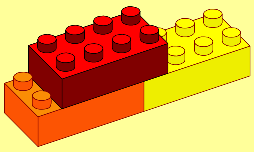
ΗΥ-280

«ΘΕΩΡΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ»

θεμελιακές έννοιες της επιστήμης του υπολογισμού



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Γεώργιος Φρ. Γεωργακόπουλος

Μέρος Β΄

Βασικά στοιχεία περί
ασυμφραστικών γραμματικών και στοιβακτικών αυτομάτων.

13ο Ασυμφραστικές γραμματικές και συντακτικά δένδρα.

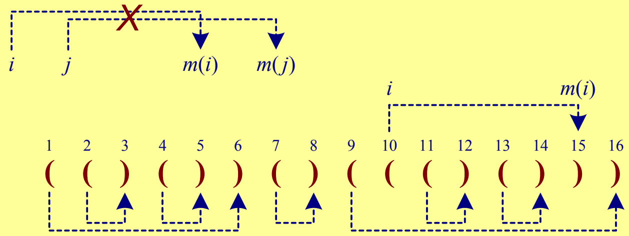
Αναλύσαμε στο Α′ μέρος τις γλώσσες που παράγονται από ομαλές γραμματικές και αναλύονται από πεπερασμένα αυτόματα. Διαπιστώσαμε ότι οι γλώσσες αυτές, αν και δεν είναι τετριμμένες, δεν συμπεριλαμβάνουν «απλές» γλώσσες όπως η $\{α^{(κ)}β^{(κ)}: κ \geq 1\}$. Δεν συμπεριλαμβάνουν ούτε μια πολύ σημαντική γλώσσα, εκείνη των (ισορροπημένων) παρενθέσεων. Η σημασία αυτής της γλώσσας αναλύεται στο επόμενο πλαίσιο. Στο Β′ μέρος που ακολουθεί θα αναλύσουμε ένα πιο ισχυρό είδος γραμματικής και μηχανών, ικανό να παράγει και να αναλύσει γλώσσες πιο περίπλοκες, μεταξύ αυτών και την γλώσσα των «παρενθέσεων».

Η γλώσσα $L_{ΙΠ}$ των (ισορροπημένων) παρενθέσεων.

Η γλώσσα των (ισορροπημένων) παρενθέσεων $L_{ΙΠ}$ ορίζεται επί αλφαβήτου δύο συμβόλων $Σ_{ΙΠ} = \{ α, β \}$: ένα αριστερό α, με το οποίο «ανοίγουμε» μια παρένθεση, και ένα «δεξιό» β με το οποίο την «κλείνουμε». Τα παρενθετικά σημεία α, β λαμβάνουν στη πράξη πολλές μορφές: τα πιο συνηθισμένα είναι φυσικά τα «τόξα» **( )**, αλλά χρησιμοποιούνται ευρέως και άλλα είδη: οι «αγκύλες» **[ ]**, οι «μύστακες» **{ }**, ακόμα και ολόκληρες λέξεις όπως λ.χ. **begin** και **end**.

Οι παρενθέσεις πρέπει «ισορροπούν», δηλαδή να αλληλεντίθενται σωστά. Μια ακριβής περιγραφή αυτής της απαίτησης έχει ως εξής: σε μια λέξη $λ \in Σ_{ΙΠ}^*$, σε κάθε εμφάνιση του α ως το υπ. αρ. i σύμβολο της λέξης λ, θα πρέπει να ορίζεται μια αντίστοιχη θέση m(i), $1 \leq m(i) \leq |λ|$, τέτοια ώστε:

- Η θέση αυτή να ευρίσκεται δεξιότερα της i: $m(i) > i$.
- Η παρένθεση της θέσης i να «κλείνει» στη θέση m(i): $λ_{[i]} = α$, αλλά $λ_{[m(i)]} = β$.
- Η αντιστοίχιση είναι να μονοσήμαντη: αν $i \neq j$ τότε $m(i) \neq m(j)$.
- Οι παρενθέσεις να αλληλεντίθενται, δηλαδή δεν συμβαίνει ποτέ $i < j < m(i) < m(j)$.



Η χρήση των παρενθέσεων είναι τόσο γενικευμένη στα μαθηματικά ώστε τα παραδείγματα να μοιάζουν περιττά: χρησιμοποιούμε εκφράσεις, όπως **((x+3)(y–z)+x)**, ή/και λογικές εκφράσεις όπως **$((p \rightarrow q) \wedge (\neg q)) \rightarrow (\neg p)$**, ή/και αναρίθμητες άλλες.

Ιδαίτερα σημαντική για την επιστήμη των υπολογιστών είναι η μεταμφιεσμένη εμφάνιση «ισορροπημένων παρενθέσεων» στις γλώσσες προγραμματισμού. Δίνουμε στη συνέχεια ένα δείγμα προγράμματος a-la-Pascal – βλέπετε τις «παρενθέσεις»;

```
Procedure Plus(var Sum: Real; T: Array[1..100] of Real);
var i: integer;
begin
  Sum := 0;
  For i := 1 to 100 do
    If (T[i]>0) then begin
      (* just a comment *)
      Sum := (Sum+T[i])
    end;
end;
```

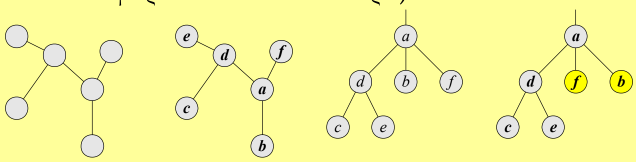
Για να καταστήσουμε τις παρενθέσεις (και τα είδη τους) πιο προφανή, αφαιρούμε το περιττό κείμενο και γράφουμε όλο το δείγμα προγράμματος σε μία γραμμή:

```
( [1..100] ) begin ( [i] ) begin (* *) ( [i]) end end
```

Ακόμα σαφέστερα φαίνονται οι «παρενθέσεις» στις εξής 4 γραμμές.

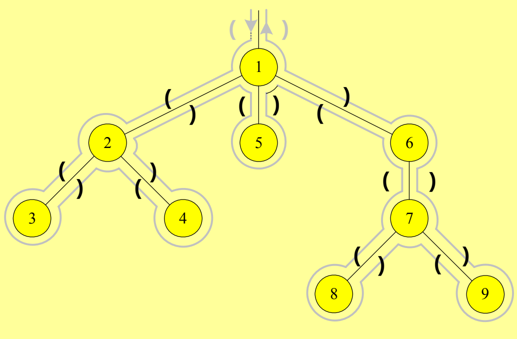
```
(----------) begin--------------------------------end
  [------]          (-----) begin--------------end
                      [-]          (*-*) (----)
                                           [-]
```

Η παντοπαρουσία της γλώσσας των παρενθέσεων στην πληροφορική προκύπτει από την δομική ισοδυναμία της με την (ίσως) περισσότερο σημαντική δομή δεδομένων της πληροφορικής: τα *ενεπίγραφα*, *έρριζα* και *διατεταγμένα δένδρα*: εάν συνδέσουμε πλήρως ένα σύνολο στοιχείων (ή *κόμβων*) με *ακμές*, χωρίς όμως να προκύπτουν κυκλικές συνδέσεις, τότε σχηματίζουμε ένα *δένδρο* (βλ. (*i*) στο σχήμα)· εάν θέσουμε από μια διακριτή επιγραφή σε κάθε κόμβο τότε αυτό είναι *ενεπίγραφο* (βλ. (*ii*))· εάν επιλέξουμε έναν οποιοδήποτε κόμβο ως ρίζα, έτσι ώστε οι υπόλοιποι κόμβοι να «κρέμονται» από αυτήν, τότε το δένδρο μετατρέπεται σε *έρριζο* (βλ. (*iii*))· και τέλος, εάν διατάξουμε τους κόμβους ώστε η σειρά εμφάνισής τους κάτω από έναν άλλο να «παίζει ρόλο», τότε το δένδρο είναι και *διατεταγμένο*. (Π.χ. ενεπίγραφα το δένδρο (*iv*) διαφέρει από το (*iii*)· αν αγνοούσαμε τις επιγραφές θα έπρεπε να εναλλάξουμε τους κόμβους *d*, *f* για να έχουμε διαφορά. Χωρίς διάταξη, ακόμα και αυτή η αλλαγή δεν θα διαφοροποιούσε το δένδρο).



(*i*) (*ii*) (*iii*) (*iv*)

Τα απλώς *έρριζα* και *διατεταγμένα* δένδρα αντιστοιχούν επακριβώς στη γλώσσα των ισορροπημένων παρενθέσεων – για τους λόγους που δίδονται στη συνέχεια. Στο παρακάτω δένδρο-παράδειγμα επισκεπτόμαστε τους κόμβους κατά την *καθοδική*[1] διάνυση, η οποία προκύπτει εάν ακολουθήσουμε το «περίγραμμα» του δένδρου: αρχίζουμε από το αριστερό μέρος της ρίζας, κινούμαστε κατά μήκος των ακμών, πέριξ των κόμβων, και καταλήγουμε στο δεξιό μέρος της ρίζας – (βλ. σχετικό σχήμα). Εάν κατ' αυτή την διάνυση του περιγράμματος γράφουμε από ένα αριστερό παρενθετικό σύμβολο κάθε φορά που συναντάμε την αριστερή πλευρά μιας ακμής, και από ένα δεξιό παρενθετικό σύμβολο κάθε φορά που συναντάμε την δεξιά πλευρά μιας ακμής, τότε η λέξη που θα προκύψει θα είναι κάποια σειρά ισορροπημένων (!) παρενθέσεων:



((( ) ( )) ( ) ((( ) ( ))))

Σημείωση: εάν συμπεριλάβουμε στο περίγραμμα και την νοητή ακμή που οδηγεί στη ρίζα του δένδρου, τότε – χωρίς βλάβη γενικότητας – η σειρά των παρενθέσεων απλώς περιβάλλεται από ένα ακόμα ζεύγος παρενθέσεων που περιέχει όλα τα άλλα.

Κάθε έρριζο και διατεταγμένο δένδρο *παράγει* μία τέτοια σειρά, αλλά και *αναπαράγεται* από μια (οποιαδήποτε) σειρά ισορροπημένων παρενθέσεων! Η αντιστοίχιση τους είναι πλήρης και ένα-προς-ένα.

[1] Αγγλικός όρος: *depth-first (search, traversal, ordering, enumeration,* κττ*).*

Ασυμφραστικές γραμματικές – η παραγωγική όψη:

Στις ομαλές γραμματικές μας απασχόλησαν γραμματικοί κανόνες της μορφής «$K \to \sigma\ K'$». Μια στοιχειώδης γενίκευση είναι οι μορφές «$K \to \alpha\ K'\ \beta$» ή και «$K \to \varnothing$». Οι κανόνες αυτοί επιτρέπουν να έχουμε τελικά σύμβολα και από τις δύο πλευρές του τρέχοντος σημείου K όπου επιδρούμε στη λέξη μας. Είναι προφανές ότι οι παραπάνω δύο κανόνες αρκούν για να παράγουν λέξεις της μορφής $\{\alpha^{(\kappa)}\beta^{(\kappa)}: \kappa \geq 1\}$, ενώ είδαμε ότι μια τέτοια γλώσσα δεν παράγεται από καμμία ομαλή γραμματική. Επομένως αυτή η γενίκευση μας δίνει κάτι παραπάνω από τις ομαλές γραμματικές. Θα χρειαστούμε όμως κάτι ακόμα πιο ισχυρό, και συγκεκριμμένα θα επιτρέψουμε κανόνες στο δεξιό μέρος των οποίων είναι δυνατόν να δίδονται πάνω από ένα παραγωγικά σύμβολα, λ.χ. $K \to K_1\ K_2$. Δίνουμε τον σχετικό ορισμό: θα αποκαλούμε ως ***ασυμφραστική γραμματική*** μια τετράδα $G = \langle\ \Sigma, \Sigma_Q, I, \Delta\ \rangle$, όπου:

- Σ Το «αλφάβητο»: ένα πεπερασμένο σύνολο ***συμβόλων***, τα ***τερματικά*** σύμβολα.
- Σ_Q Πεπερασμένο σύνολο με ***παραγωγικά*** σύμβολα.
- I Ένα επιλεγμένο ***αρχικό*** παραγωγικό σύμβολο $I \in \Sigma_Q$.
- Δ Ένα σύνολο ***κανόνων***. Στην παραγωγική μορφή μιας ασυμφραστικής γραμματικής οι κανόνες έχουν την εξής μορφή:

$$Q \to \lambda_0\ Q_1\ \lambda_1\ Q_2\ \lambda_2 \ldots Q_\nu\ \lambda_\nu.$$

όπου τα $\lambda_\kappa \in \Sigma^*$ είναι λέξεις τερματικών συμβόλων (ίσως *κενές*), και,
τα $Q_\kappa \in \Sigma_{:Q}$ είναι παραγωγικά σύμβολα.

Π.χ

Π.χ	Σ	$= \{\ \alpha, \beta\ \}$
	Σ_Q	$= \{\ X, A, B\ \}$
	I	το X
	Δ	$= \{\ X \to A\ B,\ \ A \to \alpha\ \alpha\ \beta \mid A,\ \ B \to I\ B,\ A \to \varnothing, B \to \varnothing\ \}$

(Προς συντομία, με την «κατακόρυφο» $\mid$ θα διαχωρίζουμε εναλλακτικές επιλογές, δηλαδή δεν θα γράφουμε $A \to \alpha\ \alpha\ \beta$ είτε $A \to A$ αλλά $A \to \alpha\ \alpha\ \beta \mid A$.)

Με βάση μια τέτοια γραμματική μπορούμε να έχουμε υπολογισμούς που παράγουν λεξεις του Σ^*. Ένας υπολογισμός ή, εδώ, μια ***παραγωγή*** είναι μια ακολουθία, $\langle \upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_\kappa, \ldots, \upsilon_{last}\rangle$ λέξεων του $(\Sigma \cup \Sigma_Q)^*$ ώστε:

- *Αρχικό στάδιο* υ_0*:* η αρχική λέξη είναι το αρχικό σύμβολο $I : \upsilon_0 = I$.
- *Βήματα παραγωγής:* για κάθε δύο διαδοχικές περιγραφές $(\upsilon_\kappa, \upsilon_{\kappa+1})$ πρέπει $(\upsilon_\kappa, \upsilon_{\kappa+1}) \in$ *βήματα*(G)· και ένα ζεύγος λέξεων ϕ και ϕ' του $(\Sigma \cup \Sigma_Q)^*$ θεωρούνται ως *βήμα παραγωγης* (δηλαδή μέλος του *βήματα*(G)), εάν η επόμενη λέξη ϕ' προκύπτει από την προηγούμενη ϕ, μέσω της εφαρμογής ενός κανόνα $Q \to \Lambda = \lambda_0\ Q_1\ \lambda_1\ Q_2 \ldots Q_\nu\ \lambda_\nu$, (εάν αντικαταστήσουμε δηλαδή κάποια εμφάνιση του συμβόλου «Q» εντός της ϕ, με την λέξη ϕ').
- *Τέλος παραγωγής:* Όταν και μόνον η λέξη υ_{last} αποτελείται αποκλειστικά από τερματικά σύμβολα.

Θα λέμε ότι μία λέξη $\lambda \in \Sigma^*$, ***παράγεται*** από την γραμματική G, $G \Rightarrow \lambda$, εάν και μόνον υπάρχει μία παραγωγή όπου $\upsilon_0 = I$ και $\upsilon_{last} = \lambda$. Η γλώσσα ***L(G)*** της γραμματικής G είναι το σύνολο των λέξεων οι οποίες παράγονται από την G:

$$L(G) = \{\lambda \in \Sigma^*: G \Rightarrow \lambda\}.$$

Παράδειγμα: μια γραμματική για τη γλώσσα L_{Π} ***των παρενθέσεων:***

Έστω η γλώσσα L_{Π} επί του αλφαβήτου { (,) } («αριστερή» και «δεξιά» παρένθεση), η οποία περιέχει μόνον τις ισορροπημένες σειρές παρενθέσεων. Η γλώσα αυτή παράγεται από την εξής γραμματική:

Σ	$= \{\ \mathbf{(}\ ,\ \mathbf{)}\ \}$
Σ_Q	$= \{\ I\ \}$
αρχικό	το I
Δ	$= \{\ I \to \mathbf{(}\ I\ \mathbf{)}\ I \mid \varnothing\ \}$

Το σκεπτικό είναι απλό: έστω λ μια σειρά ισορροπημένων παρενθέσεων. Κάθε τέτοια σειρά δεν μπορεί παρά να αρχίζει με μια αριστερή παρένθεση **(** , και αυτή η παρένθεση πρέπει «κλείνει» με μια δεξιά παρένθεση **)** η οποία εμφανίζεται αργότερα μέσα στην λ. Έστω λ_1 το τμήμα της λέξης λ ανάμεσα στις δύο αυτές εμφανίσεις των παρενθέσεων, και λ_2 το τμήμα της λ μετά την εμφάνιση της δεξιάς παρένθεσης· δηλαδή $\lambda = (\ \lambda_1\ )\ \lambda_2$. Καμμία δεξιά παρένθεση εντός του τμήματος λ_1 δεν μπορεί να κλείνει αλλού, παρά μόνον εντός της λ_1, δηλαδή η λ_1 είναι μια σειρά ισορροπημένων παρενθέσεων, και «πρέπει» να παράγεται από το σύμβολο Ι. Το ίδιο ισχύει και για την λ_2.

Αυτές οι σκέψεις είναι χρήσιμες ευριστικά. Η ακριβής απόδειξη χρειάζεται εδώ, και αξίζει την προσοχή μας διότι είναι απλή και στηρίζεται σε μια επαγωγή επί του μήκους της λέξης λ.

- *Όλες οι λέξεις της* $L(G_{ΙΠ})$ ανήκουν στην $L_{ΙΠ}$:
  Έστω ότι εφαρμόζουμε τον κανόνα $I \rightarrow (\ I\ )\ I$. Εάν το 1ο παρενθετικό σημείο **(** εμφανίζεται στην παραγόμενη λέξη στη θέση i, και το 2ο σημείο **)** στη θέση j, ο παραπάνω κανόνας μας επιτρέπει να κάνουμε την αντιστοίχιση $m(i) \leftarrow j$ – (βλ. σχετικό πλαίσιο περί $L_{ΙΠ}$). Ο κανόνας $I \rightarrow (\ I\ )\ I$ καθιστά γραμματικο-συντακτικά εμφανές ότι οι επόμενες αντιστοιχίσεις θα είναι είτε πλήρως εντός, είτε πλήρως εκτός, της τρέχουσας – όπως απαιτεί η ισορροπία των παρενθέσεων.
- *Όλες οι λέξεις της* $L_{ΙΠ}$ παράγονται από την $L(G_{ΙΠ})$:
  Δεν μπορούμε εδώ παρά να κάνουμε μια επαγωγική απόδειξη.
  Βάση επαγωγής: «Όλες» (μία είναι...) οι λέξεις $\lambda \in L_{ΙΠ}$ μήκους 0 παράγονται από τον κανόνα $I \rightarrow \varnothing$.
  Βήμα επαγωγής: Αν όλες οι λέξεις $\lambda \in L_{ΙΠ}$ μήκους $\leq k$ παράγονται από την G τότε παράγονται και όλες οι λ μήκους $|\lambda| \leq k+1$. Και πράγματι έστω μια $\lambda \in L_{ΙΠ}$ μήκους k+1. Διαπιστώσαμε προηγουμένως ότι αυτή θα γράφεται οπωσδήποτε ως $\lambda = (\ \lambda_1\ )\ \lambda_2$, όπου $\lambda_1, \lambda_2 \in L_{ΙΠ}$. Οι λέξεις λ_1, λ_2 όμως έχουν μήκος το πολύ k, επομένως – από την επαγωγική υπόθεση – παράγονται από το αρχικό σύμβολο Ι. Για να παραγάγουμε την λ αρκεί λοιπόν να αρχίσουμε με τον κανόνα $I \rightarrow (\ I\ )\ I$, από την 1η εμφάνιση του Ι να παραγάγουμε την λ_1 και τέλος, από την 2η την λ_2.

■

Παράδειγμα: λέξεις με ίσο πλήθος από «α» και «β».

Έστω Σ = { α, β } και L = { λ: λ ∈ Σ, και πλήθος α στην λ = πλήθος β στη λ}. Αν και η πολύ απλούστερη γλώσσα $\{ \alpha^{(\kappa)}\beta^{(\kappa)}: \kappa > 0\}$ είναι μη ομαλή, ακόμα και η παραπάνω γλώσσα $L_{\alpha\beta}$ μπορεί να παραχθεί από ασυμφραστική γραμματική, και συγκεκριμμένα την εξής $G_{\alpha\beta}$:

Τερματικά, Σ	{ α, β }
Παραγωγικά, Σ_K	{ Ι, Α, Β }
Αρχικό Σύμβολο	Ι
Κανόνες	$I \rightarrow \alpha B \mid \beta A \mid \varnothing$
	$A \rightarrow \alpha I \mid \beta A A$
	$B \rightarrow \alpha B B \mid \beta I$

Η απόδειξη είναι απλή και αρκετά χαρακτηριστική.

- Η γραμματική G παράγει μόνον λέξεις στις οποίες πλήθος «α» = πλήθος «β», (εύκολο).
- Κάθε λέξη λ ∈ Σ στην οποία πλήθος «α» = πλήθος «β» παράγεται από την G.
  Θα δείξουμε ότι το σύμβολο Ι παράγει όλες τις λέξεις όπου πλήθος «α» = πλήθος «β», ότι το σύμβολο Α παράγει όλες τις λέξεις όπου το πλήθος των «α» υπερέχει των «β» κατά ακριβώς +1, και ότι το σύμβολο Β παράγει όλες τις λέξεις όπου το πλήθος των «β» υπερέχει κατά ακριβώς +1.
  Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι μια λέξη στην οποία το πλήθος των «α» είναι κατά +2 μεγαλύτερο από το πλήθος των «β», αποτελείται *πάντοτε* από την συναρμογή δύο λέξεων στις οποίες το πλήθος των «α» είναι κατά +1 μεγαλύτερο από το πλήθος των «α». (Γιατί?) Μετά από αυτή την παρατήρηση οι κανόνες καθίστανται αυτονόητοι:
  - $I \rightarrow \alpha B \mid \beta A$: Όσες λέξεις λ της $L_{\alpha\beta}$ αρχίζουν από «α» συνεχίζουν με κάποια λέξη στην οποία πλήθος «β» = πλήθος «α» + 1, τύπου δηλαδή Β, άρα η λέξη παράγεται από την αΒ. Ο συμμετρικός ισχυρισμός ισχύει εάν αρχίζουν από β.
  - $A \rightarrow \alpha I \mid \beta A A$: Έστω ότι μια λ λέξη είναι τύπου Α, δηλαδή πλήθος «α» = πλήθος «β» + 1. Εάν η λ αρχίζει από «α» τότε στην υπόλοιπη λέξη θα έχουμε πλήθος «α» = πλήθος «β», και αυτή θα παράγεται από το σύμβολο Ι, δηλαδή η όλη λέξη λ θα παράγεται από την αΙ.

