματα

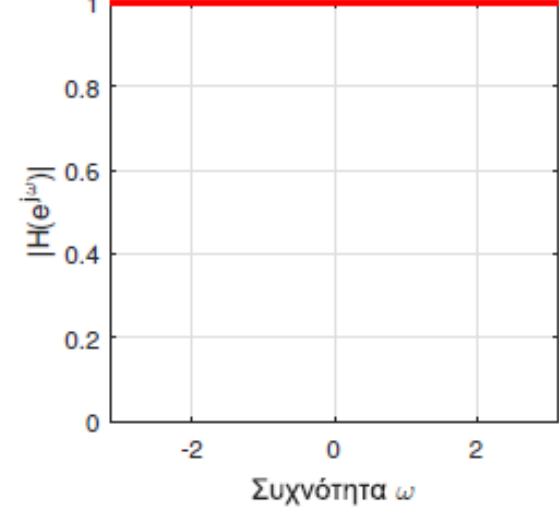
Μέτρο του Μετασχ. Z, $|H(z)|$



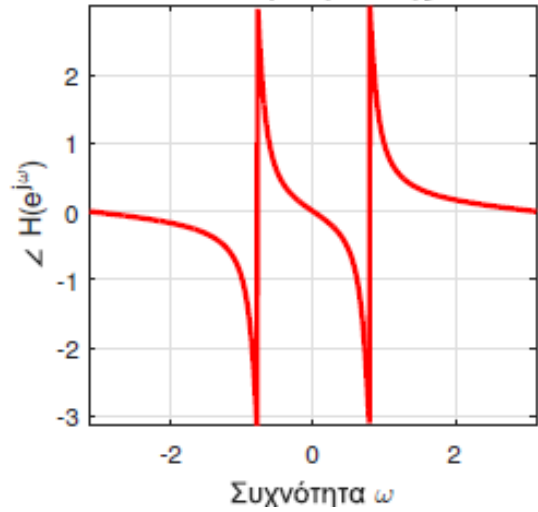
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



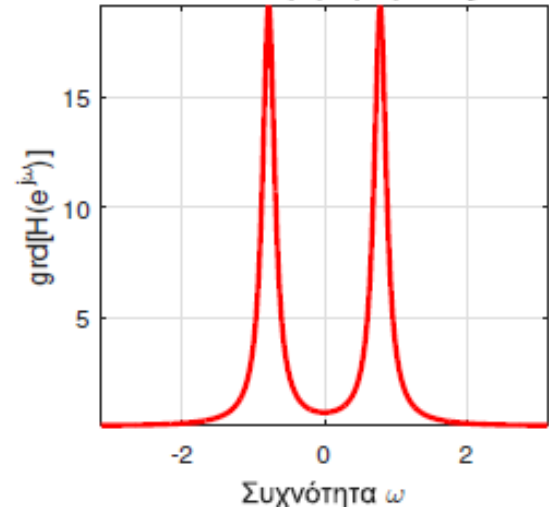
Απόκριση Πλάτους



Απόκριση Φάσης



Καθυστέρηση Ομάδας



- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα συστήματα **ελάχιστης φάσης**

- Είναι αιτιατά και ευσταθή, κι έχουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα

- Ένα οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ενός συστήματος ελάχιστης φάσης με ένα all-pass σύστημα

- Με άλλα λόγια, από ένα δεδομένο σύστημα μπορούμε πάντα να εξάγουμε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης

- Δηλ. ένα σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους, που να έχει όλους τους πόλους και τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου!
- Για την απόκριση φάσης θα μιλήσουμε αργότερα... 😊

- Θα μείνουμε κυρίως στα ευσταθή και αιτιατά ΓΧΑ συστήματα...

- ... αν και το συμπέρασμα ισχύει για κάθε σύστημα με ρητή $H(z)$

- Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z)$$

- Από την παραπάνω σχέση άμεσα προκύπτει:

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})||H_{ap}(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})|$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle H_{min}(e^{j\omega}) + \angle H_{ap}(e^{j\omega})$$

Παραγοντοποίηση ΓΧΑ Συστήματος σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass

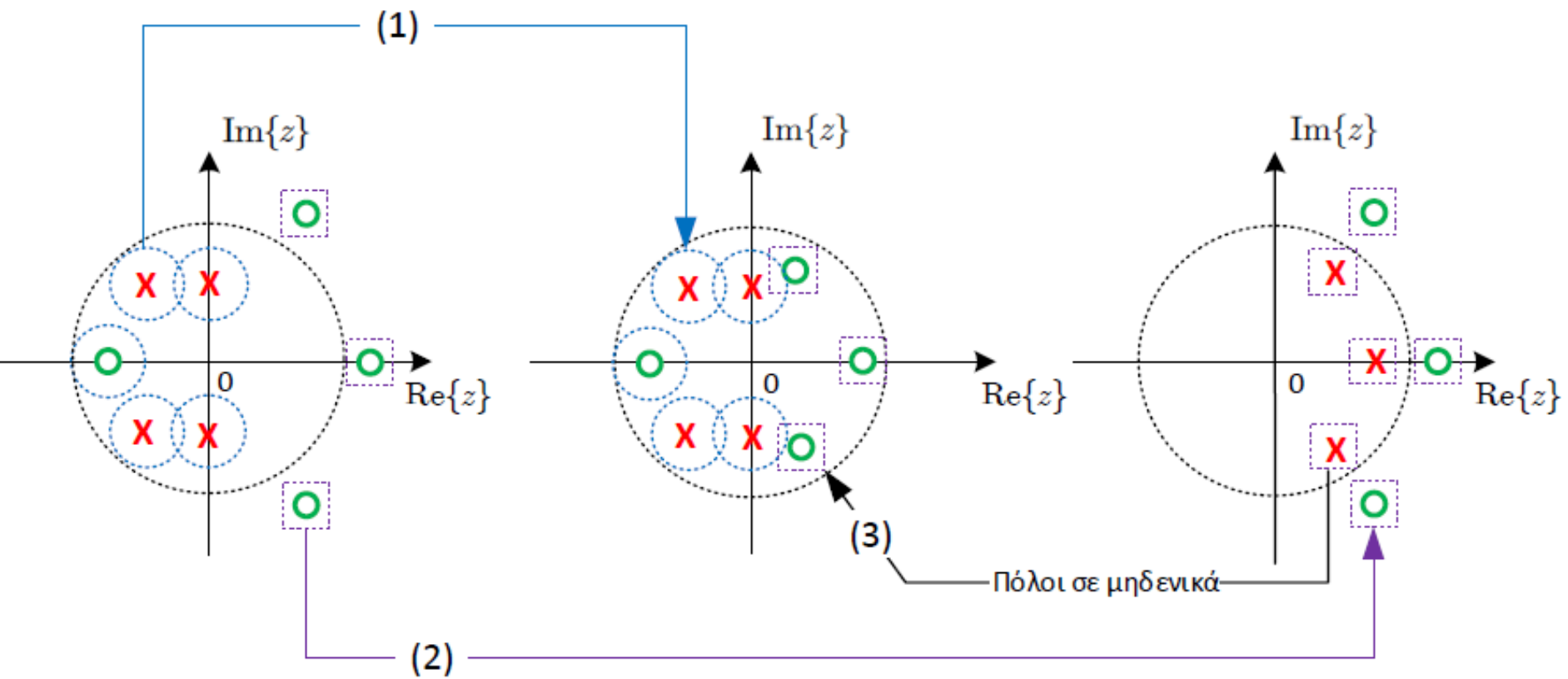
1. Όλα τα μηδενικά του $H(z)$ που βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου αντικατοπτρίζονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, στα συζυγή αμοιβαία μηδενικά. Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει είναι ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$.
2. Το all-pass συστημα επιλέγεται έτσι ώστε να αντικατοπτρίζει το καταλληλο σύνολο από μηδενικά του $H_{min}(z)$ πάλι ξανά εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Αναγκαστικά, οι πόλοι του all-pass θα πρέπει να εισαχθούν ως μηδενικά στο σύστημα ελάχιστης φάσης για να ισχύει η πράξη της διάσπασης του αρχικού συστήματος σε γινόμενο δυο συστημάτων.
3. Όταν έχουμε κατασκευάσει τις συναρτήσεις μεταφοράς $H_{min}(z)$ και $H_{ap}(z)$, ελέγχουμε αν το all-pass είναι μοναδιαίας απόκρισης πλάτους. Αν όχι, το μετατρέπουμε σε τέτοιο, και μεταφέρουμε την όποια σταθερά προκύψει στο σύστημα ελάχιστης φάσης.

• Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα

$H(z)$

$H_{min}(z)$

$H_{ap}(z)$



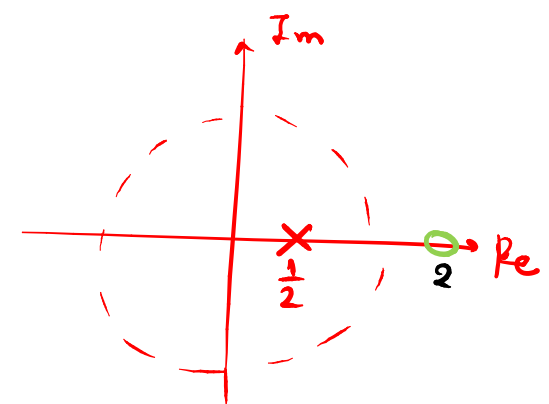
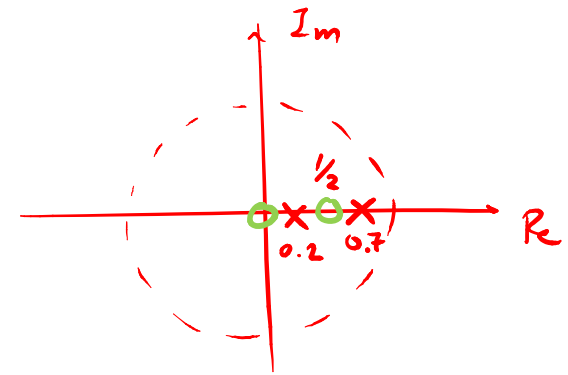
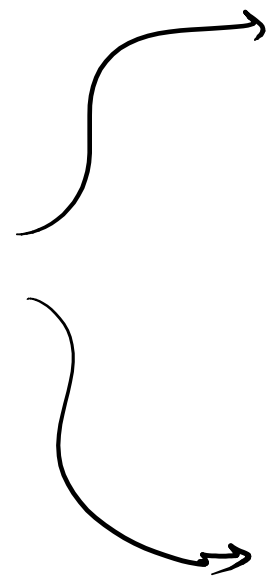
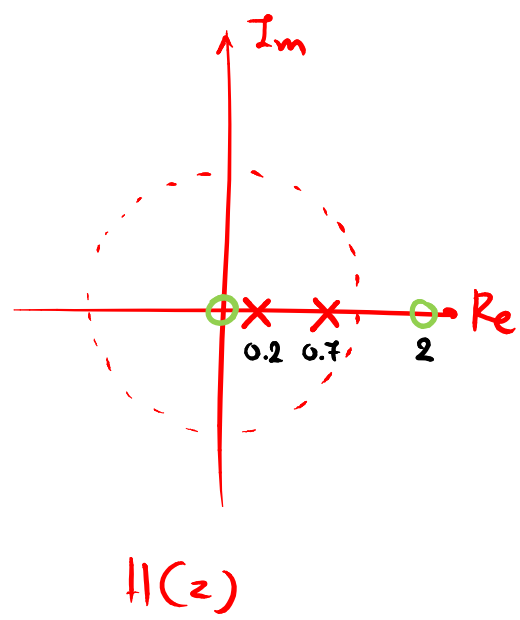
$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

• Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το σύστημα ελάχιστης φάσης που αντιστοιχεί στο σύστημα

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})}$$



$$H_{ap}(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

- Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα

- Παράδειγμα:

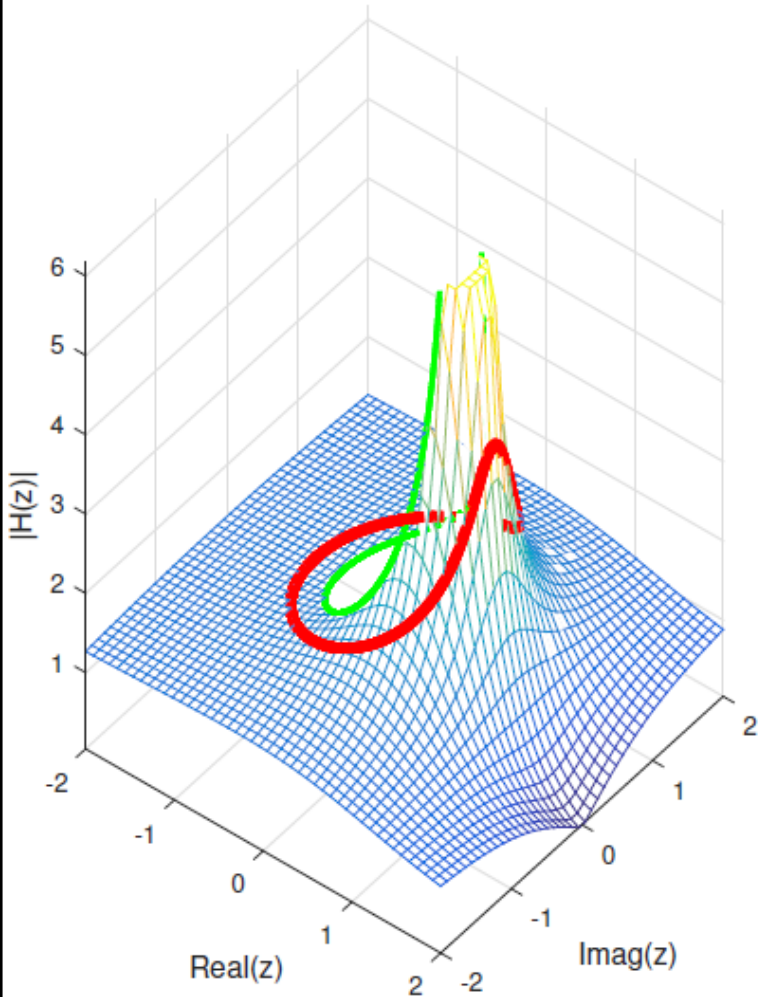
$$H_{ap}(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{-2(z^{-1} - \frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \boxed{-2} \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Rightarrow H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H_{min}(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})} = \boxed{-2} \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})}$$

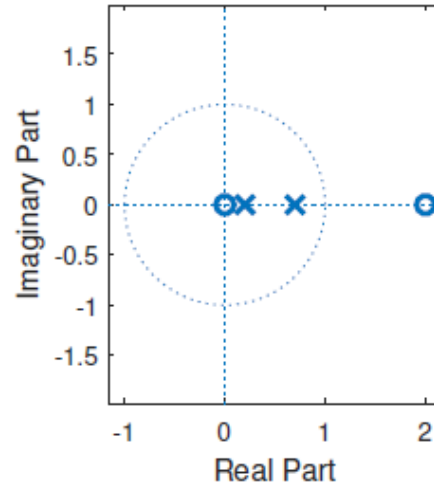
$$= \frac{z^{-1} - 2}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})}$$

- Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα
- Παράδειγμα:

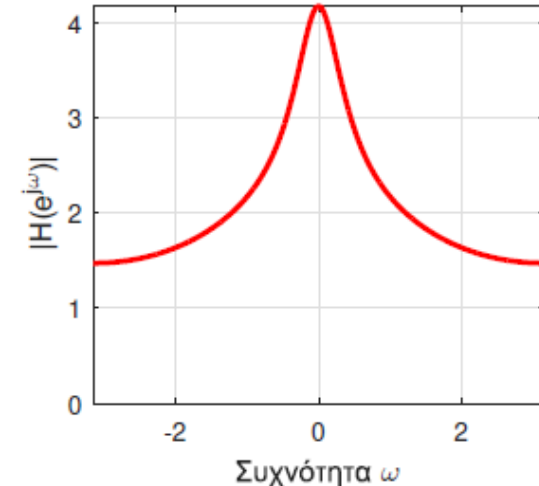
Μέτρο του Μετασχ. Z, $|H(z)|$



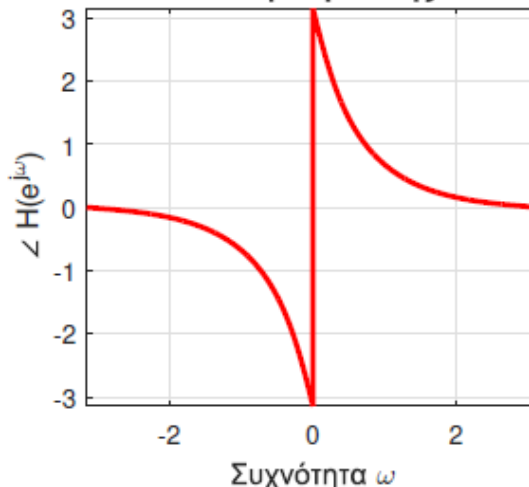
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



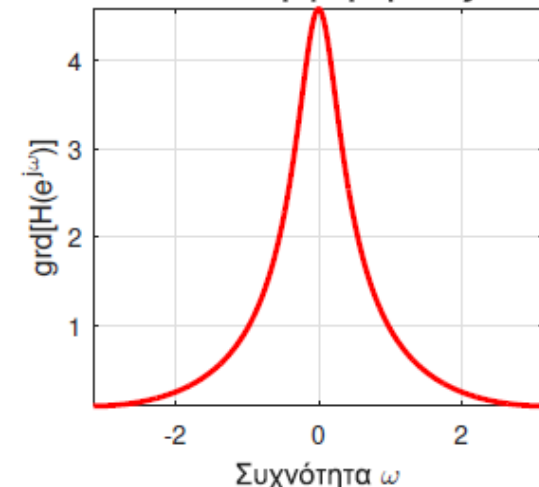
Απόκριση Πλάτους



Απόκριση Φάσης

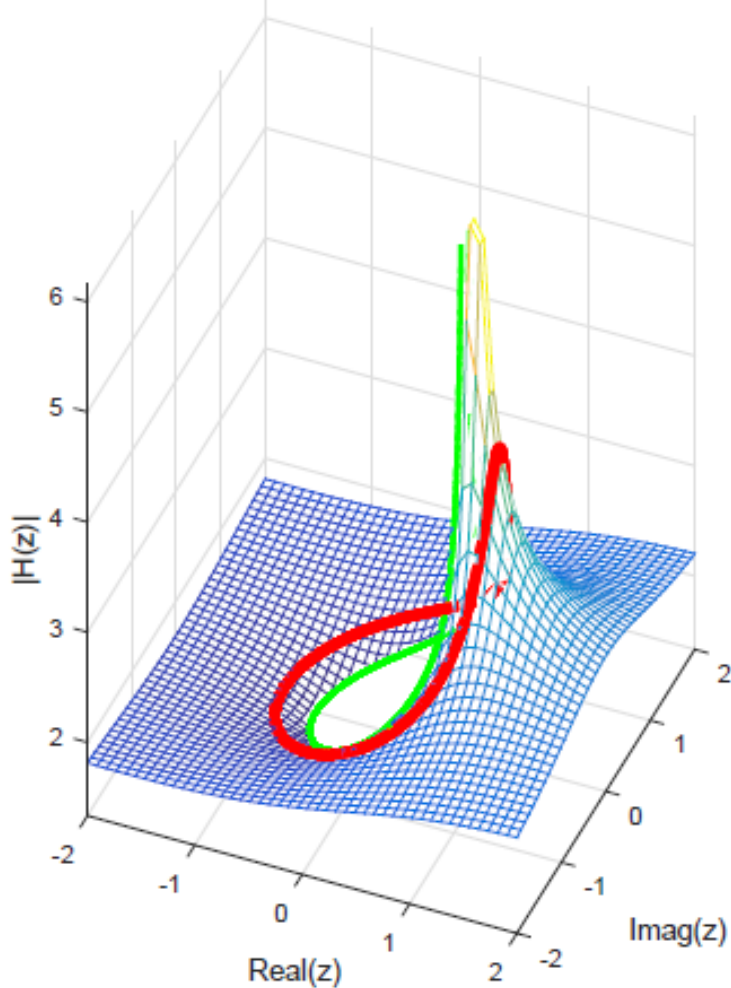


Καθυστέρηση Ομάδας

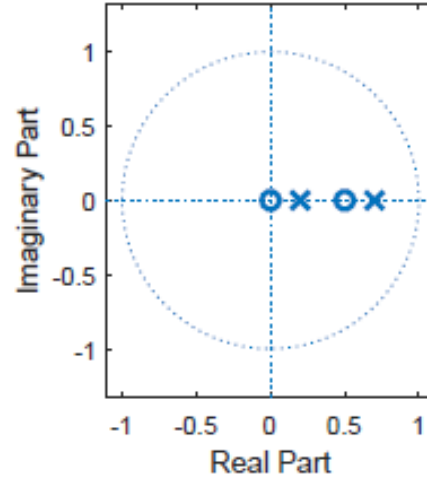


- Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα
- Παράδειγμα:

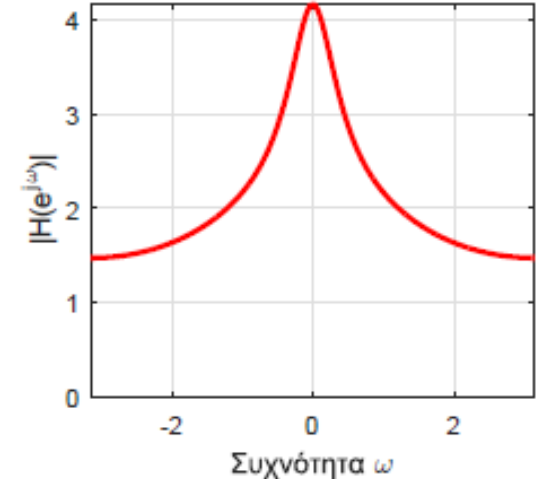
Μέτρο του Μετασχ. Z, $|H(z)|$



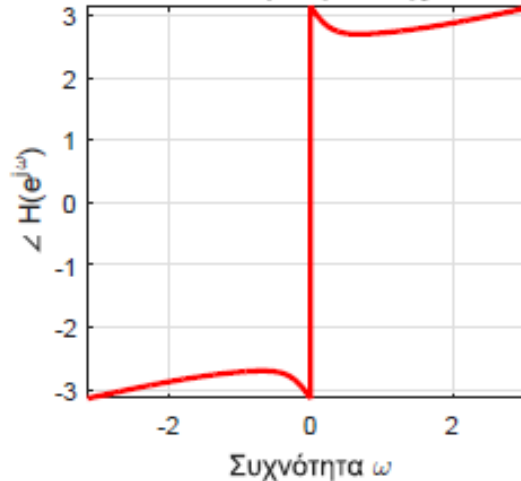
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



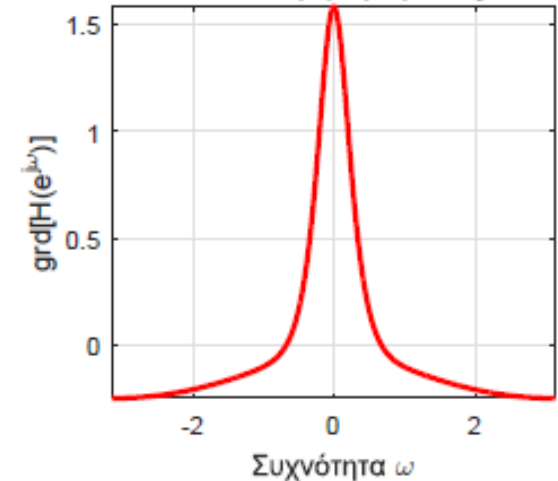
Απόκριση Πλάτους



Απόκριση Φάσης



Καθυστέρηση Ομάδας

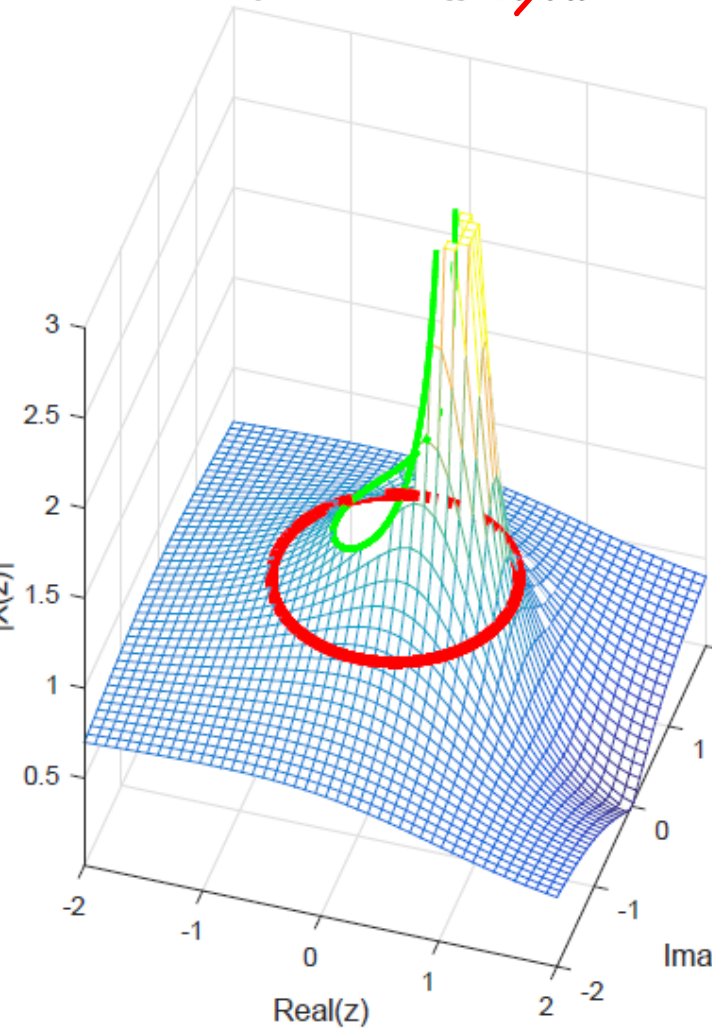


• Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα

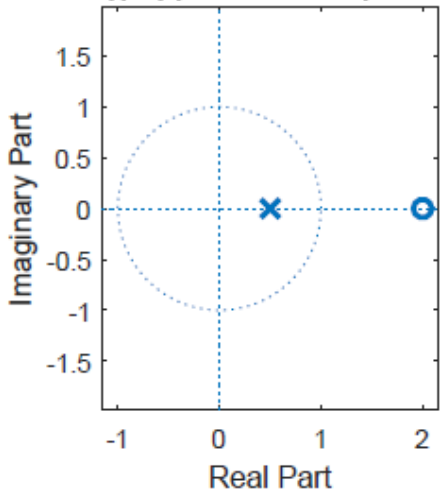
• Παράδειγμα:

$|H(z)|$

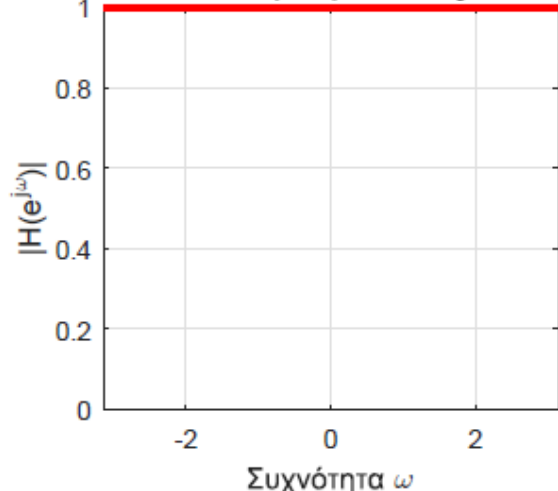
Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$



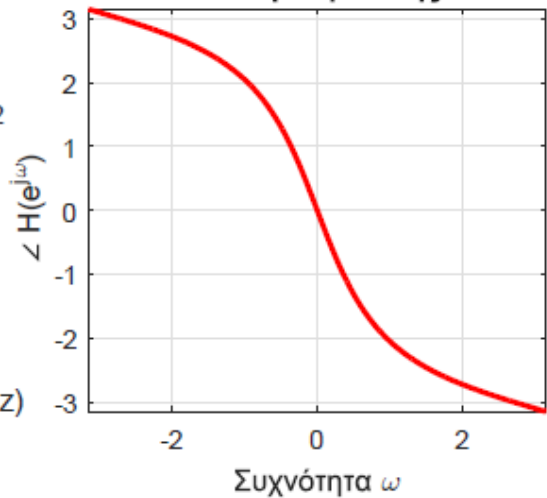
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



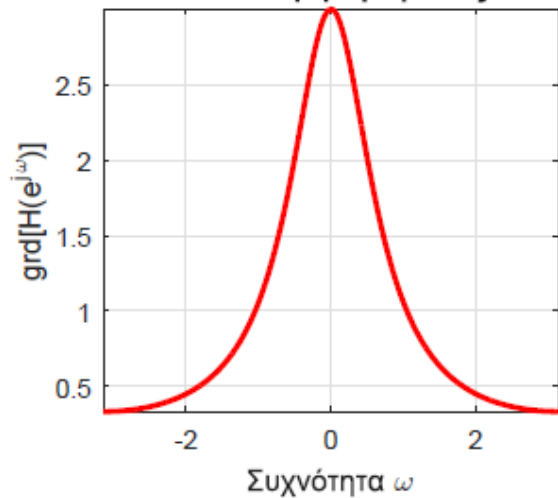
Απόκριση Πλάτους



Απόκριση Φάσης



Καθυστέρηση Ομάδας



- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**
- Χρειάζεται απαραίτητα κάθε φορά όλη η αυτή (εύκολη μεν, χρονοβόρα δε) διαδικασία για την εύρεση ενός minimum phase συστήματος?
- Όχι! 😊
- Είδαμε νωρίτερα ότι ένας όρος $1 - az^{-1}$ **εκτός** μοναδιαίου κύκλου μπορεί να «καθρεπτιστεί» **εντός** μοναδιαίου κύκλου με χρήση του όρου $z^{-1} - a^*$
- Μια τέτοια κίνηση ΔΕΝ αλλάζει την απόκριση πλάτους!
- Οπότε για την εύρεση του minimum phase συστήματος αρκεί να αλλάξουμε τους όρους $1 - az^{-1}$ **εκτός** μοναδιαίου κύκλου με όρους $z^{-1} - a^*$ **εντός** μοναδιαίου κύκλου

- Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε το σύστημα ελάχιστης φάσης που αντιστοιχεί στο σύστημα

$$H(z) = \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 9z^{-2})}{(1 - 0.81z^{-2})}$$

$$(1 - j3z^{-1})(1 + j3z^{-1})$$

Είναι :

$$H_{\min}(z) = \frac{(1 - 0.8z^{-1})(z^{-1} - 3j)(z^{-1} + 3j)}{(1 - 0.81z^{-2})}$$

Σημείωση: Η "σταθερά" του προηγ. παραδείγματος βρίσκεται "πρυτύνει" κι εδώ.
Πώς? (next slide)

$1 - az^{-1}$, $z^{-1} - a^*$
έχουν την ίδια συνεισφορά στο μοναδ. κνηθ

- Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα

- Παράδειγμα:

$$H_{\min}(z) = \frac{(1 - 0.8z^{-1})(-3j)(1 + \frac{1}{3}jz^{-1})(+3j)(1 - \frac{1}{3}jz^{-1})}{(1 - 0.81z^{-2})}$$

$$= (-3j)(3j) \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + \frac{1}{3}jz^{-1})(1 - \frac{1}{3}jz^{-1})}{(1 - 0.81z^{-2})}$$

$$= 9 \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + \frac{1}{3}jz^{-1})(1 - \frac{1}{3}jz^{-1})}{(1 - 0.81z^{-2})}$$

“σταθικά”



• Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

- Συστήματα με όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου
- Εναλλακτικά, συστήματα αιτιατά και ευσταθή, και με αιτιατό και ευσταθές αντίστροφο σύστημα
- Γιατί τα συστήματα αυτά ονομάζονται ελάχιστης φάσης?
- Η επιλογή του ονόματος προέρχεται από μια ιδιότητα της απόκρισης φάσης τους
- Ας τη δούμε, μαζί με άλλες δυο σημαντικές ιδιότητες των συστημάτων αυτών

• Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

- Έχουμε δείξει ότι

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle H_{min}(e^{j\omega}) + \angle H_{ap}(e^{j\omega})$$

- Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\angle H_{ap}(e^{j\omega}) \leq 0 \quad \forall \omega \in [0, \pi]$$

- Έτσι

$$\angle H(e^{j\omega}) \leq \angle H_{min}(e^{j\omega})$$

- Αυτό σημαίνει ότι ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την **απόκριση φάσης με τις μεγαλύτερες τιμές** από κάθε άλλο σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους
- Εναλλακτικά, αν ορίσουμε την συνάρτηση «καθυστέρηση φάσης» ως την αρνητική της απόκρισης φάσης

$$\theta(\omega) = -\angle H(e^{j\omega})$$

τότε το αιτιατό και ευσταθές σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την καθυστέρηση φάσης με τις μικρότερες τιμές από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους

- Ένα πιο σωστό όνομα για τα συστήματα αυτά θα ήταν «ελάχιστης καθυστέρησης φάσης», αλλά έχει επικρατήσει απλά το «ελάχιστης φάσης»

• Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

- Έχουμε δείξει ότι

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle H_{min}(e^{j\omega}) + \angle H_{ap}(e^{j\omega})$$

- Κατά συνέπεια

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \text{grd}[H_{min}(e^{j\omega})] + \text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

- Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})] > 0 \quad \forall \omega \in [0, \pi]$$

- Έτσι

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] > \text{grd}[H_{min}(e^{j\omega})]$$

- Αυτό σημαίνει ότι ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την **καθυστέρηση ομάδας με τις μικρότερες τιμές, δηλ. την ελάχιστη καθυστέρηση ομάδας** από κάθε άλλο σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους
- Ένα πιο σωστό όνομα για τα συστήματα αυτά θα ήταν «ελάχιστης καθυστέρησης ομάδας», αλλά δε χρησιμοποιείται αυτός ο όρος

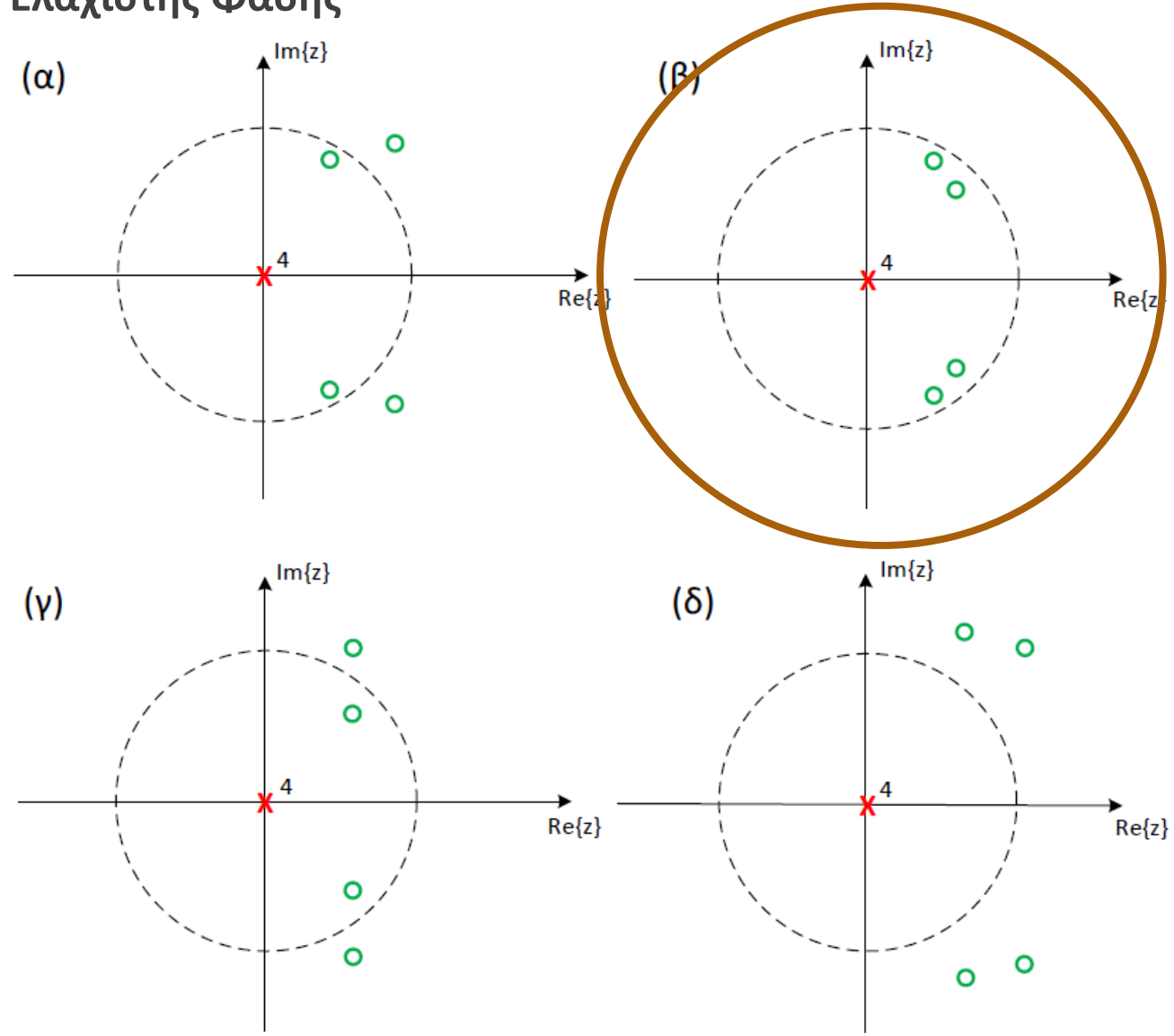
• Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

- Μπορεί ναδειχθεί ότι η κρουστική απόκριση $h_{min}[n]$ ενός συστήματος ελάχιστης φάσης και οι κρουστικές αποκρίσεις $h[n]$ άλλων συστημάτων με την ίδια απόκριση πλάτους ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{k=0}^n |h[k]|^2 \leq \sum_{k=0}^n |h_{min}[k]|^2$$

- Αυτή η σχέση σημαίνει ότι στα συστήματα ελάχιστης φάσης, η **μερική ενέργεια του συστήματος είναι περισσότερο συγκεντρωμένη στα πρώτα δείγματα της κρουστικής απόκρισης**
- Όλα τα άλλα συστήματα έχουν την ενέργεια των πρώτων δειγμάτων διαφορετικά κατανομημένη και πιο «διάσπαρτη» στα πρώτα δείγματα
- Προσέξτε, η ιδιότητα μιλά για την κατανομή της ενέργειας στα πρώτα δείγματα
 - Όχι για τη συνολική ενέργεια, η οποία είναι ίδια σε όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους!
 - Λόγω φυσικά του θεωρήματος Parseval
- Ας δούμε ένα παράδειγμα.

• Συστήματα Ελάχιστης Φάσης



• Ποιο σύστημα από τα τέσσερα είναι ελάχιστης φάσης? ☺

• Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

- Αν υπολογίσουμε τις κρουστικές αποκρίσεις των τεσσάρων συστημάτων με τα προηγούμενα διαγράμματα πόλων-μηδενικών, τότε παρατηρούμε την παρακάτω εικόνα για την ενέργεια των πρώτων δειγμάτων αυτών των κρουστικών αποκρίσεων

Μερική ενέργεια συστημάτων

	$h_{min}[n]$	$h_1[n]$	$h_2[n]$	$h_3[n]$
$n = 0$	1.00	0.64	0.81	0.51
$n = 1$	3.03	2.34	2.62	2.01
$n = 2$	5.45	4.88	5.16	4.47
$n = 3$	6.99	6.70	6.87	6.51
$n = 4$	7.51	7.51	7.51	7.51

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης

- Ξέρουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να προκαλέσει σημαντική διαταραχή στη χρονική δομή ενός σήματος που δέχεται στην είσοδό του αν η απόκριση φάσης του δεν είναι σταθερή ή γραμμική
- Συστήματα **γραμμικής** φάσης είναι πολύ επιθυμητά και χρήσιμα στην πράξη
 - Καθυστερούν όλες τις συνιστώσες εισόδου το ίδιο στην έξοδο
 - Δε διαταράσσουν τη χρονική δομή του σήματος εισόδου
- Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει γραμμική φάση αν $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j(a\omega+\beta)}$, $a, \beta \in \mathfrak{R}$
- Θα μας απασχολήσουν μόνο **FIR αιτιατά συστήματα γραμμικής φάσης**
 - ...τα οποία είναι υποχρεωτικά ευσταθή, ως FIR 😊
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι τέτοια συστήματα ικανοποιούν κάποιες συμμετρίες στην κρουστική τους απόκριση
- Υπάρχουν 4 **κατηγορίες** ΓΧΑ FIR συστημάτων γραμμικής φάσης
 - ...ανάλογα με το είδος της συμμετρίας της κρουστικής τους απόκρισης
- **Κατηγορίες : «Τύποι»: I, II, III, IV**

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου I

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου I έχει συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \mathbf{M \text{ άρτιο}}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \in \mathbb{Z}$

- Απόκριση Συχνότητας

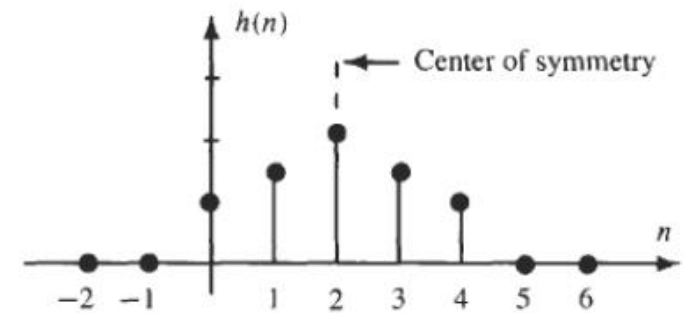
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M h[n]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=(M+2)/2}^M h[n]e^{-j\omega n} + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[M-n]e^{-j\omega(M-n)} + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} h[n]e^{j\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)} + \sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} h[n]e^{-j\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)} + h\left[\frac{M}{2}\right] \right)$$

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}} \left(\sum_{n=1}^{M/2} 2h\left[\frac{M}{2}-n\right]\cos(\omega n) + h\left[\frac{M}{2}\right] \right)$$



(a) Type I filter.

