ΗΥ-280 - Θεωρία Υπολογισμού 2008

3ο Φύλλο Ασκήσεων

Άσκηση 1

Αποδείξτε ότι οι παρακάτω γλώσσες δεν είναι τύπου 2 (γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα)

(α) $L=\{a^n b^m c^k \mid 0 \leq n \leq m < k\}$

Απόδειξη

Έστω ότι η L είναι τύπου 2, επομένως ικανοποιεί το Λήμμα Άντλησης για Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα. Έστω p ο αριθμός που αναφέρεται στο Λήμμα Άντλησης.

Εξετάζουμε τη λέξη

$$z = a^p b^p c^{p+1}$$

που ανήκει στη γλώσσα L και για την οποία ισχύει $|z| \geq p$

Σύμφωνα με το Λήμμα η z μπορεί να τριχοτομηθεί ως εξής:

$$z = uvwxy$$

και ισχύουν οι συνθήκες

(α) $|vx| \geq 1$

(β) $|vwx| \leq p$

(γ) $uv^i wx^i y \in L$, για κάθε $i \geq 0$

Από (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι για τη λέξη vx ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

(i) Περιέχει τουλάχιστον 1 a ή b και κανένα c.

(ii) Περιέχει τουλάχιστον 1 b ή c και κανένα a.

Στην περίπτωση (i) η λέξη $uv^2wx^2y \notin L$,

αφού θα περιέχει τουλάχιστον (p+1) a ή b, και επομένως ο αριθμός των c (p+1), δεν θα είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των a ή b αντιστοίχως

Στην περίπτωση (ii) η λέξη $uv^0wx^0y \notin L$,

αφού θα περιέχει το πολύ (p-1) b ή p c, επομένως στην πρώτη περίπτωση ο αριθμός των a θα είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των b, ενώ στη δεύτερη ο αριθμός των c θα είναι μικρότερος ή ίσος από τον αριθμό των a.

Επομένως δεν υπάρχει τρόπος να τριχοτομηθεί η λέξη ώστε να ισχύουν και οι 3 συνθήκες του Λήμματος Άντλησης. Άρα, δεν ισχύει το Λήμμα Άντλησης για Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα. Επόμένως η γλώσσα L δεν είναι Γλώσσα Χωρίς Συμφραζόμενα.

(β) $L=\{a^n bc^n de^n \mid n\geq 0\}$

Απόδειξη

Έστω ότι η L είναι τύπου 2, επομένως ικανοποιεί το Λήμμα Άντλησης για Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα. Έστω p ο αριθμός που αναφέρεται στο Λήμμα Άντλησης.

Εξετάζουμε τη λέξη

$$z = a^p bc^p de^p$$

που ανήκει στη γλώσσα L και για την οποία ισχύει $|z| \geq p$

Σύμφωνα με το Λήμμα η z μπορεί να τριχοτομηθεί ως εξής:

$$z = uvwxy$$

και ισχύουν οι συνθήκες

(α) $|vx| \geq 1$

(β) $|vwx| \leq p$

(γ) $uv^iwx^iy \in L$, για κάθε $i\geq 0$

Από (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι για τη λέξη vx ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

(i) Περιέχει τουλάχιστον 1 a, b ή c και κανένα d και e.

(ii) Περιέχει τουλάχιστον 1 c, d ή e και κανένα a και b.

Στην περίπτωση (i) η λέξη $uv^0wx^0y \notin L$,

αφού θα περιέχει τουλάχιστον 1 λιγότερο a από e ή τουλάχιστον 1 λιγότερο c από e ή κανένα b

Στην περίπτωση (ii) η λέξη $uv^0wx^0y \notin L$,

αφού θα περιέχει τουλάχιστον1 λιγότερο c από a ή τουλάχιστον 1 λιγότερο e από a ή κανένα d

Επομένως δεν υπάρχει τρόπος να τριχοτομηθεί η λέξη ώστε να ισχύουν και οι 3 συνθήκες του Λήμματος Άντλησης. Άρα, δεν ισχύει το Λήμμα Άντλησης για Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα. Επόμένως η γλώσσα L δεν είναι Γλώσσα Χωρίς Συμφραζόμενα.

(γ) $L=\{a^n \mid n$ πρώτος αριθμός$\}$

Απόδειξη

Έστω ότι η L είναι τύπου 2, επομένως ικανοποιεί το Λήμμα Άντλησης για Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα. Έστω p ο αριθμός που αναφέρεται στο Λήμμα Άντλησης.

Εξετάζουμε τη λέξη

$z = a^k$, όπου k είναι πρώτος αριθμός και $k \geq p+2$

που ανήκει στη γλώσσα L και για την οποία ισχύει $|z|=k \geq p$

Σύμφωνα με το Λήμμα η z μπορεί να τριχοτομηθεί ως εξής:

$z = uvwxy$

και ισχύουν οι συνθήκες

(α) $|vx| \geq 1$

(β) $|vwx| \leq p$

(γ) $uv^iwx^iy \in L$, για κάθε $i \geq 0$

Έστω $|vx| = m$, $1 \leq m \leq p$

Άρα $|uwy| = |uvwxy| - |vx| = |a^k| - |vx| = k-m$

Σύμφωνα με τη συνθήκη γ

$uv^{k-m}wx^{k-m}y \in L$

Όμως

$|uv^{k-m}wx^{k-m}y| = |uwy| + (k-m)(|v|+|x|) = k-m + (k-m)(m) = (k-m)(m+1)$

το οποίο δεν είναι πρώτος αριθμός αφού

$k \geq p+2$ και $m \leq p$, επομένως $k-m>1$ και

$m \geq 1$, επομένως $m+1>1$, άρα $(k-m)(m+1)$ είναι γινόμενο αριθμών που είναι μεγαλύτεροι του 1.

Άρα $uv^{k-m}wx^{k-m}y \notin L$

Επομένως δεν υπάρχει τρόπος να τριχοτομηθεί η λέξη ώστε να ισχύουν και οι 3 συνθήκες του Λήμματος Άντλησης. Άρα, δεν ισχύει το Λήμμα Άντλησης για Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα. Επόμένως η γλώσσα L δεν είναι Γλώσσα Χωρίς Συμφραζόμενα.