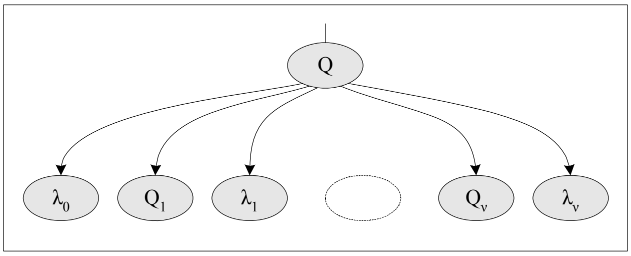
Εάν η λ αρχίζει από «β» τότε στην υπόλοιπη λέξη τα «α» υπερέχουν κατά +2. Κατά την παρατήρηση μας, αυτή η υπολέξη αποτελείται αναγκαστικά από δύο υπολέξεις στις οποίες πλήθος «α» = πλήθος «β» + 1, επομένως (επαγωγικά!) παράγεται από την λέξη ΑΑ. Κατά συνέπεια η όλη λέξη λ παράγεται από την βΑΑ.

- Β → αΒΒ | βΙ: (Συμμετρικά κατά το προηγούμενο).

***Συντακτικά δένδρα*: μια διαγραμματική μορφή για τις ασυμφραστικές παραγωγές.**

Θα μας είναι πολύ χρήσιμο να έχουμε και κάποια «διαγραμματική» απεικόνιση των ασυμφραστικών παραγωγών, (όπως λ.χ. οι παραγωγές των πεπερασμένων αυτομάτων απεικονίζονταν ως περίπατοι σε ένα διάγραμμα καταστάσεων). Έστω G μια ασυμφραστική γραμματική, και λ μια λέξη της L(G). Θα αποκαλούμε ***συντακτικό δένδρο* (*κατά G*)** [2] της λ, ένα ενεπίγραφο, έρριζο και διατεταγμένο δένδρο, που ορίζεται ως εξής:

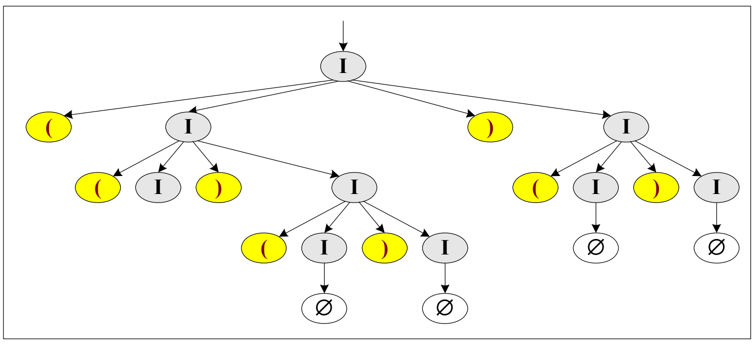
- Κάθε εσωτερικός κόμβος επιγράφεται από ένα παραγωγικό σύμβολο, και κάθε τερματικός κόμβος (ή, επίσης: φύλλο) επιγράφεται από μια λέξη τερματικών συμβόλων.
- Η ρίζα του δένδρου επιγράφεται από το αρχικό σύμβολο Ι.
- Οι θυγατρικοί κάθε εσωτερικού κόμβου u ορίζονται και διατάσσονται ως εξής:
  - αν ο κόμβος u επιγράφεται από το παραγωγικό σύμβολο Q, και η γραμματική G διαθέτει κάποιο κανόνα $Q \rightarrow \lambda_0 Q_1 \lambda_1 \ldots Q_\nu \lambda_\nu$ τότε ο κόμβος u επιτρέπεται να έχει 2ν+1 θυγατρικούς, επιγεγραμμένους με τα σύμβολα λ_0, Q_1, λ_1, …, Q_ν, λ_ν, διατεταγμένα με την σειρά που εμφανίζονται στον σχετικό κανόνα.



Σχήμα: Η μορφή ενός κόμβου συντακτικού δένδρου, κατά τον κανόνα $Q \rightarrow \lambda_0 Q_1 \lambda_1 \ldots Q_\nu \lambda_\nu$.

Εάν παραθέσουμε διαδοχικά τις λέξεις που εμφανίζονται στα φύλλα «από αριστερά προς τα δεξιά», και τις συναρμόσουμε, τότε θα σχηματίσουμε μια λέξη που παράγεται από την γραμματική μας. Δεν εξετάζουμε εδώ το πώς «υπολογίζουμε» ένα συντακτικό δένδρο για μια δεδομένη λέξη, ούτε εάν κάθε λέξη έχει ένα και μόνο συντακτικό δένδρο. Μας ενδιαφέρει μόνο το ότι μια λέξη θα έχει, έστω ένα, συντακτικό δένδρο κατά την γραμματική μας *εάν και μόνον εάν* παράγεται σύμφωνα με αυτήν. Δίνουμε στη συνέχεια λίγα παραδείγματα συντακτικών δένδρων.

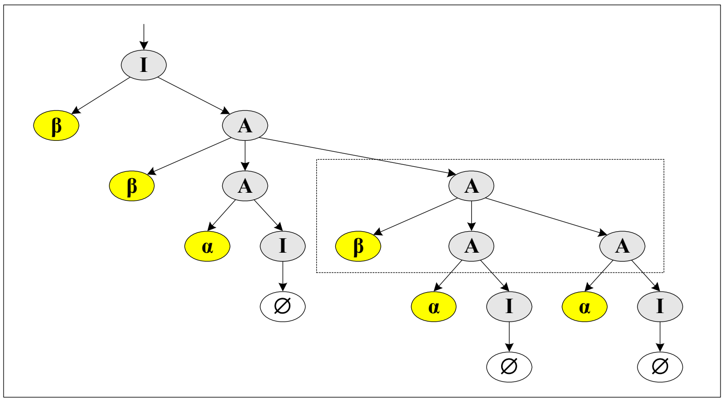
Παράδειγμα: συντακτικό δένδρο ισορροπημένων παρενθέσεων. (Βλ. σχετική γραμματική $G_{ΙΠ}$.)



Σχήμα: (Το) συντακτικό δένδρο για την λέξη «(( ) ( )) ( )» της γλώσσας $L(G_{ΙΠ})$.

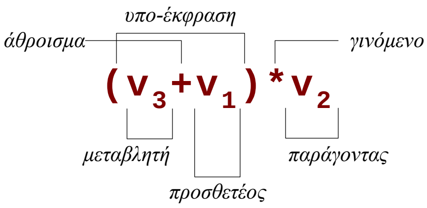
[2] Προφανώς είναι *γραμματικό δένδρο*, (αφού εξαρτάται από την γραμματική G), ή ίσως *αναλυτικό δένδρο*, (αφού αναλύει μια λέξη), εδώ όμως ακολουθούμε την ξενόγλωσση ορολογία η οποία όμως με την σειρά της ακολουθεί την Ελληνική γλώσσα, και χρησιμοποιεί τους όρους (context-free) *grammar* και *syntax* (tree)· οι όροι αυτοί είναι όμως ξένοι στους ξένους, και έτσι δεν έχουν χρησιμοποιηθεί κατά το ακριβές ύφος των Ελληνικών – *oh well*! :-\

Παράδειγμα: συντακτικό δένδρο για λέξη της γλώσσας $L_{αβ}$ ***= «όσα α – τόσα β».***
(Βλ. στα προηγούμενα την σχετική γραμματική $G_{αβ}$.)

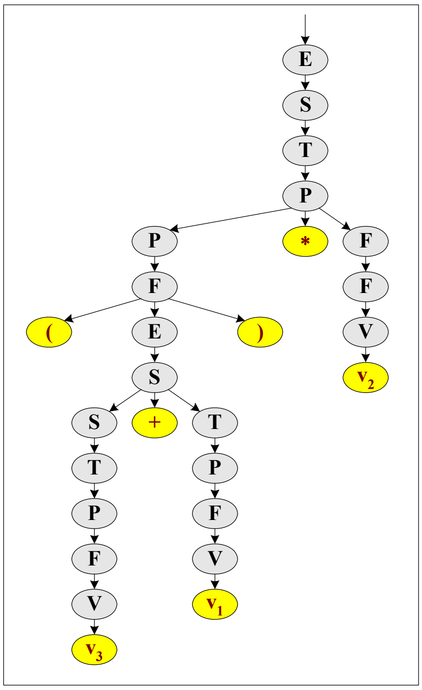


Σχήμα: Συντακτικό δένδρο για την λέξη «ββαβαα» της γλώσσας $L(G_{αβ})$.
Εντός του διακεκομμένου πλαισίου ένας κόμβος εφαρμογής του κανόνα (Α→ βΑΑ).

Παράδειγμα: αλγεβρικές εκφράσεις και συντακτικά δένδρα.
Μια από τις πλέον πρακτικώς χρήσιμες γλώσσες είναι η γλώσσα των αλγεβρικών εκφράσεων, εκφράσεων όπως λ.χ. η έκφραση **(v3+v1)*v2**. Πώς να σχεδιάσουμε μια γραμματική για τέτοιες εκφράσεις; Μια αποδοτική προσέγγιση είναι να γράψουμε ένα παράδειγμα μιας τέτοιας έκφρασης και να αναγνωρίσουμε τις διάφορες *οντότητες* από τις οποίες απαρτίζεται, και ειδικότερα τους *ρόλους* που αυτές οι οντότητες αναλαμβάνουν. Για κάθε τέτοιο «ρόλο» επιλέγουμε ένα παραγωγικό σύμβολο, και η γραφή των κανόνων με τους οποίους αυτοί συνδυάζονται καθίσταται συχνά εύκολη αν όχι προφανής. Στο επόμενο σχήμα δίνουμε τους ρόλους που εμπλέκονται στις αλγεβρικές εκφράσεις, μια (εκδοχή) γραμματικής γι' αυτές, και ένα παράδειγμα συντακτικού δένδρου κατά την γραμματική αυτή.



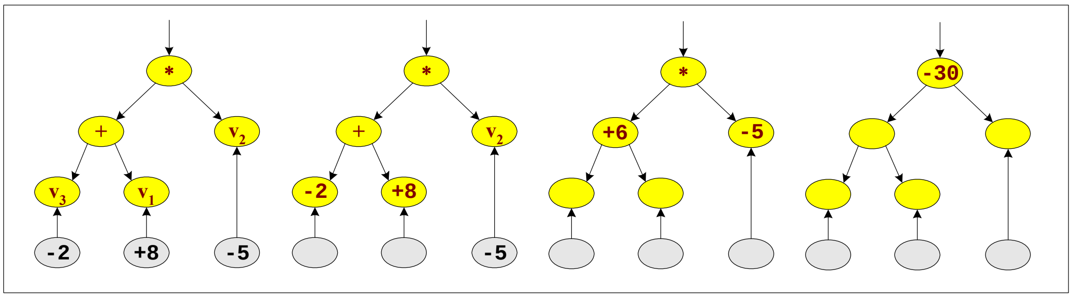
$Σ_Q$	ρόλος	(αγγλικά)	κανόνες
E	έκφραση	*expression*	E → S
S	άθροισμα	*sum*	S → T | S **+** T
T	προσθετέος	*term*	T → P
P	γινόμενο	*product*	P → F | P ***** F
F	παράγοντας	*factor*	F → V |**(** E **)**
V	μεταβλητή	*variable*	V → **v1** | **v2** | **v3** | …



Σχήμα: Γραμματική για αλγεβρικές εκφράσεις,
και συντακτικό δένδρο για την έκφραση:
(v3+v1)*v2.

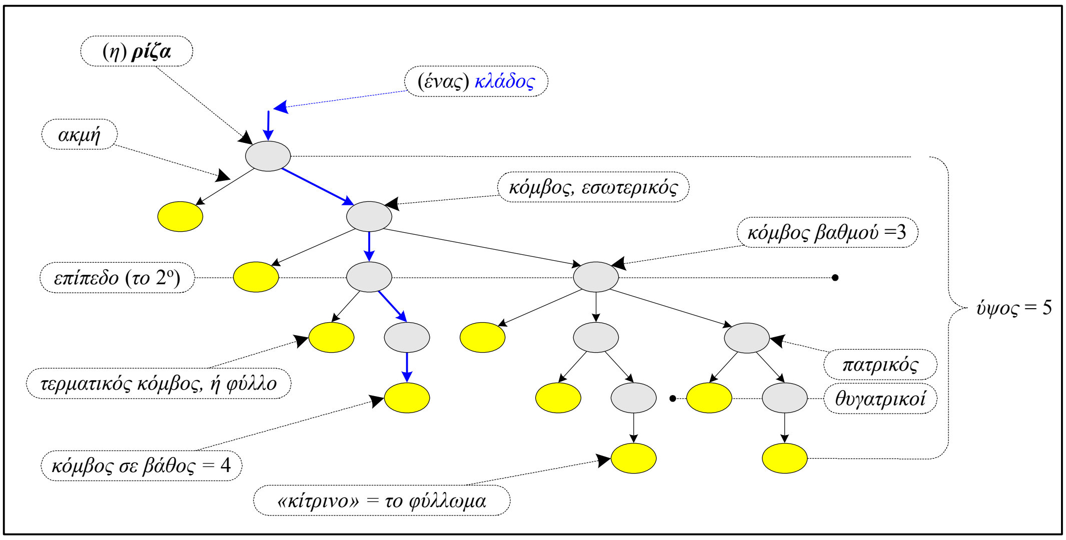
Τα συντακτικά δένδρα τέτοιων, (και άλλων παρόμοιων εκφράσεων), είναι εξαιρετικά χρήσιμα (και κρίσιμα) από πρακτικής πλευράς, διότι δεν περιέχουν μόνο τον τρόπο *ανάλυσης* της έκφρασης κατά την σχετική γραμματική, αλλά μας επιτρέπουν, μέσω ακριβώς αυτής της ανάλυσης, να ορίσουμε *και* τον τρόπο *αποτίμησης* μιας τέτοιας έκφρασης – στόχος που, κρυφά ή φανερά, υπήρχε εκ αρχής.

Στο επόμενο σχήμα εικονίζεται η απλοποίηση του συντακτικού δένδρου της έκφρασης **(v3+v1)*v2**, η οποία προκύπτει εάν κρατήσουμε μόνον τις μεταβλητές και τους τελεστές, και προωθήσουμε αυτά τα στοιχεία όσο είναι δυνατόν προς τη ρίζα. Στα φύλλα του δένδρου θα έχουμε τις μεταβλητές, και εάν σε αυτές αποδώσουμε τιμές, το συντακτικό δένδρο μας λέει πώς να αποτιμήσουμε αυτή την έκφραση!



Σχήμα: Η χρήση συντακτικών δένδρων για την αποτίμηση εκφράσεων.

Οι κυριότεροι όροι σχετικοί με *δένδρα* – μια σχηματική παρουσίαση.



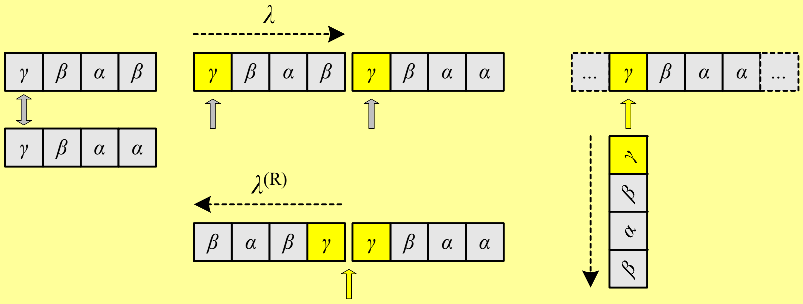
14^o Ασυμφραστικές γραμματικές: ανάλυση και στοιβακτικά αυτόματα.

Η αναλυτική εκδοχή μιας ασυμφραστικής γραμματικής..

Οι ασυμφραστικές γραμματικές είναι ένας ιδιαίτερα εκφραστικός τρόπος για να ορίζουμε γλώσσες· και ως τέτοιος παίζει καθοριστικό ρόλο στην σχεδίαση γλωσσών προγραμματισμού. Οι ορισμοί όμως υπάρχουν για να εφαρμόζονται, και το ερώτημα το οποίο συναντάμε εκ νέου είναι: εάν μας δοθεί μια γραμματική G, (ασυμφραστική στη περίπτωσή αυτή), και μια λέξη λ, πώς θα διαπιστώσουμε εάν η λέξη λ παράγεται από την γραμματική G; Για να επιτύχουμε κάτι τέτοιο θα πρέπει να βρούμε ποιοί κανόνες «χρησιμοποιήθηκαν» για να σχηματιστεί η λέξη λ. Σε αυτή την φράση υποκρύπτονται τρία επί μέρους προβλήματα:

- να επιλεγούν κάποιοι κανόνες της G,
- να παραχθεί μια λέξη λ′ με βάση αυτούς,
- και να ελεγχθεί/επιβεβαιωθεί ότι λ = λ′.

Δεν γνωρίζουμε (ακόμα) πώς να επιτύχουμε το 1^o, γνωρίζουμε πώς να επιτύχουμε το 2^o, και μένουμε με την απορία εάν είναι δυνατόν να επιτύχουμε το 3^o...



Ακριβέστερα: είναι προφανές ότι *εμείς* μπορούμε να συγκρίνουμε δύο λέξεις. Λ.χ. θα τοποθετούσαμε, (ίσως νοητά), την μία κάτω από την άλλη και θα συγκρίναμε τα σύμβολα ένα-προς-ένα. Αυτή όμως είναι μια δισδιάστατη διαδικασία, ενώ οι γραμματικές μας είναι «μονοδιάστατες». Θα μπορούσαμε να τοποθετούσαμε τις δύο λέξεις σε μια γραμμή, αλλά τότε η σύγκρισή τους θα απαιτούσε δύο δείκτες, σε ανεξέλεγκτη απόσταση μεταξύ τους, (βλ. εικόνα πιο πάνω). Μπορεί τελικά να γίνει η σύγκριση με *γραμματικό* τρόπο;

Ναί. Αρκεί, αφού *αντιστρέψουμε* την μία λέξη εξ αυτών, (βλ. στο σχήμα την λέξη $\lambda^{(R)} = (\beta\ \alpha\ \beta\ \gamma) = (\gamma\ \beta\ \alpha\ \beta)^{(R)}$), να την παραθέσουμε εμπρός από την άλλη: τα αντίστοιχα σύμβολα θα κατέληγαν έτσι γειτονικά, και δύο τυχόν ίσα σύμβολα **σ σ**, θα μπορούσαν να απαλειφούν με τον *γραμματικό* κανόνα **σ σ** → ∅. Ακριβέστερα, επειδή εστιάζουμε και ελέγχουμε μόνον το σημείο επαφής δύο λέξεων, και όχι οπουδήποτε, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα βοηθητικό σύμβολο, λ.χ. ⇑, ώστε το σημείο επαφής να διακρίνεται από άλλα. Οι κανόνες απαλειφής θα ήσαν τότε **σ** ⇑ **σ** → ∅, (από ένας για κάθε σ ∈ Σ). Προφανώς εάν είναι δυνατόν να απαλείψουμε όλα τα σύμβολα και των δύο λέξεων, τότε και μόνον τότε οι δύο λέξεις θα είναι ίσες. Έτσι για κάθε ασυμφραστική γραμματική G θα μπορούσαμε να ορίσουμε την αναλυτική της μορφή G_A με τον εξής τρόπο:

Τερματικά σύμβολα, Σ: τα ίδια με την προσθήκη του βοηθητικού συμβόλου ⇑.
Παραγωγικά σύμβολα, $Σ_Q$: τα ίδια.
Αρχικό σύμβολο, Ι: το ίδιο.
Κανόνες, Δ: 1) για κάθε κάνονα Q → Λ, θέτουμε στην G_A, τον **Q → Λ**$^{(R)}$.
2) προσθέτουμε τους κανόνες **σ** ⇑ **σ** → ∅, για κάθε τερματικό σ∈ Σ.

Δεδομένης μιας λέξης λ, αν αρχίσουμε από την λέξη **Ι** ⇑ **λ**, και εφαρμόζουμε τους κανόνες της G_A, τότε θα είναι δυνατόν να καταλήξουμε στη λέξη ⇑ εάν και μόνον η λ παράγεται από την G! Αλλά αυτή η μορφή γραμματικής αλλά δεν συνηθίζεται. Αντ' αυτής, (στρέφοντας στο σχήμα την λέξη (*β α β γ*) άλλη μια φορά, κατά +90^o) χρησιμοποιούμε το «αυτόματο» που ακολουθεί...

Τα αυτόματα με (μία) στοίβα - μια «μηχανή» για τις ασυμφραστικές γραμματικές.