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου I

- Οπότε συνολικά

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_k \cos(k\omega)$$

με

$$a_k = 2h \left[\frac{M}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

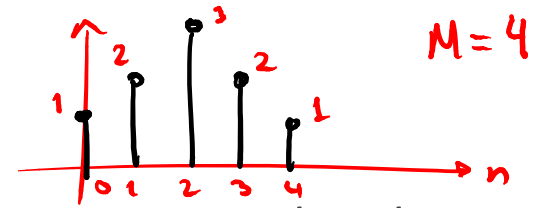
$$a_0 = h \left[\frac{M}{2} \right]$$

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου I

- Παράδειγμα:

- Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας για το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = [1, 2, 3, 2, 1]$$



$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^4 h[n] e^{-j\omega n} = h[0] e^{j0} + h[1] e^{-j\omega} + h[2] e^{-j2\omega} + h[3] e^{-j3\omega} + h[4] e^{-j4\omega}$$

$$= h[0] + h[1] e^{-j\omega} + h[2] e^{-j2\omega} + h[3] e^{-j3\omega} + h[4] e^{-j4\omega}$$

\Rightarrow έρω ότι $h[0] = h[4]$, $h[1] = h[3]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H(e^{j\omega}) &= h[0] + h[1] e^{-j\omega} + h[2] e^{-j2\omega} + h[1] e^{-j3\omega} + h[0] e^{-j4\omega} \\ &= h[0] (1 + e^{-j4\omega}) + h[1] (e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}) + h[2] e^{-j2\omega} \\ &= e^{-j2\omega} \left(h[0] (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) + h[1] (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + h[2] \right) \end{aligned}$$

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου I

- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας για το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = [1, 2, 3, 2, 1]$$

$$= e^{-j2\omega} \left(h[0] \cdot 2 \cos(2\omega) + h[1] \cdot 2 \cos(\omega) + h[2] \right)$$

$$= e^{-j2\omega} \left(2h\left[\frac{4}{2}-2\right] \cos(2\omega) + 2h\left[\frac{4}{2}-1\right] \cos(\omega) + h\left[\frac{4}{2}\right] \right), \quad M=4$$

$$= e^{-j\frac{M}{2}\omega} \left[2h\left[\frac{M}{2}-2\right] \cos(2\omega) + 2h\left[\frac{M}{2}-1\right] \cos(1\omega) + h\left[\frac{M}{2}\right] \right]$$

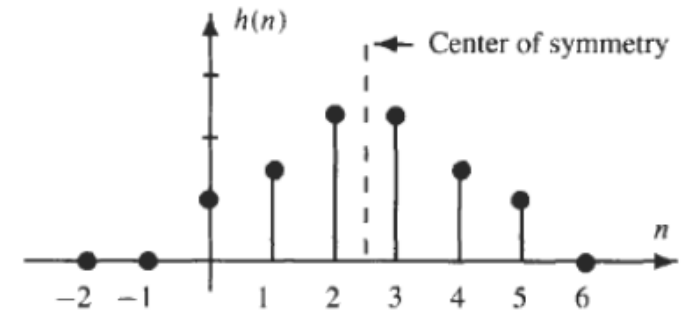
$$= e^{-j\frac{M}{2}\omega} \left(\sum_{k=1}^M 2h\left[\frac{M}{2}-k\right] \cos(k\omega) + h\left[\frac{M}{2}\right] \right)$$

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου II

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου II έχει συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \mathbf{M \text{ περιττό}}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \notin \mathbb{Z}$
- Απόκριση Συχνότητας
 - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι



(b) Type II filter.

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M+1}{2}} b_k \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

$$b_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$$

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου III

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου III έχει αντι-συμμετρική κρουστική απόκριση

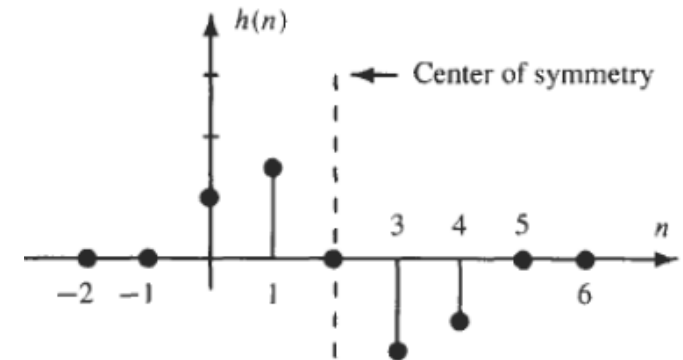
$$h[n] = -h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \mathbf{M \text{ άρτιο}}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \in \mathbb{Z}$
- Απόκριση Συχνότητας
 - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} c_k \sin(k\omega)$$

με

$$c_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$



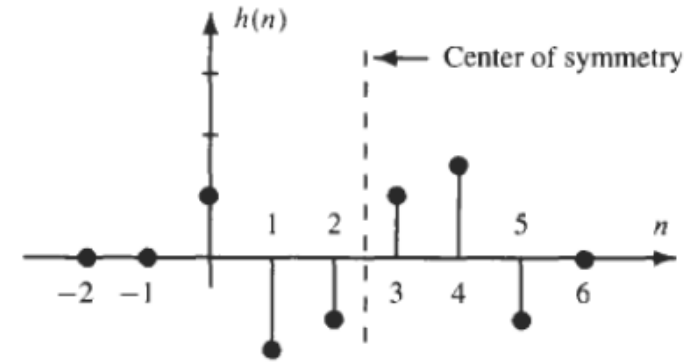
(c) Type III filter.

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου IV

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου IV έχει αντι-συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = -h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \mathbf{M \text{ περιττό}}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \notin \mathbb{Z}$
- Απόκριση Συχνότητας
 - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι



(d) Type IV filter.

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\frac{M+1}{2}} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

$$d_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$$

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης - Σύνοψη

Τύπου I – συμμετρική $h[n]$ – άρτιο M

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_k \cos(k\omega)$$

με

$$a_k = 2h \left[\frac{M}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

$$a_0 = h \left[\frac{M}{2} \right]$$

Τύπου II – συμμετρική $h[n]$ – περιττό M

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M+1}{2}} b_k \cos \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \omega \right)$$

με

$$b_k = 2h \left[\frac{M+1}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$$

Τύπου III – αντισυμμετρική $h[n]$ – άρτιο M

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j \left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2} \right)} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} c_k \sin(k\omega)$$

με

$$c_k = 2h \left[\frac{M}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

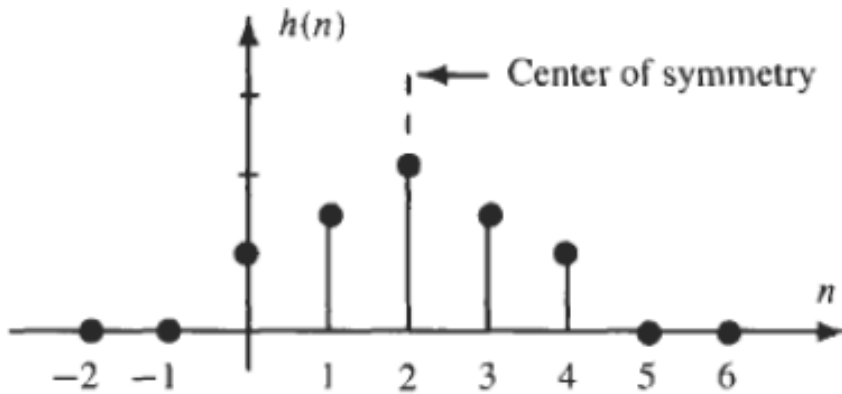
Τύπου IV – αντισυμμετρική $h[n]$ – περιττό M

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j \left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2} \right)} \sum_{k=0}^{\frac{M+1}{2}} d_k \sin \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \omega \right)$$

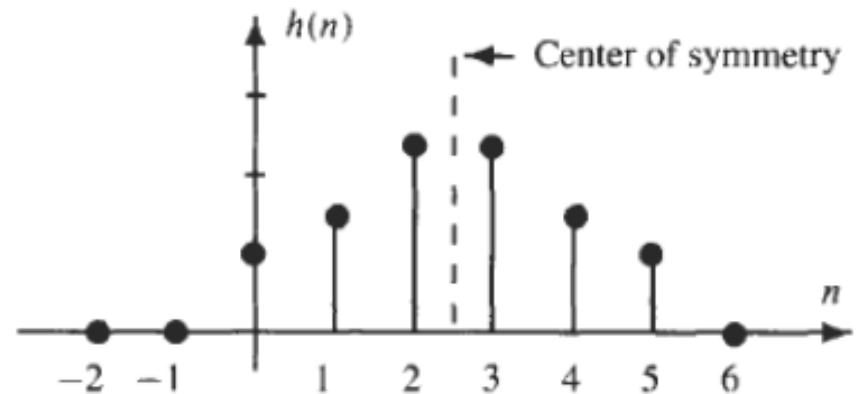
με

$$d_k = 2h \left[\frac{M+1}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$$

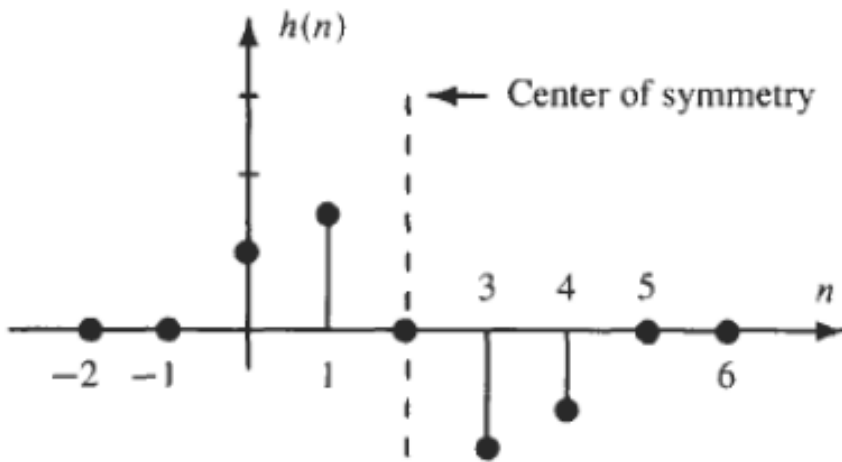
• Συστήματα Γραμμικής Φάσης - Σύνοψη



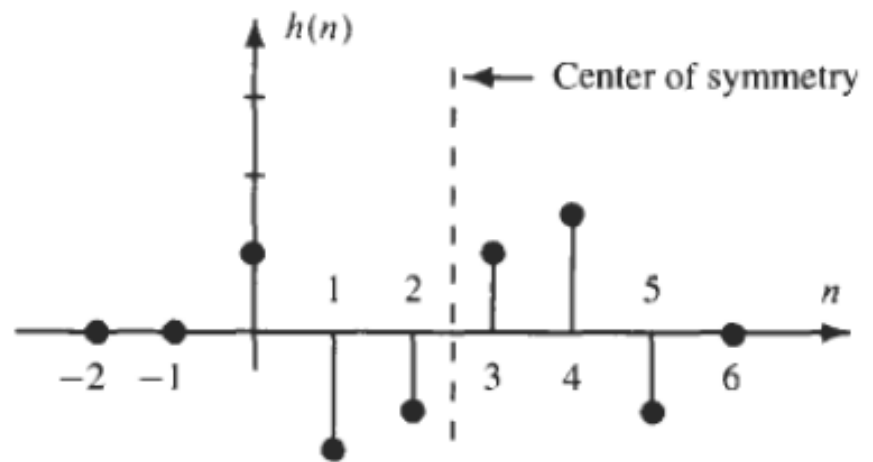
(a) Type I filter.



(b) Type II filter.



(c) Type III filter.



(d) Type IV filter.

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης – Σύνοψη

- Συνολικά, η απόκριση συχνότητας των συστημάτων που είδαμε γράφεται

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)} \sum p_k S(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)} A(e^{j\omega})$$

- Το $A(e^{j\omega})$ είναι πραγματική συνάρτηση του ω και ονομάζεται «ψευδοπλάτος»
 - Ως πραγματική συνάρτηση, η φάση της θα είναι 0 ή $\pm\pi$
- Για $0 \leq \omega \leq \pi$, η απόκριση φάσης $\angle H(e^{j\omega})$ γράφεται

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\frac{\omega M}{2}, & \text{τύπου I, II, } A(e^{j\omega}) > 0 \\ -\frac{\omega M}{2} + \pi, & \text{τύπου I, II, } A(e^{j\omega}) < 0 \\ -\frac{\omega M}{2} + \frac{\pi}{2}, & \text{τύπου III, IV, } A(e^{j\omega}) > 0 \\ -\frac{\omega M}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi, & \text{τύπου III, IV, } A(e^{j\omega}) < 0 \end{cases}$$

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

- Οι προηγούμενες σχέσεις δε μας δίνουν ιδιαίτερη διαίσθηση για τη συμπεριφορά των συστημάτων γραμμικής φάσης στο χώρο της συχνότητας

- Θα πρέπει να περάσουμε στο χώρο του Z για να λάβουμε αυτήν την πληροφορία

- Προφανώς, για αιτιατά ΓΧΑ συστήματα γραμμικής φάσης, όλοι οι πόλοι θα βρίσκονται στο $z = 0$

- Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Τύπου I, II: $h[n] = h[M - n] \leftrightarrow H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$

- Τύπου III, IV: $h[n] = -h[M - N] \leftrightarrow H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$

- Μας ενδιαφέρουν μόνο τα μηδενικά των συστημάτων, όπως είπαμε

- Παρατηρήστε ότι:

- Αν $z = z_0$ ένα μηδενικό του συστήματος $H(z)$, τότε υποχρεωτικά και το $z = \frac{1}{z_0}$ είναι μηδενικό του συστήματος

- Το ζεύγος $(z_0, \frac{1}{z_0})$ λέγεται αμοιβαίο

- Το ζεύγος $(z_0, \frac{1}{z_0^*})$ λέγεται συζυγές αμοιβαίο

- Αν θέλω λοιπόν να σχεδιάσω ένα FIR γραμμικής φάσης με ένα μηδενικό στη θέση $z = z_0$, πρέπει **υποχρεωτικά** να βάλω κι ένα μηδενικό στη θέση $z = \frac{1}{z_0}$!!!

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Άρα, με βάση την προηγούμενη παρατήρηση:

- Το $H(z)$ μπορεί να έχει μηδενικά:

- συζυγή, επάνω στο μοναδιαίο κύκλο: $z_k = e^{\pm j\theta_k}$

- αμοιβαία, στον πραγματικό άξονα: $z_k = a, z_k = \frac{1}{a}, \quad a \in \mathfrak{R}$

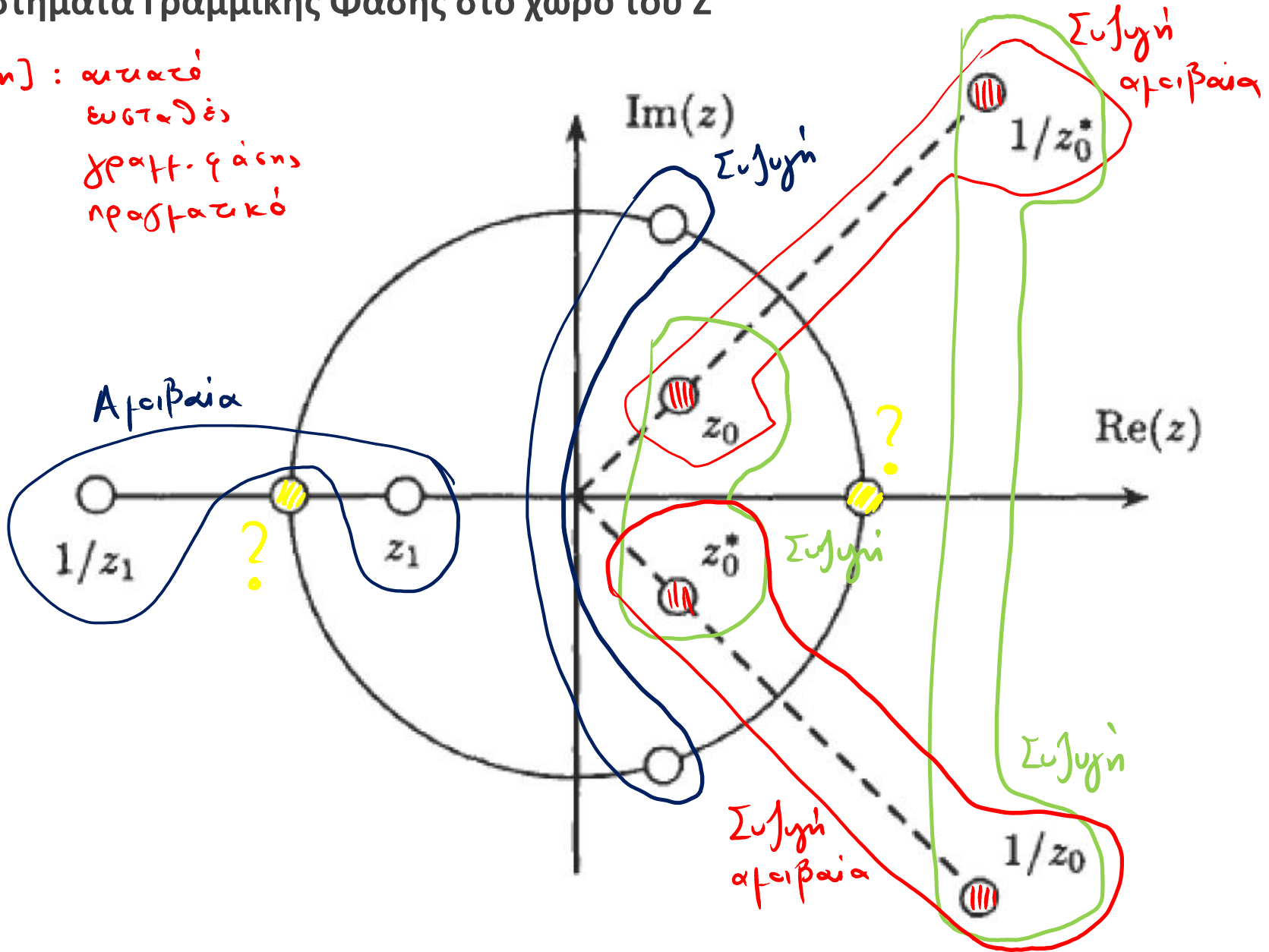
- αμοιβαία, αλλού: $z_k = r_k e^{\pm j\theta_k}, r_k \neq 1$ και $z_k = \frac{1}{r_k} e^{\mp j\theta_k}$

- Αν επιπλέον το $H(z)$ είναι πραγματικό σύστημα, τότε το $H(z)$ μπορεί να έχει ομάδες τεσσάρων μιγαδικών μηδενικών

$$\left(z_k = r_k e^{\pm j\theta_k}, z_k = \frac{1}{r_k} e^{\mp j\theta_k} \right)$$

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

$h[n]$: αυθαίρετο
 ευσταθές
 γραμμ. φάσης
 πραγματικό



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Τύπου I, II: $h[n] = h[M - n] \leftrightarrow H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$

- Τύπου III, IV: $h[n] = -h[M - N] \leftrightarrow H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$

- Μας ενδιαφέρουν μόνο τα μηδενικά των συστημάτων, όπως είπαμε

- Παρατηρήστε ότι:

- Αν $z = z_0$ ένα μηδενικό του συστήματος $H(z)$, τότε υποχρεωτικά και το $z = \frac{1}{z_0}$ είναι μηδενικό του συστήματος

- Το ζεύγος $(z_0, \frac{1}{z_0})$ λέγεται αμοιβαίο

- Το ζεύγος $(z_0, \frac{1}{z_0^*})$ λέγεται συζυγές αμοιβαίο

- Αν θέλω λοιπόν να σχεδιάσω ένα FIR γραμμικής φάσης με ένα μηδενικό στη θέση $z = z_0$, πρέπει **υποχρεωτικά** να βάλω κι ένα μηδενικό στη θέση $z = \frac{1}{z_0}$!!!

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Άρα, με βάση την προηγούμενη παρατήρηση:

- Το $H(z)$ μπορεί να έχει μηδενικά:

- συζυγή, επάνω στο μοναδιαίο κύκλο: $z_k = e^{\pm j\theta_k}$

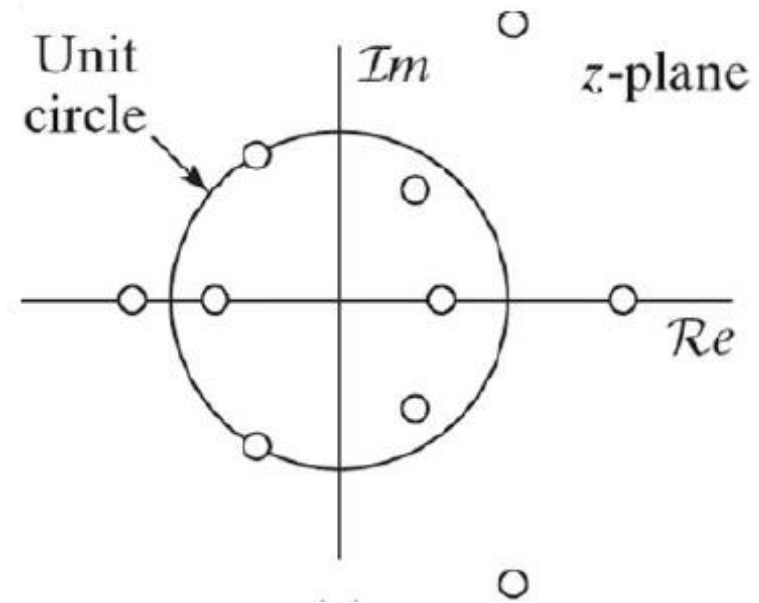
- αμοιβαία, στον πραγματικό άξονα: $z_k = a, z_k = \frac{1}{a}, \quad a \in \mathfrak{R}$

- αμοιβαία, αλλού: $z_k = r_k e^{\pm j\theta_k}, r_k \neq 1$ και $z_k = \frac{1}{r_k} e^{\mp j\theta_k}$

- Αν επιπλέον το $H(z)$ είναι πραγματικό σύστημα, τότε το $H(z)$ μπορεί να έχει ομάδες τεσσάρων μιγαδικών μηδενικών

$$\left(z_k = r_k e^{\pm j\theta_k}, z_k = \frac{1}{r_k} e^{\mp j\theta_k} \right)$$

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z
- Θα επιμείνουμε λίγο περισσότερο στις θέσεις $z = \pm 1$
- Τύπου I : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$: ταυτότητα
- Τύπου I : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$: ταυτότητα



• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

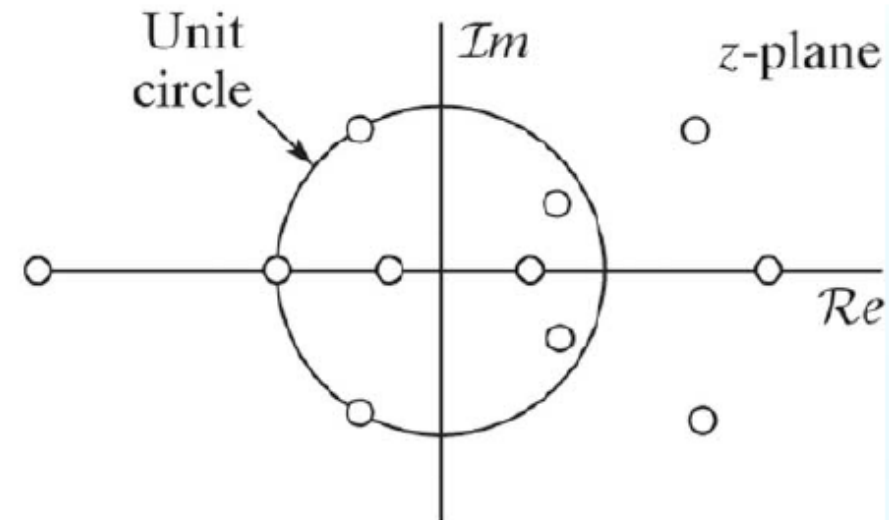
• Θα επιμείνουμε λίγο περισσότερο στις θέσεις $z = \pm 1$

• Τύπου II : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M περιττό, για $z = 1$: ταυτότητα

• Τύπου II : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M περιττό, για $z = -1$:

$$H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

□ Άρα για $\omega = \pi \Rightarrow H_{II}(e^{j\pi}) = 0!$



• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

- Τύπου III : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$:

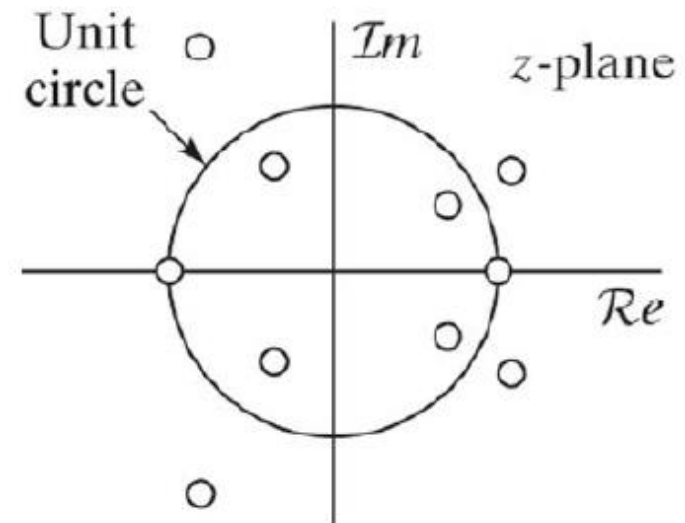
$$H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$$

□ Άρα για $\omega = 0 \Rightarrow H_{III}(e^{j0}) = 0!$

- Τύπου III : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$:

$$H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

□ Άρα για $\omega = \pi \Rightarrow H_{III}(e^{j\pi}) = 0!$



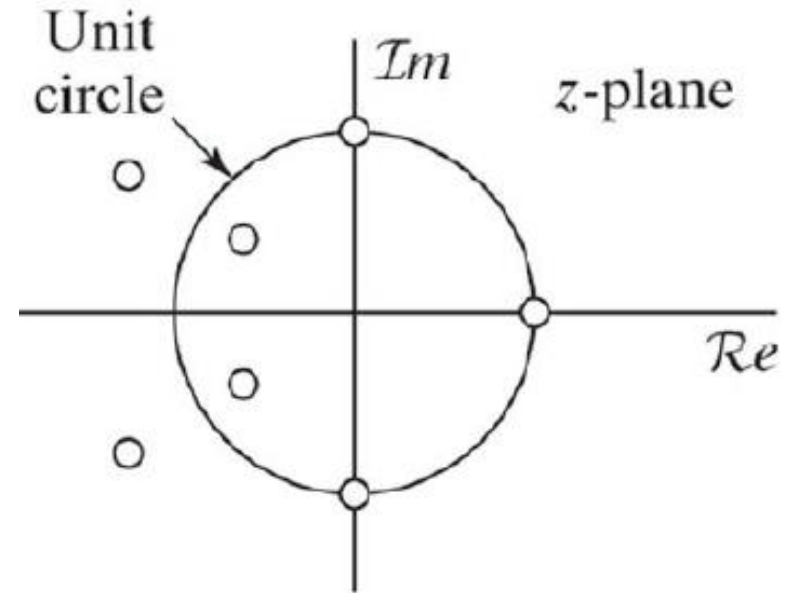
• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

- Τύπου IV : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$:

$$H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$$

□ Άρα για $\omega = 0 \Rightarrow H_{IV}(e^{j0}) = 0!$

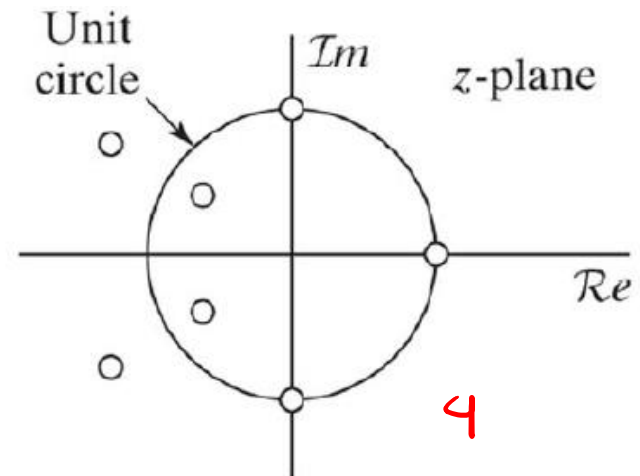
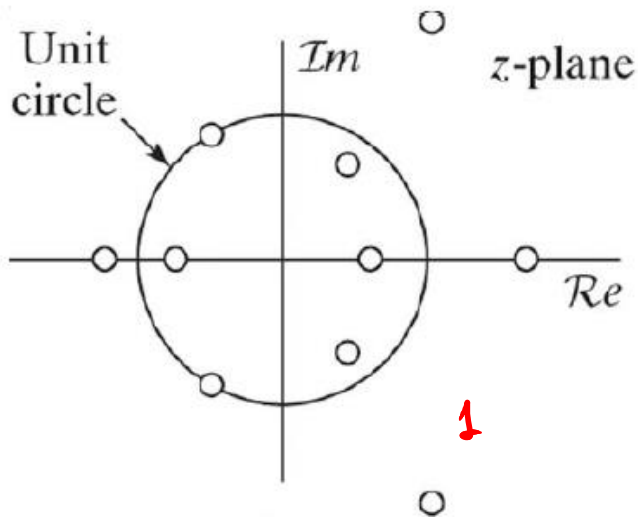
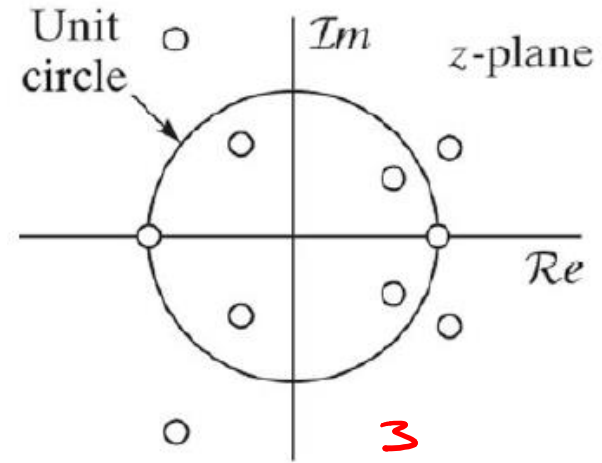
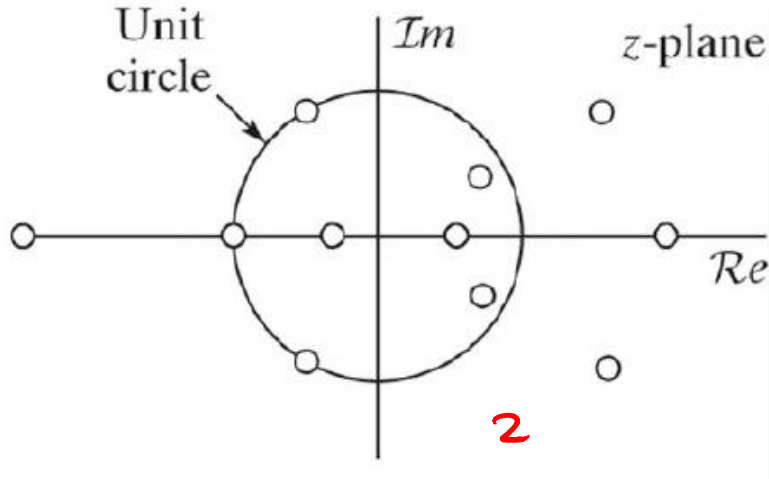
- Τύπου IV : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$: ταυτότητα



- Συστήματα Γραμμικής Φάσης – Σύνοψη

Τύπου I – συμμετρική $h[n]$ – άρτιο M	Τύπου II – συμμετρική $h[n]$ – περιττό M
Χωρίς δέσμευση μηδενικών	$H_{II}(e^{j\pi}) = 0$
Τύπου III – αντισυμμετρική $h[n]$ – άρτιο M	Τύπου IV – αντισυμμετρική $h[n]$ – περιττό M
$H_{III}(e^{j0}) = 0, H_{III}(e^{j\pi}) = 0$	$H_{IV}(e^{j0}) = 0$

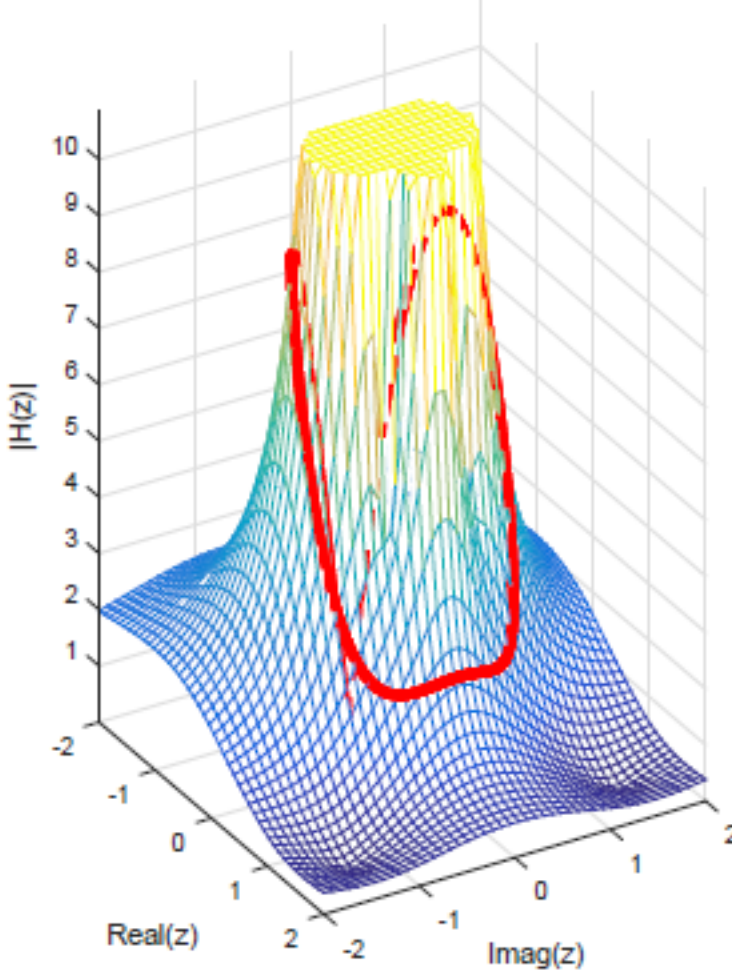
• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z



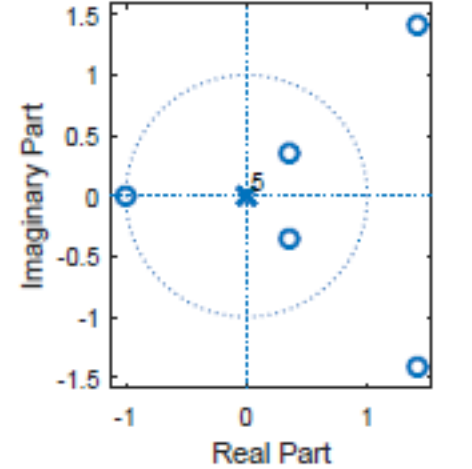
• Αναγνωρίζετε τους τύπους των συστημάτων γραμμικής φάσης;

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

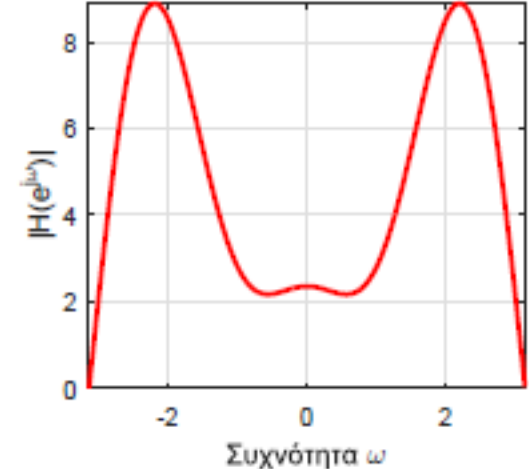
Μέτρο του Μετασχ. Z, $|H(z)|$



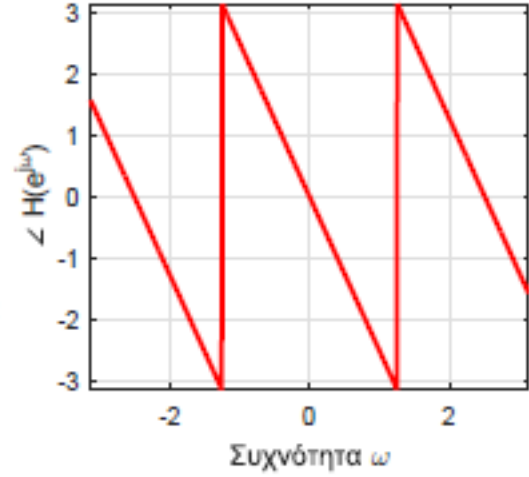
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



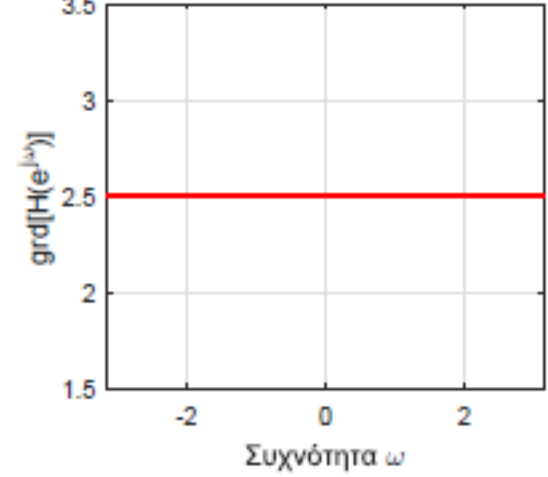
Απόκριση Πλάτους



Απόκριση Φάσης

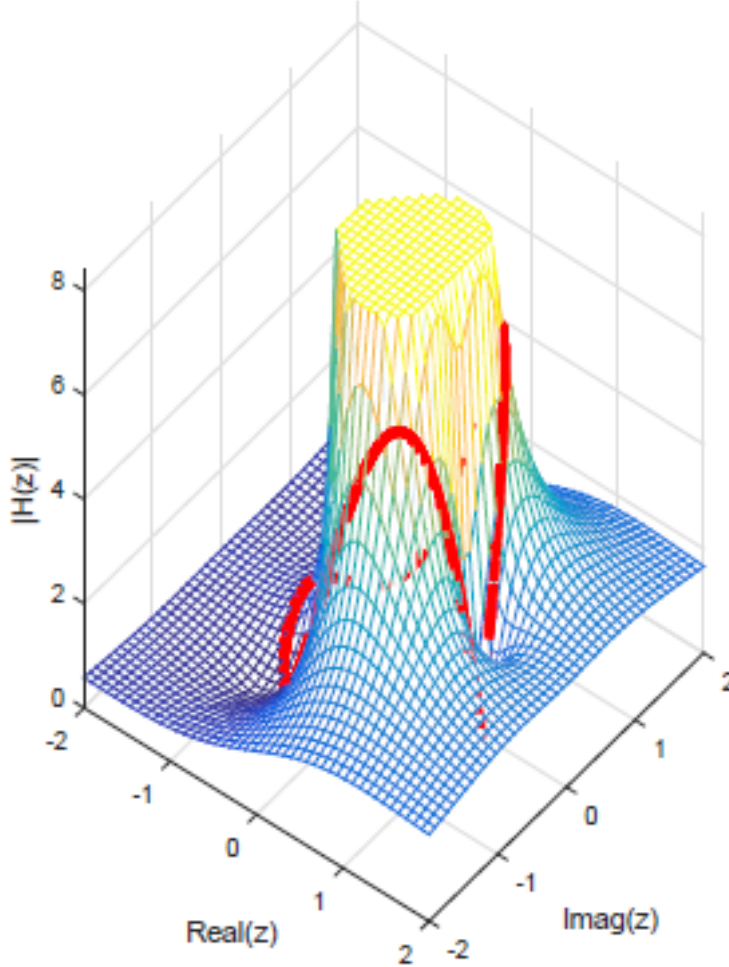


Καθυστέρηση Ομάδας

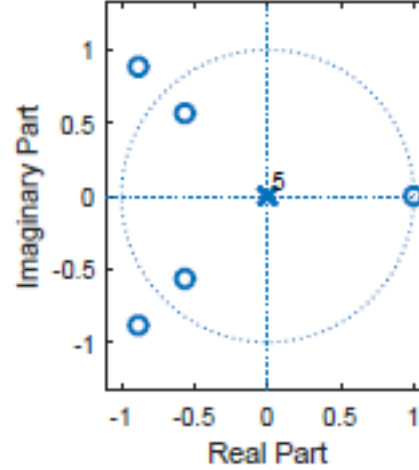


• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

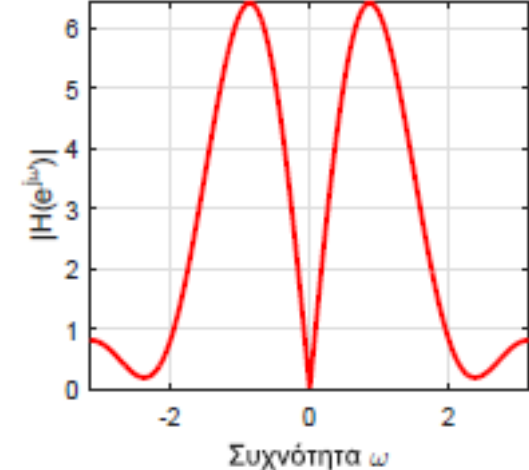
Μέτρο του Μετασχ. Z, $|H(z)|$



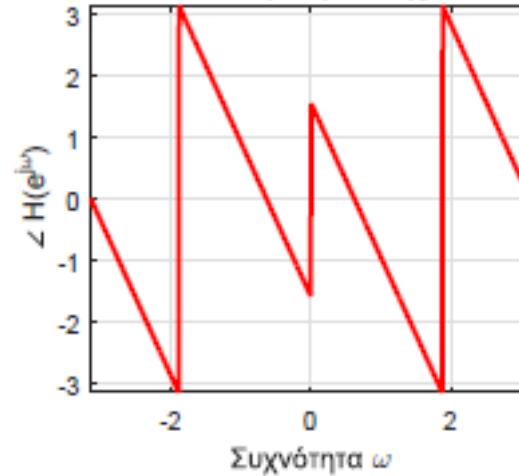
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



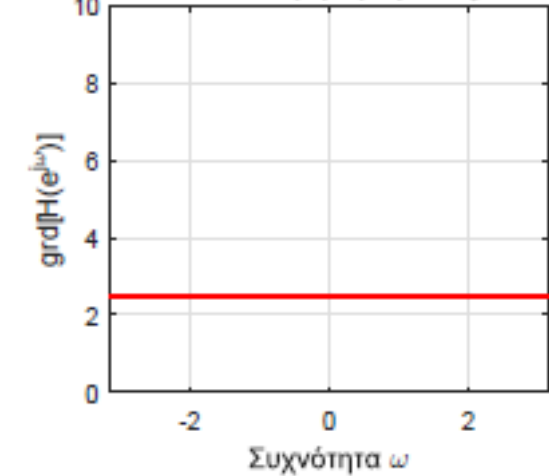
Απόκριση Πλάτους



Απόκριση Φάσης



Καυστέρηση Ομάδας



• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

• Ένα FIR σύστημα γραμμικής φάσης μπορεί να γραφεί ως παράγοντας τριών όρων:

○ ενός όρου ελάχιστης φάσης

$$H_{min}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_i}{2}} (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1}) \quad , \quad |c_k| < 1$$

○ ενός όρου μέγιστης φάσης

$$H_{max}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_i}{2}} (z^{-1} - c_k)(z^{-1} - c_k^*)$$

○ ενός όρου με μηδενικά επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

$$H_{uc}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_o}{2}} (1 - e^{j\theta} z^{-1})(1 - e^{-j\theta} z^{-1})$$

δηλ.

$$H_{lin}(z) = H_{min}(z)H_{uc}(z)H_{max}(z)$$

με

$$H_{max}(z) = H_{min}(z^{-1})z^{-M_i}$$

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

- Παράδειγμα:

○ Έστω το αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 2jz^{-1})(1 - 2jz^{-1})}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})}$$

Γράψτε το σε μορφή $H(z) = H_{min}(z)H_{linear}(z)$

Για το $H(z)$: μηδενικά: $z = \frac{1}{2}, z = 2j, z = -2j$
 πόλοι: $z = 0.8, z = -0.8, z = 0$

Άρα το ελάχιστο φάσης θα λάβει: $z = \frac{1}{2}$ (ΜΗΔ)
 $z = 0.8, z = -0.8, z = 0$ (ΠΟΛΟΙ)

Το γραμμικό φάσης θα λάβει: $z = \pm 2j$ (ΜΗΔ). Για να είναι
 έγκυρο σύστημα γραμμικό φάσης, θα πρέπει να έχει μηδενικά
και στις θέσεις $z = \pm \frac{1}{2}j$.