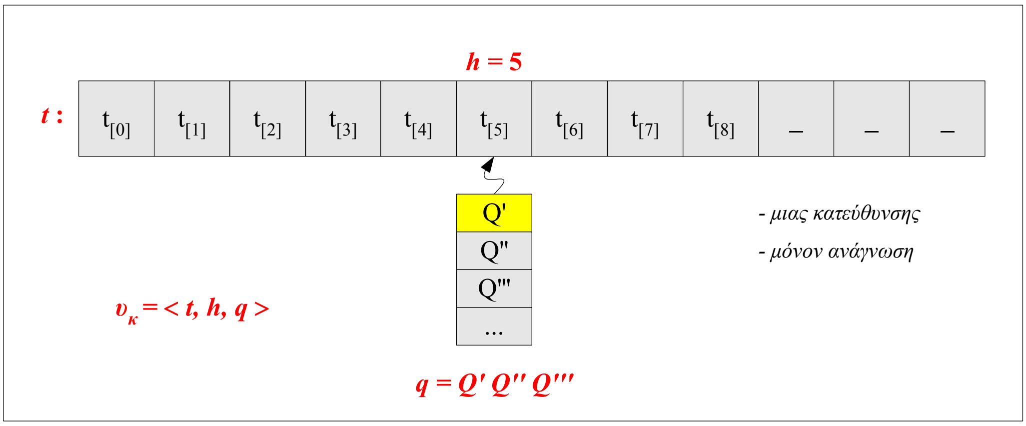
Και η αναλυτική μορφή των ασυμφραστικών γραμματικών επιδέχεται μια πιο παραστατική, και κυρίως μια πιο «μηχανική» περιγραφή. Θα ονομάζουμε ***(απλό)***[3] ***στοιβακτικό αυτόματο*** μια 4άδα, $A = \langle \Sigma, \Sigma_{:Q}, I, \Delta \rangle$ όπου :

- το Σ είναι ένα οποιοδήποτε αλφάβητο.
- το Σ_Q είναι κάποιο αλφάβητο, με σύμβολα που θα τα αποκαλούμε ***καταστάσεις***.
- το $I \in \Sigma_Q$ είναι ένα αφετηριακό σύμβολο στοίβας.
- οι ***οδηγίες*** Δ είναι ένα σύνολο 3άδων της μορφής: $(Q, \lambda) \rightarrow Q_1Q_2...Q_\nu$, όπου:
  - το Q είναι ένα σύμβολο ***στοίβας***: $Q \in (\Sigma \cup \Sigma_Q)$.
  - το λ είναι μια λέξη από τερματικά σύμβολα, $\lambda \in \Sigma^*$.
  - το $Q_1Q_2...Q_n$ είναι μια λέξη από σύμβολα στοίβας.

Σε κάθε στοιβακτικό αυτόματο επισυνάπτουμε την «μηχανική» του όψη, και συγκεκριμμένα τα εξής:

- μια μεταβλητή ***στοίβα*** q, και συγκεκριμμένα μια λέξη με σύμβολα στοίβας: $q \in (\Sigma \cup \Sigma_Q)^*$.
- μια μεταβλητή h, (έναν φυσικό αριθμό $h \in N$) , ως την θέση μιας «κεφαλής».
- μια απεικόνιση, $t : \mathbf{N} \rightarrow \Sigma \cup \{ \_ \}$, ως μια «ταινία» από κυψέλες με ένα τερματικό σύμβολο σε κάθε κυψέλη. (Θα σημειώνουμε μια «κενή» κυψέλη με το σύμβολο «κάτω παύλα» _ .)

Η τριάδα $\langle t, h, q \rangle$ θα καλείται (***καταστατική***) ***περιγραφή*** του αυτομάτου.



Σχήμα: Η ταινία t , η κεφαλή h, και η στοίβα q, ενός στοιβακτικού αυτομάτου.
προσοχή: Η λέξη q = Q'Q''Q''' της στοίβας σχεδιάζεται κάθετα: από πάνω προς τα κάτω.

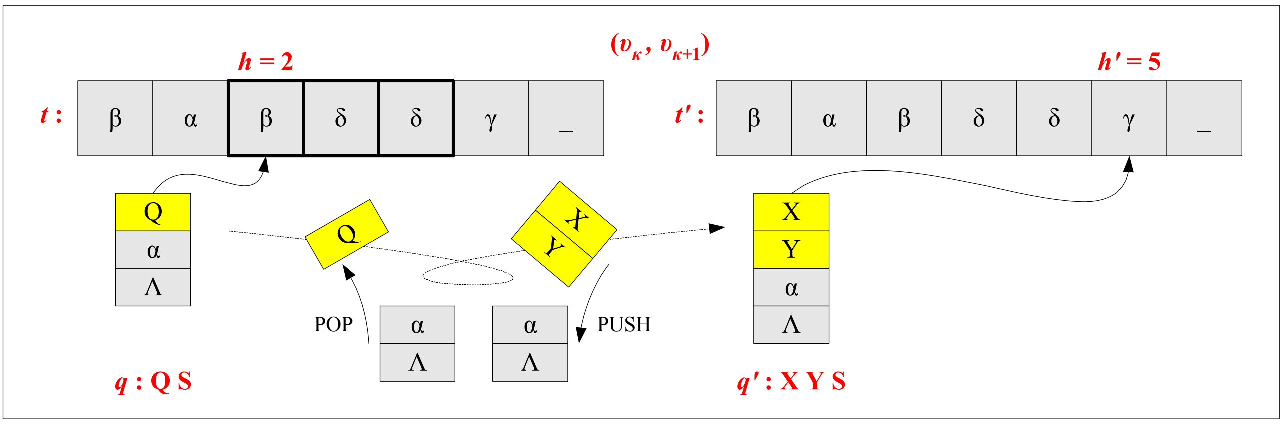
Ο σκοπός μας είναι η η ταινία να φέρει επ' αυτής την υπό ανάλυση λέξη λ, η κεφαλή h να παίζει τον ρόλο του διακριτικού συμβόλου ⇑ προσδιορίζοντας την υπόλοιπη προς ανάλυση λέξη, και το «κορυφαίο» σύμβολο Q να υποδηλώνει τον προς εφαρμογή κανόνα. Ορίζουμε λοιπόν – κατά το γενικό πλαίσιο που δώσαμε στην εισαγωγή, τα εξής:

- Η σχέση *βήματα(A)* του αυτομάτου είναι όλα τα ζεύγη περιγραφών (= σταδίων υπολογισμού) (φ, φ') που ορίζονται ως εξής:
  Μια οδηγία $(Q, \lambda) \rightarrow Q_1Q_2...Q_n$ είναι ***εφαρμόσιμη*** επί της περιγραφής $\phi = \langle t, h, q \rangle$, εάν:
  - η κεφαλή και για |λ| σύμβολα προς τα δεξιά «βλέπει» την λέξη λ.
  - το ***κορυφαίο σύμβολο*** της στοίβας (δηλαδή το πρώτο σύμβολο της λέξης q), είναι το Q, δηλαδή $q = Q\,S$, (όπου $S \in (\Sigma \cup \Sigma_Q)^*$).

  και εάν είναι εφαρμόσιμη, τότε η καταστατική περιγραφή φ', είναι η εξής:

[3] «Απλό» διότι θα κλείσουμε αυτή την ενότητα με μια πιο «σύνθετη» μορφή στοιβακτικού αυτομάτου, που είναι και η συνήθης. Ούτως ή άλλως οι δύο μορφές θα προκύψουν ισοδύναμες.

$\varphi' = \langle t', h', q' \rangle$, όπου $t' = t$, $q' = Q_1 Q_2 \ldots Q_\nu S$ και $h' = h + |\lambda|$,



Σχήμα: Η εκτέλεση μιας οδηγίας (Q, βδδ) → XY επί ενός στοιβακτικού αυτομάτου.

δηλαδή: το περιεχόμενο της ταινίας δεν μεταβάλλεται, στη νέα στοίβα αφαιρείται το κορυφαίο σύμβολο Q και προστίθεται η νέα σειρά συμβόλων $Q_1Q_2 \ldots Q_\nu$, και η κεφαλή μετακινείται τόσες θέσεις όσα είναι τα σύμβολα της λέξης λ που έχει πια «διαβάσει».

Για ένα τέτοιο αυτόματο, σύμφωνα με όσα έχουμε εξηγήσει, έχουμε υπολογισμούς $\upsilon = \langle \upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_\kappa, \ldots \rangle$ αρχίζοντας από μια λέξη-δεδομένο λ, σύμφωνα με την εξής σημασιολογία:

- *Αρχικό στάδιο υ_0:* Κάθε λέξη $\lambda = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 .. \sigma_\nu \in \Sigma^*$ μπορεί να «φορτωθεί» στο αυτόματο ως μια ταινία t_λ, ορίζοντας ως $t_\lambda[\kappa] = \sigma_\kappa$, για $\kappa = 1, \ldots, |\lambda|$, (και κενές τις υπόλοιπες θέσεις). Η κεφαλή τίθεται στη 1η θέση, και η στοίβα φέρει ένα σύμβολο, το αφετηριακό I. Η μηχανή εκκινείται λοιπόν με αρχική καταστατική περιγραφή την εξής:

$$\upsilon_0 = \langle t = t_\lambda, h = 1, q = I \rangle$$

- *Βήμα υπολογισμού:* Για κάθε δύο διαδοχικές περιγραφές $(\upsilon_\kappa, \upsilon_{\kappa+1})$ πρέπει $(\upsilon_\kappa, \upsilon_{\kappa+1}) \in$ *βήματα*(π), όπως αυτά περιγράφηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.
- *Τέλος υπολογισμού:* Όταν και μόνον η κεφαλή έχει διαβάσει όλη την ταινία, δηλαδή: $h = |\lambda|+1$.

Το αποτέλεσμα του υπολογισμού δίδεται από την τελική στοίβα q της μηχανής. ‘Οταν και μόνον όταν αυτή είναι *κενή* ($q = \varnothing$) τότε θα λέμε ότι το στοιβακτικό αυτόματο ***αποδέχθηκε*** την λέξη-δεδομένο λ, αλλοιώς θα λέμε ότι την ***απέρριψε***. Θέλουμε η στοίβα να έχει «αδειάσει» διότι στη στοίβα συλλέγουμε όλα τα αναγνωριστικά/αναλυτικά καθήκοντα της μηχανής μας, και, προφανώς, δεν πρέπει να αποδεχόμαστε μια λέξη για την οποία έχουν μείνει στη στοίβα εκκρεμή αναλυτικά καθήκοντα.

Κάθε στοιβακτικό αυτόματο αποδέχεται, λοιπόν, μια γλώσσα $L(A) \subseteq \Sigma^*$ η οποία αποτελείται όλες και μόνον τις λέξεις του αλφαβήτου Σ , τις οποίες αυτό αποδέχεται.

Είναι φανερό από τα προηγούμενα ότι μια «ασυμφραστική γλώσσα» έχει διάφορους ισοδύναμους τρόπους να παρασταθεί: ως μια παραγωγική γραμματική ή τα συντακτικά δένδρα των λέξεών της, και ως στοιβακτικό αυτόματο (ή μια «αναλυτική» γραμματική).

15ο Ασυμφραστικές γραμματικές: αιτιοκρατικές εκδοχές.

Προβλήματα αναιτιοκρατίας στα στοιβακτικά αυτόματα.

Τα στοιβακτικά αυτόματα είναι σε θέση να αποδεχθούν μόνον όσες γλώσσες ορίζονται μέσω ασυμφραστικών γραμματικών. Αλλά πως θα διαπιστώσουμε εάν είναι σε θέση να αποδεχθούν μια δεδομένη λέξη, ή όχι; Ας ανακαλέσουμε το εισαγωγικό σχόλιο από την προηγούμενη ενότητα:

> *«εάν μας δοθεί μια ασυμφραστική γραμματική G, και μια λέξη λ, πώς θα διαπιστώσουμε εάν η λέξη λ παράγεται από την γραμματική G; [Προς τούτο υπάρχουν] τρία επί μέρους προβλήματα:*
>
> - *να επιλεγούν κάποιοι κανόνες της G,*
> - *να παραχθεί μια λέξη λ′ με βάση αυτούς,*
> - *και να ελεγχθεί/επιβεβαιωθεί ότι λ = λ′.* »

Γνωρίζουμε πώς να επιτύχουμε το 2ο, είδαμε πώς να επιτύχουμε και το 3ο, αλλά δεν είδαμε (ακόμα) πώς να επιτύχουμε το 1ο. Το πρόβλημα προέρχεται από το ότι (και) οι ασυμφραστικές γραμματικές επιτρέπουν *μη-αιτιοκρατικές* παραγωγές. Στη περίπτωση των πεπερασμένων αυτομάτων διαπιστώσαμε ότι τα μη-αιτιοκρατικά αυτόματα ισοδυναμούν με τα αιτιοκρατικά, και σε αυτά η εκτέλεση του υπολογισμού ήταν μια «κατ' ευθείαν» διαδικασία. Ισχύει κάτι ανάλογο στα στοιβακτικά αυτόματα;

Ατυχώς όχι· όχι εν γένει (αν και δεν θα προχωρήσουμε σε σχετικές αναλύσεις και αποδείξεις). Μόνον, σε ειδικές περιπτώσεις είναι δυνατόν να έχουμε μια «αιτιοκρατική» λειτουργία των στοιβακτικών αυτομάτων. Εξηγούμε σε αυτή την ενότητα την πιο συνηθισμένη (και πρακτικώς πολύ χρήσιμη) περίπτωση αιτιοκρατικών ασυμφραστικών γραμματικών.

Αιτιοκρατικές ασυμφραστικές γραμματικές.

Ας υποθέσουμε ότι είμαστε στη θέση του στοιβακτικού αυτομάτου, και ότι έχουμε στη διάθεσή μας αφενός μια ασυμφραστική γραμματική G και αφετέρου μια λέξη λ προς ανάλυση με βάση την G. Ποιό κανόνα της G να διαλέξουμε προς εφαρμογή; Έστω ότι στη κορυφή της στοίβας ευρίσκεται το σύμβολο Q. Επειδή οι κανόνες (κατά κανόνα) παράγουν ή «γράφουν» μια λέξη ή τμήματα αυτής, θα πρέπει να διαλέξουμε «εκείνον» τον κανόνα Q → ..., που παράγει το τμήμα της λέξης που έχει «γραφεί» και μας είναι ορατό επί την ταινίας, (από την θέση της κεφαλής και δεξιά). Υπάρχουν όμως δύο μη-αιτιοκρστικού χαρακτήρα περιπτώσεις στις οποίες αυτό είναι αδύνατον:

1η περίπτωση, το «***δίλημμα***»	Το *ορατό* επί της ταινίας τμήμα λέξης λ, δεν μας βοηθά επειδή προσδιορίζει δύο (ίσως και περισσότερους) σχετικούς κανόνες, επειδή δηλαδή υπάρχουν δύο κανόνες της μορφής $Q \rightarrow \lambda_1 Q_1$ και $Q \rightarrow \lambda_2 Q_2$, όπου $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.
2η περίπτωση, η «***αριστερή αναδρομή***»[4]	Το τμήμα λέξης λ που θα μπορούσε να βοηθήσει *δεν είναι ορατό*. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν υπάρχουν δύο κανόνες της μορφής Q → Q Y, Q → X. Οι κανόνες αυτής παράγουν λέξεις της μορφής XYY...Y, όπου το μέγεθος του X, (και το πλήθος των Y) είναι απροσδιόριστο. Επομένως πρις εφαρμόσουμε το κανόνα Q → X, πρέπει (?) να εφαρμόσουμε τον κανόνα Q → Q Y ένα πλήθος από φορές το οποίο μας είναι άγνωστο, διότι αυτή η πληροφορία είναι, (αν είναι...), σε απροσδιόριστη θέση δεξιότερα της κεφαλής *μετά* το ορατό τμήμα τύπου X.

[4] «***αριστερή αναδρομή***»: στον κανόνα Q → QY, το 1ο (=αριστερό) σύμβολο της παραγόμενης λέξης QY (εδώ το Q), επαναφέρει τον εαυτό (=αναδρομή) του στο προσκήνιο, και τίποτε δεν δείχνει πότε και πώς αυτό πρέπει ή μπορεί να σταματήσει.

Θα αποκαλούμε ***αιτοκρατική*** (ασυμφραστική) γραμματική, μια ασυμφραστική γραμματική στην οποία δεν εμφανίζεται καμμία από τις παραπάνω δύο περιπτώσεις. Το καίριο ερώτημα είναι: επιδέχεται κάθε ασυμφραστική γραμματική μια ισοδύναμη αιτιοκρατική εκδοχή; Ατυχώς όχι – αλλά δεν θα προχωρήσουμε στην απόδειξη αυτού του θεωρήματος. Αντ' αυτού θα δώσουμε δύο τεχνάσματα τα οποία με τα οποία είμαστε σε θέση σε πολλές πρακτικές χρήσιμες περιπτώσεις να μετατρέπουμε μια ασυμφραστική γραμματική σε ισοδύναμη αιτιοκρατική γραμματική.

Δύο τεχνάσματα για την σχεδίαση αιτιοκρατικών ασυμφραστικών γραμματικών.
Για να φέρουμε μια ασυμφραστική γραμματική σε (απλή) αιτοκρατική μορφή, έχουμε στη διάθεσή μας δύο τεχνάσματα:
1ο *τέχνασμα:* εάν η γραμματική περιέχει δύο κανόνες της μορφής (περίπτωση «*διλήμματος*»)

$$Q \to \lambda\, Q_1 \ \text{και}\ Q \to \lambda\, Q_2,\ \lambda \in \Sigma^*,$$

τότε χρησιμοποιούμε αντ' αυτών τους εξής κανόνες:

$$Q \to \lambda Q' \ \text{και}\ \ Q' \to Q_1 \mid Q_2 .$$

2ο *τέχνασμα:* εάν η γραμματική περιέχει κανόνα της μορφής (περίπτωση «*αριστερή αναδρομή*»),

$$Q \to QY \mid X,$$

τότε αυτός είναι χρήσιμος μόνον για να παράγει λέξεις της μορφής XY … YYY. Σε αυτή τη περίπτωση χρησιμοποιούμε αντ' αυτού τους εξής κανόνες:

$$Q \to\ X \mid XQ',\ \ Q' \to\ YQ' \mid \varnothing.$$

Προσέξτε ότι η χρήση του ενός τεχνάσματος ίσως μας οδηγεί στην εμφάνιση ενός άλλου προβλήματος, δηλαδή στη χρήση εκ νέου κάποιο τεχνάσματος, κοκ, με το ενδεχόμενο φαύλων κύκλων και χωρίς εγγύηση καθολικής επιτυχίας. Δίνουμε παρακάτω μια αιτιοκρατική παραλλαγή της γραμματικής των αλγεβρικών εκφράσεων, όπως προκύπτει εφαρμόζοντας τα παραπάνω δύο τεχνάσματα:

Παράδειγμα: μια αιτιοκρατική γραμματική για τις αλγεβρικές εκφράσεις:.
Η γραμματική που είχαμε χρησιμοποιήσει για τις αλγεβρικές εκφράσεις ήταν η εξής:

Σ_Q	*ονομασία*	*(αγγλικά)*	*κανόνες*
E	έκφραση	*expression*	E → S
S	άθροισμα	*sum*	S → T | S **+** T
T	προσθετέος	*term*	T → P
P	γινόμενο	*product*	P → F | P ***** F
F	παράγοντας	*factor*	F → V |**(** E **)**
V	μεταβλητή	*variable*	V → **v₁** | **v₂** | **v₃** | …

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής λίγο πιο απλή μορφή, απαλείφοντας τα σύμβολα E, T, V:

Σ_Q	*ονομασία*	*κανόνες*
	έκφραση, E = S	
S	άθροισμα	S → P | S **+** P
	προσθετέος, T = P	
P	γινόμενο	P → F | P ***** F
F	παράγοντας	F → **(** S **)** | **v₁** | **v₂** | **v₃** | …

Προσέξτε ότι η παραπάνω γραμματική εμφανίζει και τα δύο προβλήματα μη-αιτιοκρατίας:

«*δίλημμα*»: στούς κανόνες F → **v**$_1$, F → **v**$_2$, F → **v**$_3$, …
«*αριστερή αναδρομή*»: στους κανόνες S → P|S**+**P, και P → F|P*****F.

Με το 1ο τέχνασμα, το «δίλημμα» λύεται με τους νέους κανόνες:

F → **v**D, D → **1**|**2**|**3**|…

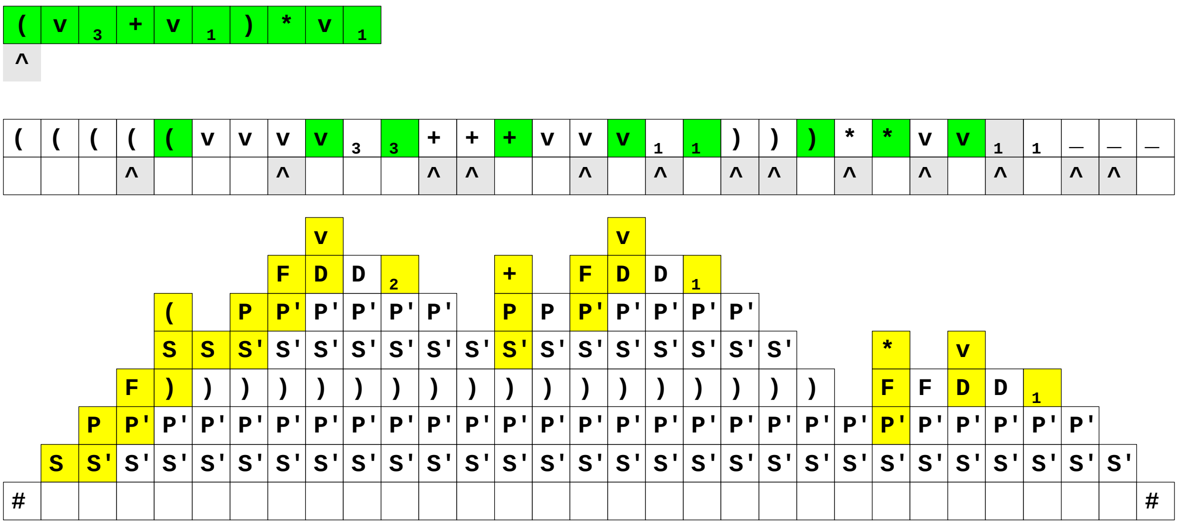
Με το 2ο τέχνασμα, οι «αριστερές αναδρομές» λύονται με τους νέους κανόνες:

S → PS′, S′ → **+**PS′| ∅
P → FP′, P′ → *****FP′| ∅

Η γραμματική λαμβάνει την εξής μορφή,

ΣQ	*ονομασία*	*κανόνες*	*ερμηνεία*
S	άθροισμα	S → PS′	οι εκφράσεις/αθροίσματα S είναι: ένας προσθετέος/γινόμενο P, και ένα υπόλοιπο άθροισμα S′.
S′	υπόλοιπο άθροισμα	S′ → **+**PS′ S′ → ∅	τα υπόλοιπα αθροίσματα S′ είναι: είτε: ο τελεστής +, έναν προσθετέος/γινόμενο P, και ένα υπόλοιπο S′, είτε: το κενό ∅.
P	γινόμενο	P → FP′	τα γινόμενα αποτελούνται από έναν παράγοντα F, και ένα υπολοιπόμενο γινόμενο P′.
P′	υπόλοιπο γινομένο	P′ → *****FP′ P′ → ∅	τα υπόλοιπα γινόμενα P′ είναι: είτε: ο τελεστής *, ένας παράγοντας F και ένα υπόλοιπο γινόμενο P′, είτε: το κενό ∅.
F	παράγοντας	F → **v**D F → **(**E**)**	οι παράγοντες F είναι: είτε: η μεταβλητή v με έναν δείκτη D, είτε: μια νέα έκφραση/άθροισμα S, εντός παρενθέσεως ( ) .
D	δείκτης	D → **1**|**2**|**3**| …	οι δείκτες είναι τα 1, 2, 3, κοκ (όσο επαρκεί).

και είναι έτοιμη προς χρήση όπως φαίνεται στο αμέσως επόμενο σχήμα:



Σχήμα: Η εξέλιξη της στοίβας κατά την αναλυση της έκφρασης **(v**$_3$**+v**$_1$**)*v**$_1$.

ταινία	η σειρά των πράσινων πλαισίων άνω-αριστερά.
στοίβα	οι κάθετες στήλες.
«*κίτρινο*»	τα σύμβολα που αποτίθενται στη στοίβα.
«*πράσινο*»	όποιο σύμβολο της ταινίας διαβάζει η κεφαλή της μηχανής.
«*γκρί ^*»	η κεφαλή προ συμβόλου που καθορίζει τον εφαρμοστέο κανόνα.

16ο Ασυμφραστικές γραμματικές: μορφή *Chomsky* και διαγνωσιμότητα.

Παραλλαγές μορφών ασυμφραστικών γραμματικών.

Στον ορισμό των ασυμφραστικών γραμματικών επιτρέψαμε κανόνες με την γενικότατη μορφή: $Q \rightarrow \Lambda$, όπου το Λ είναι μια σειρά (λέξη) παραγωγικών ή/και τερματικών συμβόλων: $\Lambda \in (\Sigma \cup \Sigma_Q)^*$. Πρόκειται για μια γενικότατη μορφή, εξυπηρετική για ορισμένους σκοπούς. Είδαμε ότι μια τέτοια λέξη Λ γράφεται πάντοτε με την μορφή, $\lambda_0\, Q_1\, \lambda_1\, Q_2\, \lambda_2 \ldots Q_\nu\, \lambda_\nu$, όπου $\lambda_\kappa \in \Sigma^*$, $Q\kappa \in (\Sigma \cup \Sigma_Q)^*$, αφού κάποιες τα όποια εμφανιζόμενα παραγωγικά σύμβολα $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu$ χωρίζονται τερματικές λέξεις λ_κ – κάποιες ίσως κενές. Αυτή η ειδικότερη μορφή εξυπηρετεί στην κατασκευή των συντακτικών δένδρων.

Υπάρχουν ακόμα ειδικότερες μορφές ασυμφραστικών γραμματικών, που έχουν την ίδια εκφραστική ισχύ με εκείνη της γενικότατης μορφής. Σε αυτή την ενότητα θα δούμε μερικές από αυτές. Η τελευταία, ονομασμένη από τον πολύ γνωστό *Noam Chomsky*, θα μας επιτρέψει να λύσουμε τον πρόβλημα της συντακτικής ανάλυσης μιας ασυμφραστικής γλώσσας κατά επαρκώς πρακτικό τρόπο, *ακόμα και εάν η γραμματική της περιέχει μη-αιτιοκρατικούς κανόνες*.

Θεώρημα: (1η απλοποίηση ασυμφραστικής γραμματικής)

Ισχυρισμός: Κάθε ασυμφραστική γραμματική G επιδέχεται μια ισοδύναμη διατύπωση G′, (δηλαδή L(G) = L(G′)), στην οποία οι κανόνες έχουν την εξής μορφή:

- $Q \rightarrow Q_1\, Q_2$
- $Q \rightarrow \lambda$

δηλαδή κάθε παραγωγικό σύμβολο Q,

- είτε αντικαθίσταται από παραγωγικά σύμβολα, και ακριβέστερα από δύο $Q_1\, Q_2$.
- είτε αντικαθίσταται από τερματικά σύμβολα, δηλαδή από μια λέξη λ, (*ίσως κενή*).

Σχέδιο απόδειξης: Η γενικότατη μορφή των κανόνων μιας ασυμφραστικής γραμματικής επί τερματικού αλφαβήτου Σ, και παραγωγικού αλφαβήτου Σ_Q, είναι $Q \rightarrow \Lambda$, όπου το Λ είναι μια σειρά (λέξη) παραγωγικών ή/και τερματικών συμβόλων: $\Lambda \in (\Sigma \cup \Sigma_Q)^*$. Μια τέτοια σειρά γράφεται, χωρίς απώλεια γενικότητας ως μια σειρά που αποτελείται εναλλάξ από τερματικές λέξεις $\lambda_\kappa \in \Sigma^*$, $\kappa = 0, \ldots, \nu$, και παραγωγικά συμβόλα Q_κ, $\kappa = 1, \ldots, \nu$, (όπου κάποιες λέξεις λ_κ, ίσως να είναι κενές):

$$\Lambda = \lambda_0\, Q_1\, \lambda_1\, Q_2\, \lambda_2 \ldots Q_\nu\, \lambda_\nu$$

Μετατρέπουμε την γραμματική G σε μία απλή γραμματική G′ όπως παραπάνω, σε δύο φάσεις:

Στο 1η φάση, για κάθε εμφάνιση μιας λέξης $\lambda = \lambda_\kappa$, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu$, στο δεξιό μέρος Λ ενός οποιουδήποτε κανόνα της G, επαυξάνουμε το αλφάβητο των παραγωγικών συμβόλων κατά ένα αντίστοιχο «βοηθητικό» παραγωγικό σύμβολο Γ_λ, και το σύνολο των κανόνων με τον $\boldsymbol{\Gamma_\lambda \rightarrow \lambda}$. Έτσι οι κανόνες της G με την μορφή $Q \rightarrow \lambda_0\, Q_1\, \lambda_1\, Q_2\, \lambda_2 \ldots Q_\nu\, \lambda_\nu$, αντικαθίστανται από κανόνες με την μορφή $Q \rightarrow \lambda_0\, Q_1\, \Gamma_{\lambda 1}\, Q_2\, \Gamma_{\lambda 2} \ldots Q_\nu\, \Gamma_{\lambda\nu}$, ή με πιο ομοιόμορφο συμβολισμό:

$$Q \rightarrow \lambda\, Q_1\, Q_2 \ldots Q_\mu$$

Στο 2η φάση, για κάθε εμφάνιση στο δεξιό μέρος ενός κανόνα, μιας σειράς $Q_1\, Q_2 \ldots Q_\mu$ με $\mu \geq 0$, παραγωγικά σύμβολα, επαυξάνουμε το αλφάβητο των παραγωγικών συμβόλων κατά μ+1 «βοηθητικά» παραγωγικά σύμβολα B_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots, \mu$, με ειδικό σκοπό να παράγουν την εκάστοτε σειρά $Q_1\, Q_2 \ldots Q_\mu$, χρησιμοποιώντας *μόνον δύο σύμβολα κάθε φορά*: το B_κ θα παράγει το Q_κ και θα αφήνει το $B_{\kappa-1}$ στη θέση του για να παραχθούν και τα υπόλοιπα $Q_1 \ldots Q_{\kappa-1}$. Προς τούτο, αντικαθιστούμε κάθε κανόνα της G με την παραπάνω μορφή, με τους εξής κανόνες:

$Q \to \mathbf{\Gamma_\lambda\ B_\mu}$	Δύο «σημειώσεις»: να γράψουμε την λέξη λ, και την σειρά $Q_1\ Q_2 \ldots Q_\mu$.
$\mathbf{\Gamma_\lambda \to \lambda}$	Γράφουμε την λέξη λ.
$\mathbf{B_\mu} \to B_{\mu-1}\ Q_\mu$	Γράφουμε το Q_μ, και μια «σημείωση» $B_{\mu-1}$ για τα υπόλοιπα $Q_1 \ldots Q_{\mu-1}$.
…	
$B_2 \to B_1\ Q_2$	Γράφουμε το Q_2, και μια σημείωση B_1 για το Q_1.
$B_1 \to B_0\ Q_1$	Γράφουμε το Q_1, και τη «βουβή» σημείωση B_0.
$B_0 \to \varnothing$	Αν μ = 0, δεν έχουμε πια, (ή δεν είχαμε εξ αρχής), τίποτε να κάνουμε.

Προσέξτε ότι η παραπάνω διατύπωση χειρίζεται «με-μιάς» και τις οριακές περιπτώσεις μ = 0 ή 1 ή 2. Μετά το 2ο στάδιο έχουμε μια γραμματική G′, στη μορφή που υποσχεθήκαμε.

■

Θεώρημα: (2η απλοποίηση ασυμφραστικής γραμματικής)
Ισχυρισμός: Κάθε ασυμφραστική γραμματική G επιδέχεται μια ισοδύναμη διατύπωση G′, (δηλαδή L(G) = L(G′)), στην οποία οι κανόνες έχουν την εξής μορφή:

- $Q \to Q_1\ Q_2$
- $Q \to \sigma$ όπου $\sigma \in \Sigma$, ή,
- $Q \to \varnothing$.

δηλαδή κάθε παραγωγικό σύμβολο Q,

- είτε αντικαθίσταται από ακριβώς δύο παραγωγικά σύμβολα, $Q_1\ Q_2$.
- είτε αντικαθίσταται από ακριβώς ένα τερματικό συμβόλο, σ.
- είτε απαλείφεται, δηλαδή αντικαθίσταται από το κενό, ∅.

Σχέδιο απόδειξης: Αρκεί η ίδια η τεχνική της προηγούμενης απόδειξης:
(α) Επαυξάνουμε το αλφάβητο των παραγωγικών συμβόλων με τα σύμβολα Γ_σ για $\sigma \in \Sigma$, και επαυξάνουμε το σύνολο των κανόνων με τους $\mathbf{\Gamma_\sigma \to \sigma}$.
(β) Στο 1ο στάδιο, αντικαθιστούμε κάθε εμφάνιση *κάθε συμβόλου* σ στο δεξιό μέρος ενός κανόνα της G, (ως μέρος κάποιας λέξης λ_k), με το αντίστοιχο «βοηθητικό» παραγωγικό σύμβολο Γ_σ. Έτσι οι κανόνες της μορφής $Q \to \lambda_0\ Q_1\lambda_1 \ldots Q_\nu\lambda_\nu$, αντικαθίστανται από κανόνες με την μορφή:

$$Q \to \Gamma_\lambda\ Q_1\ Q_2 \ldots Q_\mu$$

όπου η λέξη λ αποτελείται από *ένα* σύμβολο σ ή είναι *κενή*.
(γ) Στο 2ο στάδιο αντικαθιστούμε αυτούς κανόνες κατά τον ίδιο τρόπο. Η μόνη διαφορά είναι ότι ο κανόνας $\mathbf{\Gamma_\lambda \to \lambda}$ έχει πια την μορφή $\mathbf{\Gamma_\sigma \to \sigma}$ είτε $\mathbf{\Gamma_\lambda \to \varnothing}$.

■

Μας μένει ένα τελευταίο βήμα: σε τί χρησιμεύουν οι «παραγωγές» της μορφής $Q \to \varnothing$ αφού δεν συνεισφέρουν στην παραγωγή (μέρους) μιας λέξης; Προφανώς τα παραγωγικά σύμβολα κάποτε θα πρέπει να απαλείφονται, αλλιώς η παραγωγή μιας λέξης δεν θα τερμάτιζε ποτέ· αυτές οι απαλειφές είναι όμως δυνατόν *να ενσωματωθούν στους ίδιους τους κανόνες*, και όχι στην εκτέλεσή τους. Για να συνεχίσουμε θα χρειαστούμε δύο προκαταρκτικές παρατηρήσεις:

- *Πρόσθεση κανόνων:* οι κανόνες μιας γραμματικής εκτός από λέξεις είναι δυνατόν να δώσουν και πρόσθετους *παράγωγους κανόνες*: αν π.χ. έχουμε τους κανόνες $X \to A\ Q\ B$, $Q \to \Upsilon$, όπου $X \in \Sigma_Q$ και $A, B, \Upsilon \in (\Sigma \cup \Sigma_Q)^*$, τότε είναι δυνατόν να προσθέσουμε στην γραμματική μας τον «παράγωγο» κανόνα: $X \to A\ \Upsilon\ B$. Προφανώς, αυτή η προσθήκη δεν μειώνει την παραγόμενη γλώσσα, αλλά ούτε την αυξάνει, διότι οποιαδήποτε λέξη σχηματίζεται χρησιμοποιώντας τον παράγωγο κανόνα θα μπορεί να σχηματιστεί και χωρίς αυτόν.
- *Αφαίρεση κανόνων:* πότε, όμως είναι δυνατόν να αφαιρέσουμε έναν κανόνα από την γραμματική μας χωρίς να «βλάψουμε» την παραγόμενη γλώσσα; Προφανώς με την αφαίρεση ενός κανόνα δεν αυξάνουμε την παραγόμενη γλώσσα, αλλά είναι δυνατόν να την μειώσουμε, στερούμενοι κάποιες λέξεις που χρειάζονταν αυτόν τον κανόνα για να παραχθούν. Θα αποκαλούμε ένα κανόνα $R \in \Delta(G)$ της γραμματικής G μας, ως *αναγκαίο για την λέξη* $\lambda \in L(G)$ εάν κάθε παραγωγή της λέξης

λ χρησιμοποιεί (έστω και μία φορά) τον κανόνα R. Αν δείξουμε ότι ένας κανόνας δεν είναι αναγκαίος για καμμία λέξη, τότε προφανώς αυτός είναι απαλείψιμος χωρίς βλάβη της παραγόμενης γλώσσας.

Αυτή οι δύο έννοιες μας οδηγούν στο εξής θεώρημα και την απόδειξή του:

Θεώρημα: πρότυπη *μορφή Chomsky*.

Ισχυρισμός: Κάθε ασυμφραστική γραμματική G, για την οποία επιδέχεται μια ισοδύναμη διατύπωση G′, (δηλαδή L(G) = L(G′)), στην οποία οι κανόνες έχουν την εξής μορφή:

- $Q \to \sigma$ (δίδει ένα τερματικό σύμβολο)
- $Q \to Q_1\, Q_2$ (δίδει δύο παραγωγικά σύμβολα)
- $I_{(G)} \to \varnothing$ (χρήσιμος *μόνον* για την παραγωγή της κενής λέξης $\lambda = \varnothing$)

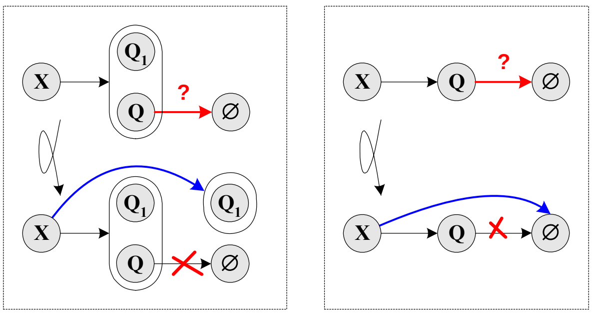
Σχέδιο απόδειξης:

Ακολουθούμε τις δύο προηγουμένες αναλύσεις/θεωρήματα, και τροποποιούμε την γραμματική μας, χωρίς μεταβολή όπως είδαμε της γλώσσας L(G), ώστε κάθε κανόνας να έχει μία από τις εξής μοφές:

- **$Q \to \varnothing$** (δίδει μηδέν παραγωγικά σύμβολα, δηλαδή αποσύρεται)
- $Q \to \sigma$ (δίδει ένα τερματικό σύμβολο)
- $Q \to Q_1\, Q_2$ (δίδει δύο παραγωγικά σύμβολα)

Αυτό που ισχυρίζεται το θεώρημα είναι ότι μπορούμε να απαλείψουμε την 1η μορφή· και πράγματι: σε τί μπορεί να χρησιμεύσει ένας κανόνας $Q \to \varnothing$;[5] Μόνον εάν εμφανίζεται στη παραγωγή, ή *ισοδυνάμως*, στο συντακτικό δένδρο (**ΣΔ**) κάποιας λέξης λ. Ο κανόνας $Q \to \varnothing$ δεν μπορεί όμως να είναι στη <u>ρίζα</u> του ΣΔ εκτός και μόνον εάν $Q = I_{(G)} \to \varnothing$. Τότε όμως είναι και ο τελευταίος… και δίδει την κενή λέξη ∅.

Αλλιώς θα πρέπει ο κανόνας $Q \to \varnothing$ να προκύπτει από κάποιον πατρικό στο ΣΔ κανόνα. Αρχικά αυτός θα έχει την μορφή $X \to Q_1\, Q_2$ (όπου $Q = Q_1$ ή/και Q_2). Αν η G διαθέτει τους κανόνες $X \to Q_1\, Q$, και $Q \to \varnothing$ τότε μπορούμε να προσθέσουμε τον παράγωγο κανόνα $X \to Q_1$ και ο κανόνας $Q \to \varnothing$ να καταστεί περιττός σε αυτό το περιστατικό της χρήσης του, και για αυτή τη λέξη λ.



(*i*) (*ii*)

Σχήμα: Απαλειφή «$Q \to \varnothing$», εμφάνιση «$X \to \Upsilon$», και επανεμφάνιση «$X \to \varnothing$».

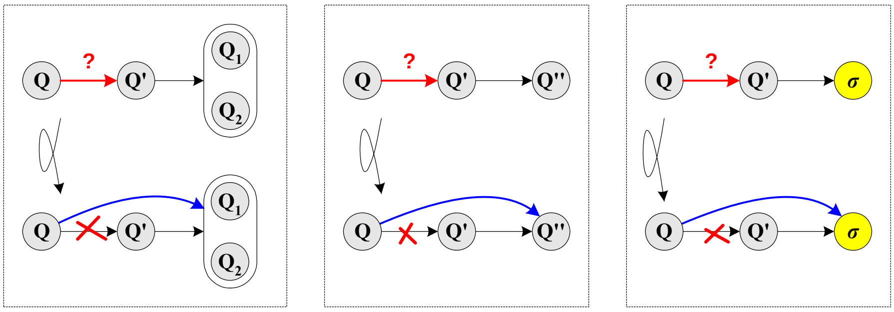
Οι προσθήκες που περιγράψαμε παράγουν κανόνες τύπου «$X \to Q$», και αυτοί σε συνδυασμό με κανόνες τύπου «$Q \to \varnothing$», ίσως να παραγάγουν εκ νέου κανόνες τύπου «$X \to \varnothing$», επομένως η διαδικασία πρέπει να επαναλαμβάνεται έως ότου δεν προκύψει καμμία νέα προσθήκη· και επειδή εδώ όλες οι δυνατές προσθήκες είναι πεπερασμένου πλήθους αυτό θα συμβεί – αργά ή γρήγορα.

Τελικά λοιπόν όλοι οι κανόνες τύπου «$Q \to \varnothing$» θα καταστούν μη αναγκαίοι για κάθε λέξη και για κάθε περιστατικό χρήσης τους, δηλαδή θα καταστούν απαλείψιμοι· (εκτός από τον $I_{(G)} \to \varnothing$, και αυτός πάλι θα είναι χρήσιμος μόνον για την παραγωγή της κενής λέξης). Μετά την απαλειφή τους θα καταλήξουμε λοιπόν σε μια γραμματική όπου κάθε κανόνας έχει μία από τις εξής μορφές:

- **$Q \to Q'$** (δίδει ένα τερματικό σύμβολο)
- $Q \to \sigma$ (δίδει ένα τερματικό σύμβολο)
- $Q \to Q_1\, Q_2$ (δίδει δύο παραγωγικά σύμβολα)
- $I_{(G)} \to \varnothing$ (χρήσιμος *μόνον* για την παραγωγή της κενής λέξης $\lambda = \varnothing$)

[5] ή και οποιοσήποτε άλλος κανόνας – ως προς αυτό το ερώτημα.

Αυτό που ισχυρίζεται το θεώρημα είναι ότι μπορούμε να απαλείψουμε την 1η μορφή· και πράγματι: σε τί μπορεί να χρησιμεύσει ένας κανόνας $Q \to Q'$; Αφού το Q' είναι δεν είναι τερματικό σύμβολο, ο κανόνας $Q \to Q'$ δεν μπορεί, κατά την χρήση του σε ένα ΣΔ να παράγει φύλλο: στον κόμβο του Q' θα πρέπει να εφαρμόζεται κάποιος «επόμενος» κανόνας. Όλες οι τρείς δυνατές οι περιπτώσεις φαίνονται στο επόμενο σχήμα, όπου επίσης εικονίζεται το πώς αυτή η χρήση θα μπορούσε να απαλειφεί.



(*i*) (*ii*) (*iii*)

Σχήμα: Απαλειφή κανόνων τύπου $Q \to Q'$.

Αν ακολουθεί (και άρα υπάρχει στην G...) κανόνας,
(*i*) της μορφής $Q' \to Q_1 Q_2$, προσθέτουμε τον παράγωγο κανόνα $Q \to Q_1 Q_2$.
(*ii*) της μορφής $Q' \to Q''$, προσθέτουμε τον παράγωγο κανόνα $Q \to Q''$.
(*iii*) της μορφής $Q' \to \sigma$, προσθέτουμε τον παράγωγο κανόνα $Q \to \sigma$.