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

- Παράδειγμα:

Όταν τα δύο μηδενικά στις θέσεις $\pm \frac{1}{2}j$ θα πρέπει να ακυρωθούν μέσω του συστήματος ελάχιστης φάσης, ώστε η παραχαραγωγή να είναι έγκυρη.

Άρα, το ελάχιστης φάσης: $z = \frac{1}{2}$ (μηδ)

$$z = \pm 0.8, z = 0 \text{ (πολύ)} + \pm \frac{1}{2}j \text{ (πολύ)}$$

Οπότε:

$$H_{\min}(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})(1 + \frac{1}{2}jz^{-1})(1 - \frac{1}{2}jz^{-1})}$$

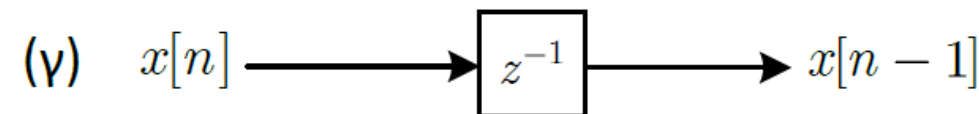
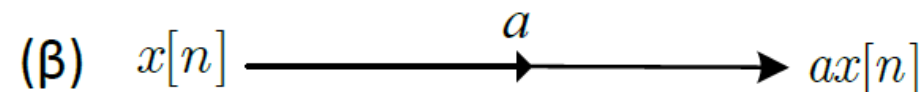
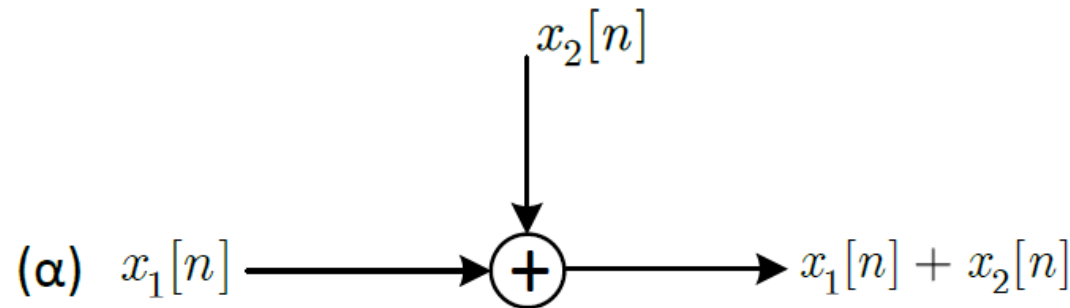
$$H_{\min}(z) = (1 + \frac{1}{2}jz^{-1})(1 - \frac{1}{2}jz^{-1})(1 + 2jz^{-1})(1 - 2jz^{-1})$$

• Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

• Για να υλοποιήσουμε ένα σύστημα πρέπει να μετατρέψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ή την εξίσωση διαφορών σε μια δομή που πραγματοποιείται από την υπάρχουσα τεχνολογία

• Βασικοί δομικοί λίθοι:

- Πρόσθεση
- Πολλαπλασιασμός
- Καθυστέρηση (αποθήκευση στη μνήμη)



- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Έστω η εξίσωση διαφορών $y[n] - a_1y[n - 1] - a_2y[n - 2] = b_0x[n]$

- Έχουμε πολλές επιλογές για την υλοποίησή της

- Κόστος:

- Πλήθος πράξεων

- Πλήθος θέσεων μνήμης

- Ευρωστία σε πεπερασμένη αριθμητική ακρίβεια

- Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται ως

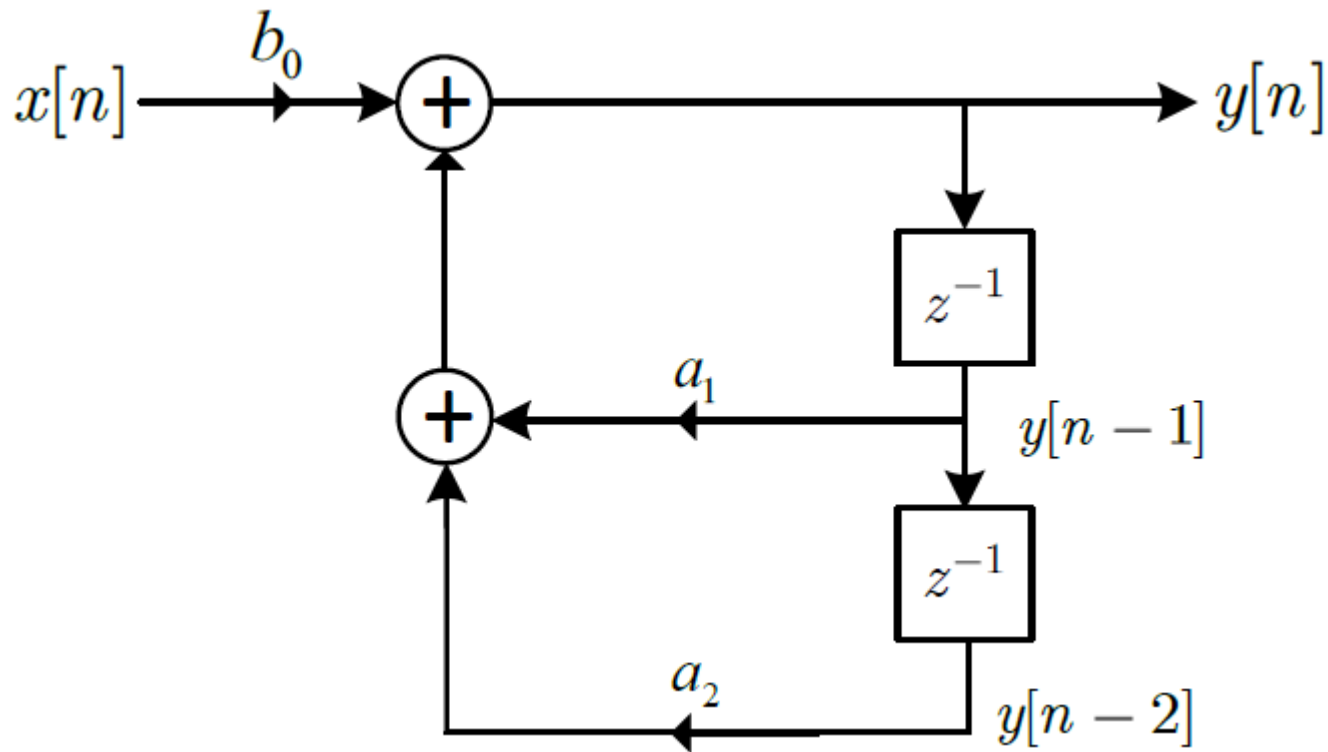
$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2}} = \frac{b_0}{1 - (a_1z^{-1} + a_2z^{-2})}$$

- Με βάση την εξίσωση διαφορών, μπορούμε κατασκευάσουμε μια δομή που την υλοποιεί

- Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

$$y[n] = a_1 y[n - 1] + a_2 y[n - 2] + b_0 x[n]$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{b_0}{1 - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$$



- Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

- Για μεγαλύτερης τάξης εξίσωσης διαφορών

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

- Ξαναγράφουμε την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

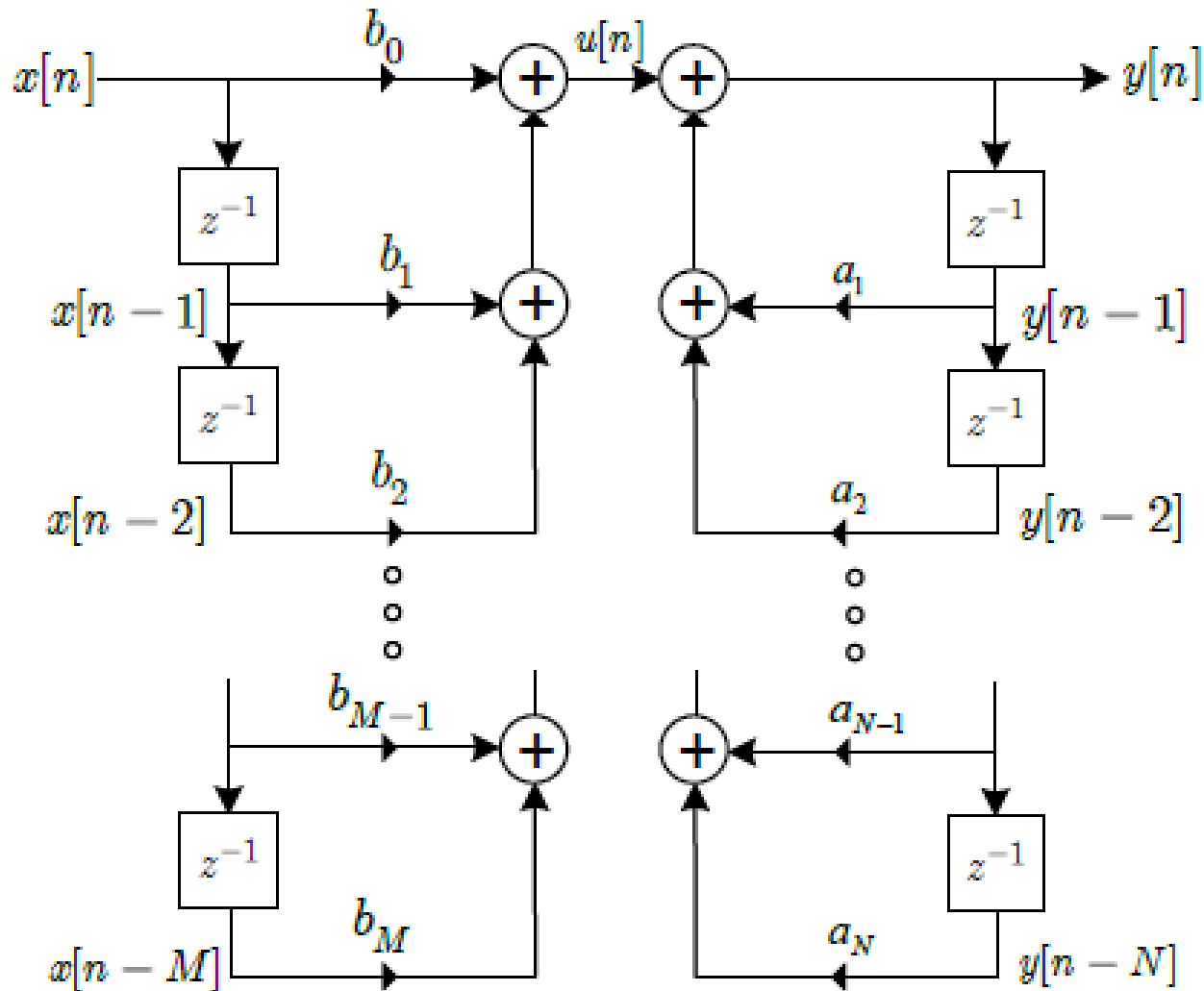
- Δυο υπο-εξισώσεις:

$$v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n]$$

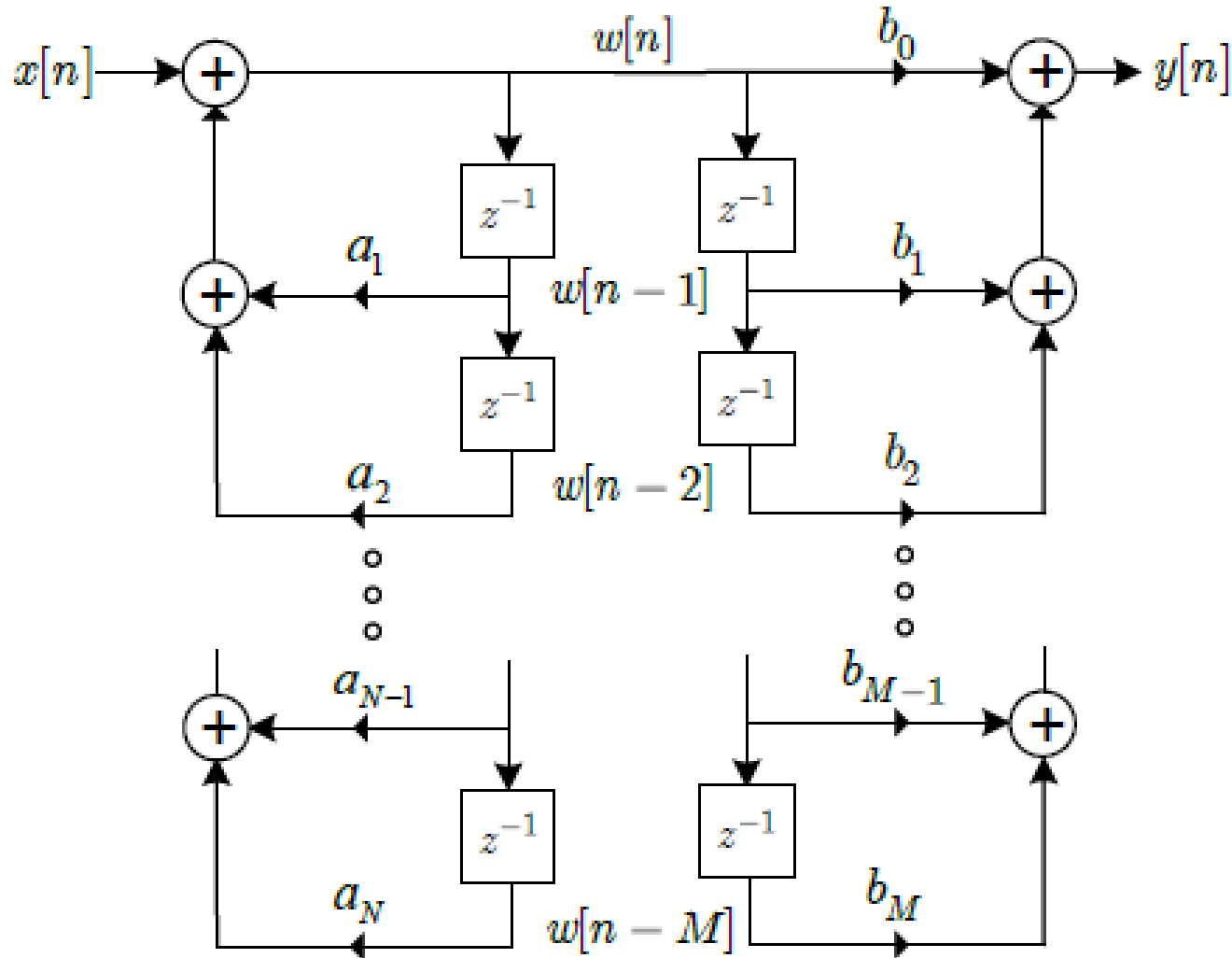
- Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

$$v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad , \quad y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n]$$

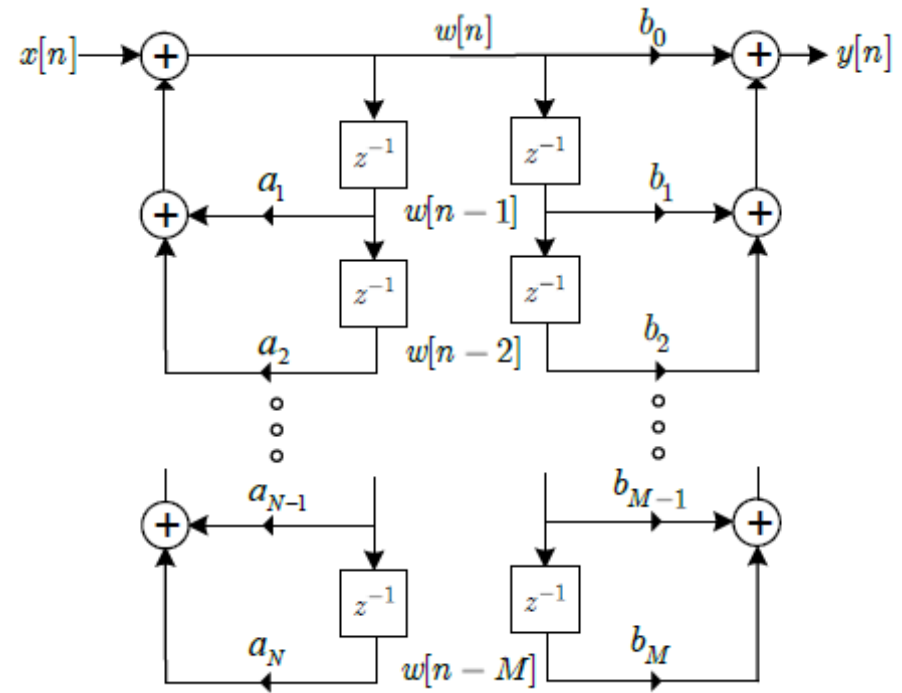
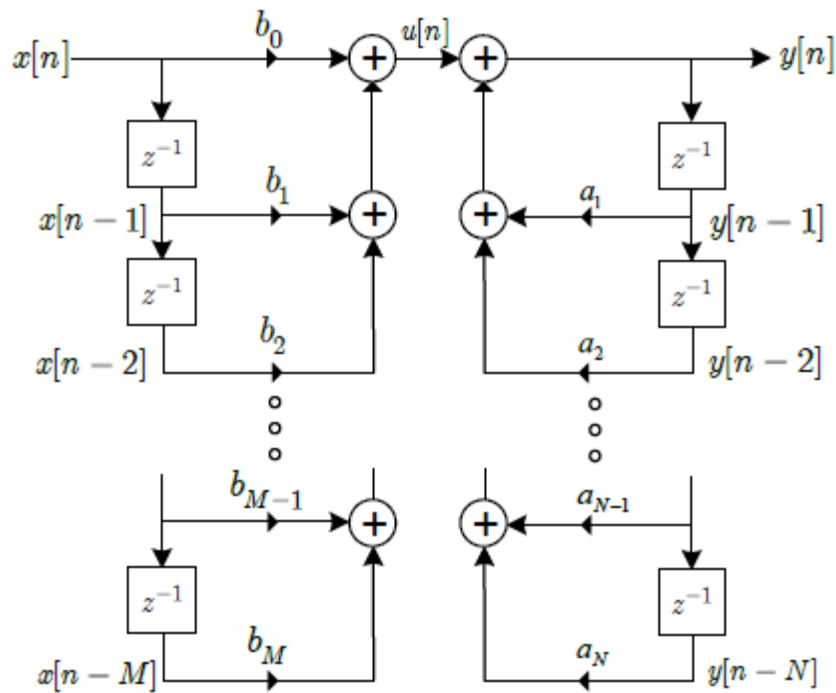


- Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

$$v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad , \quad y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n]$$



• Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου



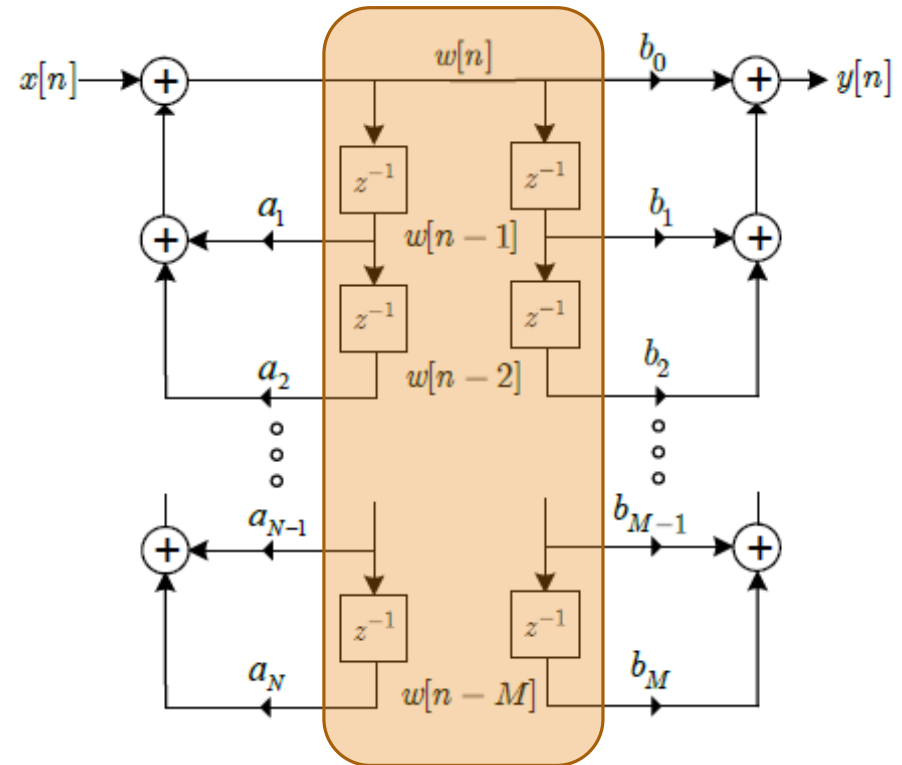
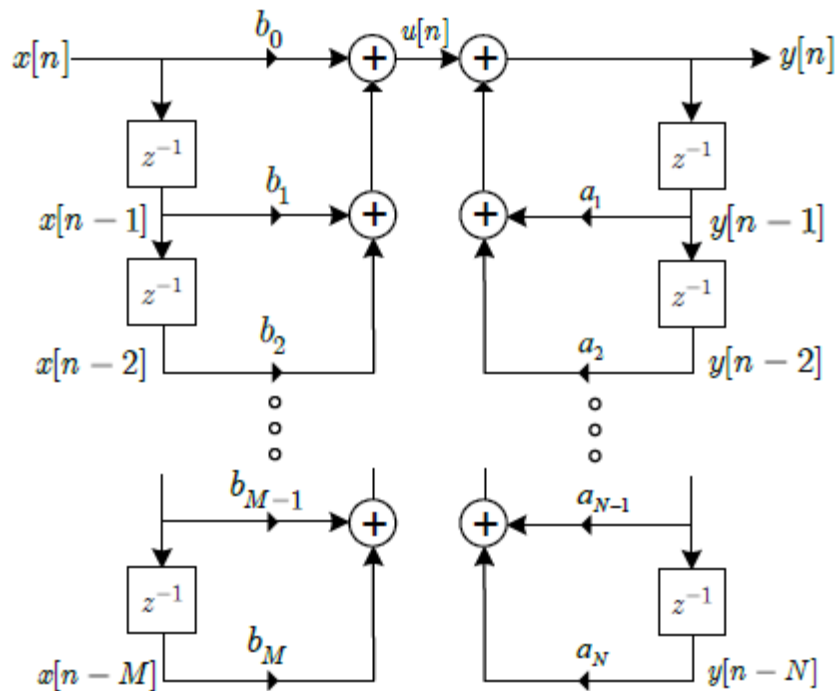
• Βασικές διαφορές των δυο υλοποιήσεων

- Στην πρώτη, υλοποιούνται πρώτα τα μηδενικά και μετά οι πόλοι
- Στη δεύτερη, υλοποιούνται πρώτα οι πόλοι και μετά τα μηδενικά

• Θεωρητικά, οι δυο υλοποιήσεις είναι ισοδύναμες

- Πρακτικά, μπορεί να υπάρχουν σημαντικές διαφορές! (λόγω υλοποίησης σε πεπερασμένη ακρίβεια)

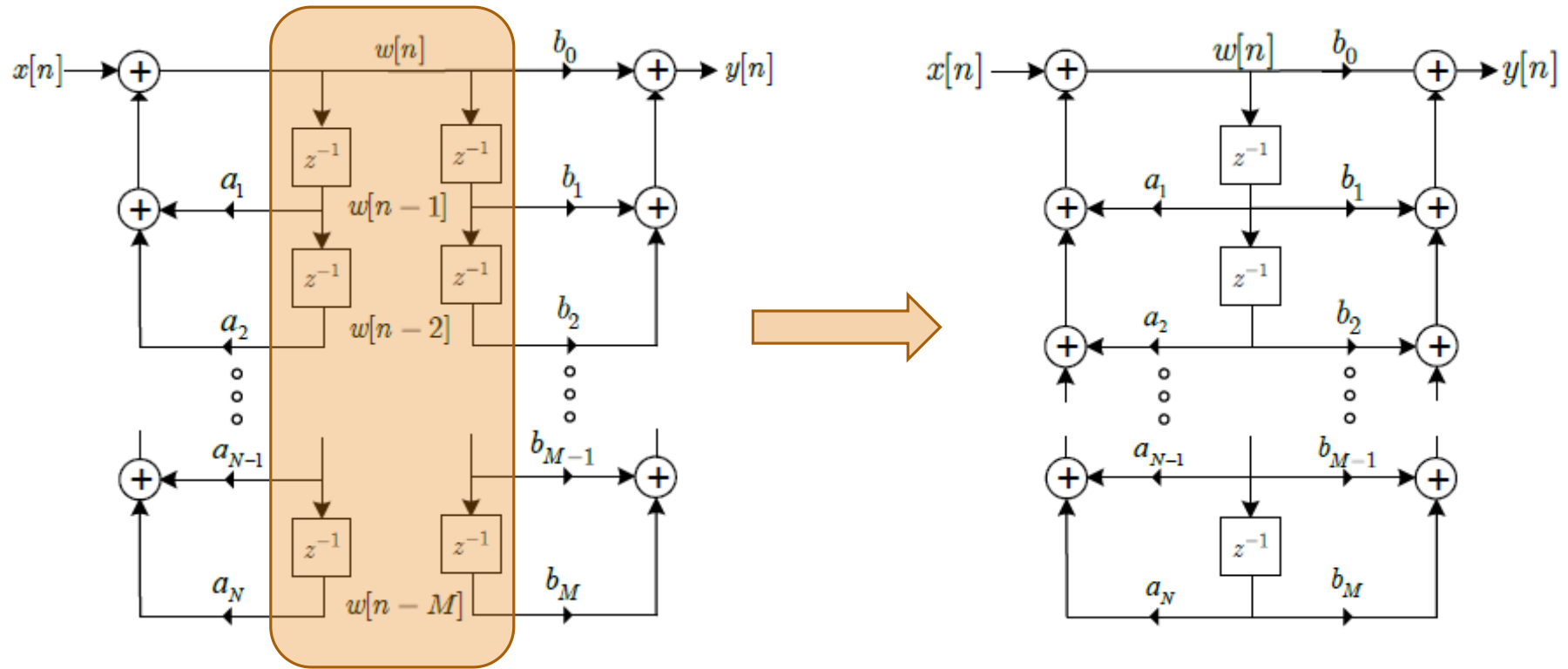
• Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου



• Παρατήρηση:

- Οι μεταβλητές $w[n - k]$ αποθηκεύονται δυο φορές στη δεύτερη υλοποίηση!
- Μπορούμε να «γλιτώσουμε» τις μισές θέσεις μνήμης!
- Μπορούμε να μοιράσουμε τις ίδιες θέσεις μνήμης και στους δυο κλάδους

• Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου



- Η νέα υλοποίηση, που χρησιμοποιεί τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων καθυστέρησης (μνήμης) αναφέρεται ως **κανονική μορφή** (canonical form) ή **Direct Form II**
- Η μη κανονική μορφή στο αριστερό σχήμα ονομάζεται **Direct Form I**

• Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

$$y[n] = \sum a_k y[n-k] + \sum b_k x[n-k]$$

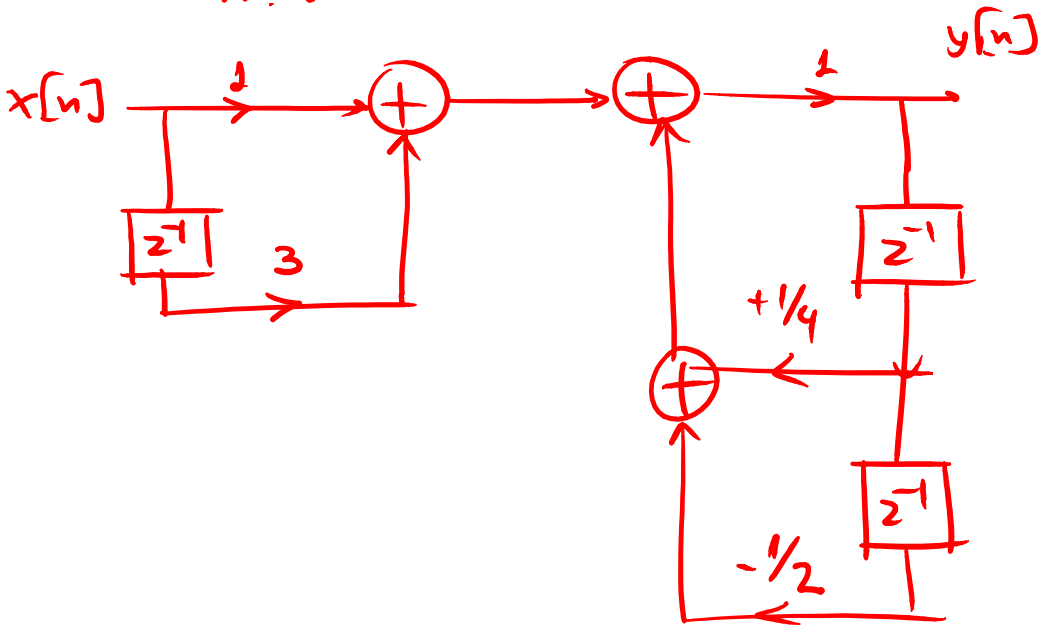
• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

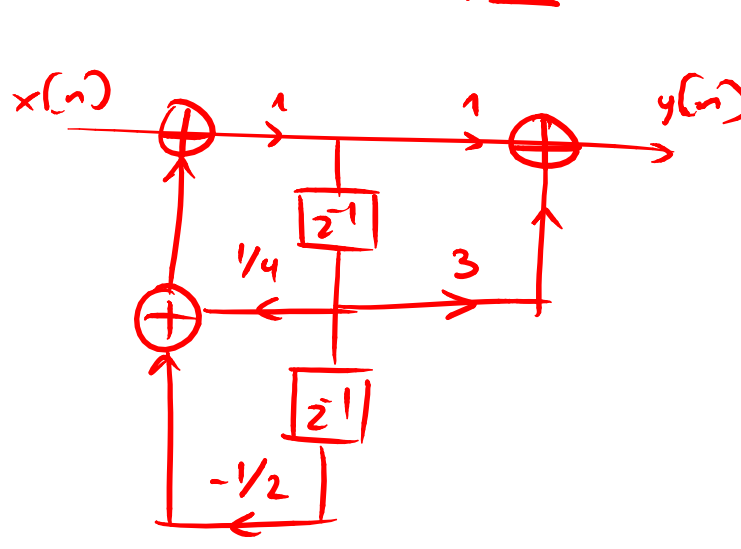
$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις Direct Form I, II

D.F. I



D.F. II



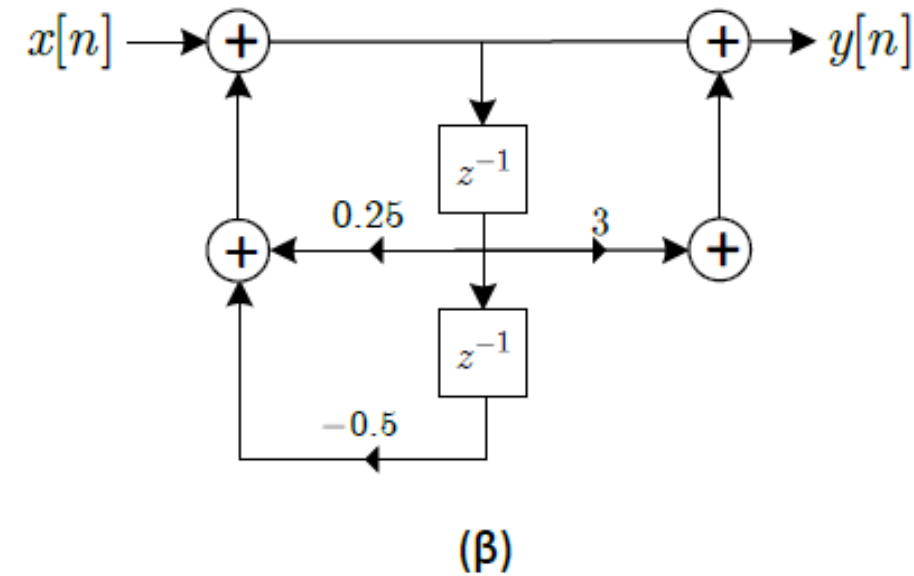
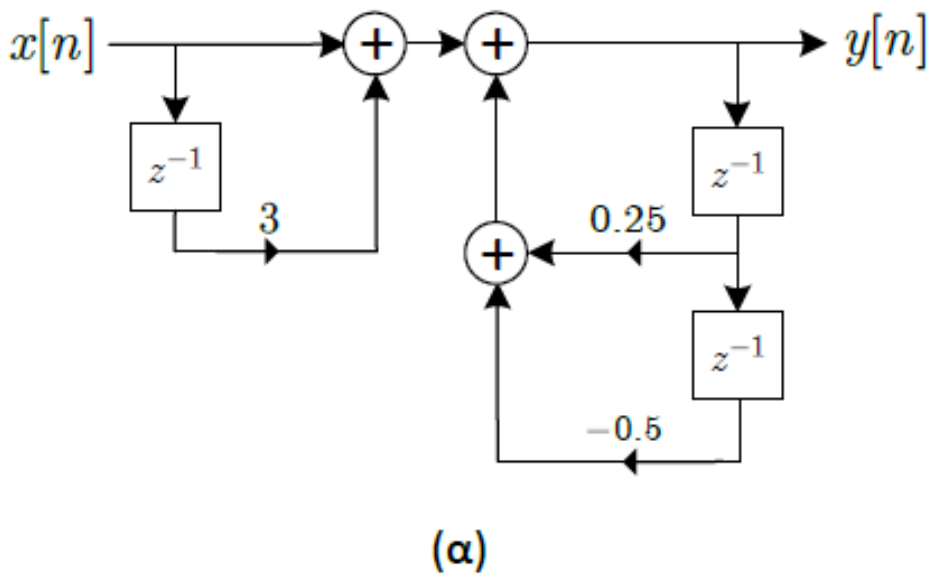
• Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις Direct Form I, II



• Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

- Γνωρίζουμε ότι τα συστήματα χωρίζονται σε δυο βασικές κατηγορίες: FIR, IIR
- Ας δούμε πόσο διαφέρουν οι υλοποιήσεις ανάλογα με την κατηγορία
- Ξεκινάμε με τα IIR
- Θα δούμε ότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές υλοποιήσεις ενός IIR συστήματος
- Πώς επιλέγουμε την κατάλληλη;

✓ Πλήθος πολλαπλασιασμών → χρονοβόρα πράξη

✓ Πλήθος καθυστερήσεων → κόστος σε μνήμη

✓ Εμβαδό, απλότητα, και αρθρωτή υλοποίηση → σημασία σε VLSI υλοποιήσεις

✓ Καταμερισμός αλγορίθμου, επικοινωνία επεξεργαστών → πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον

✓ Ευρωστία σε πεπερασμένη ακρίβεια → προτίμηση από πιο οικονομικές υλοποιήσεις

- Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου
- Μορφή σε σειρά (cascade form)

- Συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - e_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - g_k z^{-1})(1 - g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

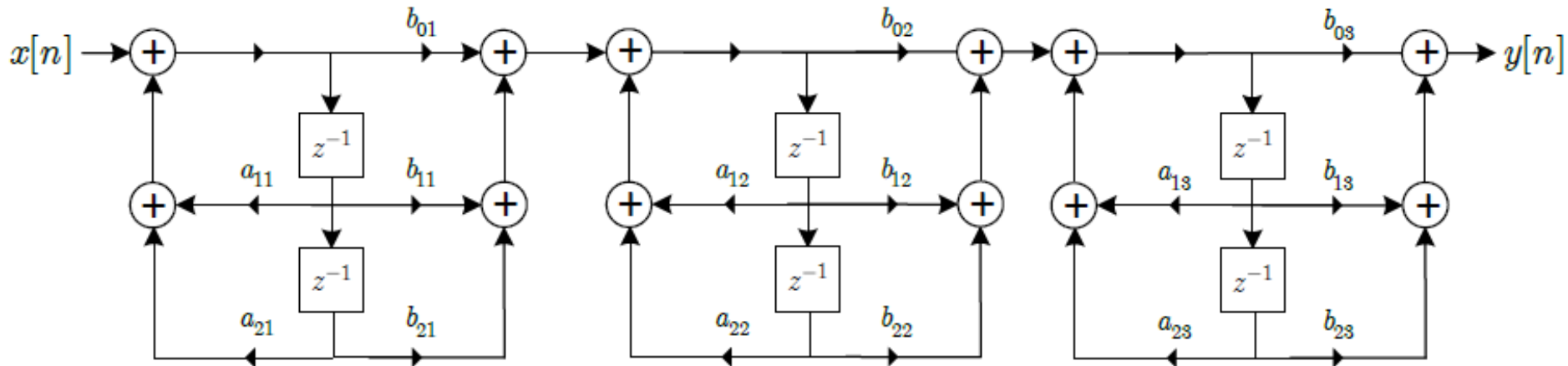
$$\text{με } N = N_1 + 2N_2, \quad M = M_1 + 2M_2$$

- Εναλλακτικά

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

$$\text{με } N_s = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$$

- Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου
- Μορφή σε σειρά (cascade form)
- Παράδειγμα 6^{ης} τάξης



- Οργανωμένο σε υποσυστήματα δευτέρας τάξης Direct Form II

$$H(z) = \prod_{k=1}^3 \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

• Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου

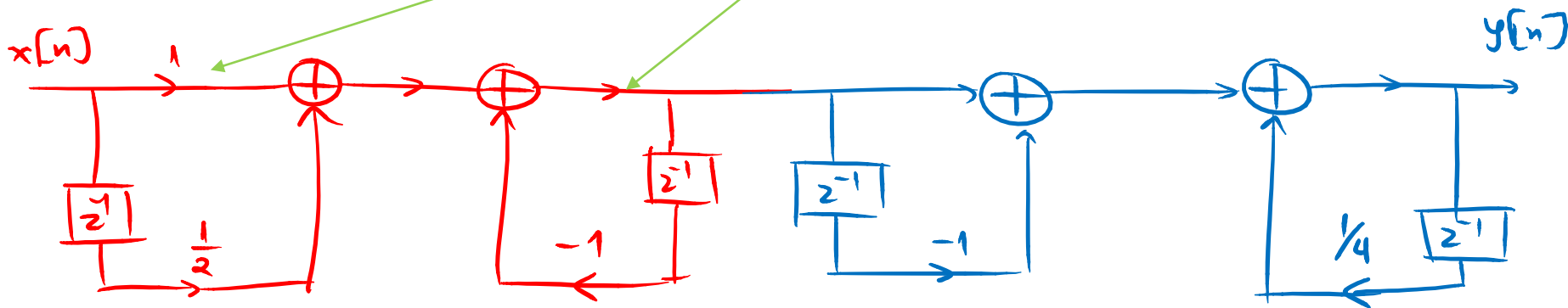
• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις σε σειρά με χρήση Direct Form I, II υποσυστημάτων και αναφέρετε το κέρδος σε πολλαπλασιασμούς ή/και θέσεις μνήμης

Είναι $H(z) = \frac{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 + z^{-1})} \cdot \frac{(1 - z^{-1})}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$



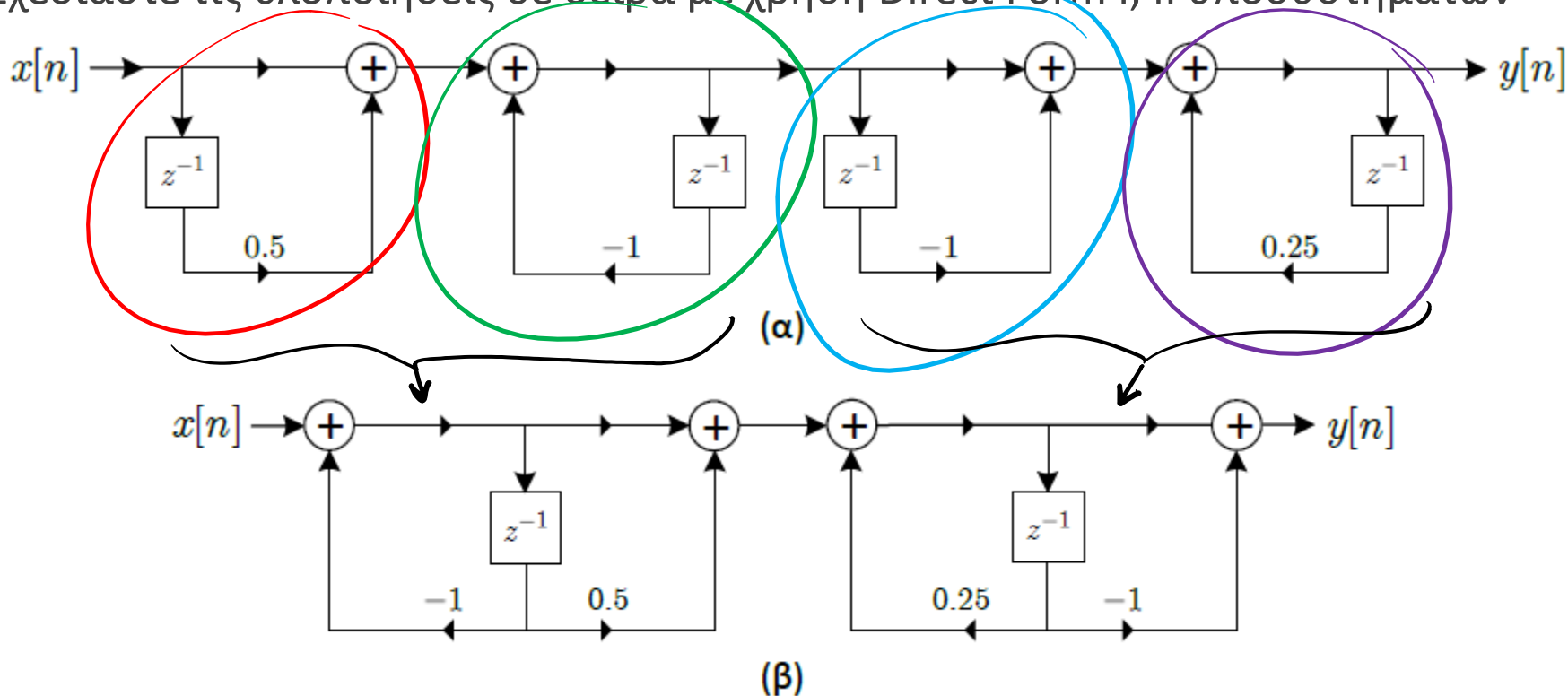
• Δομές IIR συστημάτων διακριτού χρόνου

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}} = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 + z^{-1}} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1}}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις σε σειρά με χρήση Direct Form I, II υποσυστημάτων



- **Δομές IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράλληλη Μορφή (parallel form)

- Προκύπτει από το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

- Συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

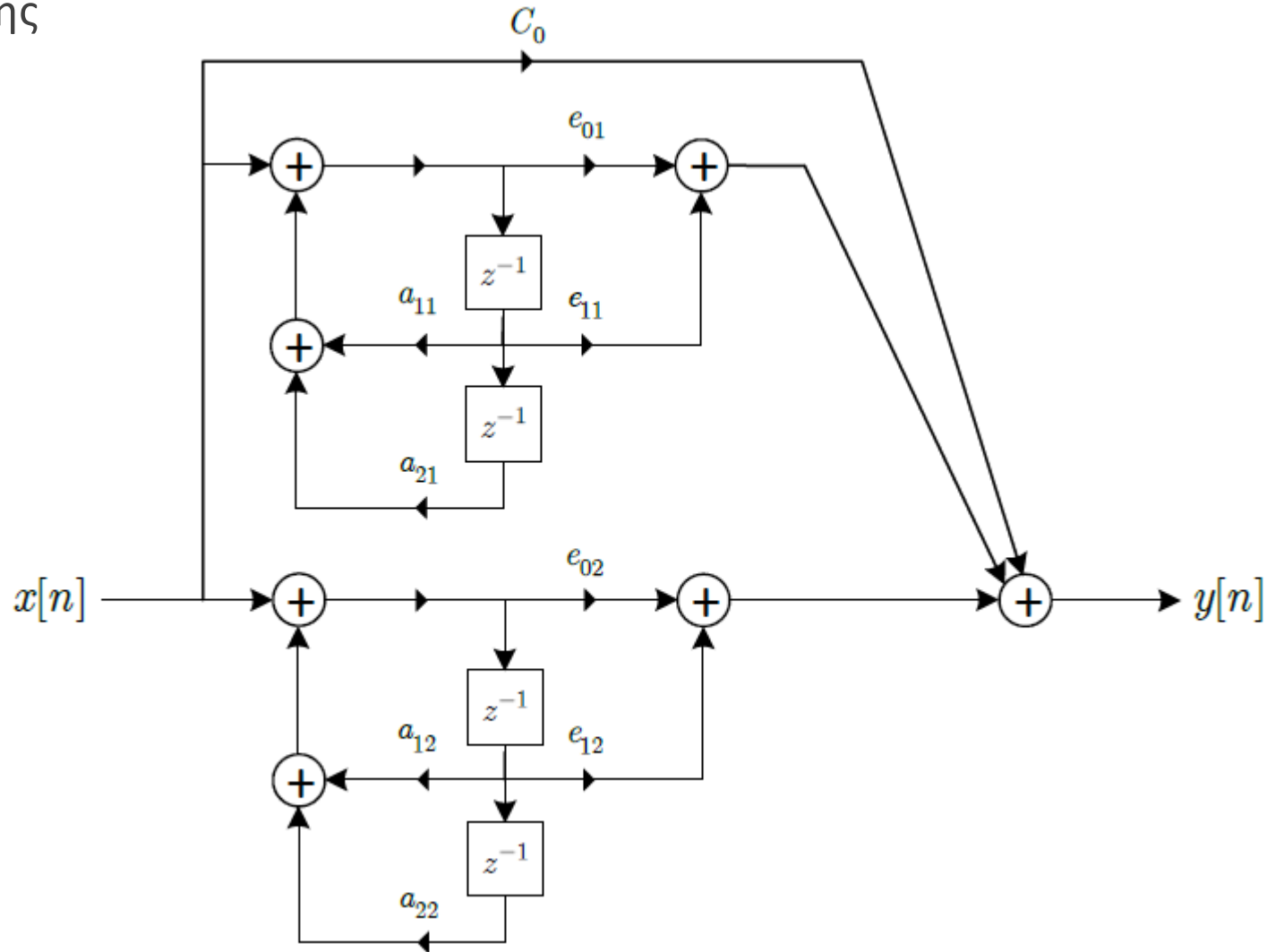
με $N = N_1 + 2N_2$

- Εναλλακτικά

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

με $N_s = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$

- Δομές IIR συστημάτων διακριτού χρόνου
- Παράλληλη Μορφή (parallel form)
- Παράδειγμα 4^{ης} τάξης



• Δομές IIR συστημάτων διακριτού χρόνου

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

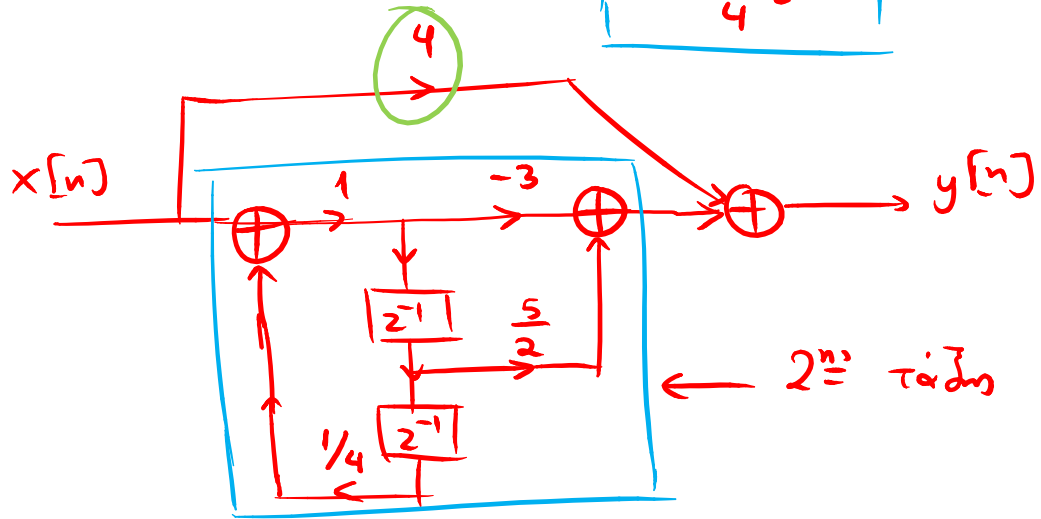
$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1^{ης} και 2^{ης} τάξης

Κάνω διαίρεση ποδουανύμων :

$$\begin{array}{r|l} 1 + \frac{5}{2}z^{-1} - z^{-2} & 1 - \frac{1}{4}z^{-2} \\ - (4 + 0z^{-1} - z^{-2}) & 4 \\ \hline -3 + \frac{5}{2}z^{-1} + 0z^{-2} & \end{array}$$

$$\Rightarrow H(z) = 4 + \frac{-3 + \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$$

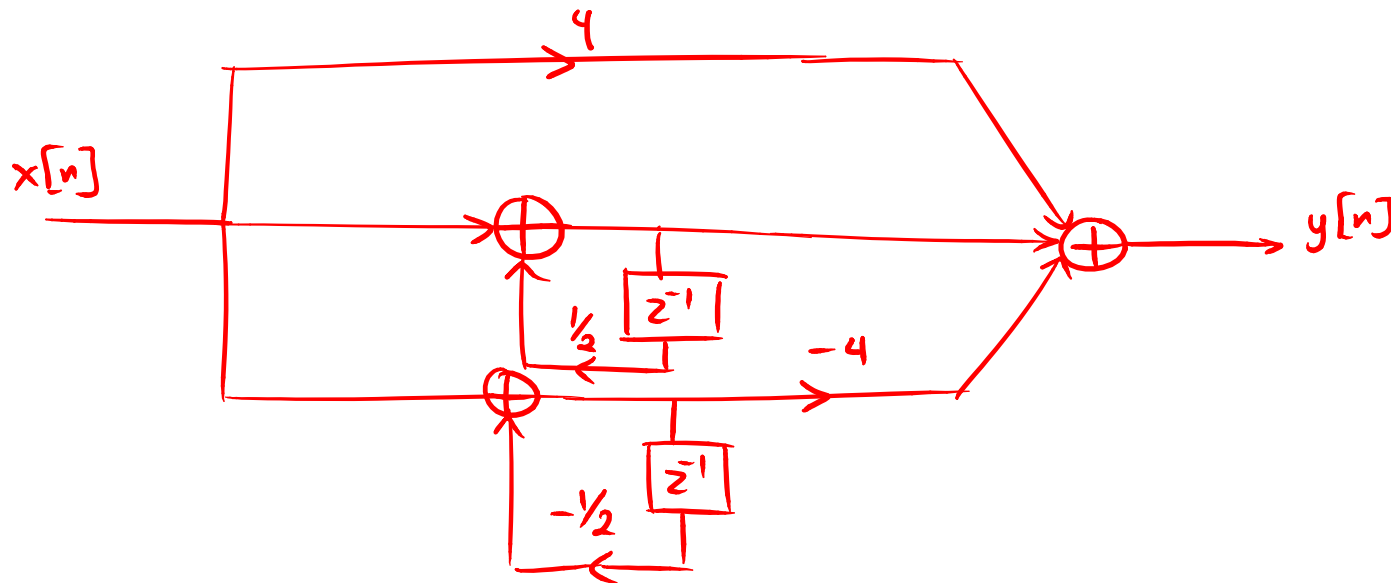


• Δομές IIR συστημάτων διακριτού χρόνου

• Παράδειγμα:

Για υλοποίηση με υποσυστήματα 1^m τάξης, χρειάζεται:

$$H(z) = 4 + \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = 4 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$



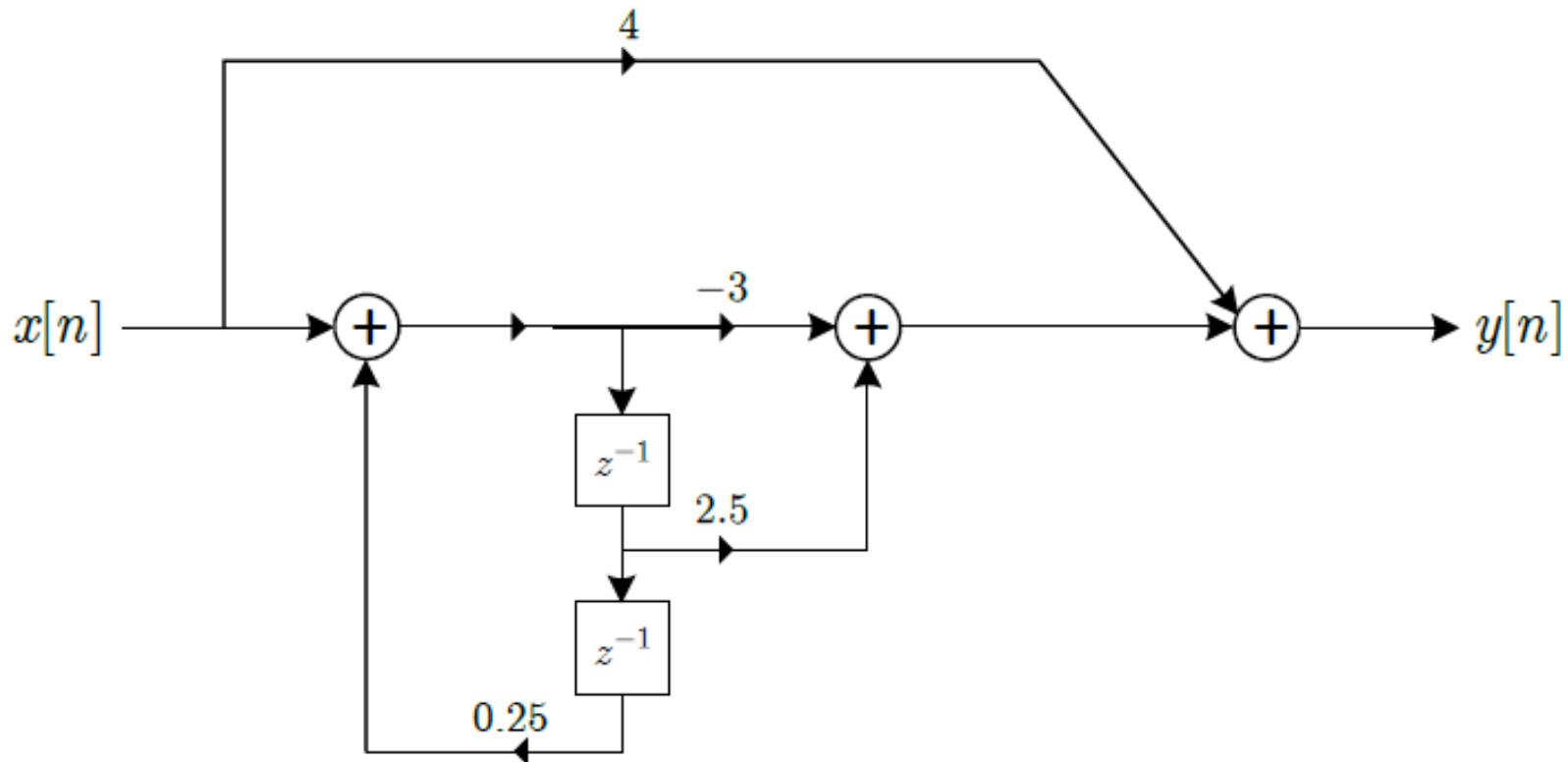
- Δομές IIR συστημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1^{ης} και 2^{ης} τάξης



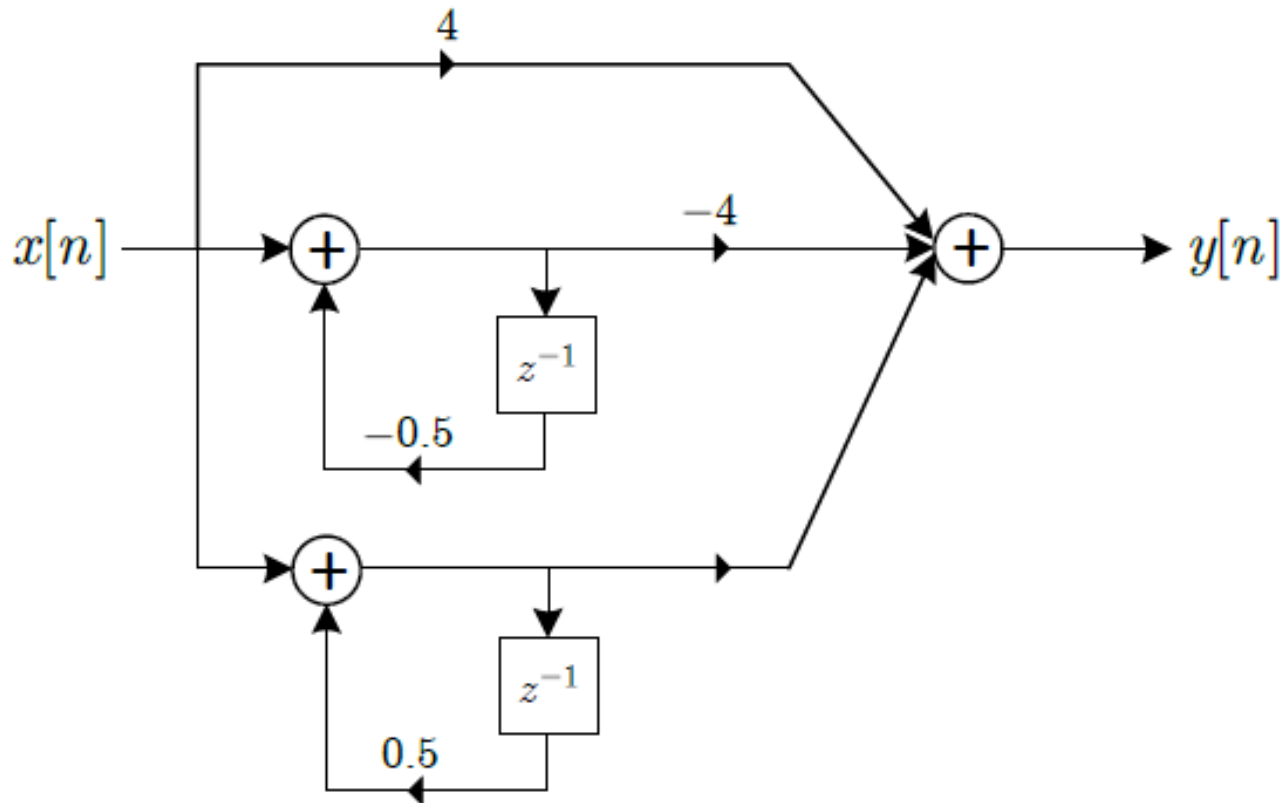
- Δομές IIR συστημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα:

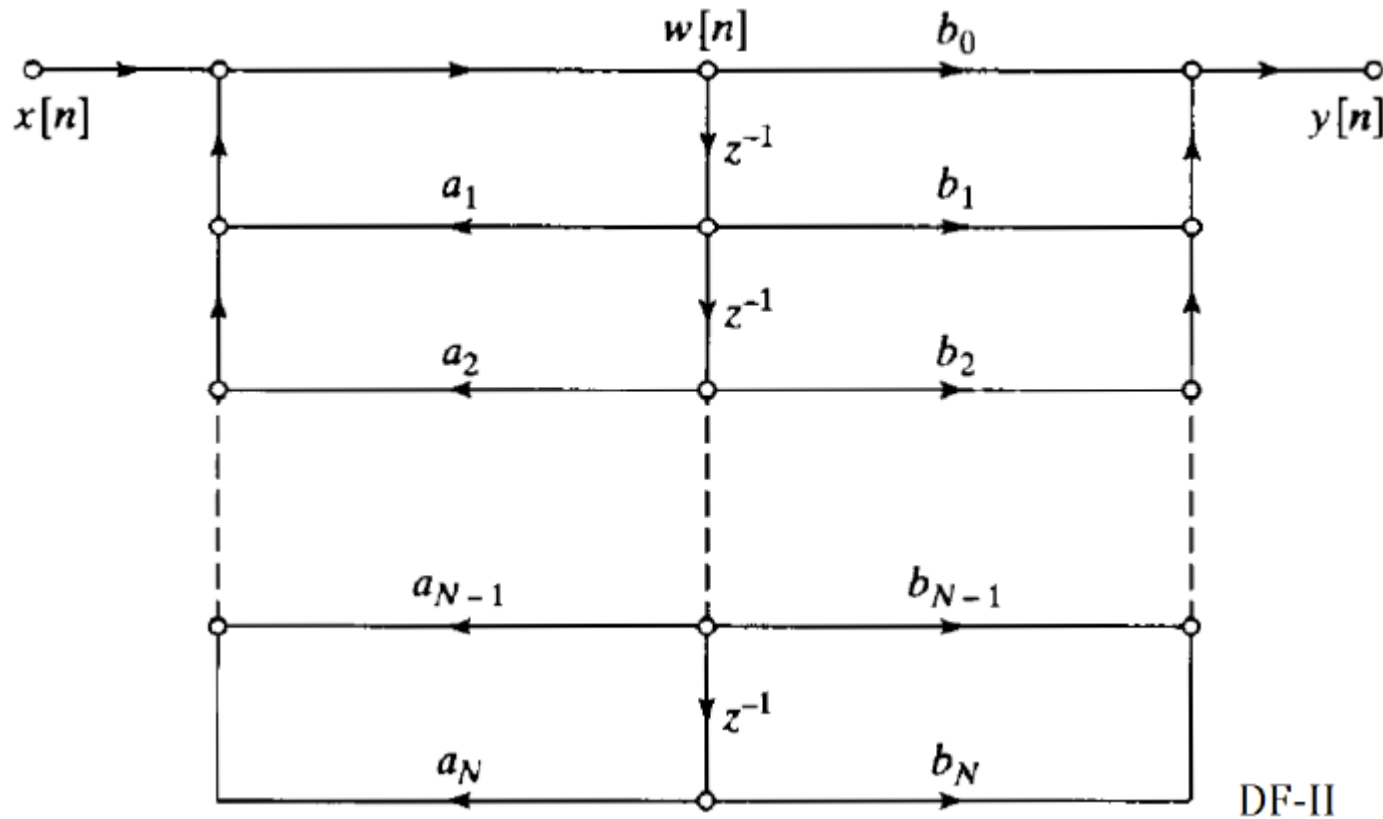
○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1^{ης} και 2^{ης} τάξης



- Δομές IIR συστημάτων διακριτού χρόνου
- Ανάστροφη μορφή (transposed form)
- Τα διαγράμματα που σχεδιάζουμε ως τώρα μπορούν εναλλακτικά να αναπαρασταθούν ως γράφοι
- Για παράδειγμα, ο γράφος ενός γενικού IIR συστήματος σε Direct Form II



- **Δομές IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Ανάστροφη μορφή (transposed form)

- Η θεωρία γράφων μας προσφέρει μια διαδικασία που ονομάζεται αναστροφή (reversal) που μας δίνει μερικές εναλλακτικές μορφές δομών, με ενδιαφέρουσες ιδιότητες

- **Σχεδίαση Ανάστροφης Μορφής**

- Αναστρέφουμε τη φορά όλων των κλάδων του διαγράμματος

- Κάθε αθροιστής μετατρέπεται σε διακλάδωση, και το αντίστροφο

- Αλλάζουμε θέση μεταξύ εισόδου και εξόδου

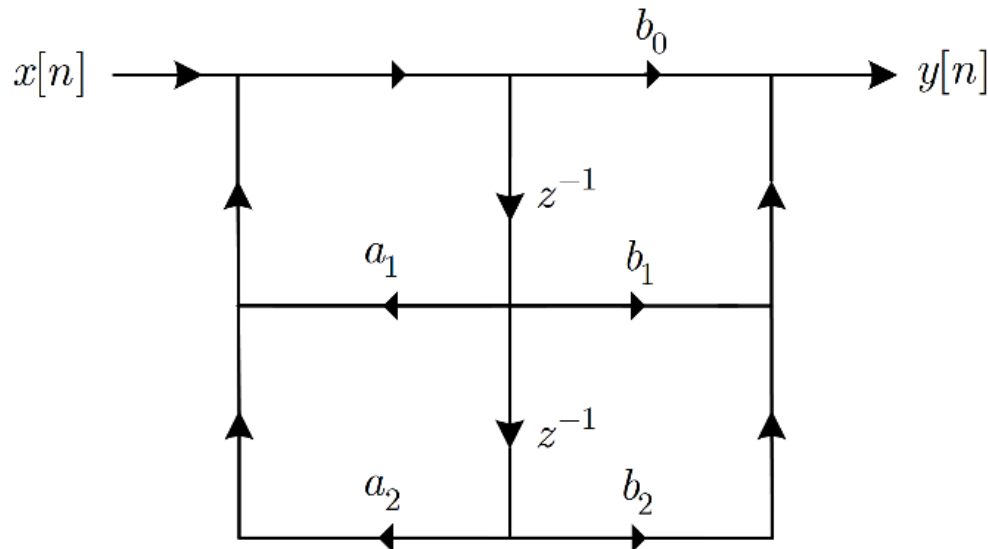
- Επανασχεδιάζουμε το διάγραμμα, αναστρέφοντάς το ώστε να παρουσιάζεται η είσοδος στα αριστερά και η έξοδος στα δεξιά

- Ας το δούμε στην πράξη

• Δομές IIR συστημάτων διακριτού χρόνου

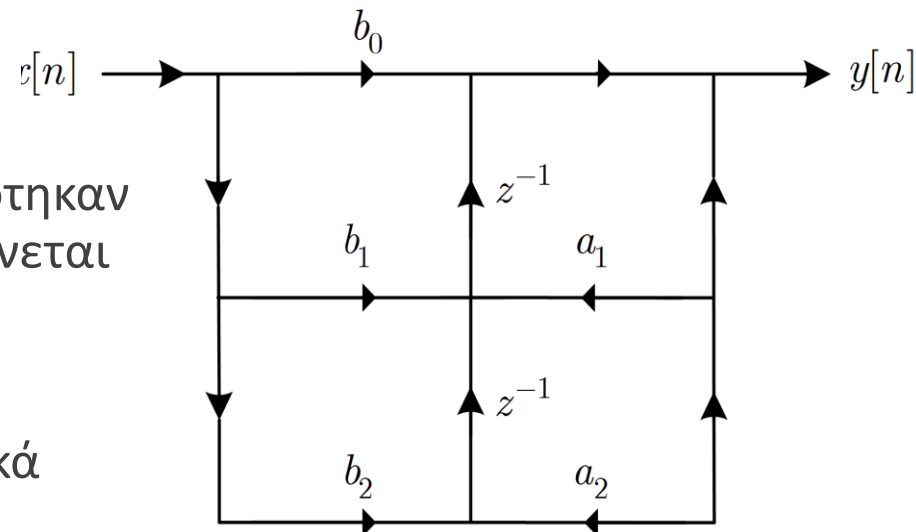
• Ανάστροφη μορφή (transposed form)

• Έστω ότι μας δίνεται ο Direct Form II γράφος όπως παρακάτω



• Αν εφαρμόσουμε τα βήματα που περιγράφηκαν πριν, παίρνουμε το νέο διάγραμμα που φαίνεται στα δεξιά

• Προσέξτε ότι καταφέραμε χωρίς προσθήκη μνήμης να υλοποιήσουμε πρώτα τα μηδενικά και μετά τους πόλους!! 😊



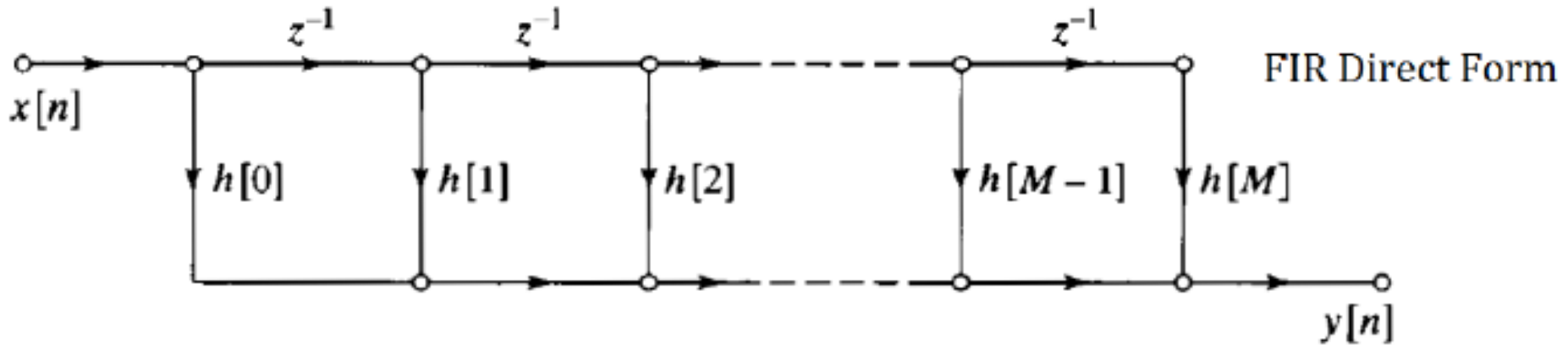
- **Δομές FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Για τα FIR συστήματα, καταλαβαίνετε ότι λόγω της απουσίας πόλων, τα Direct Form I και II που γνωρίσαμε «ενώνονται» σε μια μορφή, Direct Form

- Η γενική εξίσωση διαφορών είναι

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k] = \sum_{k=0}^M h[k] x[n - k]$$

- Η Direct Form υλοποίηση είναι η παρακάτω

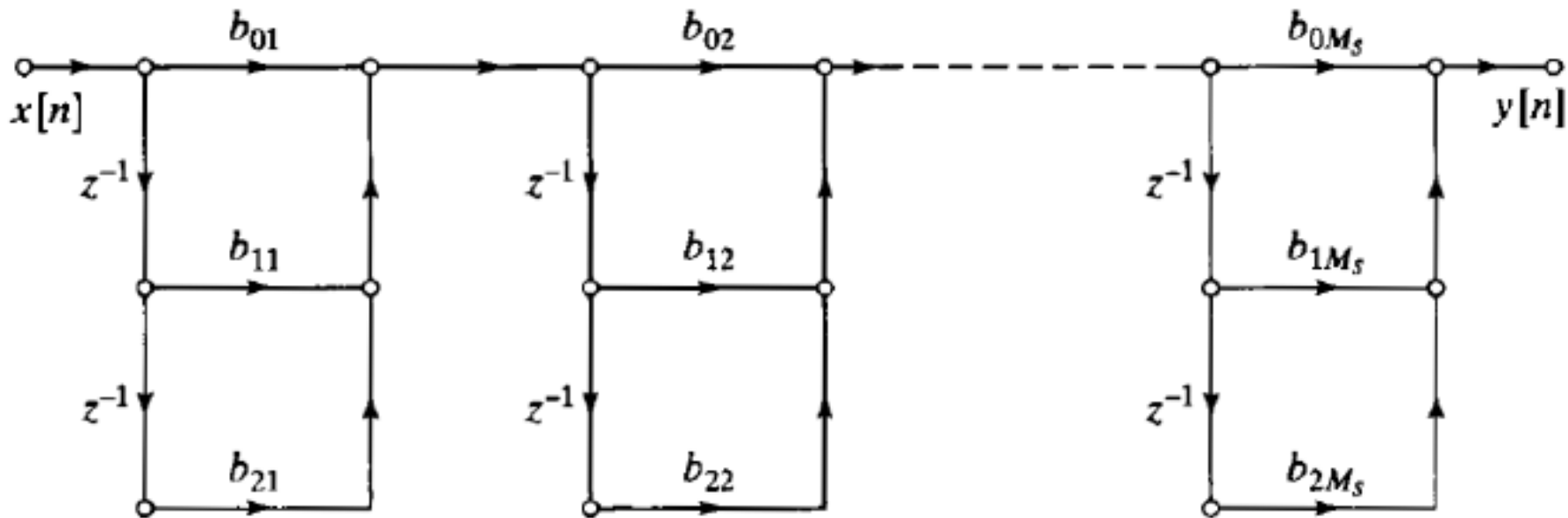


- Δομές FIR συστημάτων διακριτού χρόνου
- Μορφή σε Σειρά (cascade form)

$$H(z) = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2})$$

με $M_s = \left\lceil \frac{M+1}{2} \right\rceil$

- Μια γενική υλοποίηση σε σειρά φαίνεται παρακάτω



- **Δομές FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης

- Για να σχεδιάσουμε αποδοτικές δομές για συστήματα γραμμικής φάσης πρέπει να εκμεταλλευτούμε τις συμμετρίες τους

$$h[M - n] = h[n], \quad n = 0, 1, \dots, M \quad \text{Τύπου I, II}$$

$$h[M - n] = -h[n], \quad n = 0, 1, \dots, M \quad \text{Τύπου III, IV}$$

- Οποιαδήποτε συμμετρία κι αν ισχύει, μπορούμε να μειώσουμε το πλήθος των πολλαπλασιασμών σχεδόν στο μισό!

- Ας δούμε πως μπορούμε να τα γράψουμε με κατάλληλο τρόπο

- **Δομές FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης
- Έστω M άρτιος, οπότε ξεκινάμε με τα τύπου I και III
- Τύπου I:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k] (x[n-k] + x[n-M+k]) + h\left[\frac{M}{2}\right] x\left[n - \frac{M}{2}\right]$$

- Τύπου III:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k] (x[n-k] - x[n-M+k])$$

- Έστω M περιττός, οπότε μιλάμε για τύπου II, IV

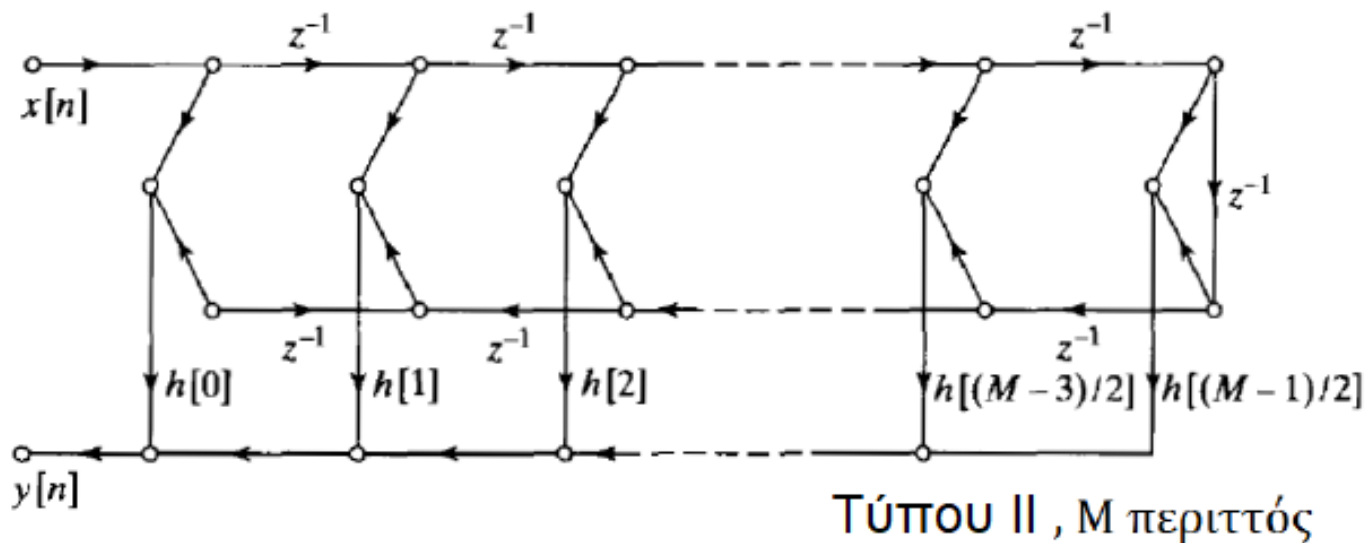
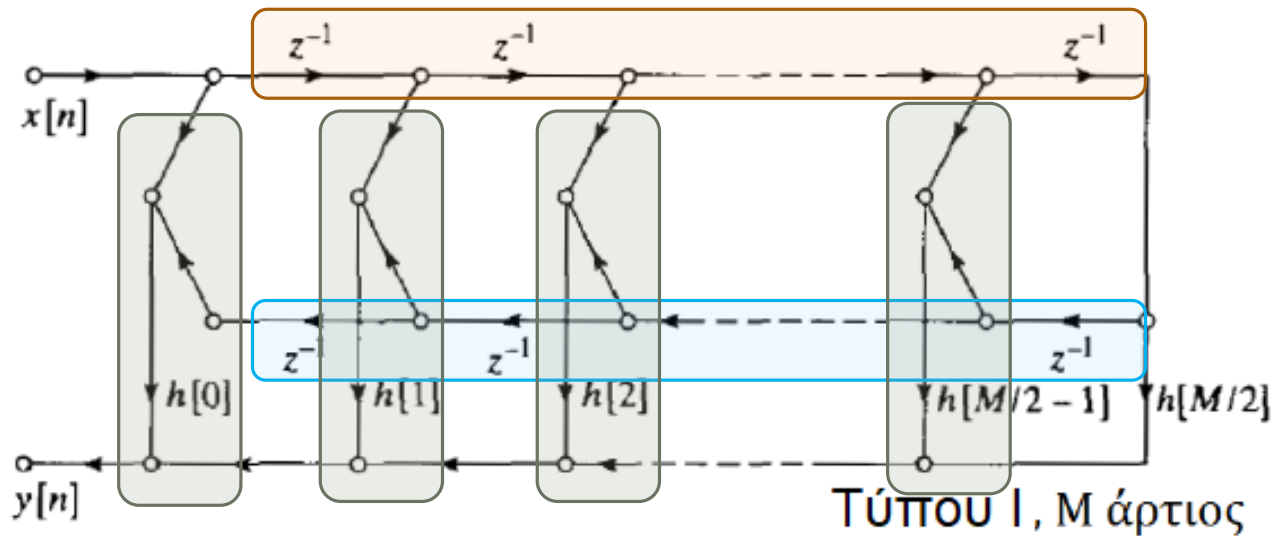
- Τύπου II:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k] (x[n-k] + x[n-M+k])$$

- Τύπου IV:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k] (x[n-k] - x[n-M+k])$$

- Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης



1

• Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης – Απόδειξη για Τύπου I $\rightarrow h[n] = h[M-n]$, M άρτιο

Είσοδος

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k] =$$

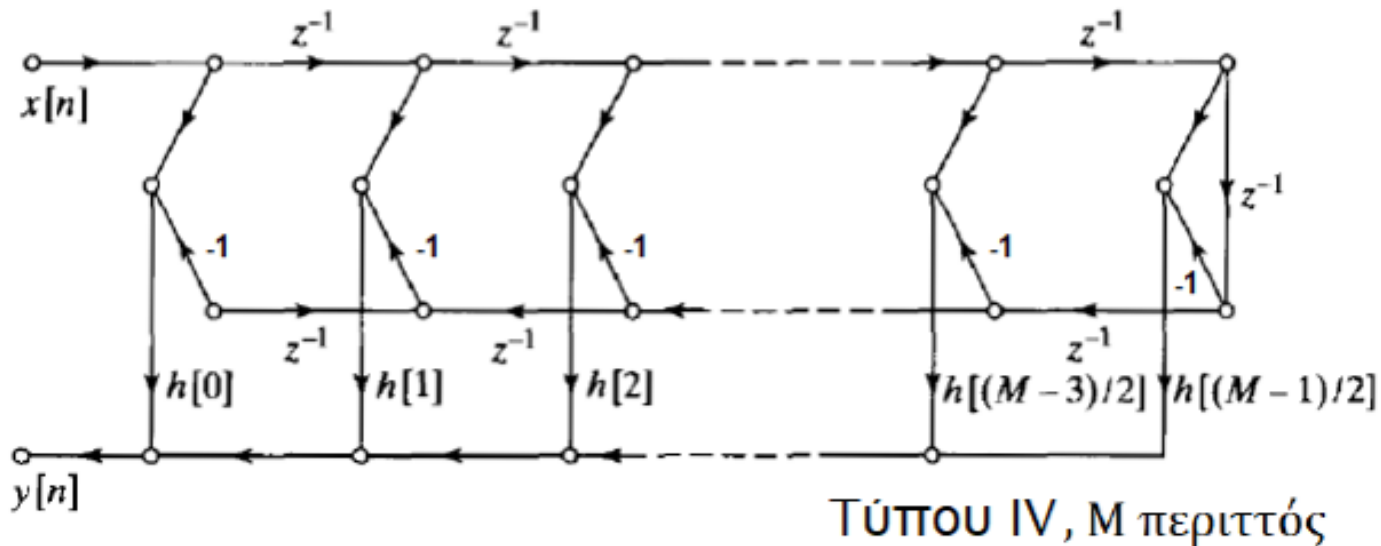
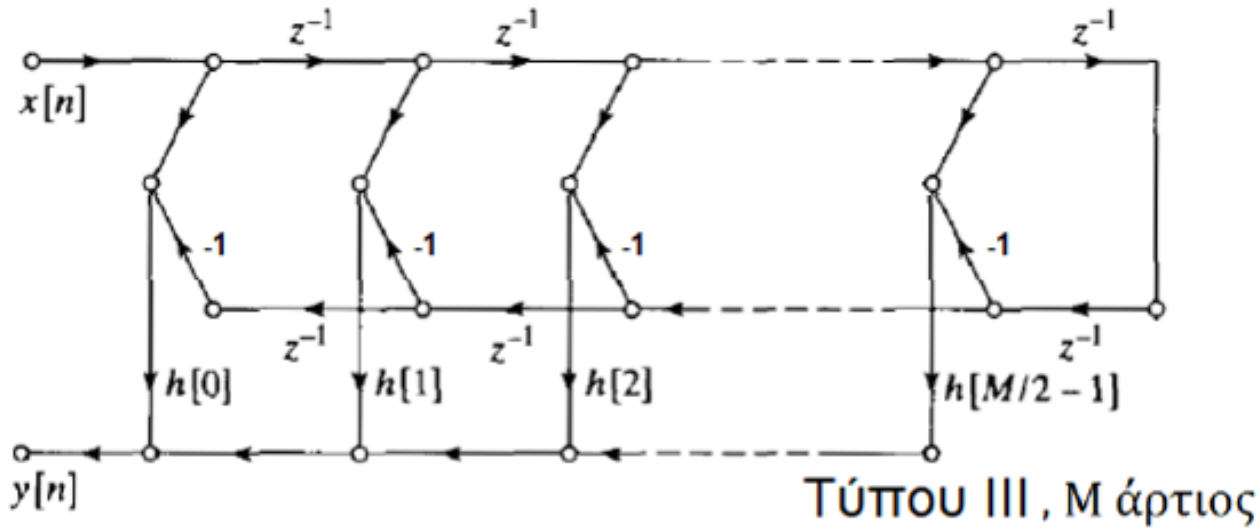
$$= \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k]x[n-k] + \underbrace{\sum_{k=\frac{M}{2}+1}^M h[k]x[n-k]}_{\substack{k=M-l \\ k_1=M-(\frac{M}{2}+1)=\frac{M}{2}-1 \\ k_2=M-M=0}} + h\left[\frac{M}{2}\right]x\left[n-\frac{M}{2}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[M-k]x[n-M+k] + h\left[\frac{M}{2}\right]x\left[n-\frac{M}{2}\right]$$

$$\stackrel{\text{⊖}}{=} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k]x[n-M+k] + h\left[\frac{M}{2}\right]x\left[n-\frac{M}{2}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) + h\left[\frac{M}{2}\right]x\left[n-\frac{M}{2}\right]$$

- Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης



• Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου

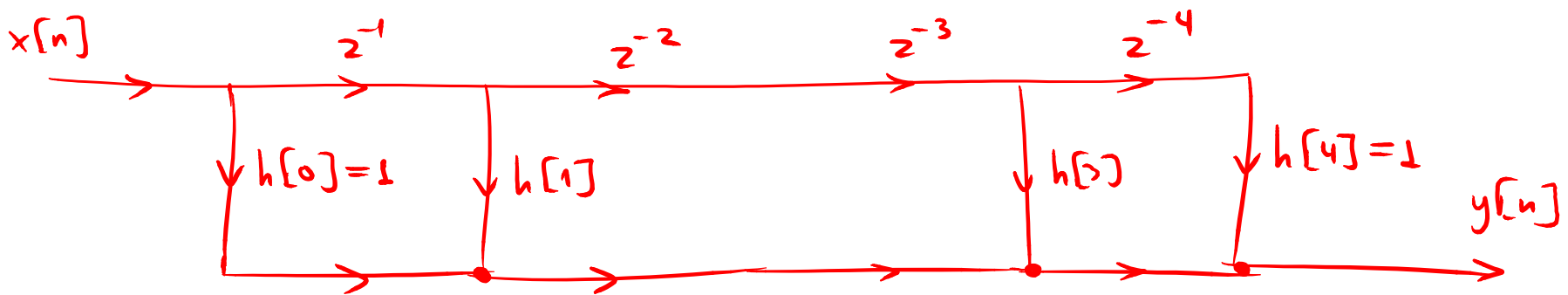
• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από την κρουστική απόκριση

$$h[n] = 1\delta[n] + 2\delta[n - 1] + 2\delta[n - 3] + 1\delta[n - 4] \quad (1)$$

Συζητήστε και σχεδιάστε τη βέλτιστη υλοποίηση

Από τη σχέση (1): $y[n] = x[n] + 2x[n-1] + 2x[n-3] + x[n-4]$

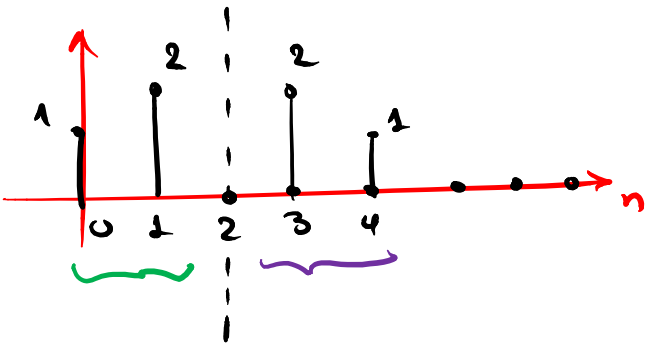


2 πολλαπλασιασμοί
 4 θέσεις μνήμης
 3 αθροιστές

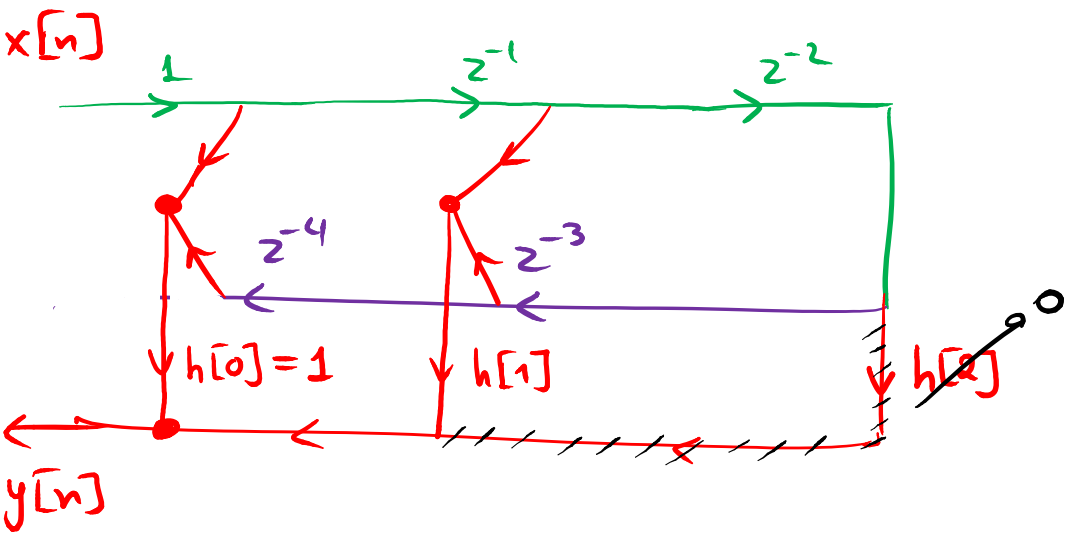
} 9

• Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου

• Παράδειγμα:



→ $h[n]$ γραφικώς φάσμα, τύπου I

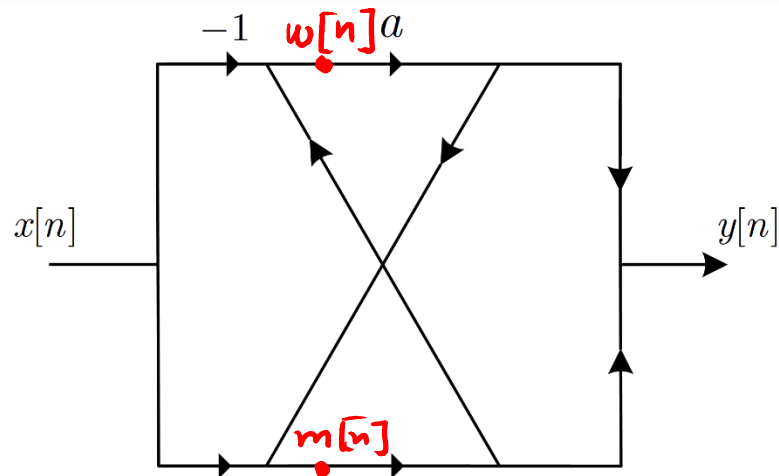


- 4 θέσες μνήμης
 - 1 πολλαπλασιασμός
 - 3 αθροιστές
- 8

• Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από το διάγραμμα. Βρείτε το σύστημα $H(z)$ το οποίο υλοποιεί.