Αν εξετάσουμε για κάθε κανόνα $Q \to Q'$ ποιές περιπτώσεις (*i*), (*ii*), (*iii*) προκαλεί, και τις χειριστούμε αναλόγως, ο κανόνας αυτός θα καταστεί μη αναγκαίος γι' αυτό το περιστατικό χρήσης και γι' αυτή τη λέξη. Οι προσθήκες που περιγράψαμε παράγουν εκ νέου κανόνες του τύπου «$Q \to Q'$», επομένως η διαδικασία πρέπει να επαναλαμβάνεται έως ότου δεν προκύψει καμμία νέα προσθήκη· και εδώ όμως όλες οι δυνατές προσθήκες είναι πεπερασμένου πλήθους και άρα η διαδικασία αυτή κάποτε θα τερματιστεί. Τότε, όλοι οι κανόνες τύπου «$Q \to Q'$» θα έχουν καταστεί μη-αναγκαίοι, για όλα τα περιστατικά χρήσηςς τους, και σε όλες τις λέξεις. Τότε, θα είναι δυνατόν να τους απαλείψουμε και να μείνουμε μόνο με κανόνες της ζητουμένης μορφής.

(Αν απορείτε τί θα συνέβαινε εάν δεν ήταν δυνατόν να εντοπίσουμε καμμία από τις παραπάνω τρεις περιπτώσεις για κάποιο κανόνα $Q \to Q'$, η απάντηση είναι ότι τότε ο κανόνας θα ήταν εξ αρχής περιττός: διότι αν υπήρχε παραγωγή που τον χρησιμοποιούσε, τότε, όπως ήδη παρατηρήσαμε, θα υπάρχει ένας «θυγατρικός» εφαρμοζόμενος κανόνας της G, και αυτός θα ανήκε κατ' ανάγκην σε μια από τις τρείς περιπτώσεις...)

■

Πόρισμα:.
Ισχυρισμός: Σε κάθε ασυμφραστική γλώσσα L όλες οι μη τετριμμένες λέξεις ($\lambda \neq \varnothing$), παράγονται από κανόνες της μορφής $Q \to \sigma$ ή/και $Q \to Q_1 Q_2$.
Σχέδιο απόδειξης: (ο ισχυρισμός δεν είναι παρά το θεώρημα *Chomsky* με άλλα λόγια.)

■

Παράδειγμα σχηματισμού μορφής Chomsky.
Ανακαλούμε εδώ την γραμματική που παράγει την γλώσσα $L_{\alpha\beta}$ = «τόσα-α-όσα-β», (με μια μνημονική μετονομασία των συμβόλων A, B):

Σ_Q	*ρόλος*	*κανόνες*
I	αρχικό	$I \to \alpha B_1 \mid \beta A_1 \mid \varnothing$
A_1	(πλήθος α) = (πλήθος β)+1	$A_1 \to \alpha I \mid \beta A_1 A_1$
B_1	(πλήθος β) = (πλήθος α)+1	$B_1 \to \alpha B_1 B_1 \mid \beta I$

και ακολουθώντας τις παραπάνω έννοιες και τεχνικές την μετατρέπουμε σε μορφή *Chomsky*:

1ο: *τερματικά μόνον σε κανόνες τύπου «$Q \to \sigma$»*: π.χ. παράγουμε το α από ένα Γ_α.

Σ_Q	κανόνες Δ
I	$I \to \Gamma_\alpha B_1 \mid \Gamma_\beta A_1 \mid \varnothing$
A_1	$A_1 \to \Gamma_\alpha I \mid \Gamma_\beta A_1 A_1$
B_1	$B_1 \to \Gamma_\alpha B_1 B_1 \mid \Gamma_\beta I$
Γ_α	$\Gamma_\alpha \to \alpha$
Γ_β	$\Gamma_\beta \to \beta$

2ο: *ακριβώς δύο παραγωγικά σύμβολα ανά κανόνα*: π.χ. παράγουμε το A_1A_1 από ένα A_2.

Σ_Q	κανόνες Δ
I	$I \to \alpha B_1 \mid \beta A_1 \mid \varnothing$
A_1	$A_1 \to \alpha I \mid \beta A_2$
A_2	$A_2 \to A_1 A_1$
B_1	$B_1 \to \alpha B_2 \mid \beta I$
B_2	$B_2 \to B_1 B_1$
Γ_α	$\Gamma_\alpha \to \alpha$
Γ_β	$\Gamma_\beta \to \beta$

3ο: *καμμία χρήση «$Q \to \varnothing$», (πλην αφετηριακά $I \to \varnothing$)*: π.χ. το $A_1 \to \Gamma_\alpha I$ με $\underline{I \to \varnothing}$ δίνει $A_1 \to \Gamma_\alpha$.

Σ_Q	κανόνες Δ
I	$I \to \varnothing$ $I \to \Gamma_\alpha B_1 \mid \Gamma_\beta A_1$
A_1	$A_1 \to \Gamma_\alpha I \mid \Gamma_\beta A_2 \mid \Gamma_\alpha$
A_2	$A_2 \to A_1 A_1$
B_1	$B_1 \to \Gamma_\alpha B_2 \mid \Gamma_\beta I \mid \Gamma_\beta$
B_2	$B_2 \to B_1 B_1$
Γ_α	$\Gamma_\alpha \to \alpha$
Γ_β	$\Gamma_\beta \to \beta$

4ο: *όχι κανόνες «$Q \to Q'$»*: π.χ. το $A_1 \to \Gamma_\alpha$ με $\underline{\Gamma_\alpha \to \alpha}$ δίνει το παράγωγο $A_1 \to \alpha$.

Σ_Q	κανόνες Δ
I	$I \to \varnothing$ $I \to \Gamma_\alpha B_1 \mid \Gamma_\beta A_1$
A_1	$A_1 \to \Gamma_\alpha I \mid \Gamma_\beta A_2 \mid \alpha$
A_2	$A_2 \to A_1 A_1$
B_1	$B_1 \to \Gamma_\alpha B_2 \mid \Gamma_\beta I \mid \beta$
B_2	$B_2 \to B_1 B_1$
Γ_α	$\Gamma_\alpha \to \alpha$
Γ_β	$\Gamma_\beta \to \beta$

■

Η μορφή Chosmky μας είναι πολύτιμη για εκτέλεση διαγνωστικών ή αναλυτικών εργασιών επί ασυμφραστικών γλωσσών και γραμματικών, όπως παρουσιάζεται στο επόμενο τριπλό θεώρημα:

Θεώρημα: διάγνωση και ανάλυση ασυμφραστικών γλωσσών και γραμματικών.

Ισχυρισμός: Έστω $L \subseteq \Sigma^*$ μια γλώσσα, και G μια ασυμφραστική γραμματική G. Τα εξής είναι δυνατόν να διαπιστωθούν κατά «αλγοριθμικό» τρόπο:

1) Είναι η γλώσσα L(G) κενή;
2) Περιλαμβάνει η L(G) την κενή λέξη $\varnothing$;
3) Δεδομένης μιας λέξης $\lambda \in \Sigma^*$, ισχύει $\lambda \in L(G)$ ή όχι;

Σχέδιο απόδειξης:

1) «$L(G) = \varnothing$?»: Πρέπει εδώ να προσδιορίσουμε ποιά σύμβολα της G είναι πράγματι παραγωγικά. Εάν λάβουμε την μορφή *Chomsky* της G, τότε θα γνωρίζουμε από πού να αρχίσουμε: από το σύνολο $P \subseteq \Sigma_Q$ όλων των παραγωγικών συμβόλων για τα οποία η G διαθέτει κανόνα $Q \to \sigma$, $\sigma \in \Sigma$. Σε μια σειρά επαναλαμβανομένων φάσεων εξετάζουμε όλα τα ζεύγη συμβόλων X, $\Upsilon \in P$, και ελέγχουμε εάν η G διαθέτει κανόνα $Q \to X\,\Upsilon$. Εάν ναί, και εάν το Q δεν το έχουμε ήδη συμπεριλάβει στο P, το συμπεριλαμβάνουμε και επαναλαμβάνουμε τον έλεγχο. Στο (αναγκαστικό) πέρας αυτής της διαδικασίας αρκεί να ελέγξουμε εάν το αρχικό σύμβολο $I_{(G)}$ περιέχεται στα (όντως) παραγωγικά σύμβολα P, ή όχι.
2) «$\varnothing \in L(G)$?»: Αρκεί να φέρουμε την γραμματική σε μορφή *Chomsky*, και να ελέγξουμε εάν σε αυτή τη μορφή περιέχει τον κανόνα $I(G) \to \varnothing$. Εάν ναί, τότε η L(G) περιέχει την κενή λέξη· εάν όχι η L(G) δεν περιέχει την κενή λέξη διότι από τα δύο *άλλα* και μόνον είδη κανόνων, $Q \to \sigma$ και $Q \to Q_1\,Q_2$, δεν παράγονται κενές λέξεις.
3) «$\lambda \in L(G)$?»: Η G δύναται να γραφεί σε μορφή *Chomsky*, και θα υποθέσουμε (χ.α.γ.) ότι είναι σε αυτή την μορφή. Δεδομένης μια λέξης λ η τεχνική που θα εφαρμόσουμε είναι να εξετάσουμε το πώς μπορούμε να φτιάξουμε κάθε τμήμα αυτής της λέξης με βάση την γραμματική G. Αν η διδόμενη λέξη είναι η κενή $\varnothing$ αρκεί να ελέγξουμε εάν έχουμε στη διάθεσή μας τον κανόνα $I \to \varnothing$. Θα ασχοληθούμε λοιπόν με λέξεις λ όπου $|\lambda| \geq 1$, και θα συμβολίσουμε με $\lambda[i..j]$ το τμήμα της λέξης από το i-οστό σύμβολό της έως και το j-οστό. Προφανώς το τμήμα $\lambda[1..|\lambda|]$ είναι ολόκληρη η λέξη. Το τμήμα $\lambda[i..i]$ είναι το υπ. αρ. i-σύμβολό της, και επομένως αυτό μπορεί να προέλθει *μόνον* από κανόνες της μορφής,

$$X \to \sigma, \quad \sigma \in \Sigma_K$$

   Οποιοδήποτε άλλο τμήμα (μήκους 2 ή περισσότερο) $\lambda[i, j]$, μπορεί να προέλθει μόνον από κανόνες της μορφής,

$$X \to X_1\,X_2$$

   και προφανώς κάποιο 1ο τμήμα αυτού $\lambda_1 = \lambda[i..k]$ θα προέρχεται από κάποιο παραγωγικό σύμβολο X_1, και το υπόλοιπο 2ο μέρος $\lambda_2 = \lambda[k+1..j]$ από κάποιο παραγωγικό σύμβολο X_2, τέτοια όμως για τα οποία υπάρχει κανόνας $(X \to X_1\,X_2) \in G$. *Όχι και τόσο προφανώς*: το πρώτο τήμα λ_1 θα μπορούσε να είναι κενό, και το δεύτερο λ_2 να έχει μήκος επίσης όσο και το αρχικό τμήμα $\lambda[i..j]$, χωρίς έτσι να έχουμε πρόοδο εργασιών. Η μορφή *Chomsky* όμως μας εξασφαλίζει ότι δεν θα έχουμε εφαρμογές κανόνων τύπου «$X \to \varnothing$», και άρα αυτή η περίπτωση επιτρέπεται να αποκλειστεί. Γι' αυτό λοιπόν ορίζουμε τις εξής ομάδες παραγωγικών συμβόλων:

$$\Pi_{i..j} = \{\, X \in \Sigma_K \text{ για τα οποία υπάρχει παραγωγή } X \to \lambda[i..j] \,\}$$

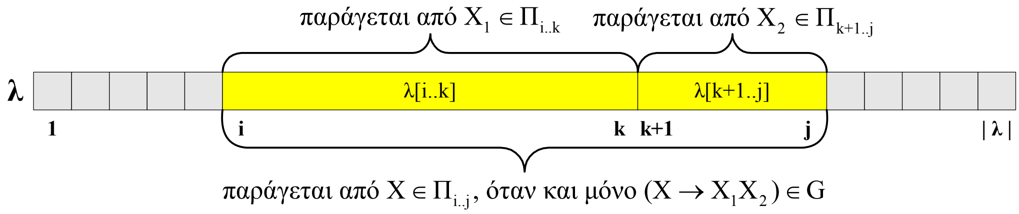
   Το σύνολο δηλαδή $\Pi_{i..j}$ περιέχει όλα όσα παραγωγικά σύμβολα είναι δυνατόν να παραγάγουν (μέσω κανόνων της G) το τμήμα $[i..j]$ της υπό ανάλυση λέξη λ. Μας ενδιαφέρει φυσικά τί περιέχει το σύνολο $\Pi_{1..|\lambda|}$, δηλαδή από ποιά παραγωγικά σύμβολα μπορεί να παραχθεί ολόκληρη η λέξη λ, και συγκεκριμμένα μας ενδιαφέρει εάν το αρχικό σύμβολο I της γραμματικής G περιέχεται σε αυτό ή όχι. Μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα σύνολα $\Pi_{i..j}$, $1 \leq i \leq j \leq |\lambda|$, επαγωγικά επί της διαφοράς $|j-i|$. Για $|j-i| = 0$ έχουμε:

$$\Pi_{i..i} = \{\, X \in \Sigma_K \text{ για τα οποία υπάρχει κανόνας } K \to \lambda[i..i] \,\}$$

   Και επαγωγικά, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε τα $\Pi_{i..j}$ για $|j-i| = \delta+1$, από τα $\Pi_{i..j}$ όπου $|j-i| \leq \delta$:

$$\Pi_{i..j} = \bigcup_{i \leq k < j} \{\, X\text{: υπάρχει κανόνας } (X \to X_1\,X_2) \in G, \text{ όπου } X_1 \in \Pi_{i..k} \text{ και } X_2 \in \Pi_{k+1..j} \,\}$$

   Η προηγούμενη σχέση διευκρινίζεται από το εξής σχήμα:



Μια λέξη λ θα ανήκει στη γραμματική μας εάν και μόνον εάν μπορεί να προέλθει από το αρχικό σύμβολο. Επομένως:

$$(\lambda \in L(G)) \;\Leftrightarrow\; (I \in \Pi_{1..|\lambda|})$$

Για να αποφασίσουμε το παραπάνω αρκεί να υπολογίσουμε όλα τα σύνολα $\Pi_{i..j}$, $1 \le i \le j \le |\lambda|$.

Εδώ, αξίζει να προσέξουμε το εξής: ο υπολογισμός αυτός εκτελείται για $|j{-}i| = 1, 2, 3, \ldots$, όπως περιγράψαμε προηγουμένως. Το πλήθος των βημάτων είναι συνολικά περίπου ευθέως ανάλογο του $|\lambda|^3$: έχουμε $\approx|\lambda|$ στάδια, σε κάθε στάδιο εξετάζουμε $\approx|\lambda|$ το πολύ τμήματα λ[i..j], για κάθε τέτοιο τμήμα εξετάζουμε $\approx|\lambda|$ το πολύ σημεία k χωρισμού του λ σε δύο τμήματα λ[i..k] και λ[k+1..j], και για κάθε τέτοιο χωρισμό εξετάζουμε το πολύ όλους τους κανόνες $(X \to X_1 X_2)$ της G· το γινόμενο μας δίδει $c|\lambda|^3$ το πολύ βήματα, όπου c το πλήθος κανόνων της G.

■

Παράδειγμα συντακτικής ανάλυσης.

Δίνουμε εδώ ως παράδειγμα την συντακτική ανάλυση της λέξης «αββα» ως προς την γραμματική $G_{\alpha\beta}$, για την γλώσσα $L_{\alpha\beta}$, (κατ' οικονομία, αφού έχουμε ήδη υπολογίζει τη μορφή *Chomsky* γι' αυτήν). Τα περιεχόμενα του πίνακα είναι τα εξής:

Στήλη *Περιεχόμενα*
- 1η: τα διαστήματα i..j.
- 2η: τα τμήματα της υπό ανάλυση λέξης λ[i..j].
- 3η: οι τρόποι διαίρεσης του τμήματος λ[i..j] σε 2 μη τετριμμένα υποτμήματα.
- 4η: όσα ζεύγη συμβόλων X_1X_2 είναι κατάλληλα να παράγουν τα εκάστοτε δύο υποτμήματα.
- 5η: ποιά παραγωγικά σύμβολα X παράγουν (κατά $G_{\alpha\beta}$) κατάλληλο ζεύγος X_1X_2.
- 6η: το σύνολο των επί μέρους «X», εφ' όλων των τρόπων διαίρεσης λ[i..j] στα δύο.

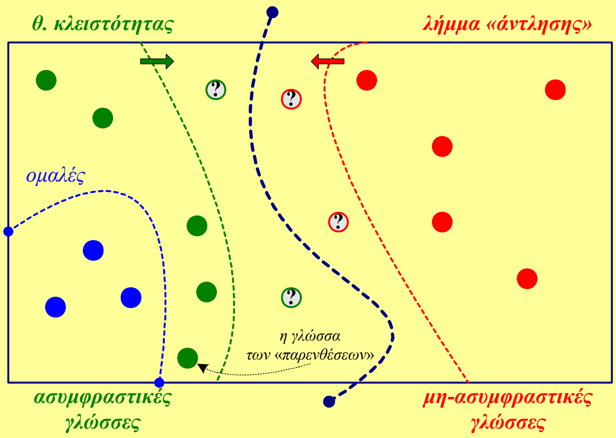
1	2	3	4	5	6
i..j	**λ[i..j]**	**λ[i..k] | λ[k+1..j]**	**$X_1X_2 \in \Pi_{i..k} \times \Pi_{k+1..j}$**	**$X \to X_1X_2 \in \Delta(G_{\alpha\beta})$**	**$\Pi_{i..j}$**
1..1	α				$\{\Gamma_\alpha, A_1\}$
2..2	β				$\{\Gamma_\beta, B_1\}$
3..3	β				$\{\Gamma_\beta, B_1\}$
4..4	α				$\{\Gamma_\alpha, A_1\}$
1..2	αβ	α | β	$\{\Gamma_\alpha, A_1\} \times \{\Gamma_\beta, B_1\}$	$\{I\}$	$\{I\}$
2..3	ββ	β | β	$\{\Gamma_\beta, B_1\} \times \{\Gamma_\beta, B_1\}$	$\{B_2\}$	$\{B_2\}$
3..4	βα	β | α	$\{\Gamma_\beta, B_1\} \times \{\Gamma_\alpha, A_1\}$	$\{I\}$	$\{I\}$
1..3	αββ	α | ββ	$\{\Gamma_\alpha, A_1\} \times \{B_2\}$	$\{B_1\}$	$\{B_1\}$
		αβ | β	$\{I\} \times \{\Gamma_\beta, B_1\}$	$\{\ \}$	
2..4	ββα	β | βα	$\{\Gamma_\beta, B_1\} \times \{I\}$	$\{B_1\}$	$\{B_1\}$
		ββ | α	$\{B_2\} \times \{\Gamma_\alpha, A_1\}$	$\{\ \}$	
1..4	αββα	α | ββα	$\{\Gamma_\alpha, A_1\} \times \{B_1\}$	$\{I\}$	$\{I\}$
		αβ | βα	$\{I\} \times \{I\}$	$\{\ \}$	
		αββ | α	$\{B_1\} \times \{\Gamma_\alpha, A_1\}$	$\{\ \}$	

Πίνακας: Γενική μέθοδος συντακτικής ανάλυσης μέσω μορφής *Chomsky*.

17o Ασυμφραστικές γραμματικές: κλειστότητα, «άντληση» και περιορισμοί.

Η ισχύς των ασυμφραστικών γραμματικών: η θετική & η αρνητική προσέγγιση.

Στη περιοχή των ασυμφραστικών γραμματικών έχουμε να απαντήσουμε τα ερωτήματα «οριοθέτησης» που ετέθησαν και στη περιοχή των ομαλών γραμματικών: στο χώρο όλων των δυνατών γλωσσών, πως οριοθετείται το σύνολο των ασυμφραστικών από αυτές; Και εδώ έχουμε δύο κατευθύνσεις: μία με θετικά αποτελέσματα, και μία με αρνητικά. Σε αυτές τις σημειώσεις τα θετικά αποτελέσματα έρχονται από αρχικά παραδείγματα και από θεωρήματα κλειστότητας ανάλογα με εκείνα των ομαλών γραμματικών. Τα αρνητικά παραδείγματα έρχονται επίσης από ένα «λήμμα άντλησης».



Στη τρέχουσα ενότητα θα παρουσιάσουμε αυτές τις δύο κατευθύνεις.

Σημείωση: στη περίπτωση των ομαλών γλωσσών είχαμε επίσης την δυνατότητα μιας *ακριβούς* οριοθέτησης των ομαλών γλωσσών μέσω του θεωρήματος *Myhill-Nerode*. Μια παρόμοια δυνατότητα έχουμε και εδώ, (το θεώρημα *Chomsky-Schützenberger*), αλλά λόγω πολυπλοκότητας θα την παραλείψουμε. Ο αναγνώστης μπορεί να βρεί εύκολα σχετικές πληροφορίες στο διαδίκτυο.

Θετική κατεύθυνση

Τα βασικά συμπεράσματά μας προς αυτή την κατεύθυνση περιέχονται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα: κλειστότητα ως προς συνολοθεωρητικές και γραμματικές πράξεις

Ισχυρισμός: Έστω ότι οι γλώσσες L, L_1 και L_2 είναι ασυμφραστικές. Τότε και οι εξής γλώσσες είναι επίσης ασυμφραστικές:

1) $L_1 \cup L_2$ (κλειστότητα ως προς την συνολοθεωρητική πράξη της ένωσης.)
2) $L_1 \,||\, L_2$
3) L^*
4) $L^{(R)}$ (κλειστότητα ως προς γραμματικές πράξεις: συναρμογή, επανάληψη, κατοπτρισμός.)
5) Έστω ότι η γλώσσα L_1 είναι ομαλή και η γλώσσα L_2 είναι ασυμφραστική. Τότε η τομή $L = L_1 \cap L_2$ είναι ασυμφραστική γλώσσα.

Σχέδιο απόδειξης: Έστω G, G_1, G_2 οι ασυμφραστικές γραμματικές που παράγουν τις γλώσσες L, L_1 και L_2. Χωρίς απώλεια γενικότητας θα υποθέσουμε ότι αυτές δεν έχουν κοινά παραγωγικά σύμβολα, οπότε οι κανόνες μίας εξ αυτών δεν «συγχέονται» με τους κανόνες της άλλης.

1) Έστω I_1 και I_2 τα αρχικά σύμβολα των γραμματικών G_1 και G_2. Ενώνουμε τους κανόνες των δύο γραμματικών σε μια νέα G′ με αρχικό σύμβολο το νέο σύμβολο I, και προσθέτουμε τον κανόνα:

$$I \to I_1 \mid I_2.$$

Η νέα γραμματική G′ παράγει ακριβώς την γλώσσα $L_1 \cup L_2$.