Κανόνες:

- α) Θέτουμε ενδιαφέρουσες μεταβλητές σε κάθε είσοδο κέρβου
- β) Γράφετε τις εξισώσεις διαφορών και τις μετατρέχετε στο χώρο Z

Είναι:

$$\left. \begin{aligned} w[n] &= (-1)x[n] + m[n-1] \\ m[n] &= x[n] + aw[n] \\ y[n] &= aw[n] + m[n-1] \end{aligned} \right\} \xrightarrow{Z} \begin{aligned} W(z) &= -X(z) + z^{-1}M(z) \\ M(z) &= X(z) + aW(z) \\ Y(z) &= aW(z) + z^{-1}M(z) \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$W(z) = -X(z) + z^{-1}(X(z) + aW(z)) = (-1 + z^{-1})X(z) + az^{-1}W(z) \Leftrightarrow$$

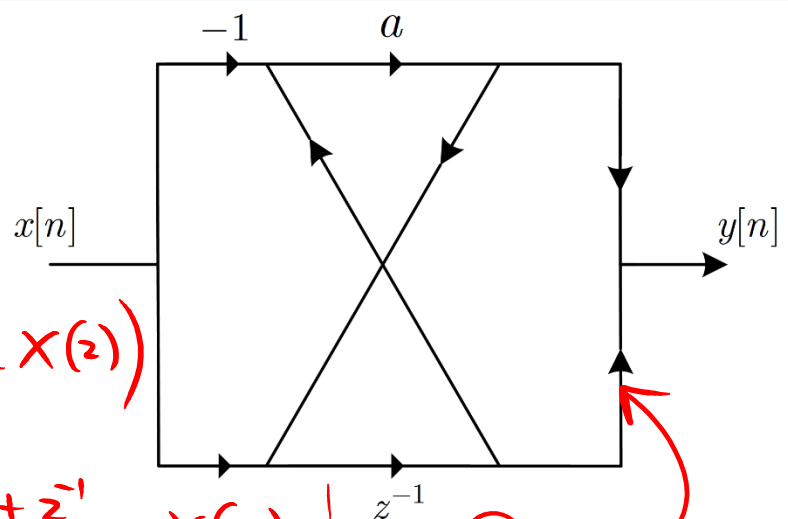
$$\Leftrightarrow (1 - az^{-1})W(z) = (-1 + z^{-1})X(z) \Leftrightarrow W(z) = \frac{-1 + z^{-1}}{1 - az^{-1}}X(z) \quad \textcircled{2}$$

• Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου

• Παράδειγμα:

Η ② λόγω ① δίνει:

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= a \frac{-1+z^{-1}}{1-az^{-1}} X(z) + z^{-1} \left(X(z) + a \frac{-1+z^{-1}}{1-az^{-1}} X(z) \right) \\
 &= a \frac{-1+z^{-1}}{1-az^{-1}} X(z) + z^{-1} X(z) + az^{-1} \frac{-1+z^{-1}}{1-az^{-1}} X(z) \\
 &= \left[\frac{-a+az^{-1}}{1-az^{-1}} + z^{-1} + \frac{-az^{-1}+az^{-2}}{1-az^{-1}} \right] X(z) \\
 &= \frac{-a+az^{-1} + z^{-1}(1-az^{-1}) - az^{-1} + az^{-2}}{1-az^{-1}} X(z) \\
 &= \frac{-a+z^{-1}-az^{-2}+az^{-2}}{1-az^{-1}} X(z) \\
 &= \frac{-a+z^{-1}}{1-az^{-1}} X(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{-a+z^{-1}}{1-az^{-1}}
 \end{aligned}$$



1 πόλο/σημ
1 καθυστέρηση

D.F. II:
2 πόλο/σημ
1 καθυστέρηση

all-pass! :)

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

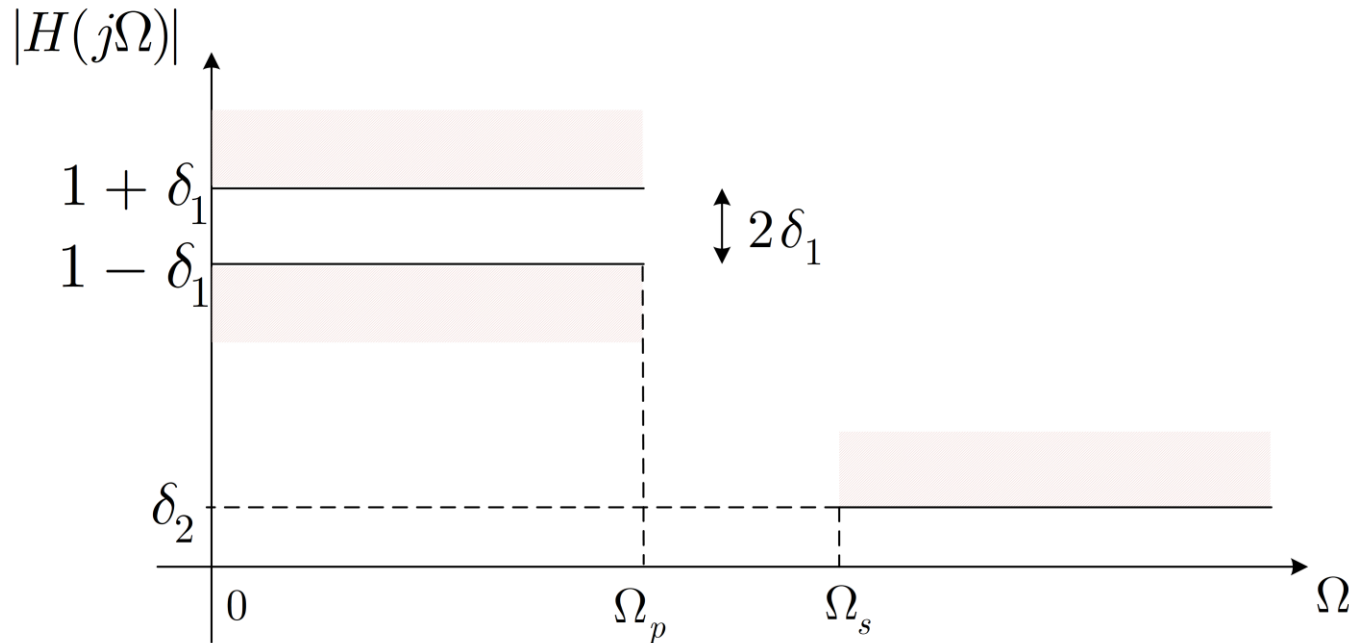
- Τα φίλτρα είναι μια πολύ σημαντική κατηγορία ΓΧΑ συστημάτων
- Έχουμε ήδη δει τα περίφημα **ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων**
 - Περνούν συγκεκριμένες συχνότητες στην έξοδό τους
 - Αποκόπτουν κάποιες άλλες
- Θα δώσουμε έμφαση στη σχεδίαση αιτιατών φίλτρων επιλογής συχνοτήτων (μη ιδανικών)
 - Τα συμπεράσματα γενικεύονται και για μη αιτιατά φίλτρα
- Η σχεδίαση περιλαμβάνει τρία στάδια
 1. Προδιαγραφές του συστήματος
 2. Προσέγγιση προδιαγραφών από ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα
 3. Πραγματοποίηση του συστήματος
- Θα δώσουμε βάρος στο 1^ο και στο 2^ο βήμα

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Επειδή ο «αναλογικός» κόσμος προηγήθηκε αρκετά του «ψηφιακού» 😊 , υπάρχει συσσωρευμένη τεχνογνωσία για τη σχεδίαση αναλογικών φίλτρων...
 - ... με την έννοια ότι αφορούν συστήματα συνεχούς χρόνου
- Μια ιδέα είναι να εκμεταλλευτούμε την τεχνογνωσία αυτή και να προσπαθήσουμε να μετατρέψουμε ένα αναλογικό φίλτρο σε «ψηφιακό» (διακριτού χρόνου)
- Ας δούμε λοιπόν πρώτα πως θα γινόταν αυτή η διαδικασία στο συνεχή χρόνο
 - Δηλ. πώς θα σχεδιάζαμε ένα φίλτρο στο συνεχή χρόνο
- Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας τις προδιαγραφές του στο χώρο της συχνότητας
- Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε μια γενική συνάρτηση στο χώρο της συχνότητας που τις ικανοποιεί
 - Θα λύσουμε κάποια συστήματα για να συγκεκριμενοποιήσουμε τη συνάρτηση αυτή
- Τέλος θα μετατρέψουμε το σύστημα στο χώρο του Laplace (!)

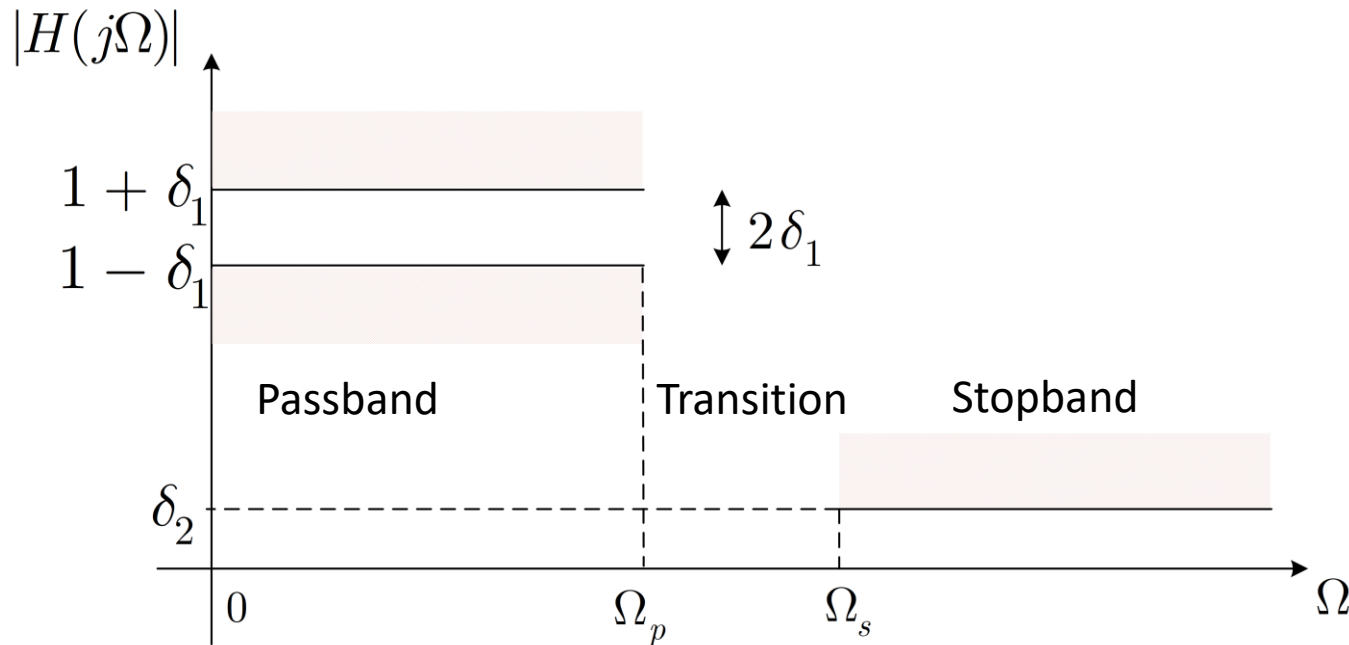
• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο στο συνεχή χρόνο
- Εν αντιθέσει με προηγούμενο μάθημα, θα συμβολίσουμε τη συχνότητα που αντιστοιχεί στο συνεχή χρόνο με $\Omega = 2\pi f$
- Ξεκινάμε με τις προδιαγραφές του φίλτρου



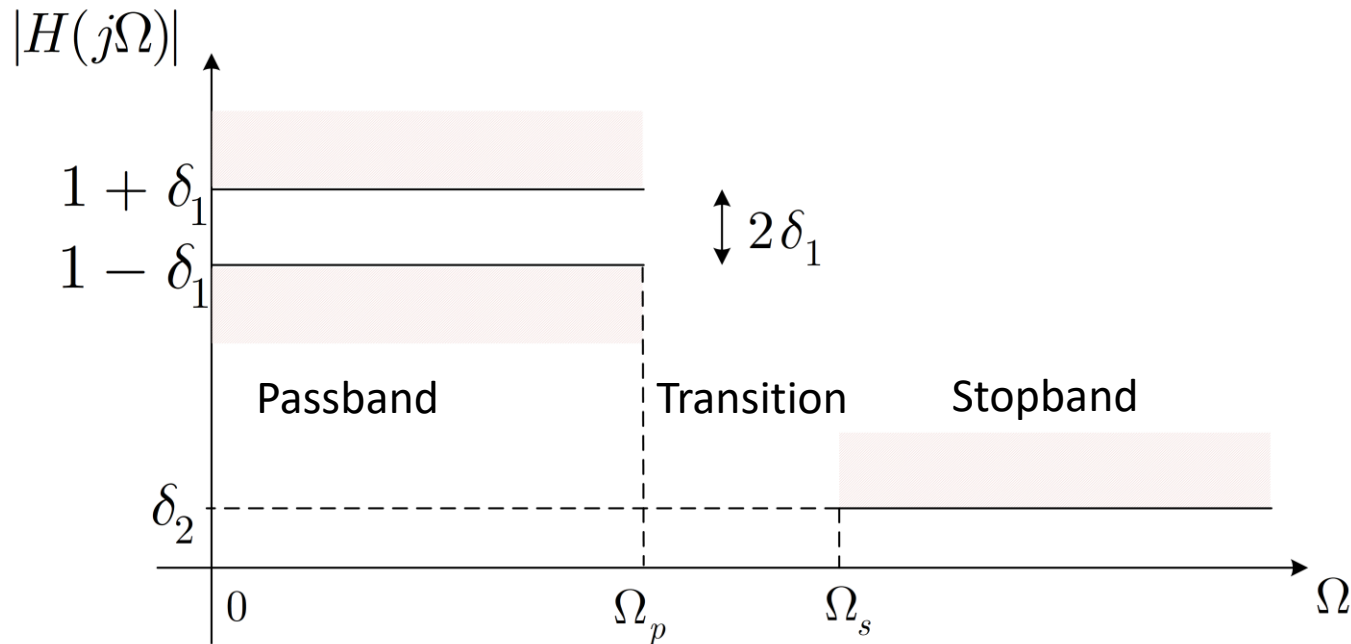
- Ω_p : pass-band cutoff frequency
- Ω_s : stop-band cutoff frequency

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων



- Ω_p : pass-band cutoff frequency
- Ω_s : stop-band cutoff frequency
- Η ζώνη μεταξύ Ω_p και Ω_s ονομάζεται μεταβατική ζώνη (transition band)
- δ_1, δ_2 είναι κι αυτά προδιαγραφές του φίλτρου
- Παρατηρήστε ότι αφήνουμε «περιθώριο» δ_1 εκατέρωθεν της μονάδας γιατί δε γίνεται να κατασκευάσουμε ιδανικά φίλτρα (όμοια για το δ_2)

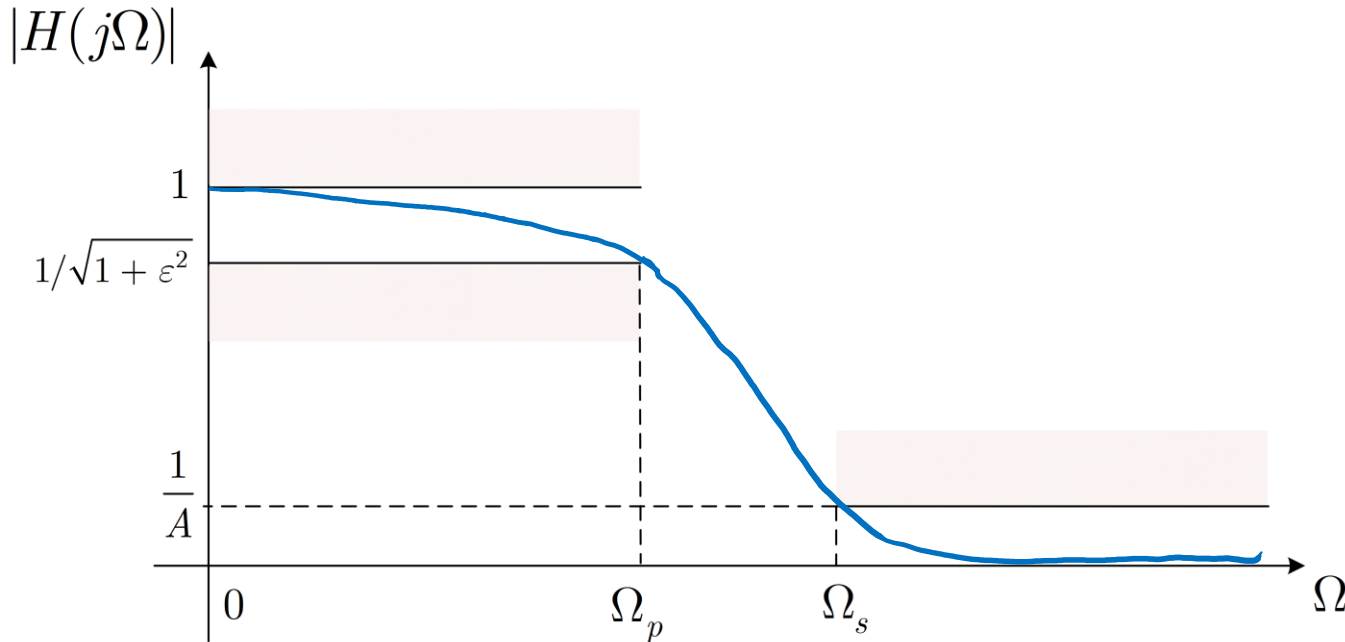
• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων



- Έστω ότι $\delta_1 = 0.01$, άρα $1 + \delta_1 = 1.01$ και $1 - \delta_1 = 0.99$
- Επίσης, έστω ότι $\delta_2 = 10^{-3}$
- Αυτές είναι οι προδιαγραφές μας, μαζί με επιλογή για τις Ω_p, Ω_s
- Πολλές φορές χρησιμοποιούμε μια λίγο διαφορετική σημειογραφία για τις προδιαγραφές

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Πολλές φορές χρησιμοποιούμε μια λίγο διαφορετική μορφή προδιαγραφών



- Θέλουμε το φίλτρο μας να ξεκινά από τη μονάδα για $\Omega = 0$ και να πέφτει πολύ λίγο ως τη pass-band cutoff frequency
- Στη stop-band cutoff frequency, η απόκριση πλάτους θέλουμε να έχει (μικρή) τιμή $\frac{1}{A}$
- Μπορούμε να ψάξουμε για μια απόκριση πλάτους (συνάρτηση) που να είναι μονότονη
- Ζητάμε λοιπόν μια εξίσωση που να μπορεί να δεχθεί τις προδιαγραφές μας! 😊

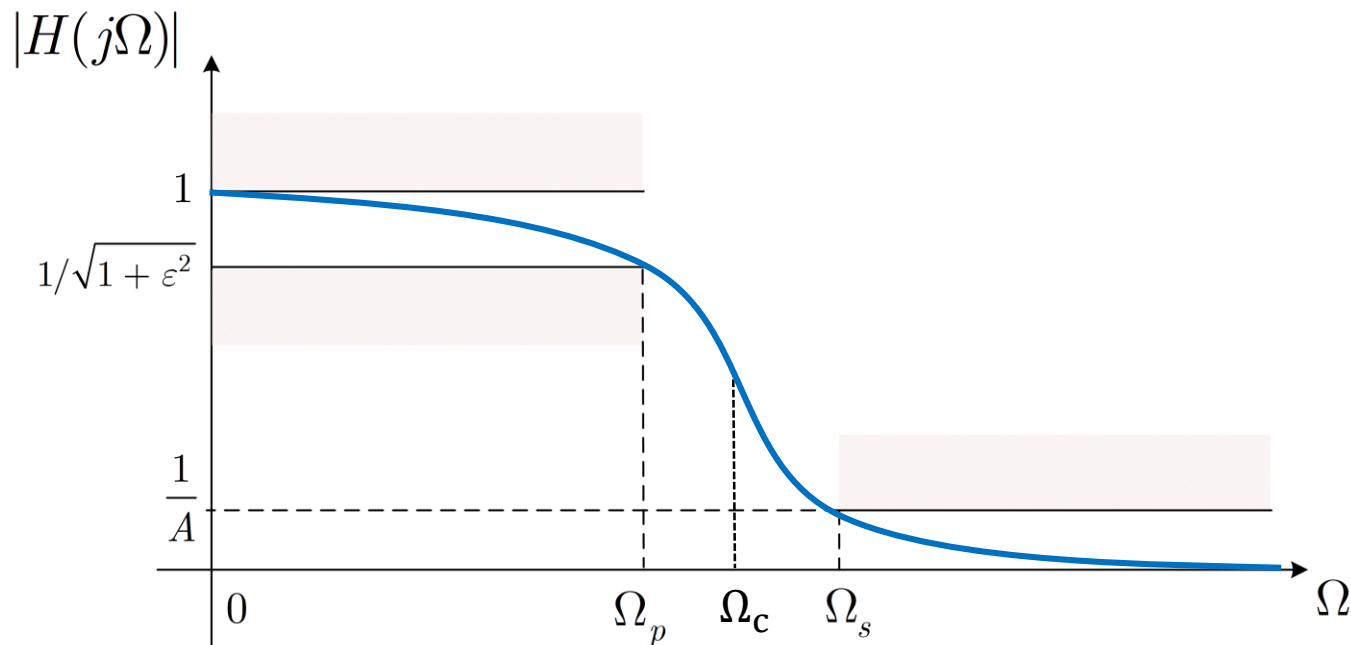
• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Το περίφημο φίλτρο Butterworth είναι μονότονο και δίνεται από τη σχέση

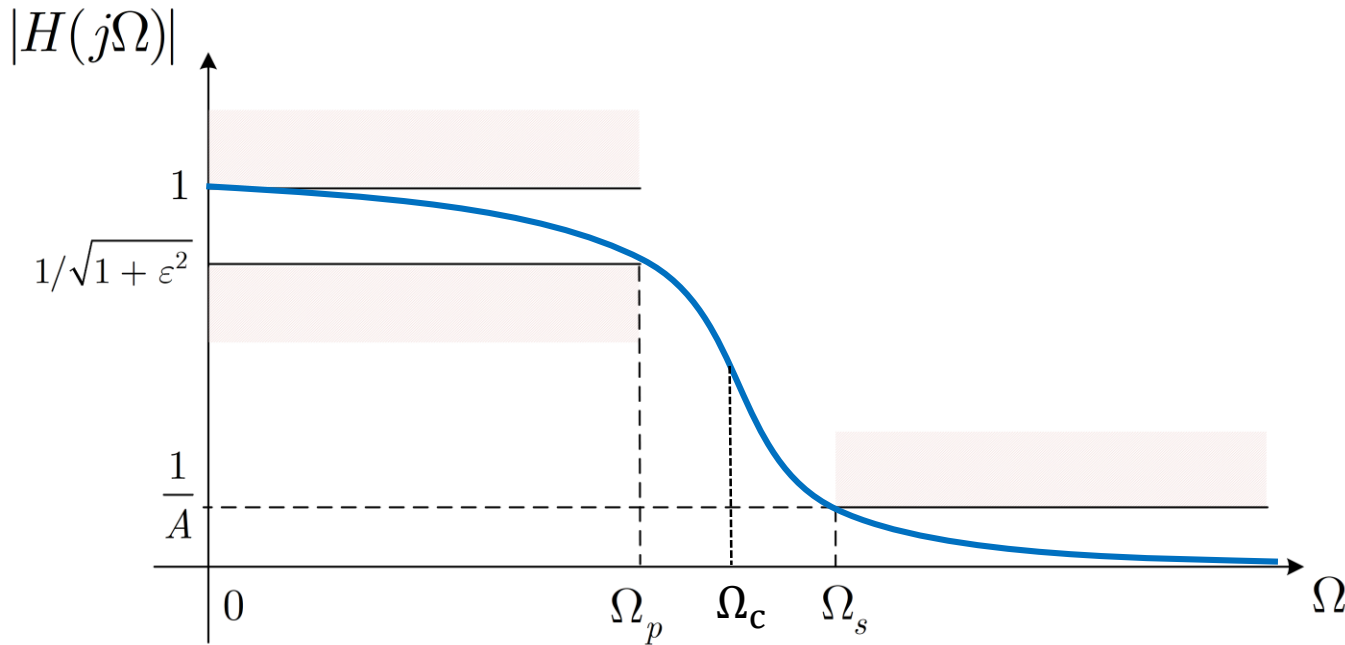
$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

με Ω_c τη συχνότητα αποκοπής του φίλτρου και N την τάξη του φίλτρου

- Ζητάμε τα Ω_c, N που να ικανοποιούν τις προδιαγραφές μας: $A, \varepsilon, \Omega_p, \Omega_s$



• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων



• Θέλουμε

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \epsilon^2}$$

$$|H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

$$|H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

• Έχουμε ένα 2x2 σύστημα ως προς N, Ω_c

• Αν (για ευκολία) θέσουμε $\kappa = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$ και $\kappa_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}$, τότε λύνοντας ως προς N :

$$N = \frac{\log\left(\frac{1}{\kappa_1}\right)}{\log\left(\frac{1}{\kappa}\right)}$$

• Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι απαραίτητα ακέραιος αριθμός!

• Επιλέγουμε το άνω ακέραιο μέρος (αν $N=5.36 \rightarrow N=6$)

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

$$|H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

• Για $N = 6$, βρίσκουμε το Ω_c και έχουμε την πλήρη μορφή του φίλτρου Butterworth που ικανοποιεί τις προδιαγραφές μας!

• Όμως το φίλτρο είναι της μορφής $|H(j\Omega)|^2$, εμείς θέλουμε την απόκριση πλάτους

• Έχουμε

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H^*(j\Omega) = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\Omega}$$

• Άρα

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Το σύστημα

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

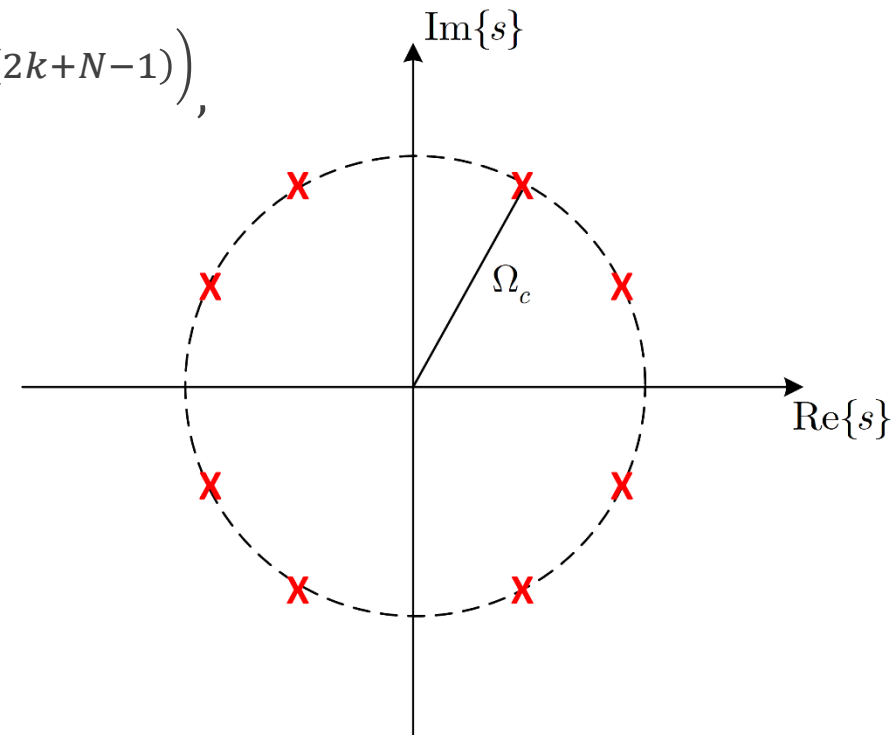
έχει μόνο πόλους!

- Οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις

$$s_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{\pi}{2N}(2k+N-1)\right)},$$

με $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$

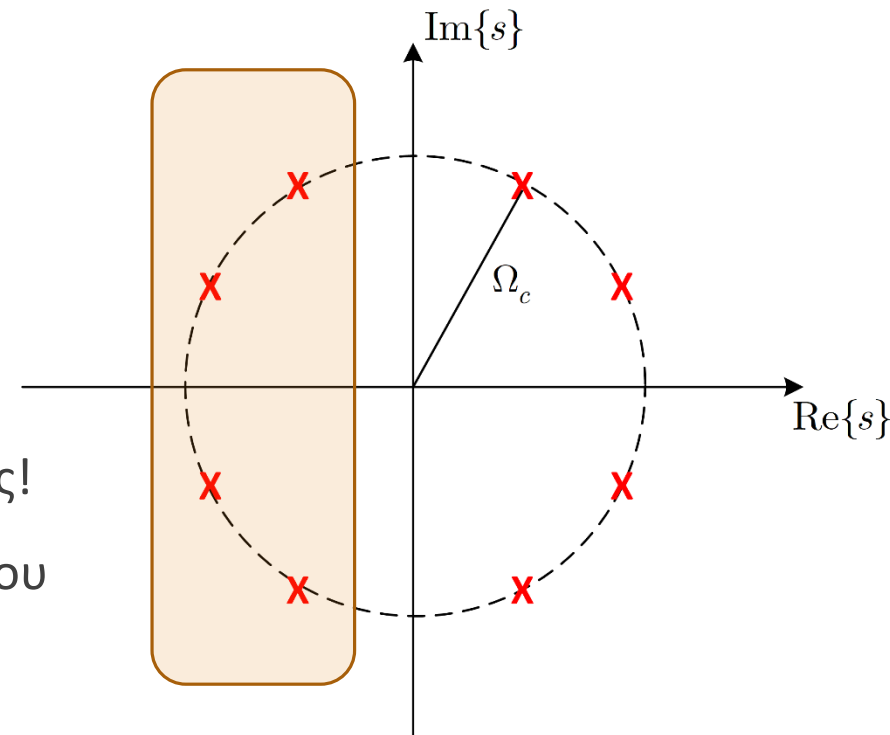
- Οι πόλοι βρίσκονται σε κύκλο ακτίνας Ω_c !



• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Πρέπει να επιλέξουμε τους πόλους που αντιστοιχούν στο $H(s)$
- Θέλουμε φυσικά ένα σύστημα που να είναι ευσταθές και αιτιατό
- Για να είναι τέτοιο, πρέπει οι πόλοι να βρίσκονται στο **αριστερό** ημιεπίπεδο
- Έτσι, ξέρουμε τους πόλους και τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$!

$$H(s) = \prod_k \frac{-s_k}{s - s_k}$$



- Οπότε υπολογίσαμε το σύστημα συνεχούς χρόνου με βάση κάποιες προδιαγραφές
- Μα εμάς μας ενδιαφέρει ο διακριτός χρόνος!
- Μπορούμε να φέρουμε το $H(s)$ στο χώρο του μετασχ. Z??? 😊

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Μπορούμε να φέρουμε το $H(s)$ στο χώρο του μετασχ. Z ???

- ΝΑΙ! 😊

- Και μάλιστα με δυο διαφορετικές μεθόδους

• Μέθοδος Impulse Invariance

- a.k.a δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ συνεχούς χρόνου

• Μέθοδος Bilinear Transformation

- a.k.a «συμπίεση» του άξονα $0 \leq \Omega \leq +\infty$ στο $0 \leq \omega \leq \pi$!!

- Ας τα δούμε ένα-ένα...

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Έστω ότι έχουμε μια κρουστική απόκριση $h(t)$ η οποία περιγράφει ένα επιθυμητό σύστημα στο συνεχή χρόνο
- Αν τη δειγματοληπτήσουμε με περίοδο T_d τότε παίρνουμε ένα δειγματοληπτημένο σήμα

$$h(nT_d) = h(t) \Big|_{t=nT_d} \leftrightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(j(\Omega - k\Omega_d))$$

- Αυτή είναι μια έκφραση του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου με όρους μετασχ. Fourier συνεχούς χρόνου! 😊
- Ξέρουμε ότι κατά τη δειγματοληψία

$$\omega = \frac{2\pi f}{f_d} = \frac{\Omega}{f_d} = \Omega T_d \Rightarrow \Omega = \frac{\omega}{T_d}$$

- Άρα

$$h[n] = T_d h(nT_d) \leftrightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H\left(j\left(\frac{\omega}{T_d} - k\frac{2\pi}{T_d}\right)\right)$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Βήμα 1: Ορίζουμε προδιαγραφές για το φίλτρο μας στον «ψηφιακό» χώρο

- Βήμα 2: Μετατρέπουμε τις προδιαγραφές στον «αναλογικό» χώρο συχνοτήτων

$$\Omega = \frac{\omega}{T_d}$$

- Βήμα 3: Βρίσκουμε το σύστημα $H(s)$ που αντιστοιχεί στις προδιαγραφές μας: έστω ότι

$$H(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \leftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t)$$

- Βήμα 4: Δειγματοληπτούμε την κρουστική απόκριση $h(t)$:

$$h[n] = T_d h(nT_d) = T_d \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k n T_d} u(nT_d) = T_d \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T_d})^n u[n]$$

- Βήμα 5: Εφαρμόζουμε μετασχ. Z στην κρουστική απόκριση $h[n]$:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k T_d}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k T_d}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

- Παρατηρήστε ότι υπάρχει μια αντιστοίχιση των πόλων στο χώρο του Laplace με το χώρο του Z
- Ξεκάθαρα, **κάθε πόλος s_k αντιστοιχεί σε έναν πόλο $e^{s_k T_d}$!!!**
- Είναι

$$z_k = e^{s_k T_d} = e^{(\sigma_k + j\Omega_k) T_d} = e^{\sigma_k T_d} e^{j\Omega_k T_d} = e^{\sigma_k T_d} e^{j\omega_k}$$

- Παρατηρήστε ότι:

Αν $\sigma_k > 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| > 1$

Αν $\sigma_k = 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| = 1$

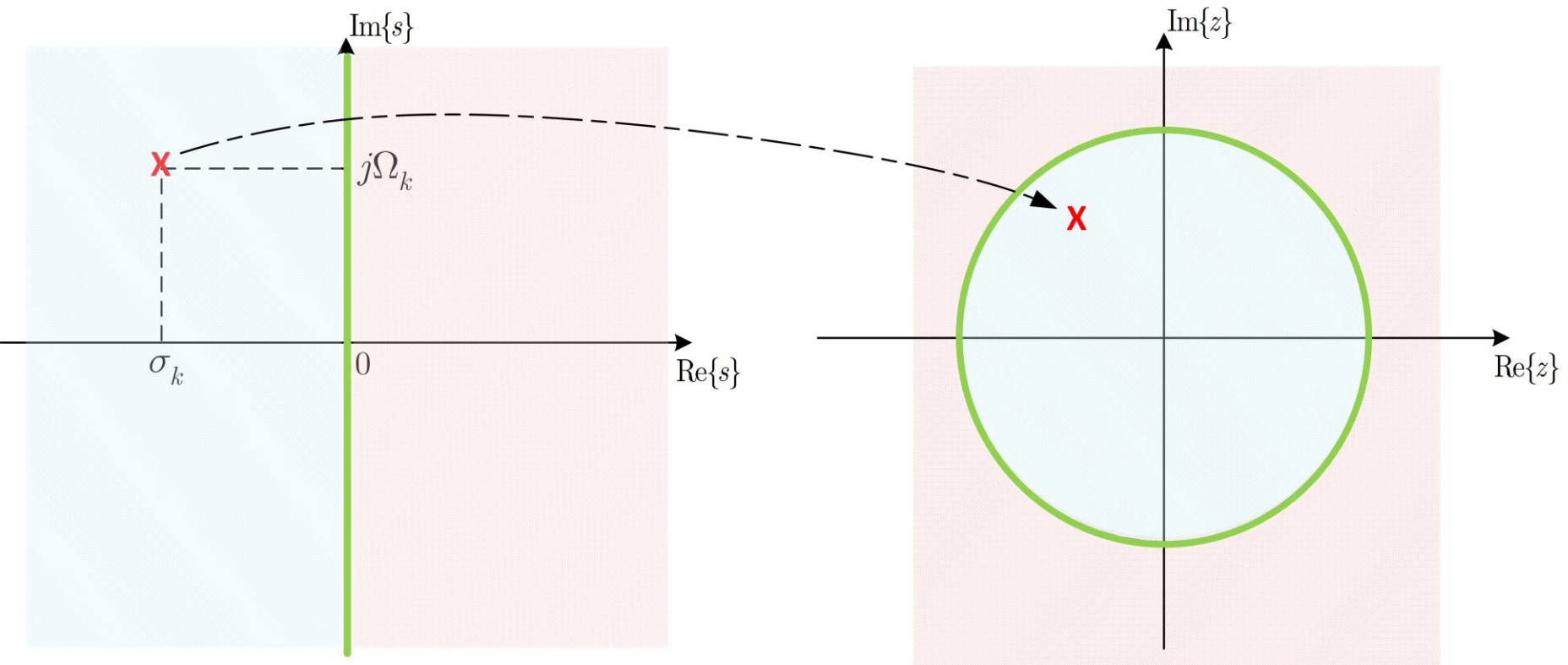
Αν $\sigma_k < 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| < 1$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