2) Έστω I_1 και I_2 τα αρχικά σύμβολα των γραμματικών G_1 και G_2. Ενώνουμε τους κανόνες των δύο γραμματικών σε μια νέα G′ με αρχικό σύμβολο το νέο σύμβολο I, και προσθέτουμε τον κανόνα:

$$I \to I_1\, I_2.$$

Η νέα γραμματική G′ παράγει ακριβώς την γλώσσα $L_1 \| L_2$.

3) Αντιγράφουμε όλους τους κανόνες της G σε μια νέα γραμματική G′, με νέο αρχικό σύμβολο I′ και προσθέτουμε τους κανόνες:

$$I' \to \varnothing \mid I\, I'$$

Η νέα γραμματική G′ παράγει ακριβώς την γλώσσα L*.

4) Για κάθε κανόνα της G, $Q \to X$, $Q \in \Sigma^*$, $X \in (\Sigma \cup \Sigma_Q)^*$ συμπεριλαμβάνουμε στην γραμματική G′ τον κατοπτρικό κανόνα $Q \to X^{(R)}$. Η νέα γραμματική G′ παράγει ακριβώς την γλώσσα $L^{(R)}$.

■

Αρνητική κατεύθυνση:
Τα βασικά συμπεράσματά μας προς αυτή την κατεύθυνση περιέχονται στο «λήμμα της άντλησης». Πριν από αυτό όμως έχουμε μερικές προετοιμασίες :

Γραμματικές & (συντακτικά) δένδρα: μερικά μετρικά χαρακτηριστικά.

Για να προχωρήσουμε σε αρνητικά συμπεράσματα περί των ασυμφραστικών γραμματικών, θα χρειαστούμε μερικά μετρικά χαρακτηριστικά τόσο αυτών των γραμματικών όσο και των (συντακτικών) δένδρων. Έστω μια ασυμφραστική γραμματική $G = \langle \Sigma, \Sigma_Q, I, \Delta \rangle$. Για κάθε κανόνα $K \to X$ ορίζουμε το πλάτος του, ως το πλήθος $|X|$ των συμβόλων της λέξης $X \in (\Sigma \cup \Sigma_Q)^*$. Θα ονομάζουμε *πλάτος* της γραμματικής G το μέγιστο πλάτος των κανόνων που περιέχει:

$$\textit{πλάτος}(G) = \max\{\ |X|: \text{για } K \to X \in \Delta(G)\ \}$$

Από τα δένδρα θα χρειαστούμε τα εξής μετρικά χαρακτηριστικά.

- Κάθε κόμβος u ενός (έρριζου) δένδρου T έχει ένα σύνολο θυγατρικών κόμβων (ίσως κενό). Το πλήθος αυτών το θυγατρικών θα το συμβολίζουμε με *βαθμός*(*u*). Τον μέγιστο βαθμό που συναντάμε σε ένα δένδρο T θα τον αποκαλούμε *βαθμό* του δένδρου:
$$\textit{βαθμός}(T) = \max\{\ \text{βαθμός}(u): \text{για κόμβο } u \in T\ \}$$

- Κάθε κόμβος u ενός έρριζου δένδρου T συνδέεται με την ρίζα του δένδρου με ένα ένα σύνολο ακμών. Το πλήθος αυτών των ακμών θα το συμβολίζουμε με *βάθος*(*u*). (Προσέχουμε εδώ ότι το βάθος της ρίζας είναι 0). Το μέγιστο βάθος κόμβου που συναντάμε σε ένα δένδρο T θα το αποκαλούμε *ύψος*(T) του δένδρου:

$$\textit{ύψος}(T) = \max\{\ \text{βάθος}(u): \text{για κόμβο } u \in T\ \}$$

- Τέλος, κάθε έρριζο δένδρο T διαθέτει ένα *φύλλωμα* *φ*(T), που είναι το σύνολο όσων κόμβων έχουν βαθμό 0, όσων δηλαδή δεν φέρουν κανένα θυγατρικό κόμβο.

$$\textit{Φύλλωμα},\ \phi(T) = \{\ u: u \text{ είναι φύλλο του } T \text{ (δηλ. βαθμός}(u) = 0)\ \}$$

Αυτό που συνδέει τα παραπάνω μετρικά χαρακτηριστικά ενός δένδρου είναι ότι δεν είναι δυνατόν ένα δένδρο να έχει πολυπληθές φύλλωμα εάν δεν έχει είτε μεγάλο βαθμό, είτε μεγάλο ύψος, (είτε και τα δύο). Συγκεκριμμένα η ρίζα δεν μπορεί να έχει παρά *βαθμό*(T) θυγατρικούς, και αυτοί δεν μπορούν να έχουν παρά *βαθμό*(T)^2 θυγατρικούς συνολικά, και κατ' αναλογία οι κόμβοι σε βάθος d δεν μπορεί να είναι περισσότεροι από *βαθμός*(T)^d. Επομένως, (και επειδή το *ύψος*(-) ενός δένδρου T είναι το μέγιστο βάθος d οποιουδήποτε κόμβου του), το μέγεθος του φυλλώματος του δένδρου T φράσσεται ως εξής:[6]

$$|\phi(\mathrm{T})| \leq \textit{βαθμός}(\mathrm{T})^{\textit{ύψος}(\mathrm{T})}$$

Λήμμα («της άντλησης»):

Ισχυρισμός: Έστω L(G) η γλώσσα μιας ασυμφραστικής γραμματικής G. Υπάρχει ένας αριθμός-όριο n(G), τέτοιος ώστε για κάθε λέξη λ της L(G) με μήκος τουλάχιστον n(G), να ισχύουν τα εξής:

- Η λέξη λ γραφεται ως x α y β z, έτσι ώστε κάθε λέξη της μορφής $x\alpha^{(\kappa)}y\beta^{(\kappa)}z$, $\kappa \geq 0$, να ανήκει στην γλώσσα: $\{ x\alpha^{(\kappa)}y\beta^{(\kappa)}z : \kappa \geq 0 \} \subseteq L(G)$.
- Ένα τουλάχιστον των τμημάτων α ή β είναι μη κενό, δηλαδή: $|\alpha\beta| \geq 1$.

Σχέδιο απόδειξης: Η ιδέα είναι να δείξουμε ότι μια μακρά λέξη της γλώσσας L(G) χρειάζεται ένα αρκετά υψηλό συντακτικό δένδρο για να παραχθεί, και ότι κατά μήκος ενός μακρού κλάδου κάποιο παραγωγικό σύμβολο αναγκαστικά θα επανεμφανιστεί, επιτρέποντας έτσι την επανειλημμένη παραγωγή (= «άντληση»), κάποιων τμημάτων της λ.

Αυτό που συνδέει μια γραμματική G με τα συντακτικά δένδρα T μια λέξη λ είναι τα εξής:

- Κάθε εσωτερικός κόμβος u του T, (όχι φύλλο δηλαδή), παράγεται από ένα κανόνα $K \rightarrow X$ της G. Συγκεκριμμένα ένας τέτοιος κόμβος επιγράφεται με το παραγωγικό σύμβολο K του κανόνα, και οι θυγατρικοί του επιγράφονται με τερματικές λέξεις ή παραγωγικά σύμβολα από την λέξη X. Επομένως ο βαθμός του u δεν μπορεί να υπερβαίνει το μήκος της X,

$$\textit{βαθμός}(\mathrm{u}) \leq |\mathrm{X}|$$

και άρα ο βαθμός του δένδρου δεν υπερβαίνει το (πεπερασμένο…) πλάτος της γραμματικής:

$$\textit{βαθμός}(\mathrm{T}) = \max \{ \textit{βαθμός}(\mathrm{u})\} \leq \max \{|\mathrm{X}|\} = \textit{πλάτος}(\mathrm{G})$$

- Κάθε φύλλο u του T επιγράφεται με μια τερματική λέξη λ_u, που περιέχεται σε κανόνα της γραμματικής, και επομένως το μήκος της φράσσεται: $|\lambda_u| \leq$ πλάτος(G). Η παραγόμενη λέξη λ προκύπτει από την συναρμογή των υπο-λέξεων λ_u, για κάθε u στο φύλλωμα φ(T), επομένως το συνολικό μήκος της παραγόμενης λέξης λ T δεν μπορεί να είναι «πολύ μεγάλο». Συγκεκριμμένα ισχύει ότι:

$$|\lambda_u| \leq \textit{πλάτος}(\mathrm{G}), \quad |\lambda| = \sum_{u \in \varphi(T)} |\lambda_u| \leq \textit{πλάτος}(\mathrm{G}) \cdot |\phi(\mathrm{T})|$$

Αρκεί να συνθέσουμε τις παραπάνω σχέσεις για να λάβουμε το εξής:

$$|\lambda| \leq \textit{πλάτος}(\mathrm{G}) \cdot |\phi(\mathrm{T})| \leq \textit{πλάτος}(\mathrm{G}) \cdot \textit{βαθμός}(\mathrm{T})^{\textit{ύψος}(\mathrm{T})} \leq \textit{πλάτος}(\mathrm{G})^{(\textit{ύψος}(\mathrm{T})+1)}$$

Έστω, τώρα, ότι μια λέξη λ έχει μήκος τουλάχιστον $n(G) \equiv \textit{πλάτος}(G)^{(|\Sigma_Q|+2)}$. Αυτό θα σημαίνει ότι:

$$\textit{πλάτος}(\mathrm{G})^{(|\Sigma_Q|+2)} = n(\mathrm{G}) \leq |\lambda| \leq \textit{πλάτος}(\mathrm{G})^{(\textit{ύψος}(\mathrm{T})+1)}$$

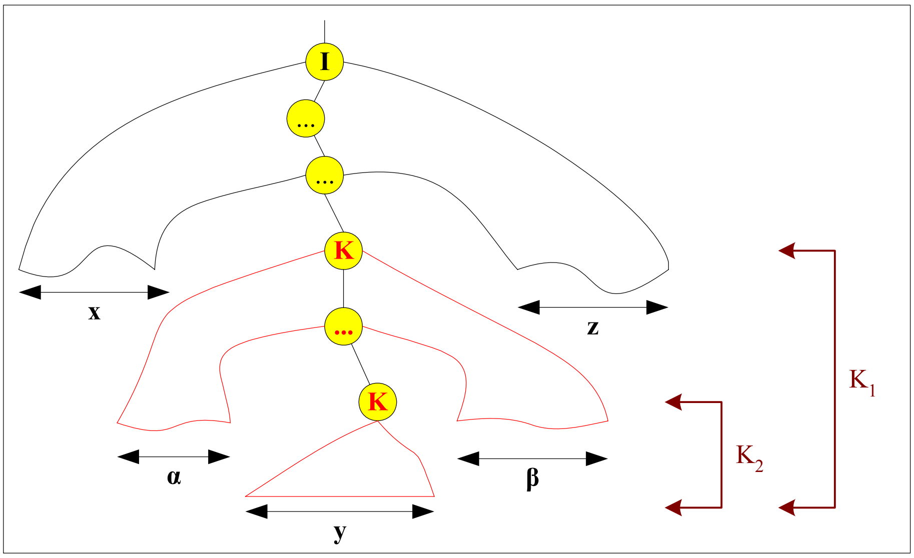
ή

$$\textit{ύψος}(\mathrm{T}) \geq |\Sigma_Q|+1 > |\Sigma_Q|$$

Αφού το συντακτικό δένδρο T έχει ένα κάποιο φύλλο u σε βάθος *ύψος*(T), το T περιέχει ένα κλάδο γ (από την ρίζα έως το u) που αποτελείται από *ύψος*(T) ακμές, δηλαδή περιέχει (*ύψος*(T)+1) κόμβους· εξ αυτών όλοι είναι εσωτερικοί κόμβοι πλήν ενός (που είναι φύλλο), και επομένως ο κλάδος γ περιέχει

[6] Αρκεί εδώ μια σύντομη επαγωγική απόδειξη.

ύψος(T) παραγωγικά σύμβολα. Από την παραπάνω σχέση, *ύψος*(T) > |Σ_Q|, προκύπτει ότι στον κλάδο γ ευρίσκονται περισσότερα παραγωγικά σύμβολα από όσα έχει το αλφάβητο Σ_Q, και επομένως κάποιο από αυτά, έστω K, επαναλαμβάνεται,[7] (βλ. επόμενο σχήμα).



Σχήμα: Τα είδη «φυλλωμάτων» που εμφανίζονται σε συντακτικό δένδρο.

Στο συντακτικό δένδρο μπορούμε να διακρίνουμε τα εξής τμήματα του φυλλώματος:

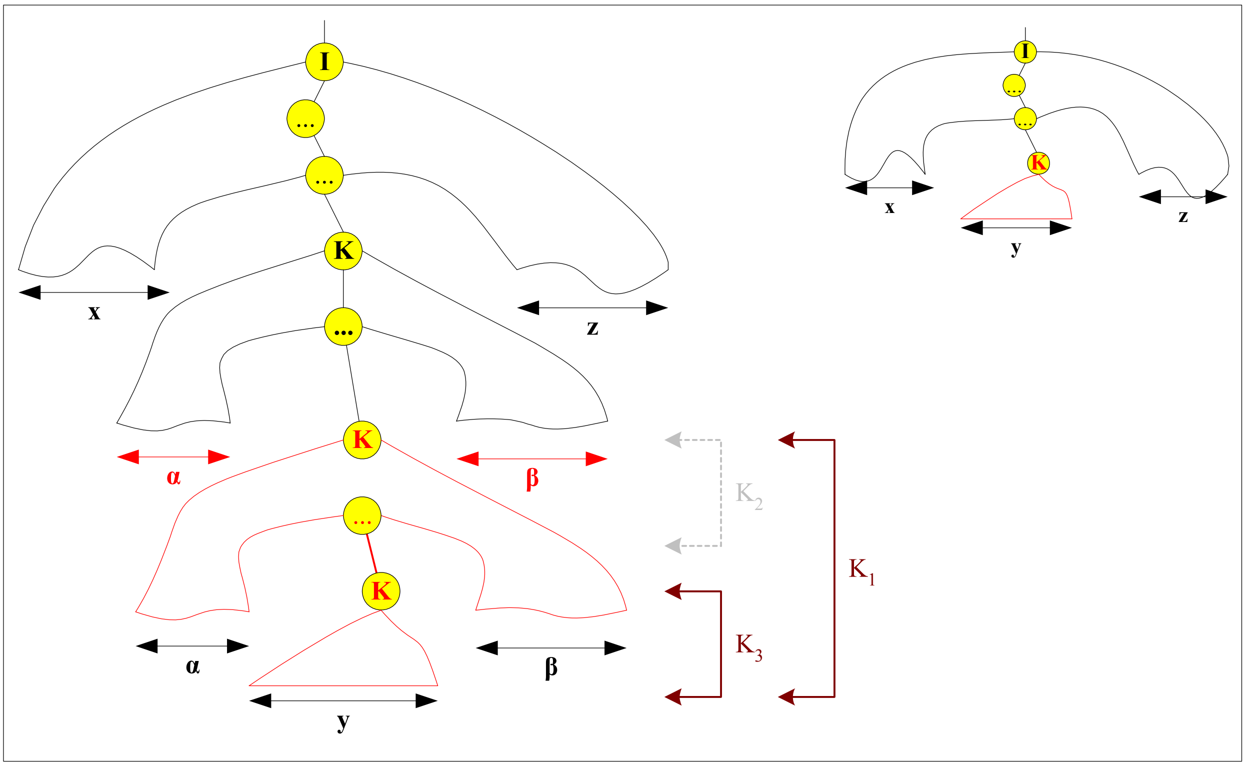
- X Τα φύλλα που είναι «αριστεροί» απόγονοι των κόμβων από την ρίζα έως τον κόμβο αμέσως πριν την 1η εμφάνιση του επαναλαμβανόμενου συμβόλου K.
- A Τα φύλλα που είναι «αριστεροί» απόγονοι των κόμβων από την 1η εμφάνιση έως αμέσως πριν την 2η εμφάνιση του K.
- Y Τα φύλλα που είναι απόγονοι της 1ης εμφάνισης του K.
- B Τα φύλλα που είναι «δεξιοί» απόγονοι των κόμβων από την 1η εμφάνιση έως αμέσως πριν την 2η εμφάνιση του K.
- Z Τα φύλλα που είναι «δεξιοί» απόγονοι των κόμβων από την ρίζα έως τον κόμβο αμέσως πριν την 1η εμφάνιση του K.

Αν συναρμόσουμε τις λέξεις λ_u που περιέχονται στα φύλλα u του τμήματος X θα λάβουμε μια λέξη x. Παρομοίως αν συναρμόσουμε τις λέξεις λ_u που περιέχονται στα φύλλα u των φυλλωμάτων A, Y, B και Z (αντιστοίχως) θα λάβουμε λέξεις α, y, β και z. Προφανώς λ = x α y β z. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι τα τμήματα α και β είναι επαναλήψιμα όσες φορές επιθυμούμε, ακόμα και μηδέν φορές

Έστω K_1 το συντακτικό υπόδενδρο με κορυφαίο κόμβο την 1η εμφάνιση του K, και K_2 το συντακτικό υπόδενδρο με κορυφαίο κόμβο την 2η εμφάνιση του K. Αν τοποθετήσουμε το K_1 στη θέση του K_2, (βλ. σχήμα), τότε θα λάβουμε ένα νέο δένδρο το οποίο θα είναι επίσης συντακτικό δένδρο, διότι οι κόμβοι του αναπτύσσονται επίσης κατά τους κανόνες της G. Η νέα λέξη λ′ που παράγεται από αυτό το νέο δένδρο είναι η x $\alpha^{(2)}$ y $\beta^{(2)}$ z, διότι τα φυλλώματα A και B θα επαναληφθούν άλλη μία φορά· και αφού έχουμε ένα συντακτικό δένδρο για την λ, θα έχουμε x $\alpha^{(2)}$ y $\beta^{(2)}$ z $\in$ L(G).

Θα λάβουμε επίσης μια 3η εμφάνιση του K ! Και αν τοποθετήσουμε το K_1 στη νέα θέση K_3 του K, (βλ. σχήμα), τότε θα λάβουμε ένα νέο δένδρο το οποίο θα παράγει την λεξη x $\alpha^{(3)}$ y $\beta^{(3)}$ z. Καθίσταται πλέον εμφανές ότι κατ' αυτόν τον τρόπο είναι δυνατόν να λάβουμε λέξεις x $\alpha^{(\kappa)}$ y $\beta^{(\kappa)}$ z $\in$ L(G), για οποιοδήποτε $\kappa \geq 1$. Για να λάβουμε και την λέξη x y z $\in$ L(G) (χωρίς καμμία εμφάνιση των α, β), αρκεί να συνδέσουμε το υπόδενδρο K_2 στη θέση του K_1 – οπότε έχουμε και το 2ο ζητούμενο του λήμματός μας.

[7] Αρχή του περιστερώνα.



Σχήμα: Ανασύνδεση ενός υπόδενδρου, και επαναληπτικές εμφανίσεις υπολέξεων.

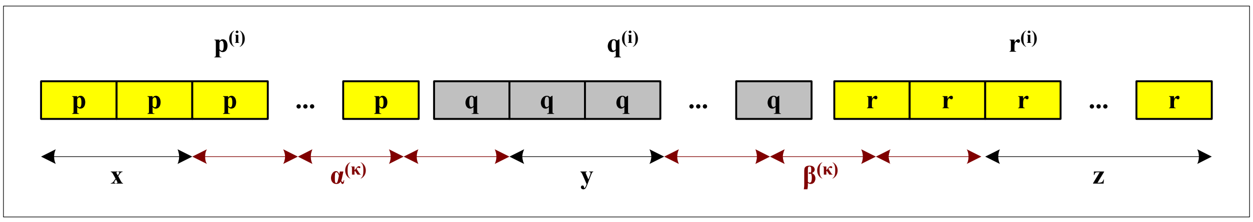
Ο δεύτερος ισχυρισμός που απομένει να δείξουμε είναι ότι δεν είναι δυνατόν να έχουμε $α = \varnothing$ και $β = \varnothing$ – (εξ άλλου τι χρησιμότητα θα είχε να επαναλαμβάνουμε επ' αόριστον δύο κενές λέξεις;) Και πράγματι, έστω ότι $α = \varnothing$ και $β = \varnothing$. Τότε το δένδρο T παράγει την λέξη $λ = x\varnothing y\varnothing z = xyz$. Εάν όμως συνδέσουμε το υπόδενδρο K_2 στη θέση του K_1 λαμβάνουμε ένα νέο δένδρο το οποίο επίσης παράγει την λέξη $λ = xyz$, και μάλιστα αυτό το νέο δένδρο έχει μέγεθος *γνήσια μικρότερο* από εκείνο του T. Είναι όμως αδύνατον να συμβαίνει συνέχεια αυτό το φαινόμενο. Ακριβέστερα, εάν ως συνδετικό δένδρο T για την λ λαμβάναμε εξ αρχής *το μικρότερο δυνατόν*, τότε αυτό το φαινόμενο δεν θα ήταν δυνατόν να συμβεί ούτε μία φορά. Επομένως είτε $α \neq \varnothing$, είτε $β \neq \varnothing$, (είτε, φυσικά, και τα δύο).

■

Είμαστε τώρα σε θέση να δείξουμε ότι υπάρχουν γλώσσες οι οποίες δεν παράγονται από καμμία ασυμφραστική γραμματική.

Πόρισμα:
Ισχυρισμός: Η γλώσσα $L_? = \{ p^{(i)}q^{(i)}r^{(i)} : i \geq 0 \}$ επί του $Σ = \{p, q, r\}$ δεν είναι ασυμφραστική.

Σχέδιο απόδειξης: Έστω ότι η γλώσσα $L_?$ παράγεται από μια γραμματική G. Κατά το λήμμα άντλησης για την G ορίζεται ένα όριο μήκους n(G) ώστε να ισχύουν τα συμπεράσματα του λήμματος. Η γλώσσα $L_?$ περιέχει οσοδήποτε μεγάλου μήκους λέξεις, επομένως όσο μεγάλο και αν είναι το όριο n(G) θα περιέχει μια λέξη ώστε $|λ| \geq n(G)$. Αυτή η λέξη λοιπόν γράφεται ως $λ = x\, α\, y\, β\, z$, $|αβ| \geq 1$, και όλες οι λέξεις $x\, α^{(κ)}\, y\, β^{(κ)}\, z$, $κ \geq 0$, ανήκουν στην $L_?$, δηλαδή όλες αυτές οι λέξεις έχουν την μορφή $p^{(i)}q^{(i)}r^{(i)}$ για κάποιο n, δηλαδή σε όλες τα πλήθη των εμφανίσεων των p, q, r είναι ίσα μεταξύ τους.



Αυτό όμως είναι αδύνατον να συμβαίνει για τους εξής δύο λόγους:

- Το καθένα από τα επαναλήψιμα τμήματα α και β είναι αδύνατον να περιέχει *δύο* (τουλάχιστον) σύμβολα εκ των p, q, r, διότι η έστω και κατά μία φορά επανάληψή του (στη λέξη $x\,\alpha^{(2)}\,y\,\beta^{(2)}\,z$), θα «ανεμίγνυε» αυτά τα σύμβολα – δίνοντας λ.χ. εμφανίσεις της μορφής «... p ... q ... p ... q ... » στη λέξη λ – και αυτό δεν συμβαίνει στις λέξεις της $L_?$.
- Ένα τουλάχιστον από τα τμήματα α ή β (ή και τα δύο) περιέχει *ένα* τουλάχιστον σύμβολο εκ των p, q, r, αφού κατά το λήμμα της άντλησης $|\alpha\beta| \geq 1$. Λόγω όμως της προηγούμενης παρατήρησης το τμήμα α, ή το τμήμα β (ή και τα δύο) περιέχουν *ακριβώς ένα* σύμβολο εκ των p, q, r.

Επομένως η επανάληψη των α και β αυξάνει το πλήθος των εμφανίσεων *το πολύ δύο* συμβόλων από τα p, q, r, ενώ δεν μεταβάλλει το πλήθος των εμφανίσεων του τρίτου εξ αυτών. Είναι λοιπόν αδύνατον να κρατήσουμε (για όλα τα κ) ίσα μεταξύ τους τα πλήθη των εμφανίσεων στη λέξη $x\,\alpha^{(\kappa)}\,y\,\beta^{(\kappa)}\,z$ *και των τριών* συμβόλων p, q, r · *αλλά* αυτό ακριβώς *πρέπει* να συμβαίνει αφού από το λήμμα άντλησης προκύπτει ότι, για κάθε κ, $x\,\alpha^{(\kappa)}\,y\,\beta^{(\kappa)}\,z \in L_? = \{\, p^{(\kappa)}q^{(\kappa)}r^{(\kappa)}\!: \kappa \geq 0 \,\}$. Από το άτοπο στο οποίο καταλήξαμε συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει ασυμφραστική γραμματική η οποία παράγει την $L_?$.

■

Πόρισμα:
Ισχυρισμός: Η γλώσσα $L_? = \{\, p^{(i)} - p^{i)} - p^{(i)}\!: i \geq 0 \,\}$ επί του $\Sigma = \{\, p, - \,\}$ δεν είναι ασυμφραστική.
Σχέδιο απόδειξης: (μπορείτε να το δώσετε εσείς κατ' αναλογία με το προηγούμενο;)

■

Θεώρημα: μη-κλειστότητα ως προς τις συνολοθεωρητικές πράξεις τομή, διαφορά, συμπλήρωμα.
Ισχυρισμός:

1) *Μη κλειστότητα ως προς τομή:* υπάρχουν ασυμφραστικές γλώσσες L_1, L_2, τέτοιες ώστε η τομή τους $L_1 \cap L_2$ να μην είναι (επίσης) ασυμφραστική.
2) *Μη κλειστότητα ως προς διαφορά:* υπάρχουν ασυμφραστικές γλώσσες L_1, L_2, τέτοιες ώστε η διαφορά τους $L_1 - L_2$ να μην είναι ασυμφραστική.
3) *Μη κλειστότητα ως προς συμπλήρωμα:* υπάρχει ασυμφραστική γλώσσα L, τέτοια ώστε το συμπλήρωμά της $\Sigma^* - L$ να μην είναι ασυμφραστική γλώσσα.

Σχέδιο απόδειξης:

1) Έστω $\Sigma = \{\, p, q, r \,\}$. Η γλώσσα $L_1 = \{\, p^{(i)}\,q^{(i)}\,r^{(j)}\!:\ i, j \geq 0 \,\}$ είναι ασυμφραστική, και παράγεται, όπως εύκολα ελέγχεται από μια γραμματική με τους εξής κανόνες:

$$\Delta = \{\ I \rightarrow XY,\ \ X \rightarrow pXq \mid \varnothing,\ \ Y \rightarrow rY \mid \varnothing\ \}$$

   Ομοίως και η γλώσσα $L_2 = \{\, p^{(i)}\,q^{(j)}\,r^{(j)}\!:\ i, j \geq 0 \,\}$ είναι ασυμφραστική. Η τομή τους όμως είναι η γλώσσα $\{\, p^{(i)}\,q^{(i)}\,r^{(i)}\!:\ i \geq 0 \,\}$, που έχουμε αποδείξει ότι δεν είναι ασυμφραστική.
2) Επειδή $L_1 \cap L_2 = (L_1 - (\Sigma^* - L_2))$, εάν υπήρχε κλειστότητα ως προς την διαφορά θα υπήρχε και ως προς τη τομή. (Η τετριμμένη γλώσσα Σ^* είναι προφανώς ασυμφραστική).
3) Επειδή $L_1 \cap L_2 = \Sigma^* - ((\Sigma^* - L_1) \cup (\Sigma^* - L_2))$ (De Morgan...), εάν υπήρχε κλειστότητα ως προς το συμπλήρωμα θα υπήρχε και ως προς τη τομή.

■

Μια ειδικού τύπου κλειστότητα.
Έστω ότι η γλώσσα L_1 είναι ομαλή και η γλώσσα L_2 είναι ασυμφραστική. Τότε η τομή τους $L = L_1 \cap L_2$ *είναι* ασυμφραστική γλώσσα. Σε αυτό το «θεώρημα» αφιερώνεται ολόκληρη η επόμενη (και τελευταία για το Β' μέρος) ενότητα.

18ο Στοιβακτικά αυτόματα: μια προσθήκη που δεν προσθέτει...

Η δομή των μηχανών μας.

Είδαμε – από την αρχή αυτών των σημειώσεων – ότι ο γραμματικός τρόπος υπολογισμού έχει ορισμένα θεμελιακά χαρακτηριστικά, και ότι μας επιτρέπει να ορίζουμε «γλώσσες», οι οποίες περιγράφουν και αναπαριστούν ιδιότητες των εκάστοτε αντικειμένων που τυχαίνει να χειριζόμαστε.

Παρατηρήσαμε επίσης ότι οι ορισμοί είναι για να *εφαρμόζονται*, δηλαδή, ότι οι γραμματικές εκτός από μια παραγωγική μορφή πρέπει να έχουν και μια αναλυτική μορφή. Δώσαμε αυτήν την αναλυτική μορφή υπό μορφή μηχανών – κάτι που είναι φυσικό διότι ενώ «εμείς» είμαστε εκείνοι που σκέπτονται και δίδουν τους ορισμούς, θα θέλαμε (και περιμένουμε) αυτοί οι ορισμοί να είναι εφαρμόσιμοι *και από μηχανές*.

Οι μηχανές που παρουσιάσαμε και – εν μέρει – εξηγήσαμε τα βασικά χαρακτηριστικά τους, ήσαν μέχρι στιγμής δύο ειδών: τα πεπερασμένα αυτόματα και τα στοιβακτικά αυτόματα:

- Τα πεπερασμένα αυτόματα διέθεταν μια ταινία απλής αναγνώσεως, και η «*μνήμη*» τους ήταν μία μεταβλητή *κατάσταση*, (μία από πεπερασμένο πλήθος).
- Τα στοιβακτικά αυτόματα διέθεταν μια ταινία απλής αναγνώσεως, και η «*μνήμη*» τους ήταν μια μεταβλητή *στοίβα*, (πεπερασμένη κάθε στιγμή, αλλά εν δυνάμει οσοδήποτε μεγάλου μεγέθους).

Δείξαμε ότι τα δεύτερα είναι υπολογιστικώς πιο «ισχυρά» από τα πρώτα. Υπάρχουν όμως και (πολλές) παραλλαγμένες εκδοχές των παραπάνω που θα έπρεπε κάποιος να εξετάσει: τί θα επιτυγχάναμε εάν λ.χ. τα αυτόματά μας είχαν δύο ταινίες; ή δύο κεφαλές, ή, αν επιτρεπόταν να αναγιγνώσκουν τα δεδομένα και προς τις δύο κατευθύνσεις; Θα αναφέρουμε εδώ τρεις παραλλαγές, όλες αναφορικά με την «μνήμη» τους:

- *Πεπερασμένα αυτόματα με περισσότερες από μία καταστάσεις*: αυτή η εκδοχή των αυτομάτων δεν αυξάνει την ισχύ τους, διότι, απλά, δύο καταστάσεις δεν αποτελούν παρά *μία* κατάσταση υπό την μορφή «ζεύγους».
- *Στοιβακτικά αυτόματα με μία καταστάση και μία στοίβα*: αυτή η εκδοχή των στοιβακτικών αυτομάτων δεν αυξάνει την ισχύ τους, αλλά η εξήγηση δεν είναι απλή· αυτή την εξήγηση θα δώσουμε στη τρέχουσα ενότητα.
- *Στοιβακτικά αυτόματα με μία κατάσταση και δύο στοίβες*: αυτή η εκδοχή των στοιβακτικών αυτομάτων όχι μόνον αυξάνει την ισχύ τους, αλλά *εξαντλεί τα όρια των μηχανικών υπολογιστικών δυνατοτήτων!* Αυτές οι μηχανές δεν είναι παρά οι μηχανές Turing υπό μεταμφίεση, και αυτές θα εξετάσουμε στο Γ΄ μέρος.

Θα κλείσουμε λοιπόν το Β΄ μέρος με την θεμελιακή παρατήρηση για τα αυτόματα με μία κατάσταση και μία στοίβα: θα δείξουμε ότι οι γλώσσες που αποδέχονται είναι ακριβώς οι ασυμφραστικές γλώσσες.

Αυτόματα με μία στοίβα και μία κατάσταση.

Είδαμε έως τώρα δύο είδη «αυτομάτων»: τα πεπερασμένα (με μία κατάσταση), και τα στοιβακτικά (με μία, όχι άπειρη αλλά πάντως *απεριόριστη*, στοίβα καταστάσεων). Τί προκύπτει εάν έχουμε και τα δύο; Αυτό θα εξετάσουμε στην τρέχουσα ενότητα. Θα ονομάζουμε ***στοιβακτικό αυτόματο με μία κατάσταση*** μια 6άδα, $A = \langle \Sigma, \Sigma_{:K}, \Sigma_{:Q}, I, T, \Delta \rangle$ όπου :

- το Σ είναι αλφάβητο ***τερματικών*** συμβόλων.
- το Σ_K είναι αλφάβητο ***καταστάσεων***.
- το Σ_Q είναι αλφάβητο με σύμβολα ***στοίβας***.
- το $I \in \Sigma_K$ είναι μια ***αφετηριακή*** κατάσταση.

- το Τ είναι ένα υποσύνολο καταστάσεων Σ_K, (οι ***αποδεκτικές***).
- οι ***οδηγίες*** Δ είναι ένα σύνολο 3άδων της μορφής: $(K|Q, \lambda) \to (K'|Q_1Q_2...Q_\nu)$ όπου:
  - τα K, K′ είναι καταστάσεις $K, K' \in \Sigma_K$.
  - το Q είναι σύμβολο του ενιαίου αλφαβήτου $Q \in (\Sigma \cup \Sigma_Q)$.
  - το λ είναι μια λέξη από τερματικά σύμβολα, $\lambda \in \Sigma^*$.
  - το $Q_1Q_2...Q_\nu$ είναι μια λέξη του ενιαίου αλφαβήτου $(\Sigma \cup \Sigma_Q)$.

Σε κάθε τέτοιο στοιβακτικό αυτόματο έχουμε την «μηχανική» του όψη, όπως και πριν εξής:
- μια μεταβλητή ***κατάσταση k*** $\in \Sigma_K$.
- μια μεταβλητή ***στοίβα q***, και συγκεκριμμένα μια λέξη με σύμβολα στοίβας: $q \in (\Sigma \cup \Sigma_Q)^*$.
- μια μεταβλητή ***h***, (έναν φυσικό αριθμό $h \in N$, ως την θέση μιας «κεφαλής»).
- μια απεικόνιση, $t : \mathbf{N} \to \Sigma \cup \{\ \_\ \}$, ως μια «ταινία» από κυψέλες με ένα τερματικό σύμβολο σε κάθε κυψέλη. (Θα σημειώνουμε μια «κενή» κυψέλη με το σύμβολο «κάτω παύλα» _ .)

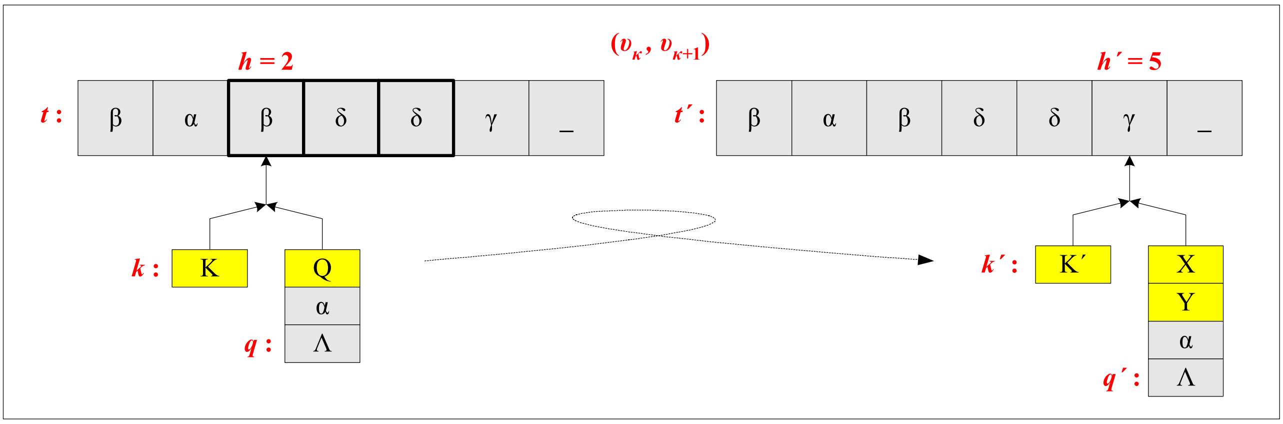
Η τετράδα $\langle t, h, k, q\rangle$ θα καλείται (***καταστατική***) ***περιγραφή*** του αυτομάτου.

Ορίζουμε – κατά το γενικό πλαίσιο που ακολουθούμε – την δράση του αυτομάτου ως εξής:
- Η σχέση *βήματα(Α)* του αυτομάτου είναι όλα τα ζεύγη περιγραφών (= σταδίων υπολογισμού) (φ, φ′) που ορίζονται ως εξής:

  Μια οδηγία $(K|Q, \lambda) \to (K'|Q_1Q_2...Q_\nu)$ είναι ***εφαρμόσιμη*** επί της περιγραφής $\phi = \langle t, h, k, q\rangle$, εάν:
  - η κεφαλή και για $\nu=|\lambda|$ σύμβολα προς τα δεξιά «βλέπει» την λέξη $\lambda = t[h]\ t[h+1]\ldots\ t[h+(\nu-1)]$.
  - η κατάσταση k είναι η K της οδηγίας.
  - το κορυφαίο σύμβολο της στοίβας (το 1ο της q), είναι το Q, δηλαδή $q = Q\,S$, (όπου $S \in (\Sigma \cup \Sigma_Q)^*$).

  και εάν είναι εφαρμόσιμη, τότε η καταστατική περιγραφή φ′, είναι η εξής:

$$\phi' = \langle\, t', h', k', q'\rangle,\quad \text{όπου } t' = t,\quad k' = k,\ q' = Q_1Q_2...Q_\nu S \quad \text{και}\quad h' = h+|\lambda|,$$



Σχήμα: Η εκτέλεση μιας οδηγίας **(K|Q, βδδ) → (K′|XY)** επί αυτομάτου
με μία κατάσταση και μία στοίβα (καταστάσεων).

  δηλαδή:
  - το περιεχόμενο της ταινίας δεν μεταβάλλεται,
  - η κατάσταση k μεταπίπτει σε K′,
  - από τη στοίβα q αφαιρείται το κορυφαίο Q και αποτίθεται η σειρά συμβόλων $Q_1Q_2...Q_\nu$, και,
  - η κεφαλή μετακινείται τόσες θέσεις όσα είναι τα σύμβολα της λέξης λ που έχει πια «διαβάσει».

Για ένα τέτοιο αυτόματο, σύμφωνα με όσα έχουμε εξηγήσει, έχουμε υπολογισμούς $\upsilon = \langle \upsilon_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_\kappa, ...\rangle$ αρχίζοντας από μια λέξη-δεδομένο λ, σύμφωνα με την εξής σημασιολογία:
- *Αρχικό στάδιο υ_0:* Κάθε λέξη $\lambda = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,..\,\sigma_\nu \in \Sigma^*$ μπορεί να «φορτωθεί» στο αυτόματο ως μια ταινία t_λ, ορίζοντας ως $t_\lambda[\kappa] = \sigma_\kappa$, για $\kappa = 1, ..., |\lambda|$, (και κενές τις υπόλοιπες θέσεις). Η κεφαλή τίθεται στη 1η θέση, η κατάσταση k τίθεται ως η αφετηριακή I, και η στοίβα τίθεται «κενή», ή ακριβέστερα τίθεται q = #, όπου # ένα διακριτό σύμβολο (του Σ_Q) με σκοπό να σηματοδοτεί τον «πάτο» της στοίβας. Η μηχανή εκκινείται λοιπόν με αρχική καταστατική περιγραφή την εξής:

$$\upsilon_0 = \langle t = t_\lambda,\ h = 1,\ k = I,\ q = \# \rangle$$

- *Βήμα υπολογισμού:* Για κάθε δύο διαδοχικές περιγραφές $(\upsilon_\kappa, \upsilon_{\kappa+1})$ πρέπει $(\upsilon_\kappa, \upsilon_{\kappa+1}) \in$ *βήματα*(π), όπως αυτά περιγράφηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.
- *Τέλος υπολογισμού:* Όταν και μόνον η κεφαλή έχει διαβάσει όλη την ταινία, δηλαδή: $h = |\lambda|+1$, και η στοίβα είναι «κενή», δηλαδή στη κορυφή της φαίνεται το σημείο «πάτος» #.

Το αποτέλεσμα του υπολογισμού δίδεται από την τελική κατάσταση k της μηχανής, και την στοίβα q: όταν και μόνον όταν η κατάσταση είναι *αποδεκτική* ($k \in T(A)$), και η στοίβα είναι *κενή*, (ή ακριβέστερα $q = \#$) τότε θα λέμε ότι το στοιβακτικό αυτόματο ***αποδέχθηκε*** την λέξη-δεδομένο λ, αλλοιώς θα λέμε ότι την ***απέρριψε***. Κάθε στοιβακτικό αυτόματο A αποδέχεται, λοιπόν, μια γλώσσα $L(A) \subseteq \Sigma^*$ η οποία αποτελείται όλες και μόνον τις λέξεις του αλφαβήτου Σ , τις οποίες αυτό αποδέχεται. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι κάθε τέτοια γλώσσα είναι ασυμφραστική.

Απλοποιημένη μορφή οδηγιών:
Ακολουθώντας τις ιδέες και τεχνικές απλοποίησης των γραμματικών που είδαμε στην 16η ενότητα, μπορούμε να αρκεστούμε στις εξής μορφές των στοιβακτικών αυτομάτων με πρόσθετη κατάσταση:

$$\mathbf{(K|Q, \varnothing) \rightarrow (K'|Q_\alpha Q_\beta)},\ \text{ή},$$
$$\mathbf{(K|Q, \lambda) \rightarrow (K|\varnothing)},$$

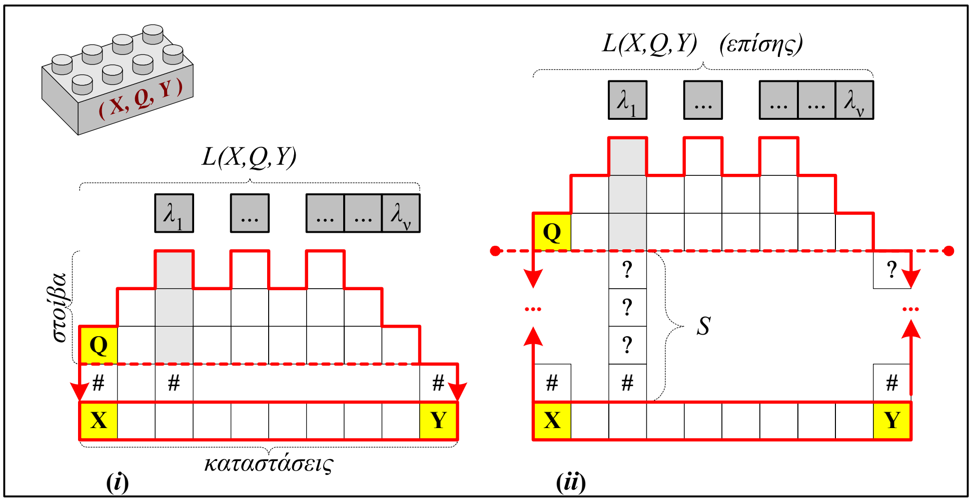
δηλαδή το αυτόματο, αλλάζει κατάσταση και...
- δεν διαβάζει τίποτε αλλά αποθέτει στη στοίβα δύο σύμβολα,
- διαβάζει μια λέξη αλλά δεν αποθέτει στη στοίβα τίποτε.

(παραλλαγές είναι εφικτές, αλλά δεν θα τις χρειαστούμε εδώ.)