☐ Αν $\sigma_k > 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T d}| > 1$

☐ Αν $\sigma_k = 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T d}| = 1$

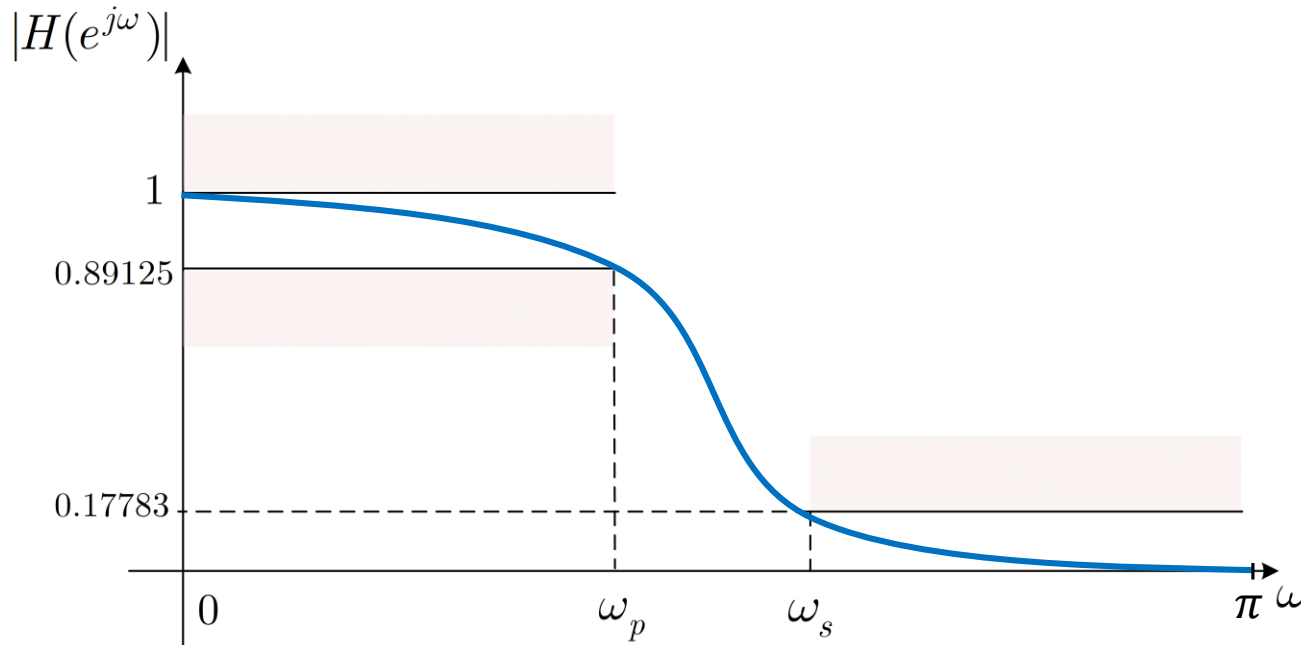
☐ Αν $\sigma_k < 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T d}| < 1$



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Ας δούμε ένα πλήρες παράδειγμα

- Έστω ότι θέλουμε ένα φίλτρο όπως στο σχήμα - ας πούμε ένα lowpass Butterworth



με $\omega_p = 0.2\pi$, $\omega_s = 0.3\pi$

- Προδιαγραφές:

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi$$

$$0.17783 \geq |H(e^{j\omega})| : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Προδιαγραφές:

$$\begin{aligned} 0.89125 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 & : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi \\ 0.17783 &\geq |H(e^{j\omega})| & : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi \end{aligned}$$

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι η παράμετρος T_d δεν παίζει ρόλο στη σχεδίαση

- Θέτουμε $T_d = 1$

- Μετατρέπουμε τις «ψηφιακές» συχνότητες σε «αναλογικές»: $\Omega = \frac{\omega}{T_d} = \omega$

- $\Omega_p = 0.2\pi, \Omega_s = 0.3\pi$

- Οι προδιαγραφές γίνονται

$$\begin{aligned} 0.89125 &\leq |H(j\Omega)| \leq 1 & : 0 \leq \Omega \leq 0.2\pi \\ 0.17783 &\geq |H(j\Omega)| & : 0.3\pi \leq \Omega \leq \pi \end{aligned}$$

- Οι προδιαγραφές γράφονται

$$\begin{aligned} 0.89125 &= |H(j\Omega_p)| = |H(j0.2\pi)| \\ 0.17783 &= |H(j\Omega_s)| = |H(j0.3\pi)| \end{aligned}$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Αντικαθιστώντας την εξίσωση του φίλτρου Butterworth και λύνοντας το 2x2 σύστημα καταλήγουμε στο $N = 5.8858, \Omega_c = 0.70474$
- Θέλουμε ακέραιο $N \Rightarrow N = 6$
- Υπολογίζουμε ξανά τη συχνότητα $\Omega_c = 0.7032$
- Με αυτά τα νούμερα μπορούμε να δείξουμε ότι οι προδιαγραφές μας ικανοποιούνται ακριβώς στη μια συχνότητα (Ω_p ή Ω_s) ενώ υπερκαλυπτόμαστε στην άλλη (Ω_p ή Ω_s)!
- Χρειάζεται να βρούμε τώρα τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ενός αιτιατού και ευσταθούς συστήματος
- Ξανά

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j0.7032}\right)^{12}}$$

- Οι πόλοι του συστήματος είναι

$$s_k = 0.7032e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 11$$

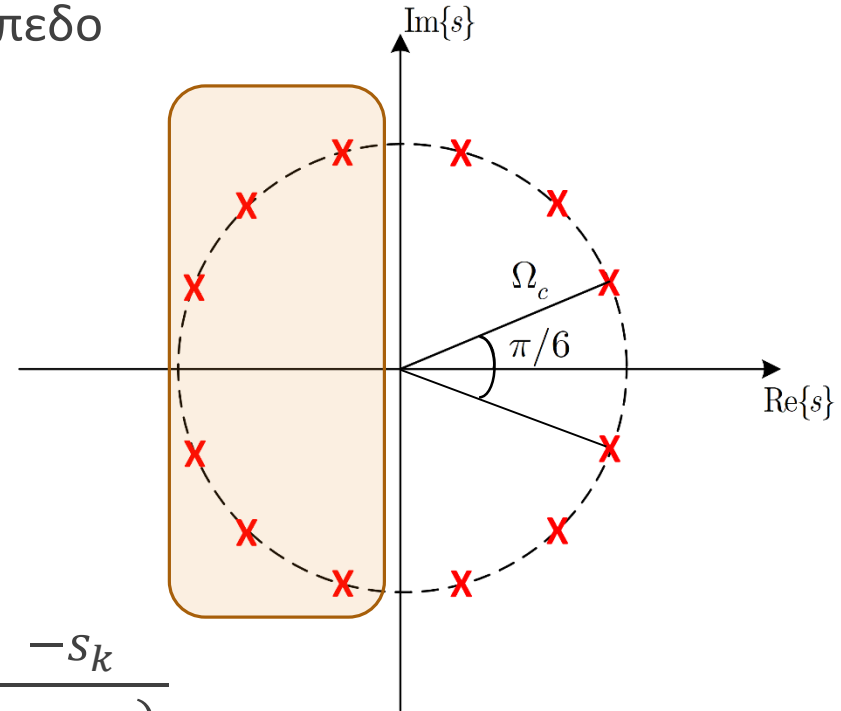
• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

• Οι πόλοι του συστήματος είναι

$$s_k = 0.7032e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)}, \quad k = 0,1,2, \dots, 11$$

• Κρατούμε μόνο αυτούς στο αριστερό ημιεπίπεδο

• Δίνουν ευσταθές και αιτιατό σύστημα



• Το σύστημα δίνεται ως

$$H(s) = \prod_{k=3}^8 \frac{-s_k}{(s - s_k)}$$

$$H(s) = \frac{0.12093}{(s^2 + 0.36s + 0.49)(s^2 + 0.99s + 0.49)(s^2 + 1.35s + 0.49)}$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

$$H(s) = \sum_{k=1}^3 \frac{A}{(s - s_k)(s - s_k^*)}$$

$$H(s) = \frac{0.12093}{(s^2 + 0.36s + 0.49)(s^2 + 0.99s + 0.49)(s^2 + 1.35s + 0.49)}$$

- Για κάθε όρο $\frac{1}{s-s_k}$ βάζουμε έναν όρο $\frac{1}{1-e^{s_k}z^{-1}}$ στο χώρο του Z

$$H(z) = \frac{0.28 - 0.44z^{-1}}{1 - 1.29z^{-1} + 0.69z^{-2}} + \frac{-2.14 + 1.14z^{-1}}{1 - 1.06z^{-1} + 0.36z^{-2}} + \frac{1.85 - 0.63z^{-1}}{1 - 0.99z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

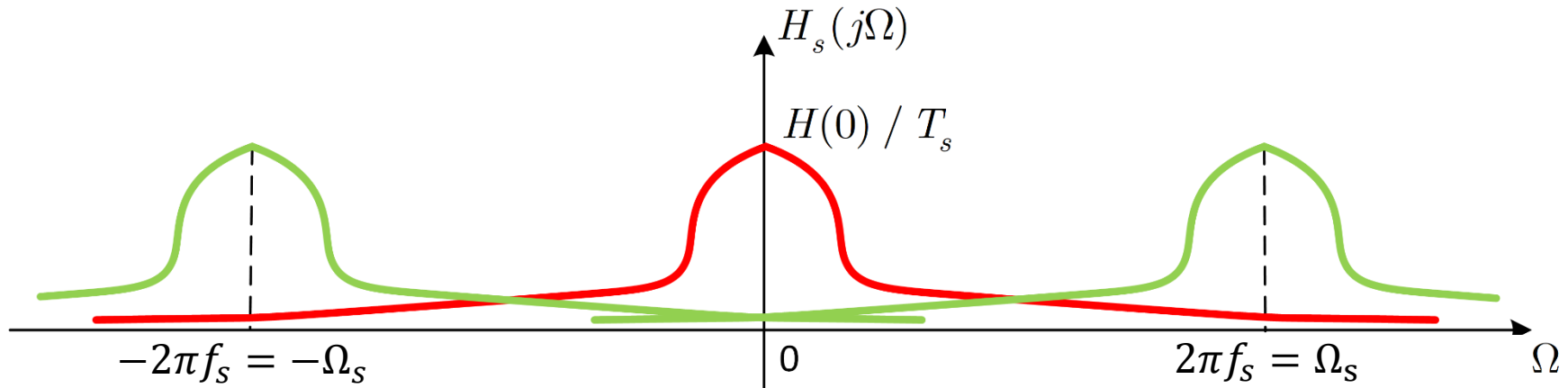
- Προσέξτε ότι δεν κάναμε ρητά δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης συνεχούς χρόνου! Ούτε καν την υπολογίσαμε!
- Ξέρουμε ότι η μέθοδος απλά κάνει pole mapping $s_k \rightarrow e^{s_k}$!

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Έχουμε ήδη δει μια μέθοδο σχεδίασης ψηφιακών-από-αναλογικά φίλτρα
 - Τη Μέθοδο Impulse Invariance
- Ποιο είναι το βασικό πρόβλημα με αυτή τη μέθοδο?
- Ότι το αναλογικό φίλτρο δεν είναι band-limited
 - Δεν «ζει» μόνο σε ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων γύρω από το μηδέν
- Θυμηθείτε την ιδιότητα της κλιμάκωσης στο χρόνο για το μετασχ. Fourier συνεχούς χρόνου
 - «Αν ένα σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, τότε είναι άπειρης διάρκειας στη συχνότητα, και το αντίστροφο»
- Η ιδιότητα αυτή μας λέει ότι ένα πεπερασμένης διάρκειας σήμα στο συνεχή χρόνο θα έχει άπειρου πλήθους συχνότητες, δηλ. ΔΕ θα είναι band-limited
- Άρα κατά τη δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης, θα υπάρχει πάντα το φαινόμενο του aliasing!
 - Οι «ρέπλικες» του κεντρικού φάσματος θα έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους!

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Οι «ρέπλικες» του κεντρικού φάσματος θα έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους!



- Η τεχνική που θα συζητήσουμε στη συνέχεια αποφεύγει το πρόβλημα του aliasing χρησιμοποιώντας έναν αλγεβρικό μετασχηματισμό μεταξύ των μεταβλητών s και z
- Τι ακριβώς κάνει αυτός ο μετασχηματισμός?
- Προσπαθεί να «χωρέσει» τον άξονα $-\infty \leq \Omega \leq +\infty$ στον άξονα $-\pi \leq \omega \leq \pi$!
- Ως εκ τούτου, η αντιστοίχιση των μεταβλητών $\Omega \rightarrow \omega$ **δεν** είναι γραμμική, όπως ήταν στην προηγούμενη μέθοδο
- Άρα η τεχνική αυτή, που ονομάζεται Bilinear Transformation, είναι κατάλληλη όταν αυτή η συμπίεση (warping) του άξονα αναλογικής συχνότητας είναι αποδεκτή

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Ο μετασχηματισμός αυτός δίνεται ως

$$s = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

δηλ.

$$H(z) = H_c \left[\frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \right]$$

- Κι εδώ έχουμε την παράμετρο T_d , όπως και στην προηγούμενη μέθοδο
- Κι εδώ όμως μπορούμε να δείξουμε ότι η παράμετρος αυτή δεν παίζει ρόλο στη σχεδίαση
 - Θα την κρατήσουμε για λόγους συνέπειας

- Λύνοντας ως προς z :

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T_d}{2}\right) s}{1 - \left(\frac{T_d}{2}\right) s} = \frac{1 + \frac{\sigma T_d}{2} + \frac{j\Omega T_d}{2}}{1 - \frac{\sigma T_d}{2} - \frac{j\Omega T_d}{2}}$$

$\sigma + j\omega$

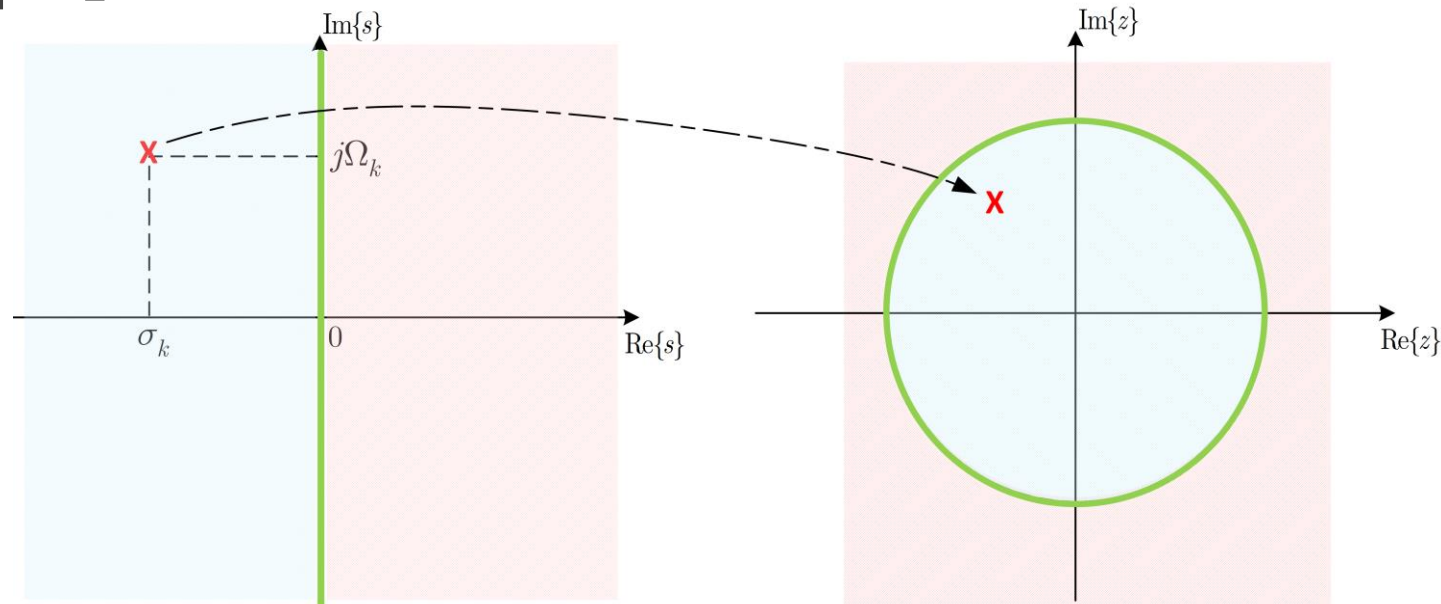
• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T_d}{2}\right) s}{1 - \left(\frac{T_d}{2}\right) s} = \frac{1 + \frac{\sigma T_d}{2} + \frac{j\Omega T_d}{2}}{1 - \frac{\sigma T_d}{2} - \frac{j\Omega T_d}{2}}$$

• Παρατηρήστε ότι:

- Αν $\sigma < 0$, τότε $|z| < 1$
- Αν $\sigma > 0$, τότε $|z| > 1$
- Αν $\sigma = 0$, τότε $|z| = 1$

Ίδια «ιδέα» με την αντιστοίχιση της προηγούμενης μεθόδου, Impulse Invariance (όχι σαν αλγεβρική αντιστοίχιση όμως)



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Ας δούμε πως μπορούμε να συσχετίσουμε τις μεταβλητές Ω , ω

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \right) = \frac{2j}{T_d} \tan \left(\frac{\omega}{2} \right)$$

- Οπότε

$$\sigma = 0 \quad , \quad \Omega = \frac{2}{T_d} \tan \left(\frac{\omega}{2} \right)$$

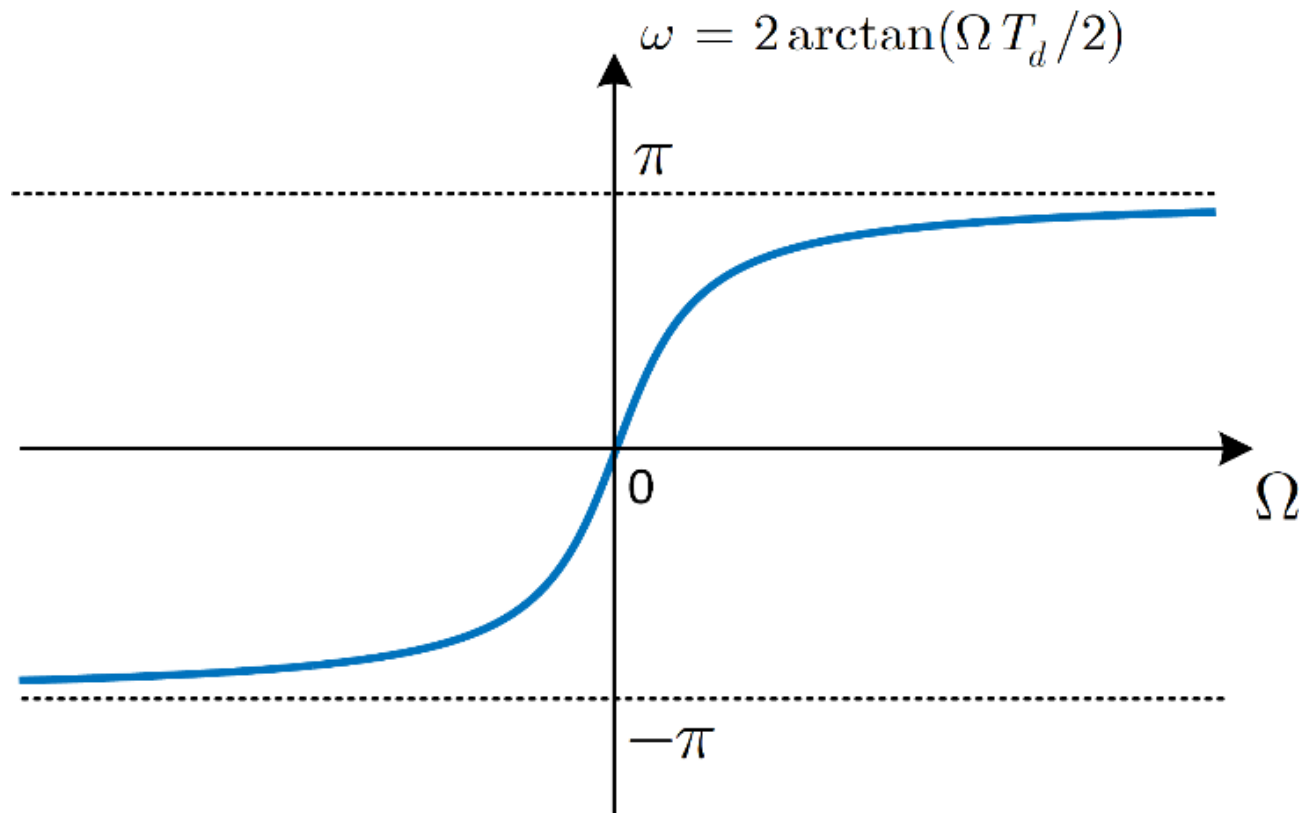
ή

$$\omega = 2 \arctan \left(\frac{\Omega T_d}{2} \right)$$

- Πώς μοιάζει αυτή η μη γραμμική αντιστοίχιση των δυο συχνοτήτων?
- Πώς αντιστοιχίζεται η «αναλογική» απόκριση πλάτους στην «ψηφιακή»?

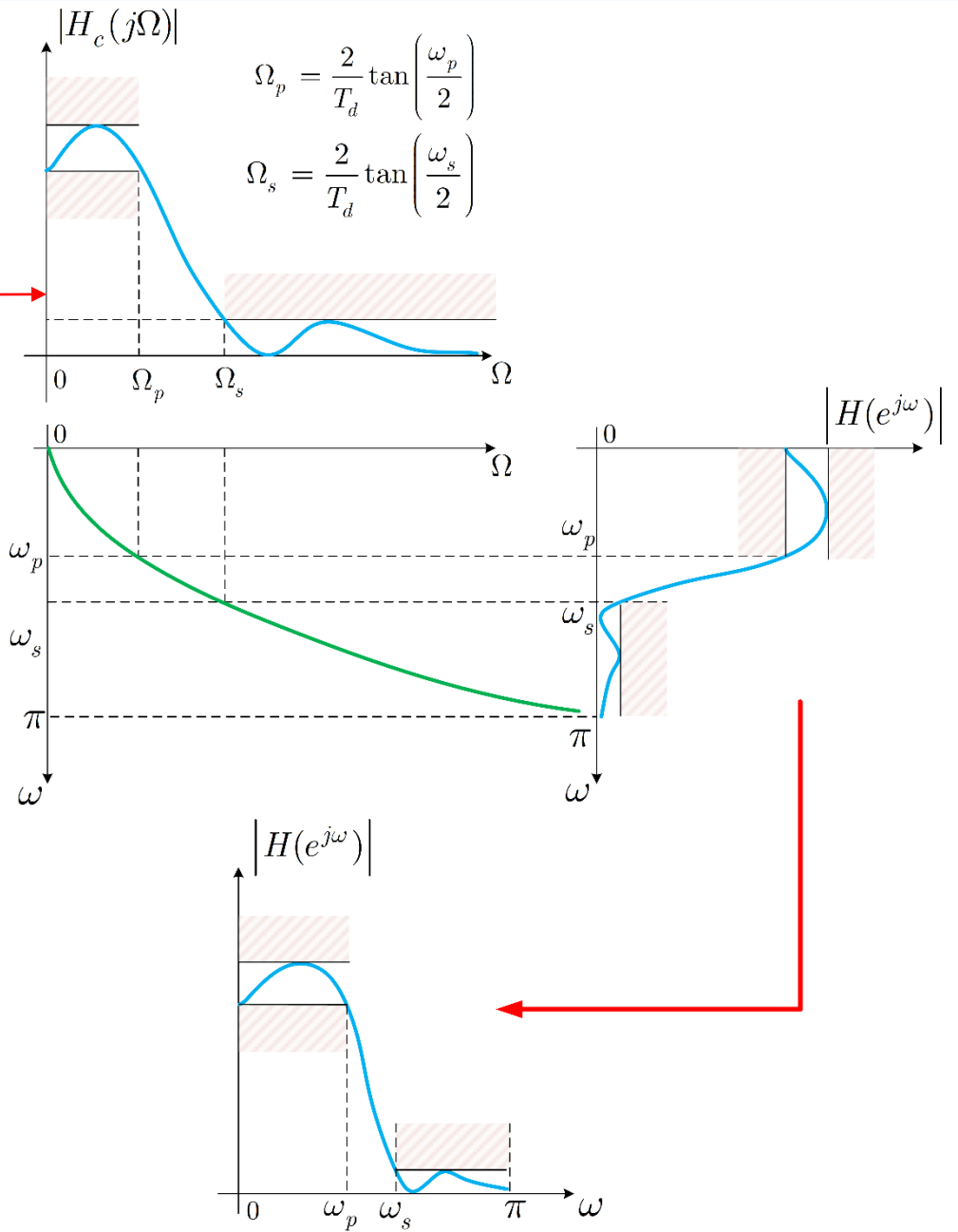
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)$$



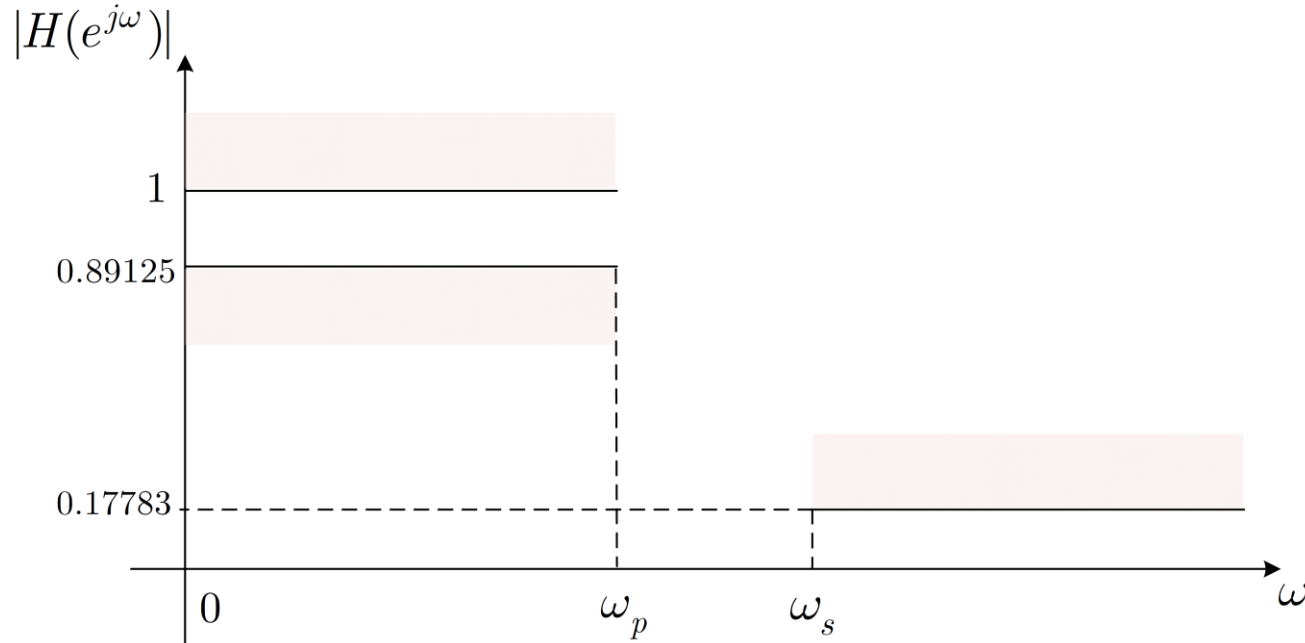
• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

Προδιαγραφές ω_p, ω_s στο διακριτό χρόνο μετατρέπονται στο συνεχή χρόνο



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Ας δούμε ένα παράδειγμα σχεδίασης (ίδιο με την προηγ. μέθοδο)



- Ας ζητήσουμε $\omega_p = 0.2\pi$, $\omega_s = 0.3\pi$ και ας θεωρήσουμε $T_d = 1$

- Προδιαγραφές:

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi$$

$$0.17783 \geq |H(e^{j\omega})| : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Μετασχηματίζουμε τις προδιαγραφές μας από $\omega \rightarrow \Omega = 2 \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$:

$$0.89125 \leq |H(j\Omega)| \leq 1 : 0 \leq \Omega \leq 2 \tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right)$$

$$0.17783 \geq |H(j\Omega)| : 2 \tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \leq \Omega \leq 2 \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$$

- Θέλουμε ξανά μια εξίσωση που να δέχεται τις προδιαγραφές μας!
 - Ας επιλέξουμε ξανά το φίλτρο Butterworth

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- Εφαρμόζουμε προδιαγραφές:

$$1 + \left(\frac{2 \tan(0.1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.89125}\right)^2$$

$$1 + \left(\frac{2 \tan(0.15\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.17783}\right)^2$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε $N = 5.305 \rightarrow N = 6, \Omega_c = 0.766$
- Για να βρούμε ένα αιτιατό και ευσταθές σύστημα συνεχούς χρόνου, έχουμε

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H^*(j\Omega) \Rightarrow |H(s)|^2 \Big|_{s=j\Omega} = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\Omega}$$

- Οι πόλοι του συστήματος

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j0.766}\right)^{12}}$$

δίνονται ως

$$s_k = 0.766e^{j\frac{\pi}{12}(2k+5)}, \quad k = 0, 1, \dots, 11$$

- Πρέπει να επιλέξουμε τους πόλους οι οποίοι μας δίνουν ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(s)$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

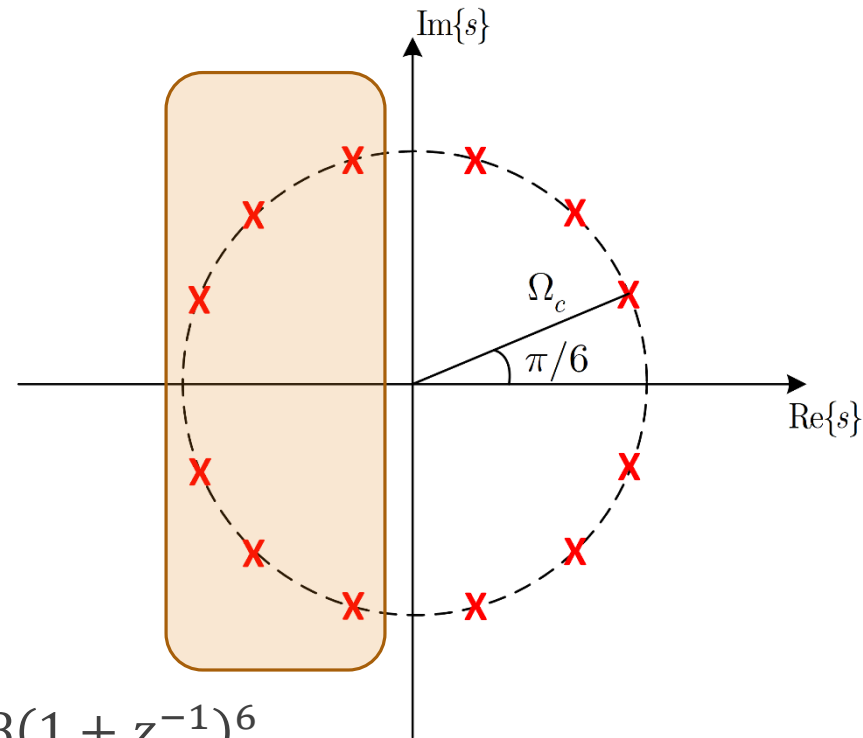
- Επιλέγω τους πόλους στο αριστερό ημιεπίπεδο
- Τότε το σύστημά μας θα γράφεται ως

$$H(s) = \frac{\Omega_c^6}{(s^2 + 0.39s + 0.58)(s^2 + 1.08s + 0.58)(s^2 + 1.48s + 0.58)}$$

- Ο Bilinear Transformation δίνει:

$$s = \frac{2}{T_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Rightarrow s = 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

- Το σύστημά μας στο χώρο του μετασχ. Z θα είναι:



$$H(z) = \frac{0.000738(1 + z^{-1})^6}{(1 - 1.26z^{-1} + 0.72z^{-2})(1 - 1.01z^{-1} + 0.35z^{-2})(1 - 0.90z^{-1} + 0.21z^{-2})}$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Υπάρχουν πολλές εξισώσεις (φίλτρα) στις οποίες μπορούμε να θέσουμε τις προδιαγραφές μας

- Chebyshev (I, II)

- Elliptic

- Butterworth

- Bessel

- Optimum "L"

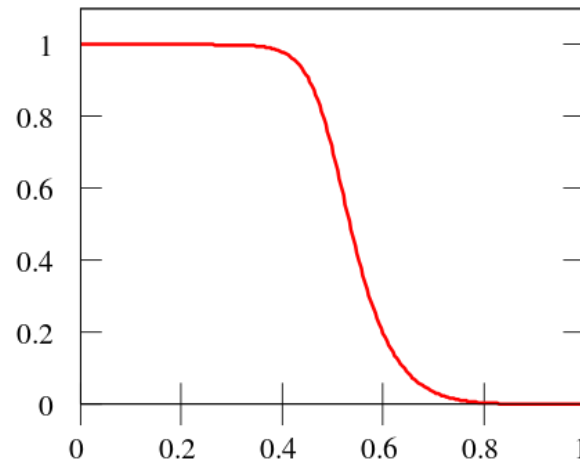
- Gaussian

- Hourglass

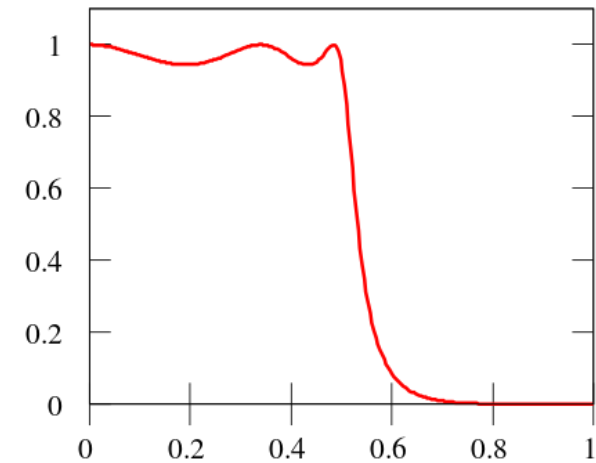
- Raised-cosine

- και πολλά άλλα! 😊

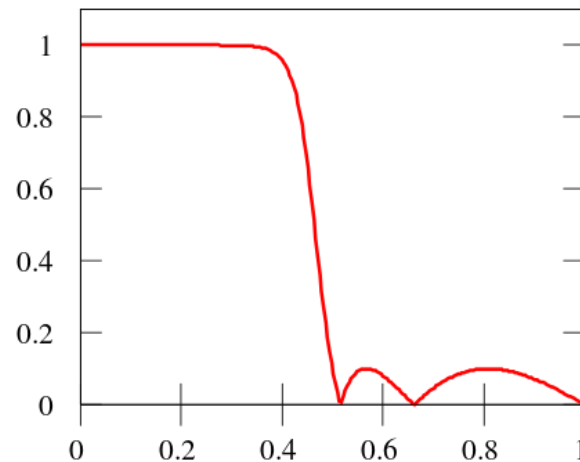
Butterworth



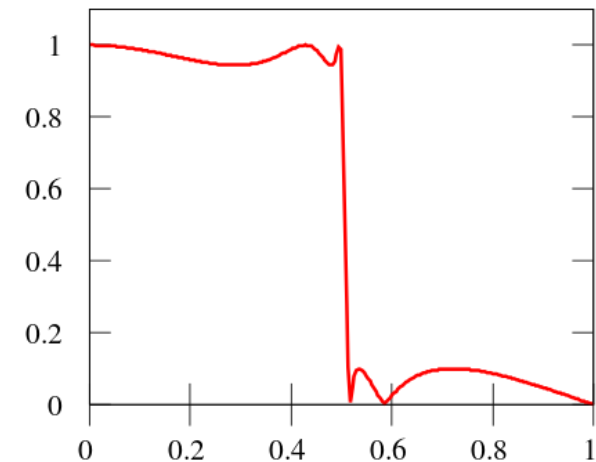
Chebyshev type 1



Chebyshev type 2



Elliptic





• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων (επανάληψη...)

• Έχουμε δει ήδη δυο μεθόδους κατασκευής ψηφιακών φίλτρων IIR μέσω του πεδίου του συνεχούς χρόνου

- ... και του μετασχ. Laplace

• Μέθοδος Impulse Invariance

- a.k.a δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ συνεχούς χρόνου

- Γραμμική αντιστοιχία συχνότητας Ω σε ω

- Η διαδικασία αυτή αντιστοιχίζει κάθε πόλο s_k στο χώρο του Laplace σε έναν πόλο $e^{s_k T_d}$ στο χώρο του μετασχ. Z

• Μέθοδος Bilinear Transformation

- a.k.a «συμπίεση» του άξονα $0 \leq \Omega \leq +\infty$ στο $0 \leq \omega \leq \pi$!!

- Μη γραμμική αντιστοιχία της αναλογικής με την ψηφιακή συχνότητα

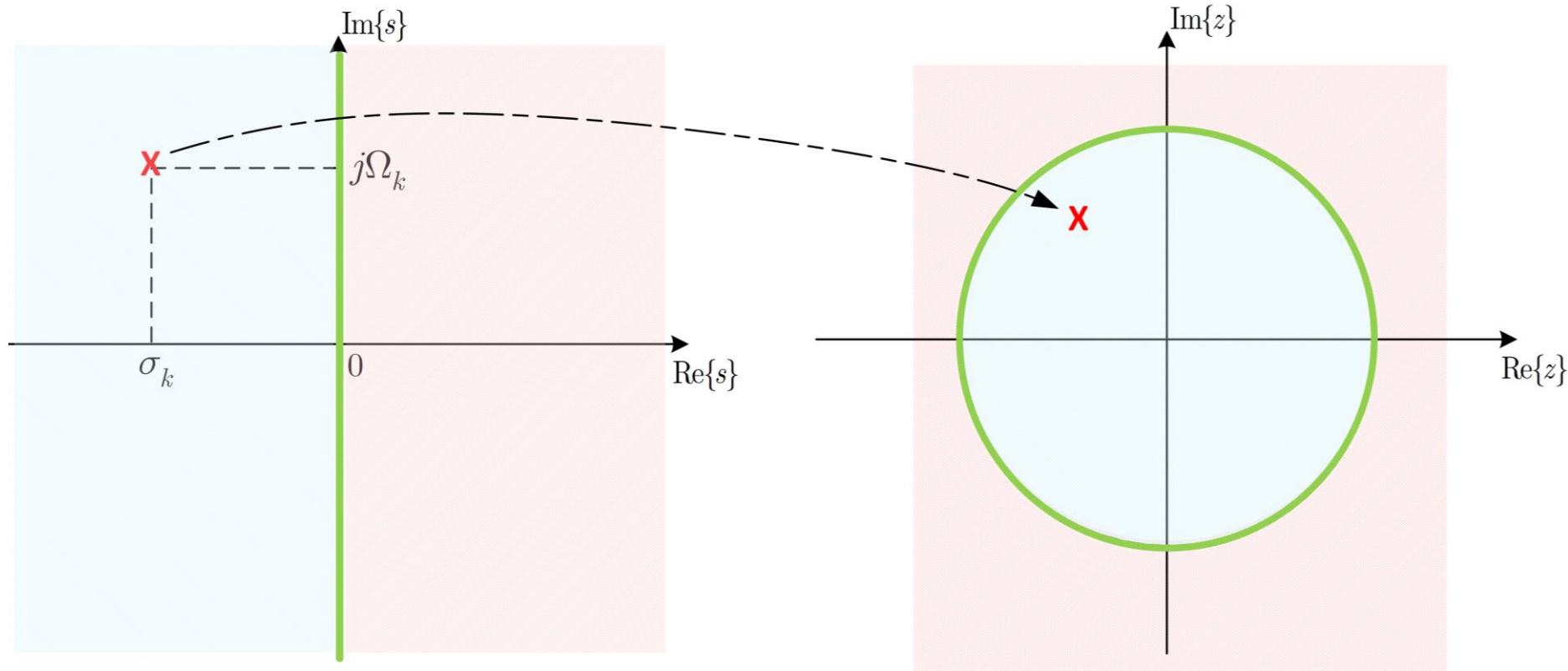
- Η διαδικασία αντιστοιχίζει κάθε πόλο s_k στο χώρο του Laplace σε έναν πόλο $\frac{1 + \frac{T_d s_k}{2}}{1 - \frac{T_d s_k}{2}}$ στο χώρο του μετασχ. Z

$$\frac{1 + \frac{T_d s_k}{2}}{1 - \frac{T_d s_k}{2}}$$



• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων (επανάληψη...)

- Και οι δυο μέθοδοι αντιστοιχίζουν πόλους από το μιγαδικό επίπεδο s στο μιγαδικό επίπεδο z



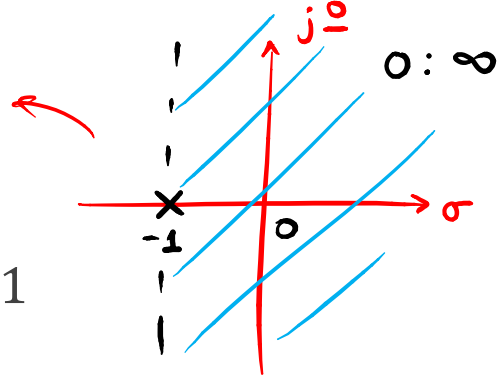
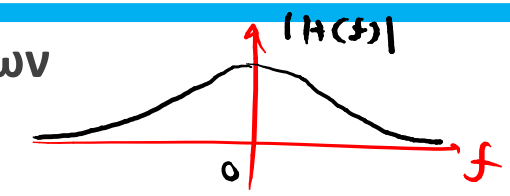
- Μήπως αντιστοιχίζονται με παρόμοιο τρόπο και τα μηδενικά?
- Γενικά, πως εφαρμόζονται οι μέθοδοι για ένα τυχαίο σύστημα στο χώρο του s ?



• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

• Παράδειγμα:

○ Έστω το σύστημα



$$H(s) = \frac{1}{s + 1}, \Re\{s\} > -1$$

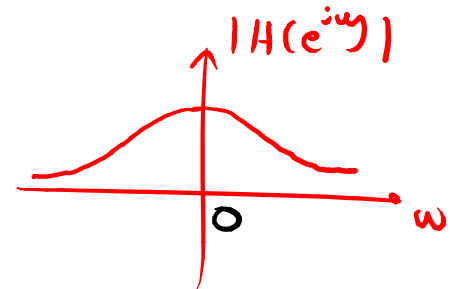
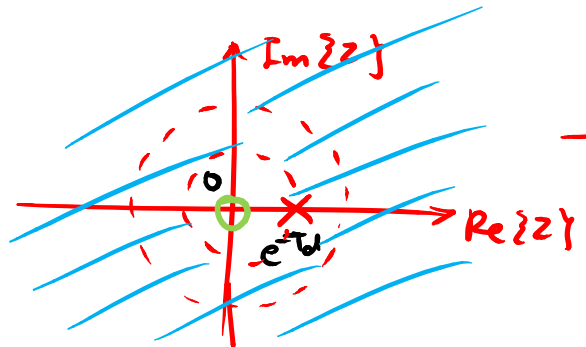
Εφαρμόστε τις μεθόδους που μάθατε για να βρείτε το μετασχ. Z ενός φίλτρου διακριτού χρόνου που το υλοποιεί

Μέθοδος I.I: $\frac{1}{s - s_k} \rightarrow \frac{1}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$

Είναι $H(z) = \frac{1}{1 - e^{-T_d} \cdot z^{-1}} = \frac{1}{1 - (\frac{1}{e})^{T_d} \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - (\frac{1}{e})^{T_d}}$

Μηδενικό: $z = 0$

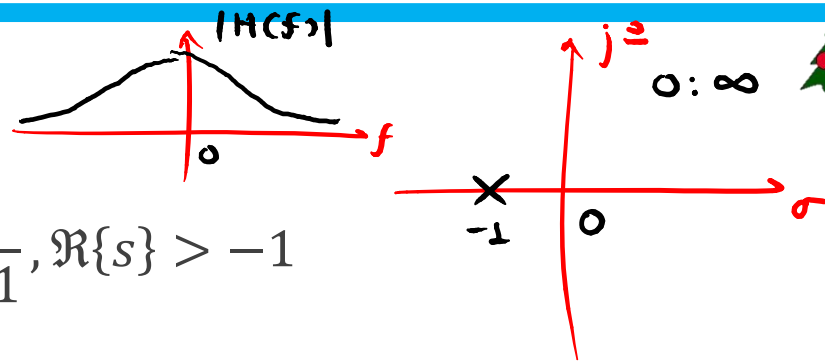
Πόλος: $z = (\frac{1}{e})^{T_d}$





• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

• Παράδειγμα:



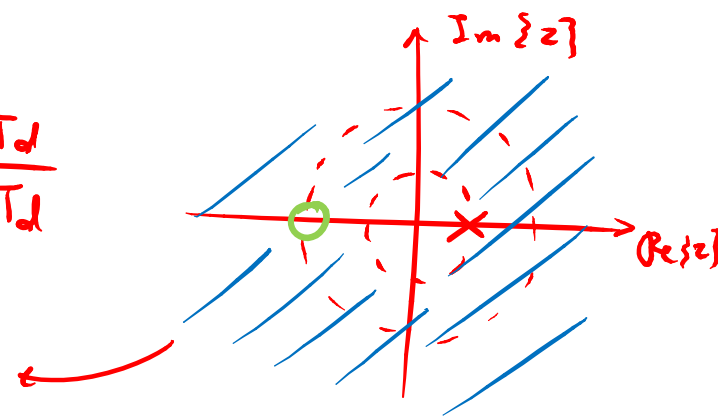
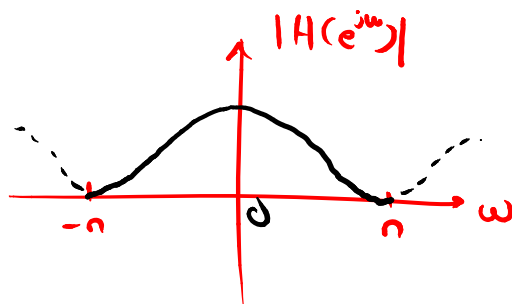
$$H(s) = \frac{1}{s + 1}, \Re\{s\} > -1$$

Μέθοδος Β.Τ: $H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

$$= H\left(\frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = \frac{1}{\frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = \dots = \frac{T_d(1+z^{-1})}{(2+T_d) + (T_d-2)z^{-1}}$$

$$= \frac{T_d(z+1)}{(2+T_d)z + (T_d-2)}$$

Μηδενικό $z = -1$
 Πόλος: $z = \frac{2-T_d}{2+T_d}$





• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Είδαμε λοιπόν ότι υπάρχει μεγάλη γκάμα φίλτρων που υλοποιούνται ως IIR φίλτρα διακριτού χρόνου
 - Βασιζόμαστε ιδιαίτερα στις γνώσεις μας από το συνεχή χρόνο
- Αντιθέτως, για τα FIR φίλτρα βασιζόμαστε σχεδόν αποκλειστικά στο διακριτό χρόνο!
- Αυτό σημαίνει ότι στη σχεδίαση FIR φίλτρων προσπαθούμε να προσεγγίσουμε την κατάλληλη απόκριση σε συχνότητα κατευθείαν στο διακριτό χρόνο
- Η πιο απλή μέθοδος σχεδίασης ονομάζεται η **μέθοδος του παραθύρου**

- Η μέθοδος αυτή βασίζεται στις σχέσεις

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_d[n]e^{-j\omega n} \leftrightarrow h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

για μια ιδανική κρουστική απόκριση $h_d[n]$

- Τα ιδανικά φίλτρα $h_d[n]$ ξέρετε ότι έχουν άπειρης διάρκειας κρουστική απόκριση και είναι και μη αιτιατά!
- Μπορούμε να πάρουμε μια καλή προσέγγισή τους «κόβοντας» σε μικρότερο τμήμα την ιδανική κρουστική απόκριση $h_d[n]$



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Το νέο σύστημα θα έχει κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
- Δηλ. έχουμε κρατήσει $M + 1$ δείγματα από την ιδανική κρουστική απόκριση
- Το παραπάνω μπορεί να ιδωθεί ως ο πολλαπλασιασμός της ιδανικής κρουστικής απόκρισης με ένα τετραγωνικό παλμό («παράθυρο») διάρκειας $M + 1$, δηλ.

$$h[n] = h_d[n]w[n]$$

με

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

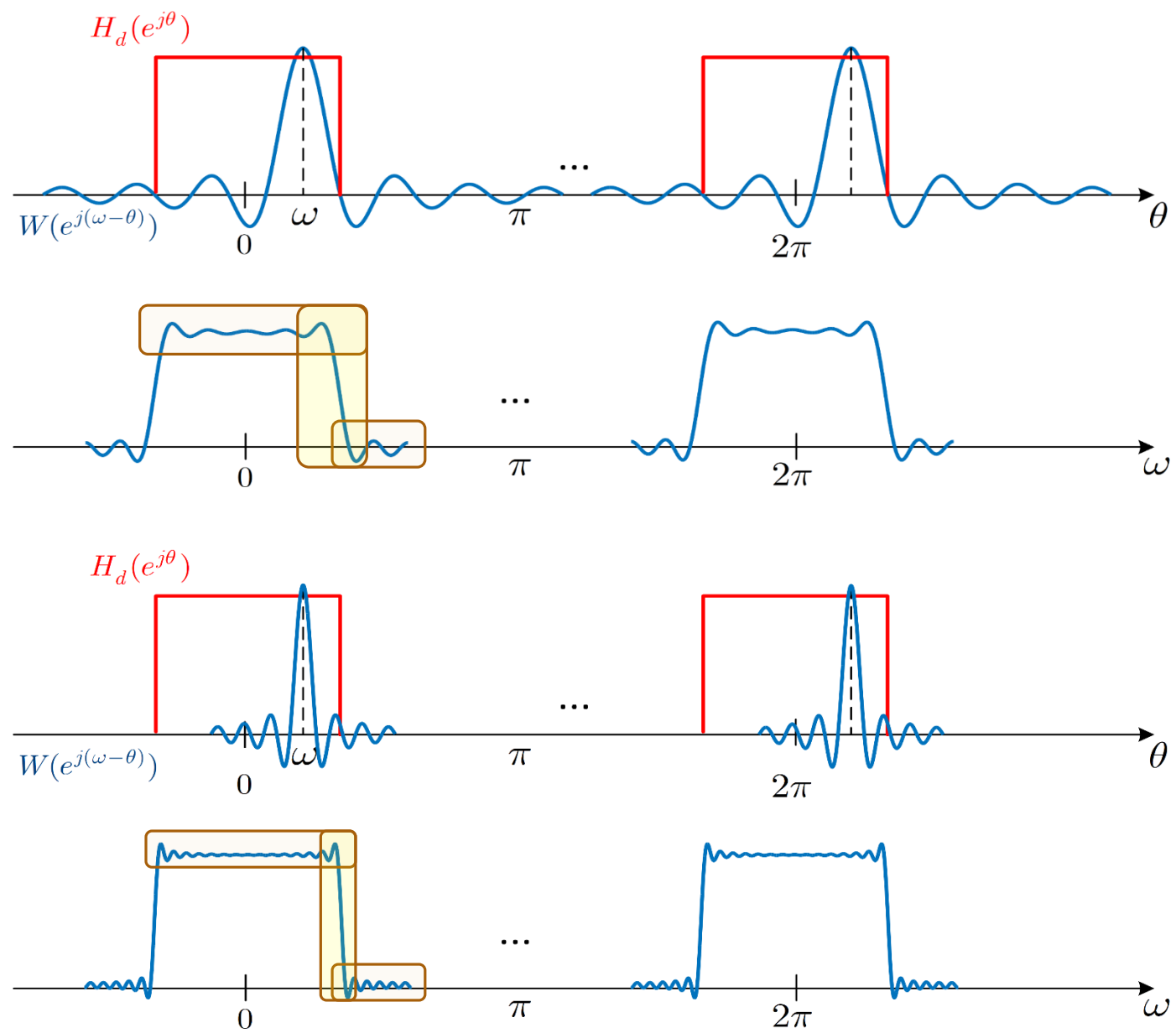
- Στο χώρο του Fourier:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

- Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχ. Fourier του ιδανικού φίλτρου $h_d[n]$ συνελίσσεται 😊 στη συχνότητα (περιοδικά) με το μετασχ. Fourier του παραθύρου $w[n]$



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων





• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

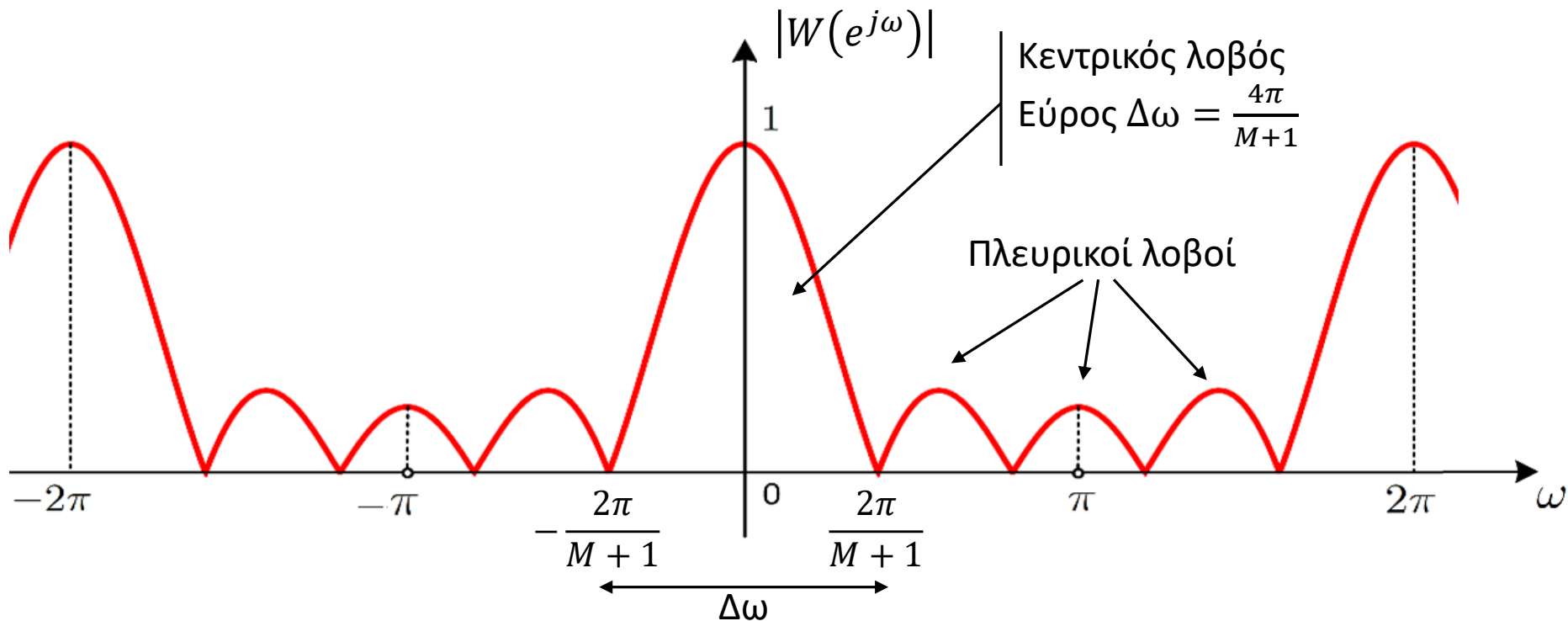
- Ιδανικά, αν $w[n] = 1, \forall n$ τότε ο μετ. Fourier του θα ήταν $W(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$
- Θα θέλαμε λοιπόν το επιλεγθέν παράθυρο $w[n]$ να πλησιάζει όσο γίνεται το ιδανικό
- Σε αυτήν την περίπτωση, ο μετασχ. Fourier του θα πλησιάζει όλο και πιο πολύ στη συνάρτηση Δέλτα $2\pi\delta(\omega)$
- Όμως θέλουμε ένα παράθυρο όσο το δυνατόν μικρότερο σε διάρκεια στο χρόνο για να μην έχουμε πολλές πράξεις κατά την υλοποίηση...
- ... και ταυτόχρονα να έχει όσο γίνεται στενότερο φάσμα, δηλ. να έχει συγκεντρωμένο όλο το φασματικό περιεχόμενο γύρω από μια συχνότητα
 - Γιατί αυτό? Όστε η συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας να αναπαράγει όσο γίνεται πιστότερα την επιθυμητή απόκριση συχνότητας
- Όπως καταλαβαίνετε, αυτές είναι αντικρουόμενες προδιαγραφές! 😊



- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Ας δούμε λίγο το τετραγωνικό παράθυρο
- Γνωρίζουμε ότι

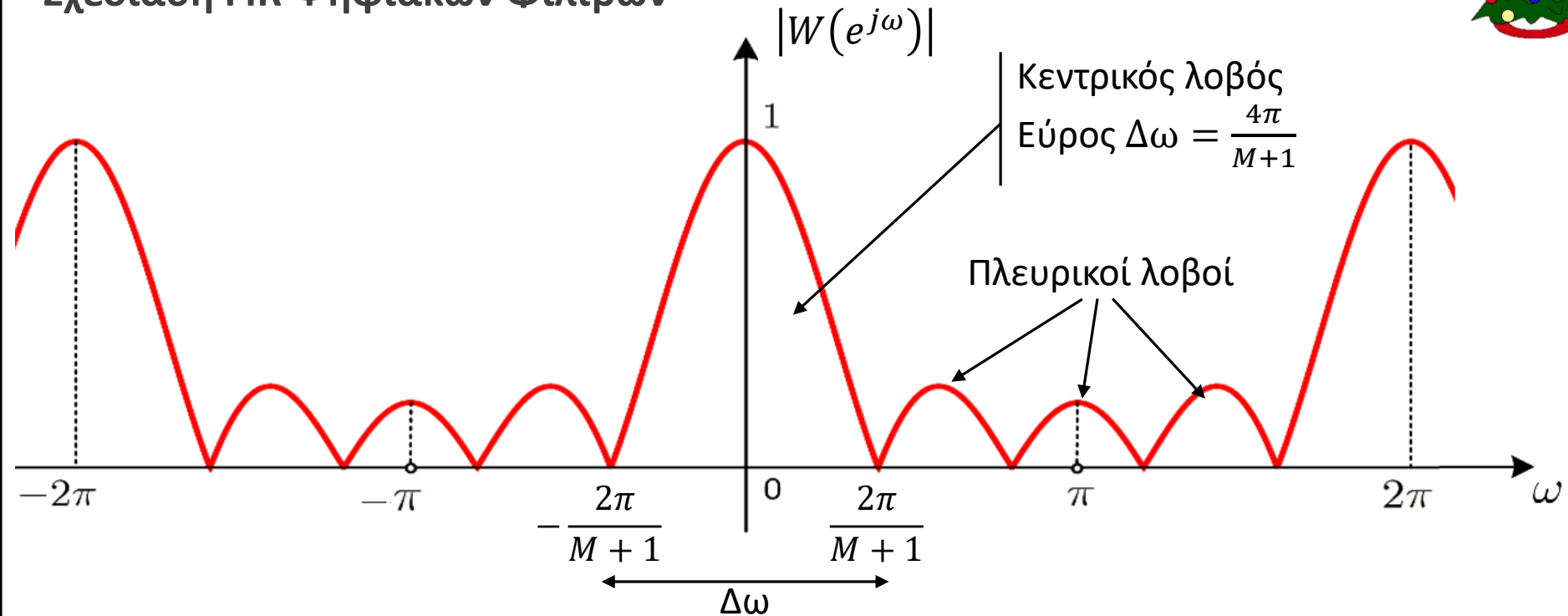
$$W(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega(M+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

- Φάσμα πλάτους





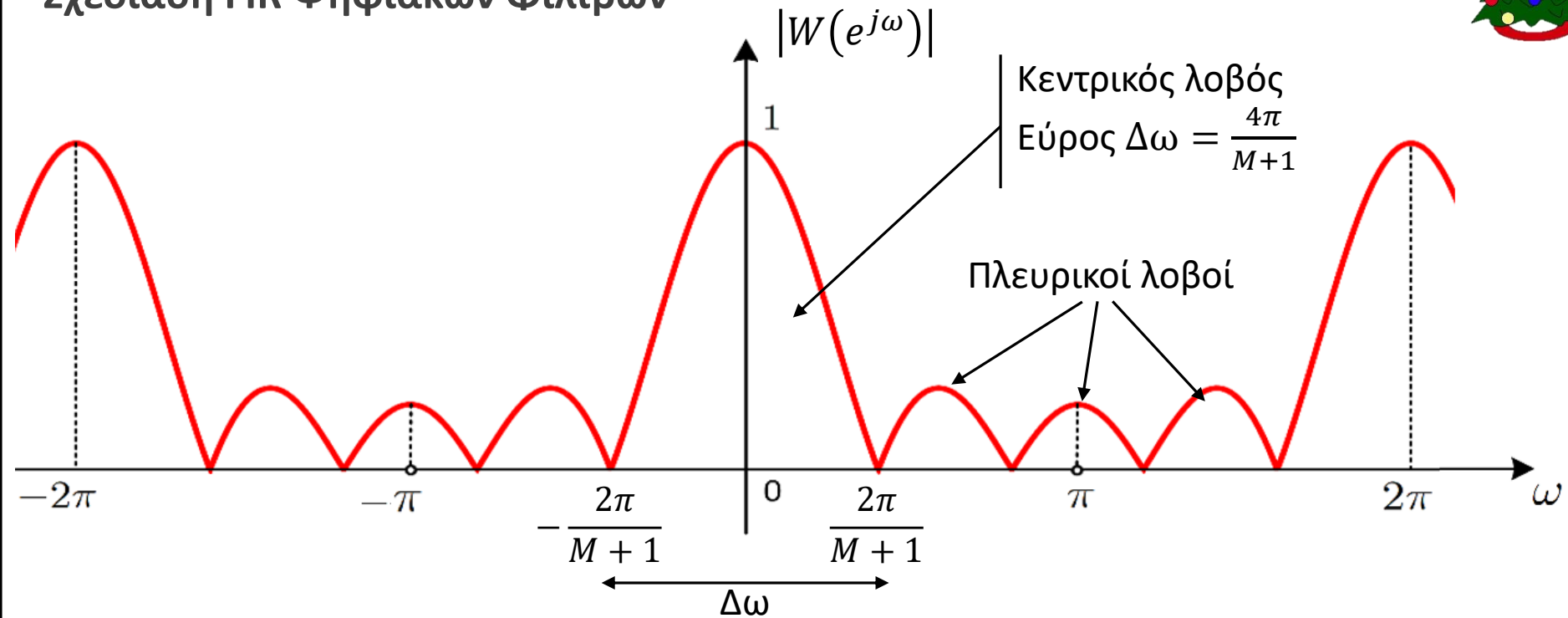
• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



- Όταν το M αυξάνει, το «ύψος» του κεντρικού λοβού μεγαλώνει και το εύρος του μικραίνει
- Οι πλευρικοί λοβοί έχουν «ύψος» που δεν εξαρτάται από το M αλλά από το σχήμα του παραθύρου
- Όμως το εμβαδό κάτω από τους λοβούς παραμένει σταθερό!
- Η συνέλιξη $\frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$ θα παράγει ισχυρές ταλαντώσεις κάθε φορά που οι πλευρικοί λοβοί περνούν από την ασυνέχεια του $H_d(e^{j\omega})$!



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



- Αν όμως χρησιμοποιήσουμε κάποιο παράθυρο που δεν είναι τόσο «απότομο» στα άκρα του όπως το τετραγωνικό, τότε μπορούμε να μειώσουμε αυτά τα φαινόμενα
- Τέτοια παράθυρα «σβήνουν» σταδιακά προς το μηδέν στα άκρα τους
- Κόστος? «Φαρδύτερος» κεντρικός λοβός \leftrightarrow «μακρύτερη» μετάβαση γύρω από την ασυνέχεια του ιδανικού φίλτρου
- Ας δούμε μερικά τέτοια γνωστά παράθυρα...



- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Τετραγωνικό

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Τριγωνικό (Bartlett)

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{M}, & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - \frac{2n}{M}, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Hanning

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Hamming

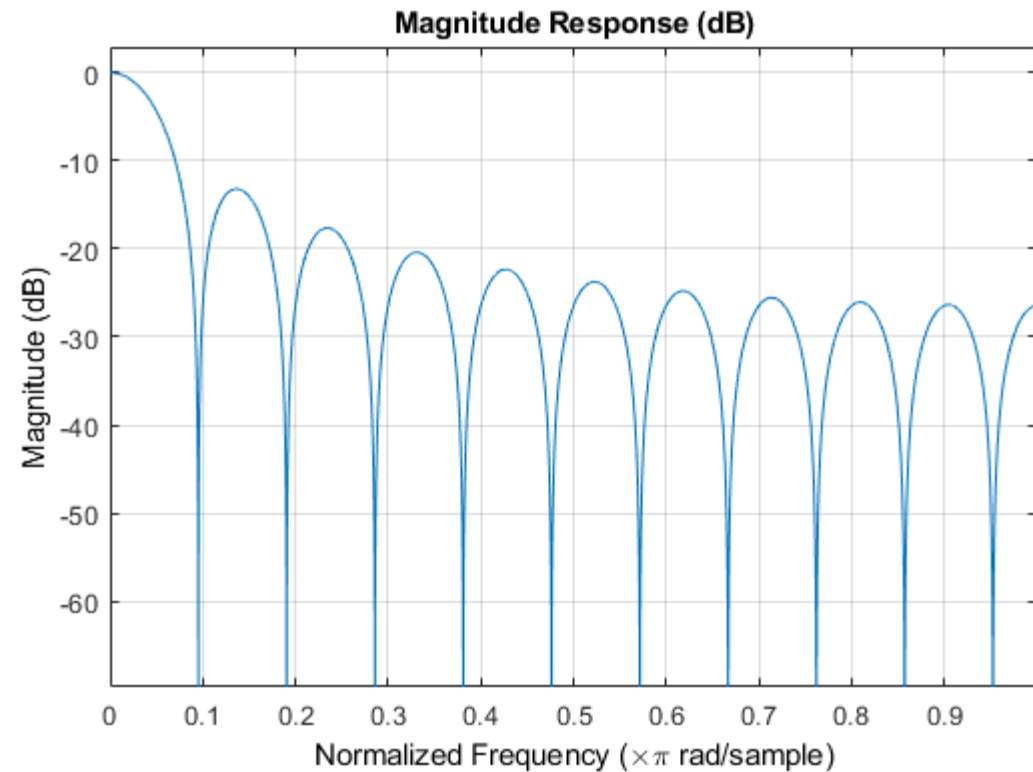
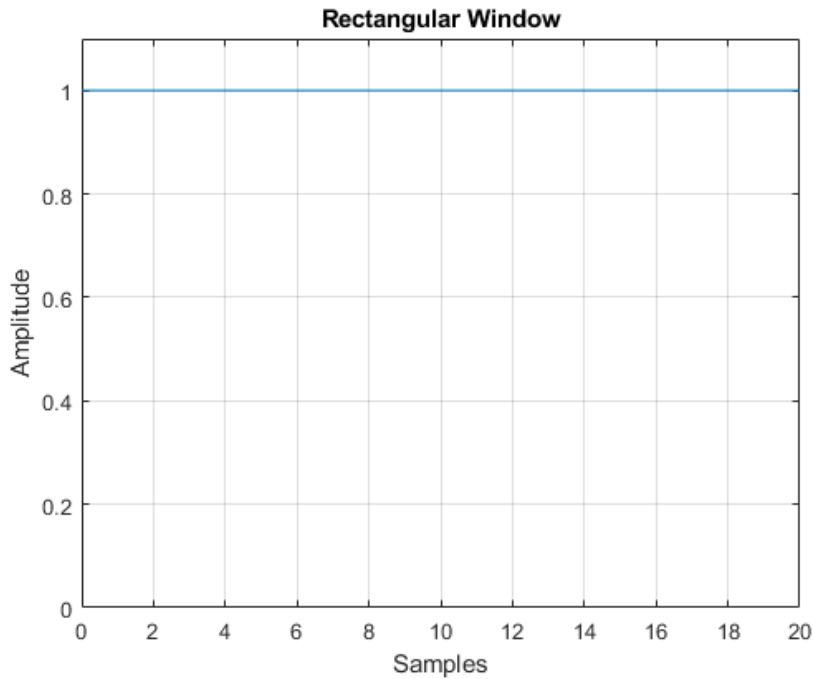
$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Blackman

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

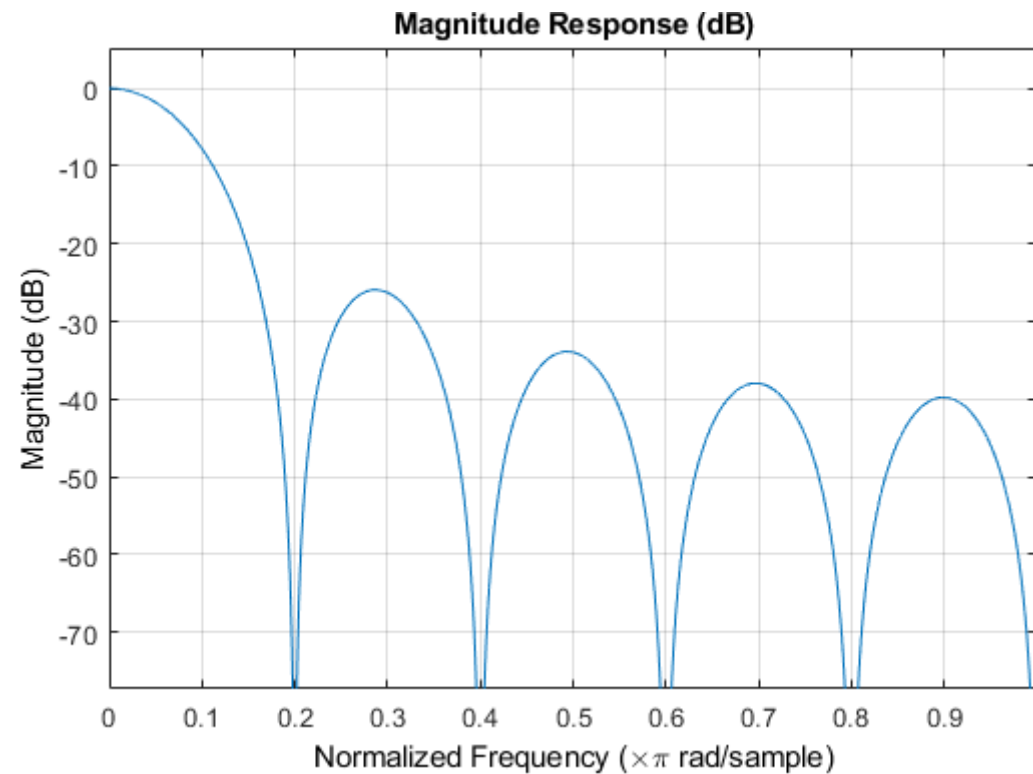
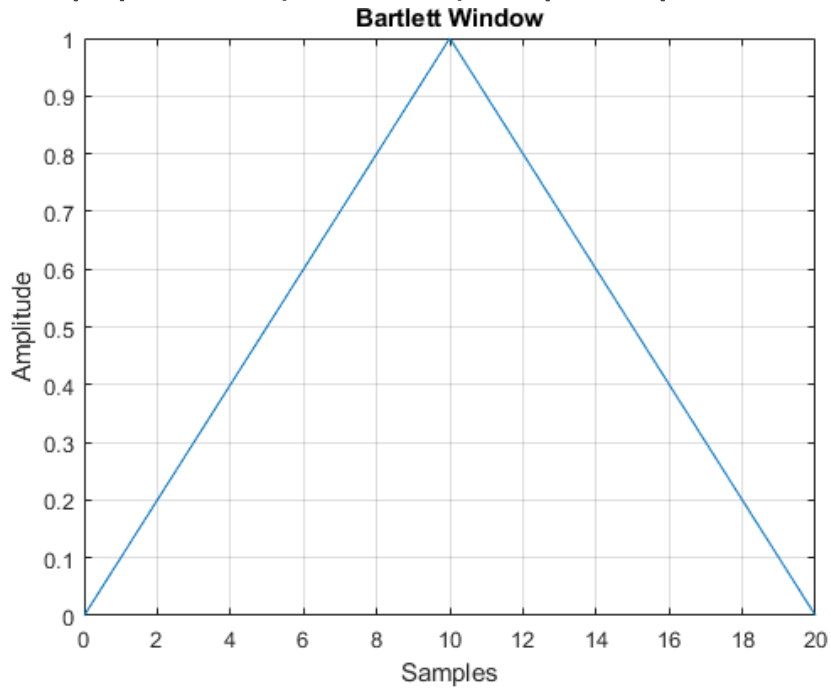


- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Τετραγωνικό παράθυρο



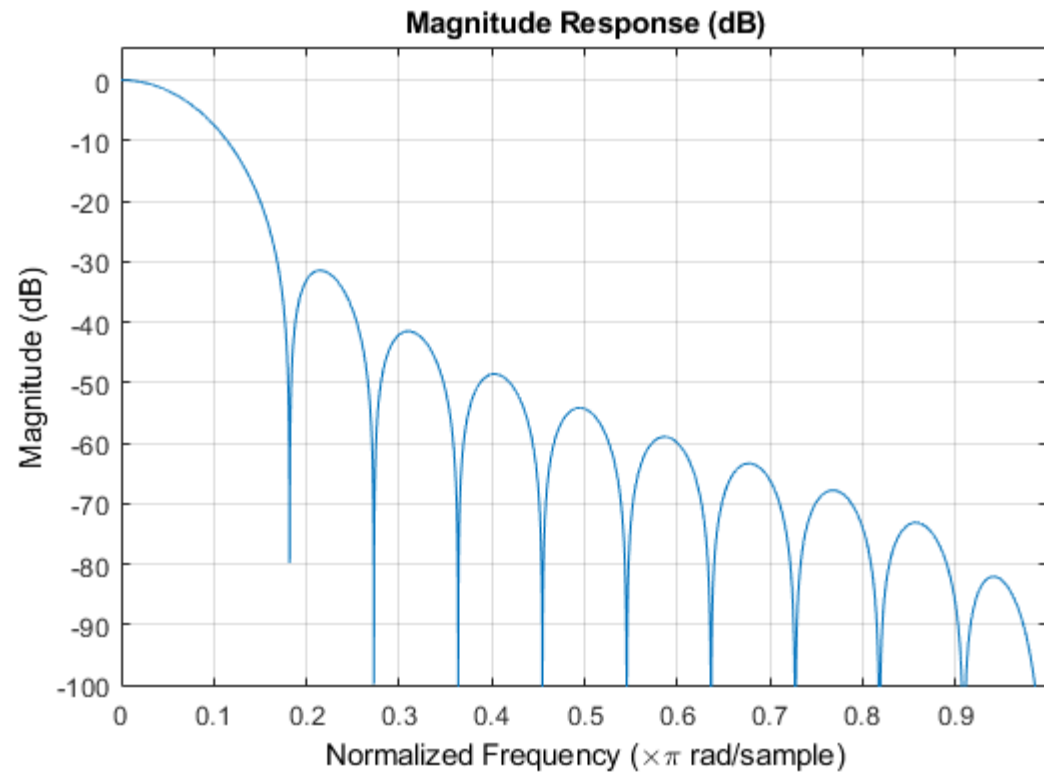
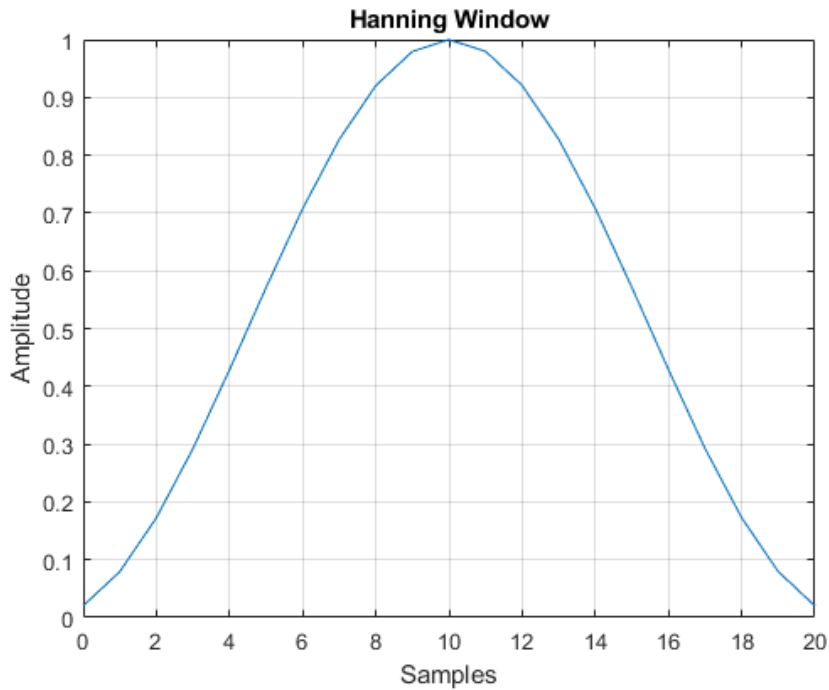


- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Τριγωνικό (Bartlett) παράθυρο



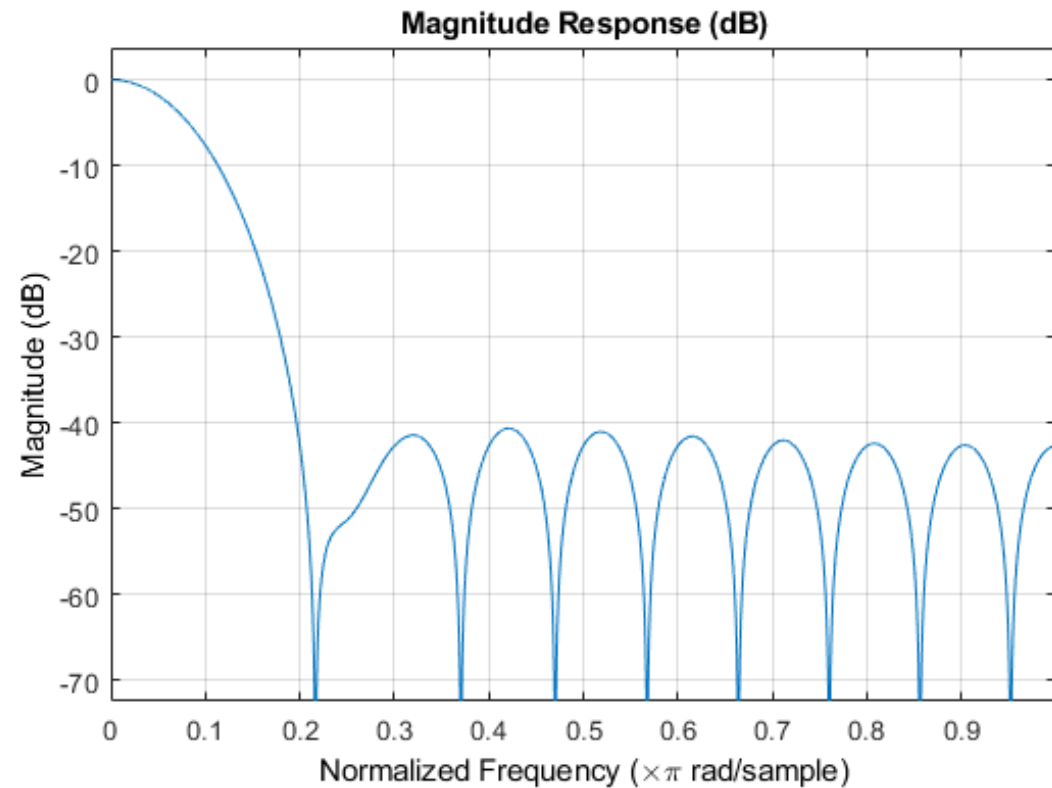
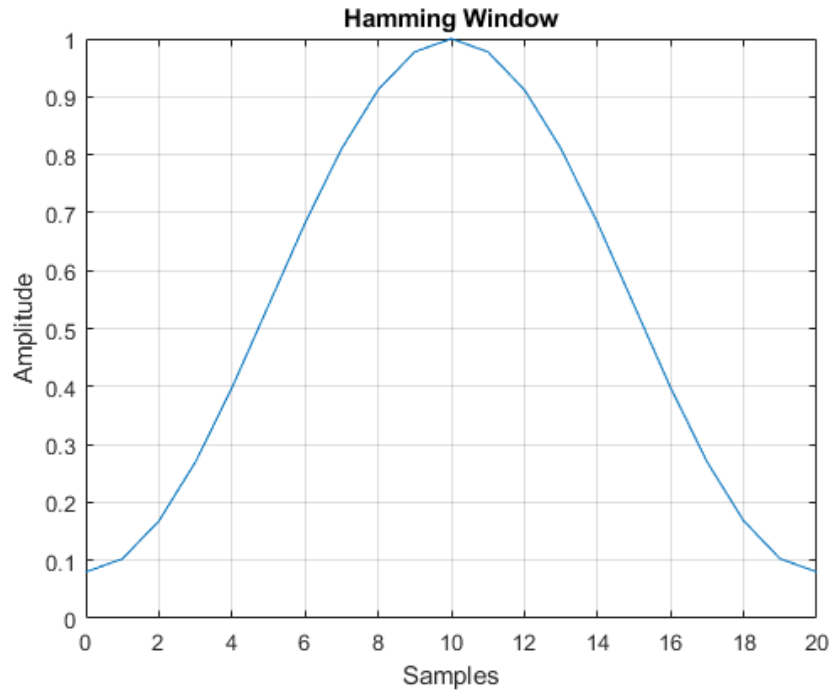


- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Παράθυρο Hanning



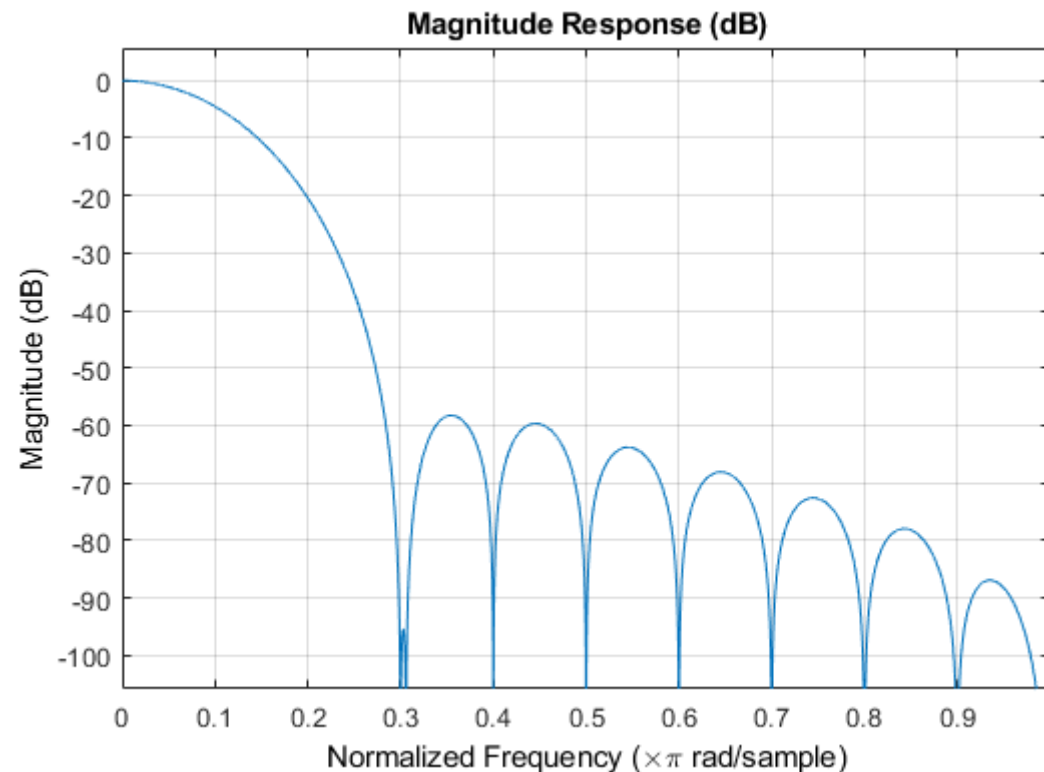
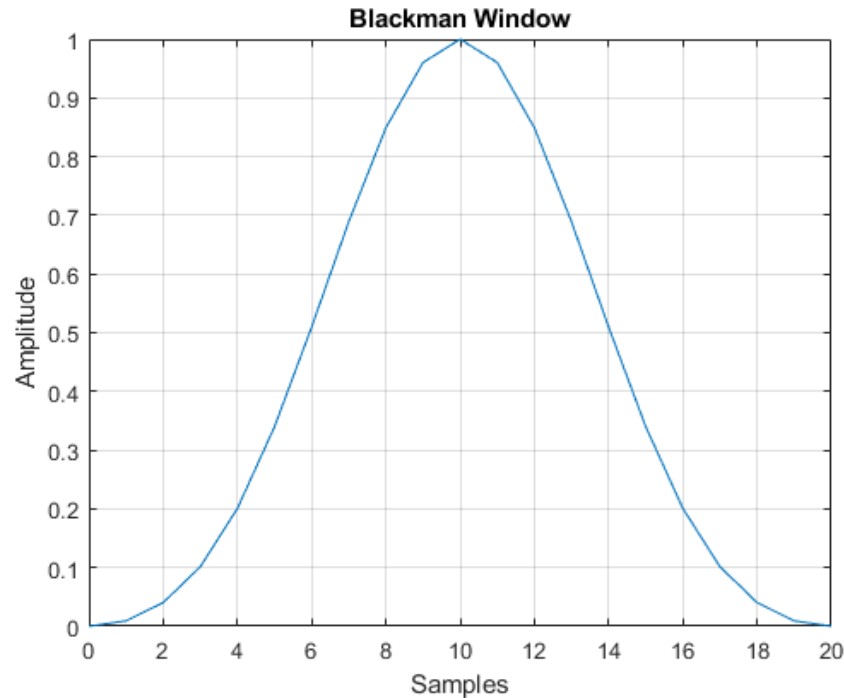


- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Παράθυρο Hamming





- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Παράθυρο Blackman





- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Ιδιότητες Παραθύρων

Τύπος Παραθύρου	Σχετικό πλάτος πλευρικών λοβών	Εύρος κεντρικού λοβού (προσέγγιση)
Τετραγωνικό	-13 dB	$\frac{4\pi}{M+1}$
Τριγωνικό (Bartlett)	-25 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Hanning	-31 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Hamming	-41 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Blackman	-57 dB	$\frac{12\pi}{M}$



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Μιλήσαμε πολύ για τα συστήματα γραμμικής φάσης
- Όλα τα προηγούμενα παράθυρα ικανοποιούν αυτήν την απαίτηση
- Προσέξτε ότι σε όλα ισχύει

$$w[n] = \begin{cases} w[M - n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \leftrightarrow W(e^{j\omega}) = A_{\text{even}}(e^{j\omega})e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

- Έστω ότι η επιθυμητή κρουστική απόκριση είναι γραμμικής φάσης, δηλ.

$$h_d[M - n] = h_d[n]$$

- Στο χώρο του Fourier

$$H_d(e^{j\omega}) = H_{\text{even}}(e^{j\omega})e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

- Αν το παράθυρο είναι συμμετρικό, τότε

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{\text{even}}(e^{j\theta}) A_{\text{even}}(e^{j(\omega-\theta)}) e^{-\frac{j\theta M}{2}} e^{-\frac{j(\omega-\theta)M}{2}} d\theta \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{\text{even}}(e^{j\theta}) A_{\text{even}}(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \right) e^{-\frac{j\omega M}{2}} \end{aligned}$$



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Έχετε καταλάβει ότι υπάρχει ένα trade-off μεταξύ εύρους κεντρικού λοβού και περιοχής πλευρικών λοβών
- Το trade-off αυτό μπορεί να ποσοτικοποιηθεί αναζητώντας το παράθυρο που είναι “βέλτιστα” συγκεντρωμένο γύρω από τη συχνότητα $\omega = 0$
- Ο Kaiser βρήκε μια σχεδόν βέλτιστη λύση που υλοποιείται από μια γνωστή και εύκολη στην υλοποίηση συνάρτηση
 - Την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel $I_0(x)$, μηδενικής τάξης και 1^{ου} είδους

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos(t)} dt$$

- Παράθυρο Kaiser:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left[\frac{n - \frac{M}{2}}{\frac{M}{2}}\right]^2}\right)}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

με $I_0(\cdot)$ την περίφημη συνάρτηση Bessel που αναφέρθηκε



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

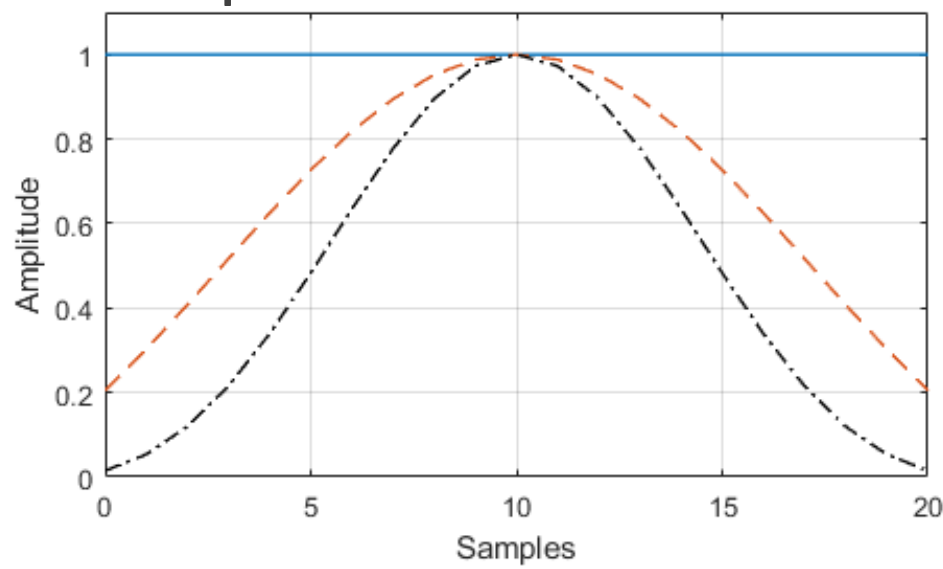
- Παράθυρο Kaiser:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left[\frac{n - \frac{M}{2}}{\frac{M}{2}}\right]^2}\right)}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Δυο παράμετροι: μήκος ακολουθίας $M + 1$, παράμετρος σχήματος β
- «Παίζοντας» με τις τιμές των παραμέτρων μπορούμε να ελέγξουμε το εύρος του λοβού και το πλάτος των πλευρικών λοβών
- Ας δούμε μερικές τιμές του παραθύρου

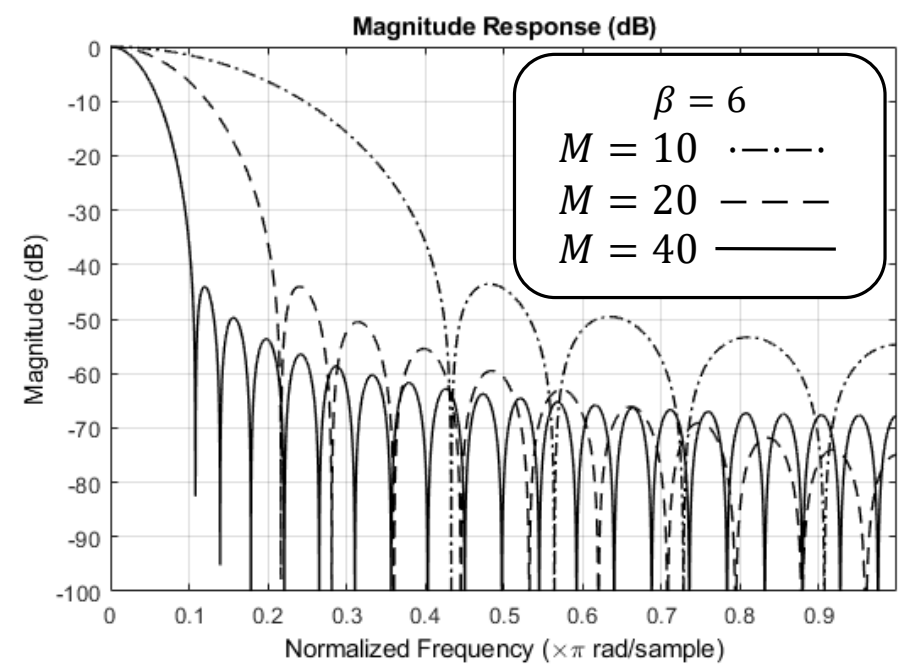
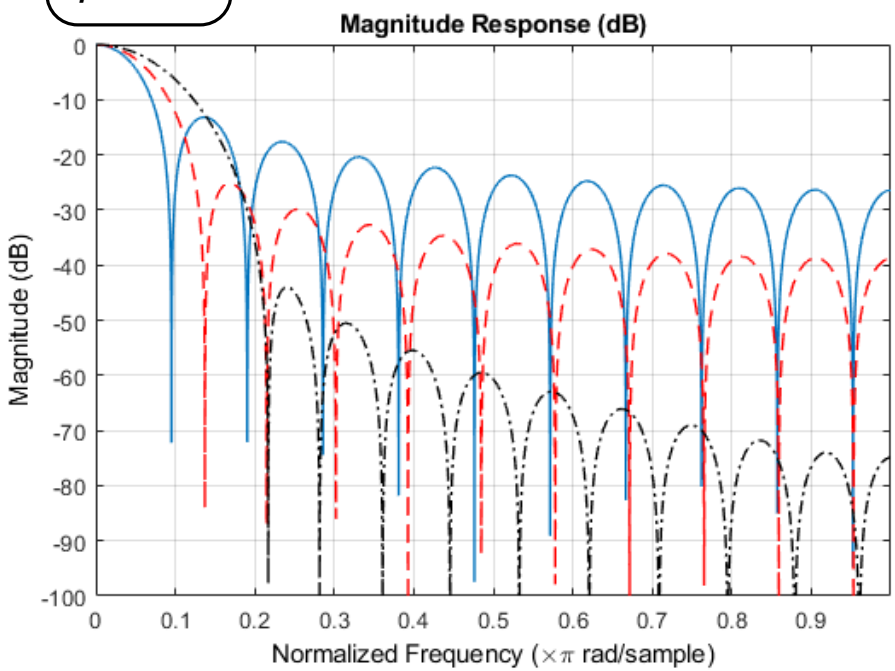


• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



$\beta = 0$
 $\beta = 3$
 $\beta = 6$

$\beta = 0$
 $\beta = 3$
 $\beta = 6$

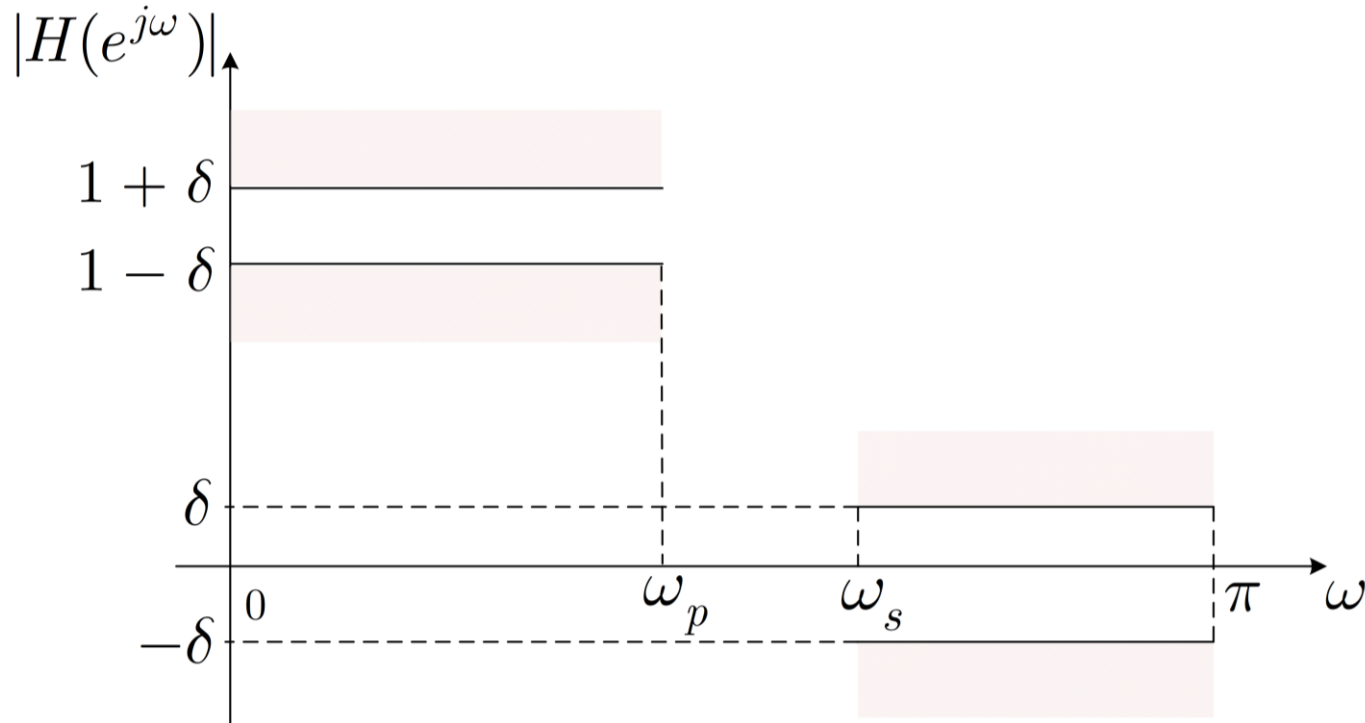


$\beta = 6$
 $M = 10$ ·····
 $M = 20$ - - - -
 $M = 40$ ———



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

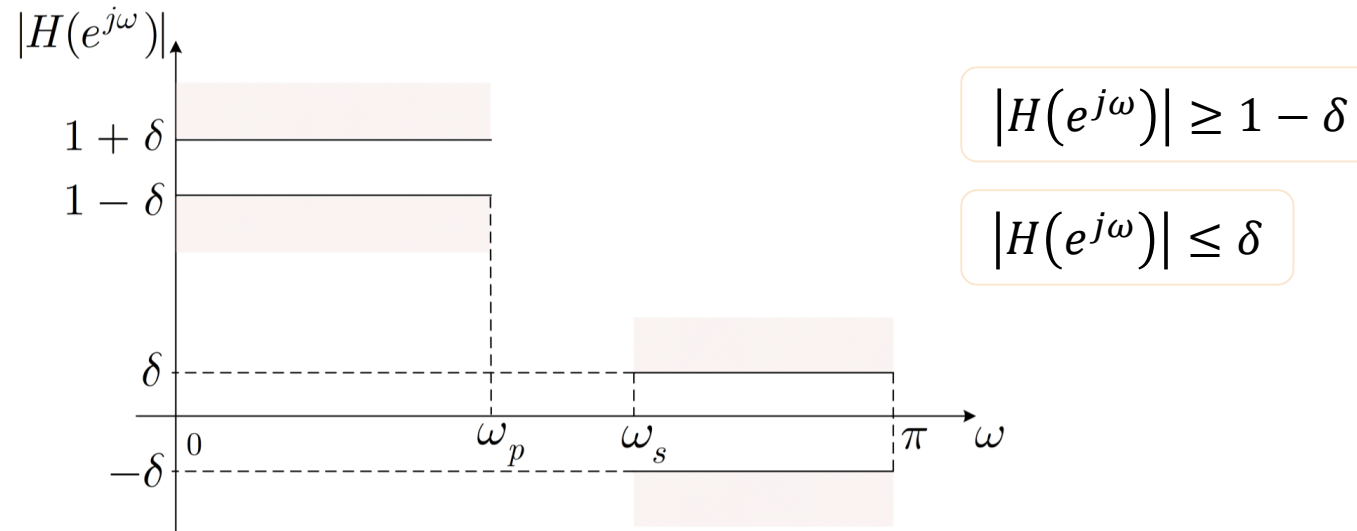
- Ο Kaiser έκανε εκτενή πειράματα και κατέληξε σε κλειστούς τύπους που επιτρέπουν στο σχεδιαστή να προβλέψει τις τιμές των M, β που απαιτούνται για συγκεκριμένες προδιαγραφές ενός φίλτρου επιλογής συχνοτήτων
- Έστω δ η προδιαγραφή του παρακάτω χαμηλοπερατού φίλτρου (δεδομένη)



- Τότε η ω_p ορίζεται ως η μέγιστη συχνότητα που ικανοποιεί: $|H(e^{j\omega})| \geq 1 - \delta$
- Τότε η ω_s ορίζεται ως η μικρότερη συχνότητα που ικανοποιεί: $|H(e^{j\omega})| \leq \delta$



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



- Το εύρος ζώνης μετάβασης είναι $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$
- Αν $A = -20 \log_{10} \delta$, τότε ο Kaiser βρήκε την τιμή του β για δεδομένες τιμές του A

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7), & A > 50 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), & 21 \leq A \leq 50 \\ 0, & A < 21 \end{cases}$$

- Η τιμή του M πρέπει να είναι τότε

$$M = \frac{A - 8}{2.285\Delta\omega}$$



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Ας δούμε ένα πλήρες παράδειγμα σχεδίασης lowpass φίλτρου γραμμικής φάσης με συχνότητα αποκοπής $\frac{\pi}{2}$ με παράθυρο Kaiser

- **Βήμα 1:** Ορίζουμε τις προδιαγραφές

$$\omega_p = 0.4\pi, \quad \omega_s = 0.6\pi, \quad \delta = 0.001$$

- **Βήμα 2:** Βρίσκουμε τη συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \frac{(\omega_p + \omega_s)}{2} = 0.5\pi$

- **Βήμα 3:** $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi$, $A = -20 \log_{10} \delta = 60$

- **Βήμα 4:** $\beta = 0.1102(A - 8.7) = 5.653$

- **Βήμα 5:** Η τιμή του M πρέπει να είναι τότε

$$M = \frac{A - 8}{2.285\Delta\omega} = 36.21 \rightarrow M = 37$$



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- **Βήμα 6:** Υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση του φίλτρου μας, πολλαπλασιάζοντας το παράθυρο με την κρουστική απόκριση ενός ιδανικού φίλτρου γραμμικής φάσης
- Μπορείτε να δείξετε ότι το ιδανικό φίλτρο γραμμικής φάσης της μορφής

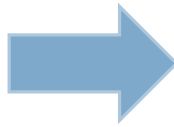
$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-\frac{j\omega M}{2}}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

έχει κρουστική απόκριση

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin\left(\omega_c\left(n - \frac{M}{2}\right)\right)}{\pi\left(n - \frac{M}{2}\right)}, \quad -\infty < n < +\infty$$

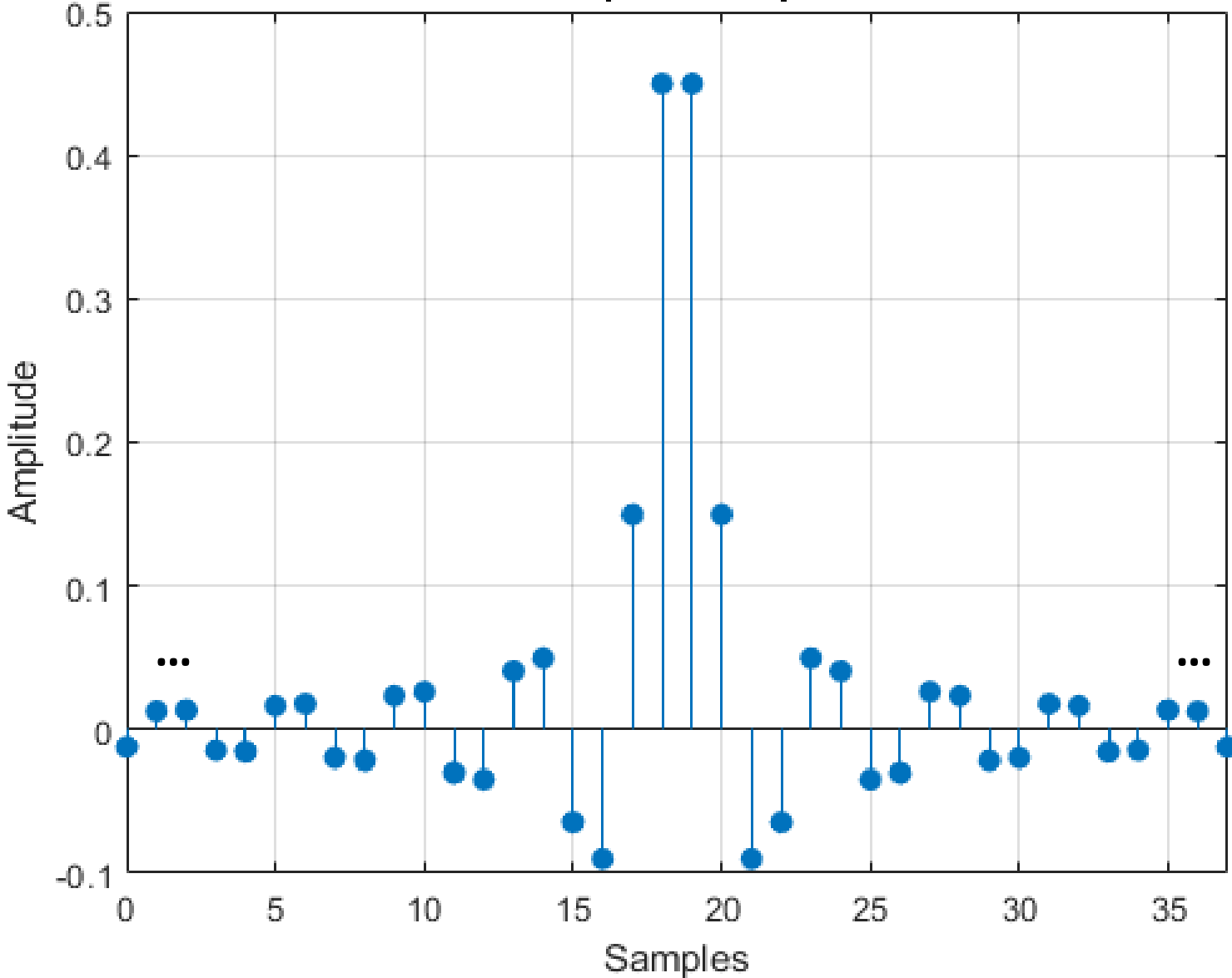
• Άρα

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin\left(0.5\pi\left(n - \frac{37}{2}\right)\right) I_0\left(5.653 \sqrt{1 - \left[\frac{n - \frac{37}{2}}{\frac{37}{2}}\right]^2}\right)}{\pi\left(n - \frac{37}{2}\right) I_0(5.653)}, & 0 \leq n \leq 37 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

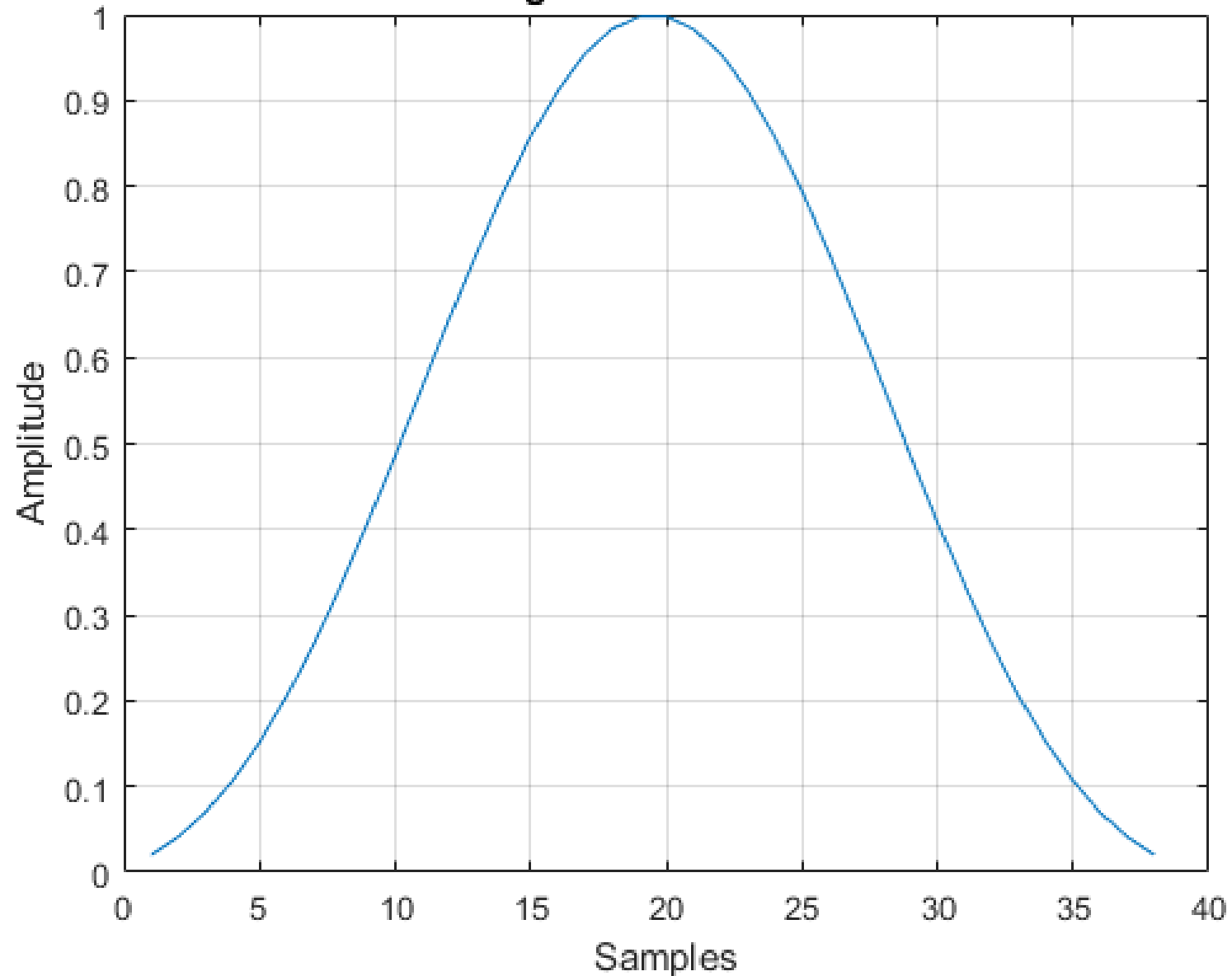
Ideal Impulse Response





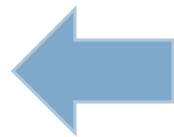
- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

Designed Kaiser Window

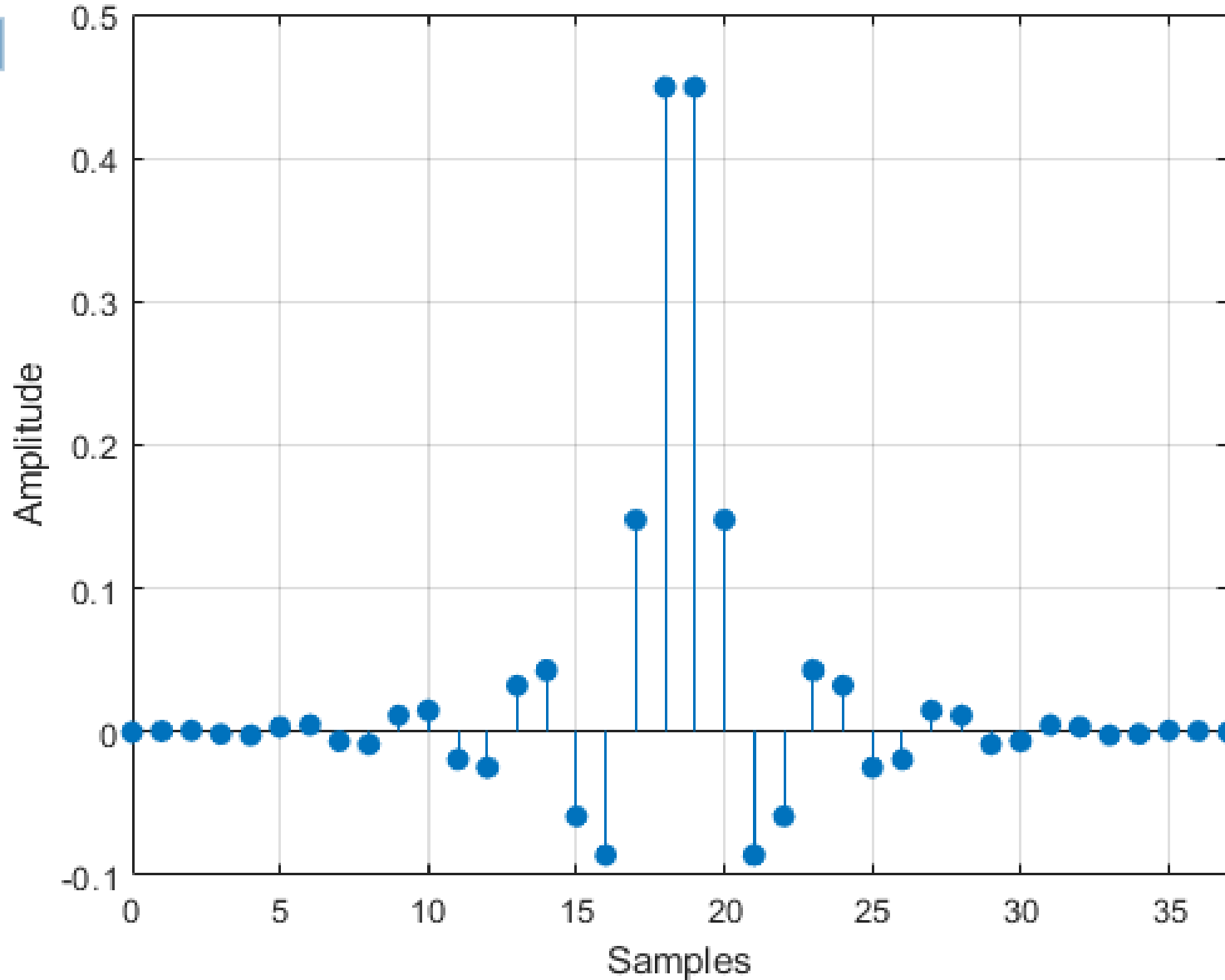




• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



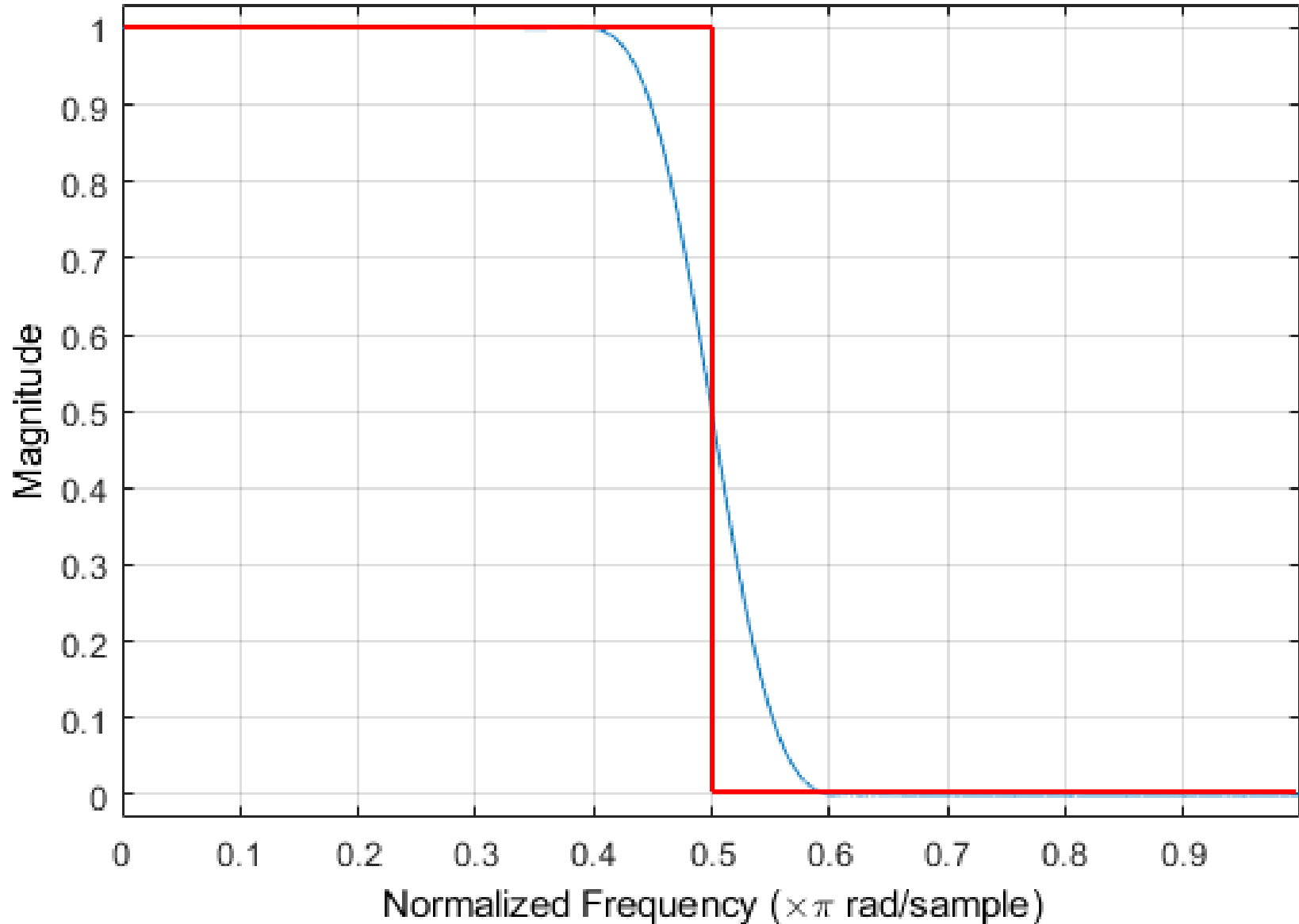
Ideal * Kaiser





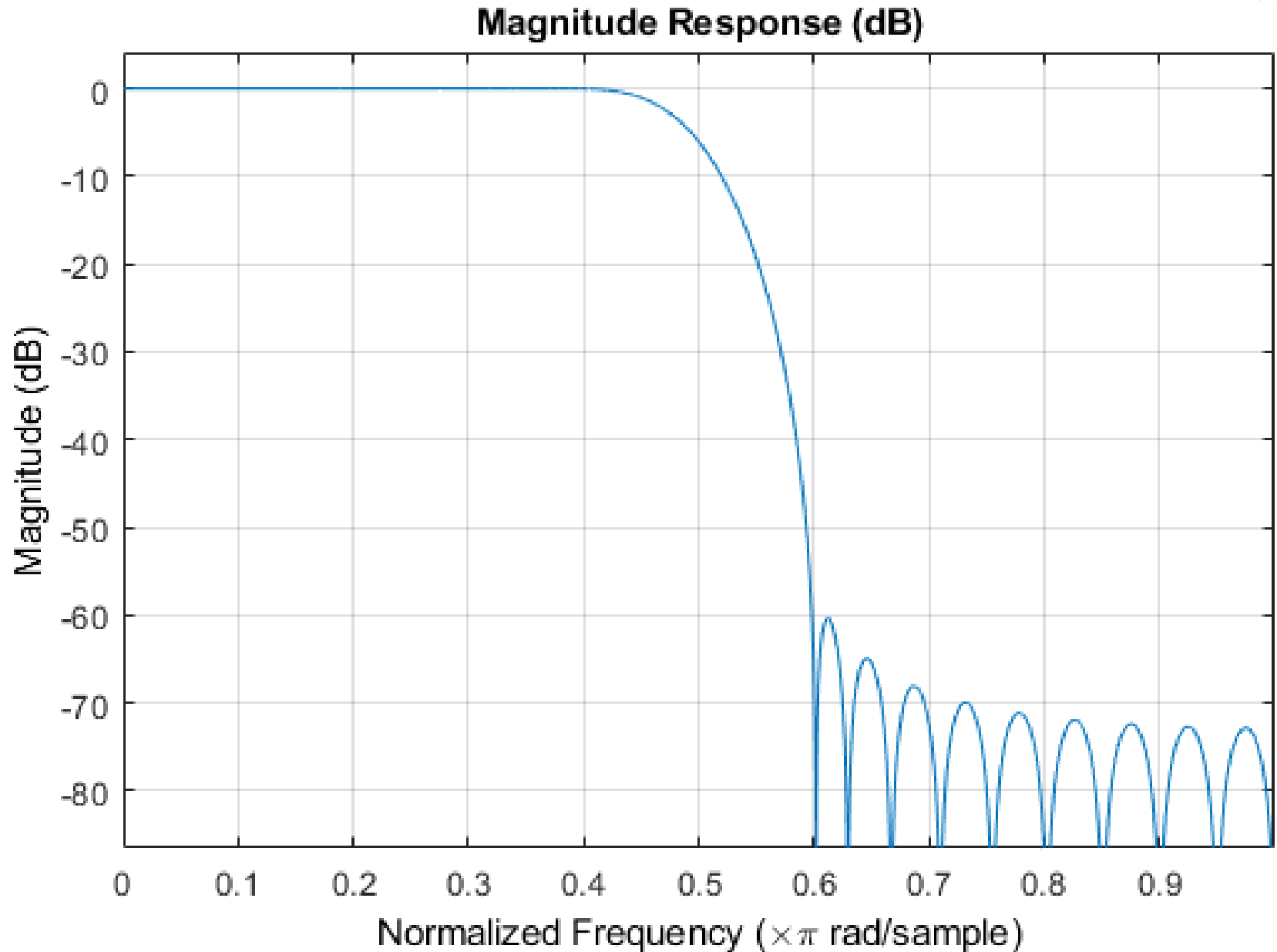
- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

Magnitude Response



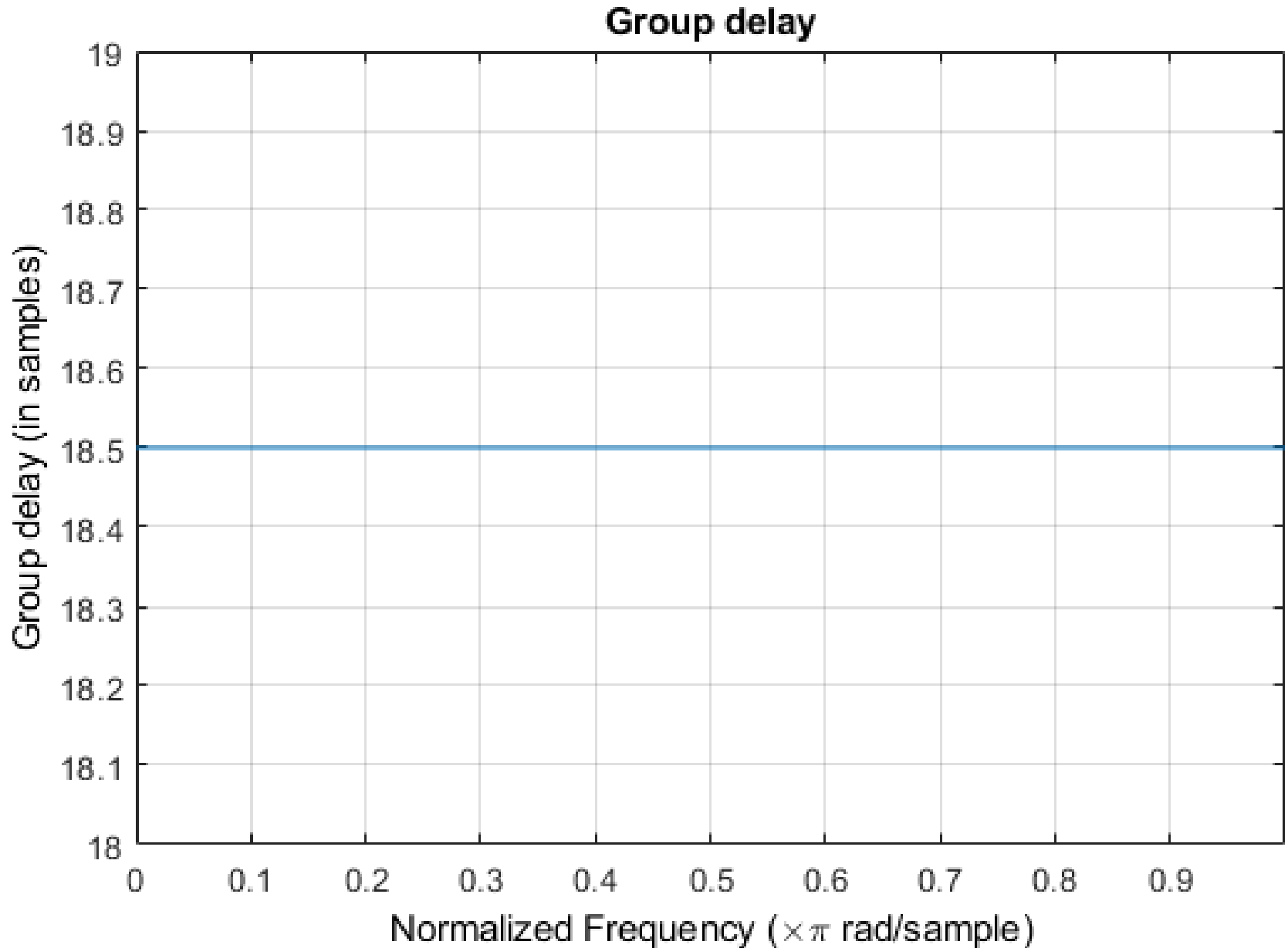


- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



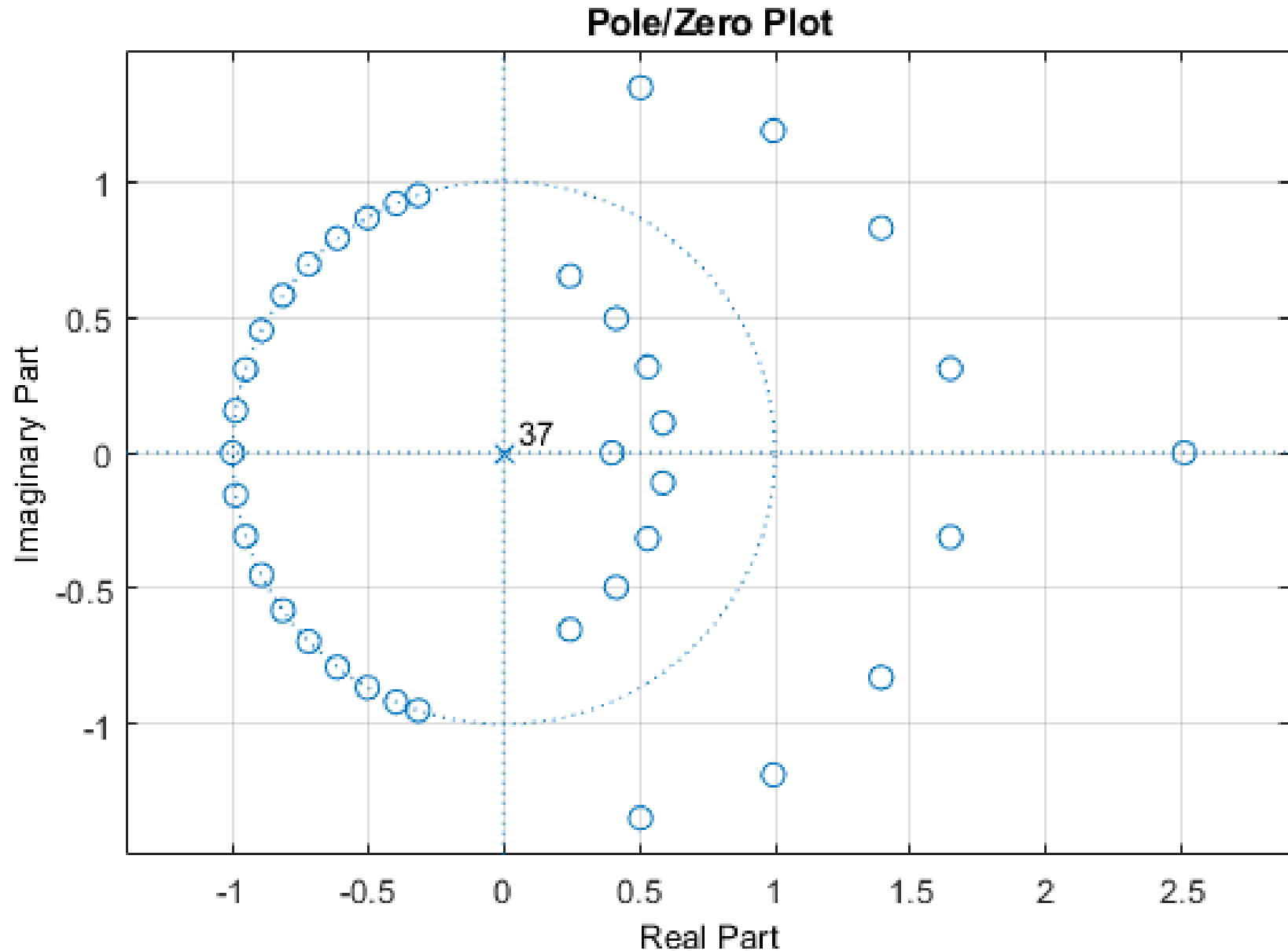


- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων





- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων





ΤΕΛΟΣ