$(K|Q, \lambda) \rightarrow (K'|Q_1\, Q_2\, Q_3)$

$(K|Q, \varnothing) \rightarrow (K'|\mathbf{\Gamma_\lambda B_{\nu=3}})$
$(K'|\mathbf{\Gamma_\lambda}, \lambda) \rightarrow (K'|\varnothing)$
$(K'|\mathbf{B_3}, \varnothing) \rightarrow (K'|B_2 Q_3)$
$(K'|B_2, \varnothing) \rightarrow (K'|B_1 Q_2)$
$(K'|B_1, \varnothing) \rightarrow (K'|B_0 Q_1)$
$(K'|B_0, \varnothing) \rightarrow (K'|\varnothing)$

Μια ασυμφραστική γραμματική για τους αποδεκτικούς υπολογισμούς!
Θα συμβολίσουμε με **L(X, Q, Y)** το σύνολο των λέξεων (γλώσσα) που παράγει το αυτόματο A εάν κρατήσουμε μεν τις ίδιες οδηγίες, αλλά θέσουμε:
- ως αφετηριακή κατάστασή του την X,
- ως αρχικό σύμβολο της στοίβας το Q,
- και ως (μόνη) αποδεκτική κατάσταση την Υ.

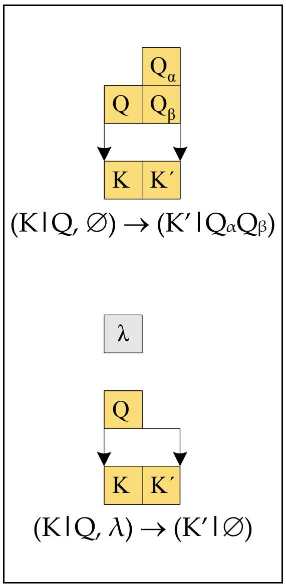


Σχήμα: Η εξέλιξη του υπολογισμού μιας λέξης $\lambda \in L(X, Q, Y)$, και δύο τεμάχια υπολογισμού τύπου **(X, Q, Y)**, (σε «κόκκινο» περίγραμμα), με «ύψος» 1 και 3.

Έστω λ μια λέξη της L(X, Q, Y). Η εξής εξεικόνιση είναι εξυπηρετική: γράφουμε τα σύμβολα της στοίβας και τις καταστάσεις σε τετράγωνα πλαίσια, και συναρμολογούμε την στοίβα κάθετα και τις καταστάσεις οριζόντια. Η εικόνα του υπολογισμού της λ έχει όπως στο σχήμα (*i*), (και κατ' αναλογία της σχετικού σχήματος της 15$^{\text{ης}}$ ενότητας): στη 1$^{\text{η}}$ γραμμή η σειρά των καταστάσεων, με «γκρί» χρώμα μια φάση της στοίβας, με «κόκκινο» το άνω όριο της στοίβας, και στην άνω σειρά: η παραγόμενη λέξη. Ο υπολογισμός μιας λέξης λ της L(X, Q, Y) σχηματίζει ένα «***τεμάχιο υπολογισμού***» όπως αυτό περιγράφεται από την κόκκινη πολυγωνική γραμμή, και σημαίνεται από τα X, Q, Y.

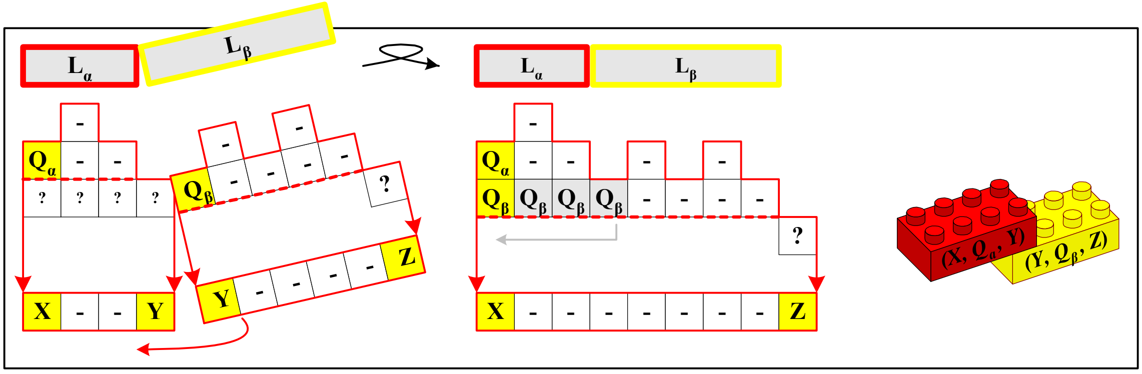
Η πρώτη καίρια παρατήρηση σχετικά με αυτά τα «τεμάχια» είναι διπλή:

- Οι οδηγίες του αυτομάτου παράγουν δύο τέτοιου είδους «θεμελιακά» τεμάχια, όπως φαίνεται στο δεξιό μέρος αυτής της παραγράφου.
- *Αλλά κάθε αποδεκτικός υπολογισμός του αυτομάτου αποτελείται από, και παράγει, τέτοια τεμάχια:* έστω ότι κατά ένα βήμα του υπολογισμού αποτίθεται στη στοίβα το σύμβολο Q, και η κατάσταση είναι η X, (περίπτωση (*ii*)). Εφόσον ο υπολογισμός είναι αποδεκτικός η στοίβα θα καταστεί εν τέλει κενή, και επομένως υπάρχει στη συνέχεια κάποιο στάδιο υπολογισμού κατά το οποίο η στοίβα θα επανέλθει, (για 1$^{\text{η}}$ φορά έκτοτε), στο ύψος που είχε όταν αποτέθηκε εκεί η Q, και η κατάσταση θα είναι η Υ. (Σχήμα: την 1$^{\text{η}}$ φορά που η «κόκκινη» γραμμή συναντά εκ νέου την οριζόντια διακεκομμένη γραμμή.) Αυτό το τεμάχιο υπολογισμού που χαρακτηρίζεται από την τριάδα **(X, Q, Y)** παράγει μια λέξη λ της L(X, Q, Y) *διότι το τμήμα S της στοίβας υπό το κορυφαίο Q, **δεν** παίζει ρόλο*: ο ίδιος υπολογισμός θα ήταν δυνατός ακόμα και εάν αυτό δεν υπήρχε καθόλου, όπως συμβαίνει στη περίπτωση (*i*) που ορίζει την L(X, Q, Y).



Αυτό που πρέπει να διευκρινίσουμε, όμως, είναι *ποιός είναι ο τρόπος «συναρμολόγησης»* αυτών των τεμαχίων: δύο τέτοια τεμάχια L(X, Q_α, Y), L(Υ, Q_β, Z) μπορούν να βρεθούν ως διαδοχικά εντός ενός οποιουδήποτε υπολογισμού του αυτομάτου μόνον...

- εάν το 2$^{\text{ο}}$ τεμάχιο αρχίζει από την κατάσταση που σταματά το 1$^{\text{ο}}$ τεμάχιο (στο σχήμα η Y), και
- εάν το σύμβολο στοίβας που φέρει το 2$^{\text{ο}}$ τεμάχιο (εδώ: το Q_β), είναι αυτό που φανερώνεται στη κορυφή της στοίβας όταν λήξει το 1$^{\text{ο}}$ τεμάχιο (εδώ: το υποδηλούμενο ως «**? ? ? ?**»)

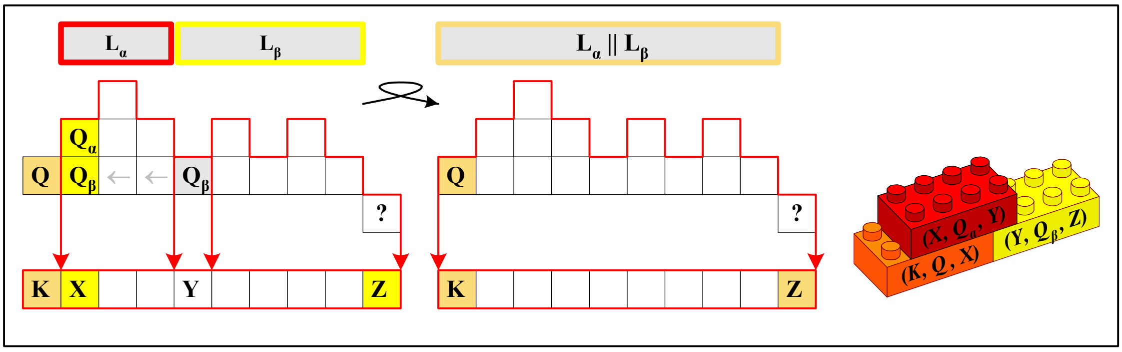


Σχήμα: Ο μόνος τρόπος (ημι-)συναρμολόγησης δύο τεμαχίων L(X, Q_α, Y) και L(Υ, Q_β, Z).

Επειδή η στοίβα *υπό* το Q_α, *δεν* μεταβάλλεται όσο εκτελείται το πρώτο τεμάχιο, αυτό το σύμβολο θα πρέπει να ήταν παρόν ήδη από την αρχή, και η συναρμολόγηση παράγει τεμάχιο στο οποίο είναι προσδιορισμένα τα *δύο* κορυφαία σύμβολα της στοίβας. Για να λάβουμε ένα τεμάχιο της ίδια μορφής, (ώστε να προσδιορίζεται μόνο το ένα κορυφαίο σύμβολο), θα πρέπει προηγουμένως να εκτελεστεί μια οδηγία της μορφής: $(K|Q, \varnothing) \to (X, Q_\alpha Q_\beta)$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Η παραγόμενη γλώσσα είναι η συναρμογή των γλωσσών των δύο τεμαχίων.

$$L(K, Q, Z) = L(X, Q_\alpha, Y) \,||\, L(\Upsilon, Q_\beta, Z).$$

Μετά από όλα αυτά τα σχόλια είμαστε να θέση να αποδείξουμε το εξής θεώρημα – η απόδειξη του οποίου αν και «στέκει» από μόνη της, θα ήταν (ίσως) ακατάληπτη χωρίς αναφορά στα προηγούμενα.



Σχήμα: Η μόνη πλήρης συναρμολόγηση δύο τεμαχίων L(X, Q_α, Y) και L(Υ, Q_β, Z):
εκείνη υπό μια οδηγία της μορφής (K|Q, ∅) → (X|$Q_\alpha Q_\beta$).

Θεώρημα: (1 κατάσταση & 1 στοίβα = 1 στοίβα)
Ισχυρισμός: Η γλώσσα που αποδέχεται κάθε στοιβακτικό αυτόματο με μία (πρόσθετη) κατάσταση, είναι ασυμφραστική.

Σχέδιο απόδειξης: Θα συμβολίσουμε – όπως έχουμε ήδη ορίσει – με L(X, Q, Y) το σύνολο των λέξεων (γλώσσα) που παράγει το αυτόματο A εάν κρατήσουμε μεν τις ίδιες οδηγίες, αλλά θέσουμε:

- ως αφετηριακή κατάστασή του A την X,
- ως αρχικό σύμβολο της στοίβας το Q,
- και ως (μία) αποδεκτική κατάσταση την Υ.

Ορίζουμε επίσης την εξής (εμφανώς ασυμφραστική) γραμματική G:

G	Ορισμός
Σ	Αλφάβητο το ίδιο με εκείνο του A.
$Σ_Q$	Σύμβολα στοίβας οι 3άδες ⟨X, Q, Y⟩, για κάθε X, Υ ∈ $Σ_K$(A), και για κάθε Q ∈ $Σ_Q$(A), και επίσης, ένα διακριτό σύμβολο I_G.
I	το I_G.
Δ	Για κάθε οδηγία R του αυτομάτου, ▪ αν R = (K|Q, λ) → (K′|∅), προσθέτουμε τον κανόνα **⟨K, Q, K′⟩ → λ**. ▪ αν R = (K|Q, ∅) → (X|$Q_a Q_b$) προσθέτουμε τους κανόνες **⟨K, Q, Z⟩ → ⟨X, Q_α, Y⟩ ⟨Υ, Q_β, Z⟩**, για κάθε κατάσταση Y, Z ∈ $Σ_K$(A). Και για κάθε κατάσταση του αυτομάτου F ∈ $Σ_K$(A), ▪ αν F ∈ T(A) (=αποδεκτική), προσθέτουμε τον κανόνα **I_G → ⟨I_A, #, F⟩**.

Θα δείξουμε ότι L(A) = L(G). Το κλειδί για αυτή την απόδειξη, ακολουθώντας τα σχόλια που των προηγουμένων σελίδων, είναι ότι για κάθε ζεύγος καταστάσεων X, Υ ∈ $Σ_K$(A), και για κάθε σύμβολο-στοίβας Q ∈ $Σ_Q$(A)...

οι λέξεις που παράγονται κατά την G από το σύμβολο ⟨X, Q, Y⟩
είναι όλες και μόνον οι λέξεις της γλώσσας L(X, Q, Y).

1η κατεύθυνση: εάν λ ∈ L(X, Q, Y) τότε και ⟨X, Q, Y⟩ $\xrightarrow{G}$ λ:

- εάν η πρώτη εκτελούμενη οδηγία του αυτομάτου είναι της μορφής (K|Q, λ) → (K′|∅), τότε αυτή αφήνει την στοίβα κενή, και άρα παράγει λέξη λ που εξ ορισμού ανήκει στη γλώσσα L(K, Q, K′), και για την οποία (επίσης εξ ορισμού) έχουμε στη διάθεσή μας τον κανόνα ⟨K, Q, K′⟩ → λ, (αφού στη περίπτωση αυτή υπάρχει η οδηγία (K|Q, λ) → (K′|∅)).
- εάν η πρώτη εκτελούμενη οδηγία του αυτομάτου είναι της μορφής (K|Q, ∅) → (X|$Q_\alpha Q_\beta$), τότε στη στοίβα θα αποτεθούν τα Q_α και Q_β. Μέχρι το σημείο που θα αποκαλυφθεί στη στοίβα το Q_β, ο υπολογισμός με αφετηρία το Q_α θα δώσει τεμάχιο υπολογισμού που σχηματίζει τη λέξη $λ_\alpha$ ∈ L(X, Q_α, Υ). Στη συνέχεια θα εμφανιστεί τεμάχιο υπολογισμού που σχηματίζει λέξη της μορφης $λ_\beta$ ∈ L(Υ, Q_β, Z) και το οποίο λήγοντας θα αφήσει την στοίβα κενή. Αυτά τα τρία τεμάχια υπολογισμού συνθέτουν έναν υπολογισμό του αυτομάτου με κατάσταση-αρχή το K, στοίβα Q, και κατάσταση-τέλος το Z, επομένως η λέξη λ = $λ_\alpha λ_\beta$ που σχηματίζει ανήκει στην γλώσσα L(K, Q, Z).

Αλλά και για αυτή τη λέξη έχουμε την δυνατότητα παραγωγής της: επαγωγικά, έχουμε παραγωγές για τις λέξεις *από μικρότερα τεμάχια* λ_α και λ_β, ότι δηλαδή $\langle X, Q_\alpha, Y\rangle \xrightarrow{G} \lambda_\alpha$, και $\langle X, Q_\alpha, Y\rangle \xrightarrow{G} \lambda_\beta$ και για την συναρμογή τους $\lambda = \lambda_\alpha\lambda_\beta$, έχουμε διαθέσιμο τον κανόνα $\langle K, Q, Z\rangle \to \langle X, Q_\alpha, Y\rangle\,\langle \Upsilon, Q_\beta, Z\rangle$, (αφού στη περίπτωση αυτή υπάρχει η οδηγία $(K|Q, \varnothing) \to (X|Q_\alpha Q_\beta)$).

2η κατεύθυνση: εάν $\langle K, Q, Z\rangle \xrightarrow{G} \lambda$ τότε και $\lambda \in L(K, Q, Z)$:

- εάν ο πρώτος χρησιμοποιούμενος κανόνας είναι της μορφής $\langle K, Q, Z\rangle \to \lambda$, τότε το αυτόματο διαθέτει την οδηγία $(K|Q, \lambda) \to (Z|\varnothing)$, και άρα με κατάσταση-αφετηρία το K, στοίβα το Q#, και κατάσταση αποδοχής το Z, θα μπορούσε να δώσει την λέξη λ, άρα εξ ορισμού $\lambda \in L(K, Q, Z)$.
- εάν ο πρώτος χρησιμοποιούμενος κανόνας είναι της μορφής $\langle K, Q, X\rangle \to \langle X, Q_\alpha, Y\rangle\,\langle \Upsilon, Q_\beta, Z\rangle$, τότε το αυτόματο διαθέτει την οδηγία $(K|Q, \varnothing) \to (X|Q_\alpha Q_\beta)$, και άρα με κατάσταση-αφετηρία το K και στοίβα το Q#, θα μπορούσε να δώσει κατάσταση X και να αποθέσει στη στοίβα τα Q_α και Q_β. Αλλά οι επί μέρους παραγωγές $\langle X, Q_\alpha, Y\rangle \xrightarrow{G} \lambda_\alpha$, και $\langle \Upsilon, Q_\beta, Z\rangle \xrightarrow{G} \lambda_\beta$ είναι βραχύτερες της αρχικής, και άρα επαγωγικά ισχύει ότι $\lambda_\alpha \in L(X, Q_\alpha, Y)$ και $\lambda_\beta \in L(X, Q_\beta, Y)$, δηλαδή υπάρχουν δύο τεμάχια υπολογισμού της μορφής (X, Q_α, Y) και (X, Q_β, Y) που δίδουν τις λ_α και λ_β. Το αυτόματο επομένως, αφού διαθέτει την οδηγία $(K|Q, \varnothing) \to (X|Q_\alpha Q_\beta)$, μπορεί να ενώσει –(*βλ. τα παραπάνω σχόλια*)– τα δύο τεμάχια σε ένα τεμάχιο υπολογισμού (K, Q, Z), το οποίο σχηματίζει τη λέξη $\lambda_\alpha\lambda_\beta$. Αφού όμως υπάρχει τέτοιος υπολογισμός η λέξη-συναρμογή $\lambda = \lambda_\alpha\lambda_\beta$ ανήκει στην γλώσσα L(K, Q, Z).

Η απόδειξη ολοκληρώνεται από τις εξής δύο παρατηρήσεις:

- ότι $L(A) = \bigcup_{F\in T(A)} L(I_A, \#, F)$, αφού πρέπει και αρκεί από την αρχική κατάσταση/στοίβα $(k, q) = (I_A, \#)$ να καταλήξουμε σε μια (οποιαδήποτε) αποδεκτική κατάσταση F και να έχει κενωθεί η στοίβα, δηλαδή η παραγόμενη λέξη να ανήκει στην $L(I_A, \#, F)$.
- ότι η G, αφού έχει ως αρχικό σύμβολο το I_G, με μόνους σχετικούς κανόνες τους $I_G \to \langle I_A, \#, F\rangle$, παράγει όσες και μόνον λέξεις παράγονται από τα $\langle I_A, \#, F\rangle$, δηλαδή $L(G) = \bigcup_{F\in T(A)} L(I_A, \#, F)$.

Από τα παραπάνω έχουμε το ζητούμενο L(G) = L(A).

■

Θεώρημα: μια ειδικού τύπου κλειστότητα.
Ισχυρισμός: Έστω ότι η γλώσσα L_1 είναι ομαλή και η γλώσσα L_2 είναι ασυμφραστική. Τότε η τομή τους $L = L_1 \cap L_2$ είναι ασυμφραστική γλώσσα.

Σχέδιο απόδειξης: Το (*αιτιοκρατικό!*) αυτόματο A_1 που αποδέχεται L_1 έχει αρχική κατάσταση την I_1 και οδηγίες του τύπου $(K, \sigma) \to K'$. Το στοιβακτικό αυτόματο A_2 (υπό τη μορφή *Chomksy*) που αποδέχεται την L_2 έχει ως αρχικό σύμβολο στοίβας το I_2 και οδηγίες του τύπου $(Q, \sigma) \to \varnothing$, $(Q, \varnothing) \to Q_\alpha Q_\beta$, (ή και $I_{(2)} \to \varnothing$ μόνο για τη κενή λέξη). Ορίζουμε ένα στοιβακτικό αυτόματο A που έχει ως καταστάσεις Σ_K εκείνες του A_1, σύμβολα στοίβας Σ_Q εκείνα του A_2, και αρχική κατάσταση την I_A. Οι οδηγίες του A είναι οι εξής:

- **$(I_A|\#) \to (I_1|I_2)$,** ώστε το A, με $k = I_A$ και $q = \#$, να αρχίσει όπως θα άρχιζαν τα A_1 και A_2.
- **$(K|Q, \sigma) \to (K'|\varnothing)$,** για κάθε οδηγία $(K, \sigma) \to K'$ του A_1 και κάθε οδηγία $(Q, \sigma) \to \varnothing$ του A_2.
  $(K|Q, \varnothing) \to (K|Q_\alpha Q_\beta)$, για κάθε κανόνα $(Q, \varnothing) \to Q_\alpha Q_\beta$ του A_2,
  ώστε το A να εκτελεί τις οδηγίες σύμβολο-προς-σύμβολο, όπως τα A_1 και A_2.

Εάν ορίσουμε ως αποδεκτικές καταστάσεις του A εκείνες του A_1, το νέο αυτόματο A θα αποδεχθεί μια λέξη λ εάν και μόνον περιέλθει σε αποδεκτική κατάσταση (οπότε το A_1 θα είχε δεχθεί την λ), και εάν η στοίβα έχει κενωθεί, (οπότε το A_2 θα είχε, επίσης, δεχθεί την λ). Άρα $\lambda \in L(A)$, εάν και μόνον εάν $\lambda \in L(A_1) \cap L(A_2)$. (Ας προσέξουμε εδώ ότι το A αποδέχεται την κενή λέξη $\lambda = \varnothing$ όταν αυτή ανήκει και στις δύο γλώσσες (και μόνον), διότι τότε η αρχική κατάσταση $k = I_{(1)}$ είναι κατ' ανάγκην αποδεκτική, και η στοίβα κενή (q = #). Και δεν υπάρχει τρόπος να την αποδεχθεί με άλλο τρόπο διότι, κατά τις παραπάνω οδηγίες, οποιαδήποτε μεταβολή της κατάστασης k από $I_{(1)}$ σε άλλες (ίσως αποδεκτικές), απαιτεί η λ να περιέχει ένα τουλάχιστον σύμβολο σ, (οπότε δεν θα ήταν κενή).)

■