

Κεφάλαιο 2

Σήματα και Συστήματα Συνεχούς Χρόνου

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα συζητήσουμε ορισμένα βασικά θέματα των σημάτων συνεχούς χρόνου. Επιπλέον, θα εισάγουμε μερικές βασικές έννοιες και ποιοτικές εξηγήσεις του “πώς και γιατί” της θεωρίας συστημάτων συνεχούς χρόνου, χτίζοντας έτσι ένα στερεό υπόβαθρο κατανόησης της ποσοτικής ανάλυσης που ακολουθεί στα επόμενα κεφάλαια.

2.2 Σήματα Συνεχούς Χρόνου

Από εδώ και στο εξής και μέχρι το τέλος του πρώτου μέρους, θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με σήματα (και συστήματα) συνεχούς χρόνου, τα οποία μπορεί να είναι αναλογικά ή ψηφιακά, περιοδικά ή απεριοδικά, ντετερμινιστικά ή στοχαστικά, ισχύος ή ενέργειας. Ορίζουμε λοιπόν ως *σήμα* μια συνάρτηση του χρόνου t και το συμβολίζουμε συνήθως ως $x(t)$.

Ίσως αναρωτιέστε γιατί αξίζει να μελετήσει κανείς σήματα και συστήματα συνεχούς χρόνου όταν η εποχή μας κυριαρχείται από ψηφιακά σήματα και συστήματα (που ουσιαστικά βασίζονται σε σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου). Μπορείτε άραγε να προσπεράσετε αυτό το πρώτο (μεγάλο και μαθηματικά βαρύ!) κομμάτι του συγγράμματος που κρατάτε στα χέρια σας και να κατευθυνθείτε στα απλούστερα μαθηματικά του διακριτού χρόνου; Η απάντηση είναι αρνητική και κάποιους λόγους σας καταγράφουμε παρακάτω:

1. Ο πραγματικός κόσμος είναι βυθισμένος σε σήματα αναλογικά ή/και συνεχούς χρόνου. Για την ψηφιακή επεξεργασία τους χρειάζεται να τα *δειγματοποιήσουμε*. Μια τέτοια διαδικασία μπορεί να γίνει σωστά μόνο αν γνωρίζουμε το *συχνотικό* περιεχόμενό τους. Αυτή η γνώση περνά αναγκαστικά μέσα από τη μελέτη των σημάτων στο συνεχή χρόνο.
2. Όλα τα σήματα υπάρχουν σε ψηφιακά συστήματα όπως ένας υπολογιστής είναι σήματα αναλογικά και συνεχούς χρόνου. Η μοντελοποίησή τους σε δυαδική μορφή μας επιτρέπει να παραβλέψουμε την πραγματική τους φύση. Όμως όλα τα συστήματα που ενώνουν τον κόσμο του διακριτού και του συνεχούς χρόνου είναι αναλογικά.
3. Η ανθρώπινη γνώση σχετικά με συστήματα συνεχούς χρόνου είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη για συστήματα ψηφιακού/διακριτού χρόνου. Ένας τρόπος αξιοποίησης όλης αυτής της γνώσης είναι η σχεδίαση συστημάτων πρώτα στο συνεχή χρόνο και η μεταφορά τους ύστερα στο διακριτό χρόνο.

2.2.1 Ενέργεια Σήματος

Ας ξεκινήσουμε από την τελευταία κατηγορία που συζητήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Μπορούμε άραγε να βρούμε έναν αριθμό που θα χαρακτηρίζει το μέγεθος ενός σήματος; Αν το σκεφτούμε λίγο, μπορούμε να θεωρήσουμε την περιοχή (εμβαδό) κάτω από το σήμα $x(t)$ ως μια πιθανή μετρική του μεγέθους του σήματος, επειδή λαμβάνει υπόψη του όχι μόνο το πλάτος αλλά και τη διάρκεια του σήματος. Όμως μια τέτοια μετρική θα ήταν προβληματική. Γιατί; Διότι ένα μεγάλης διάρκειας σήμα μπορεί να έχει περιοχές πάνω από τον οριζόντιο άξονα και περιοχές κάτω από αυτόν που αλληλοαναιρούνται ως περιοχές, με αποτέλεσμα η μετρική να μας δηλώνει ότι πρόκειται για μικρού μεγέθους σήμα (ακόμα και μηδενικού, αν οι περιοχές αλληλοαναιρούνται ακριβώς - σκεφτείτε ένα ημίτονο για παράδειγμα). Αυτή η δυσκολία μπορεί να ξεπεραστεί αν ορίσουμε το μέγεθος του σήματος ως την

περιοχή κάτω από την καμπύλη $x^2(t)$, η οποία είναι πάντα θετική. Αυτή η μετρική λέγεται **ενέργεια σήματος**, E_x , και ορίζεται ως

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.1)$$

για μιγαδικά σήματα, ενώ για πραγματικά σήματα, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad (2.2)$$

Κάποιος θα μπορούσε να σκεφτεί και άλλες μετρικές, όπως η περιοχή κάτω από την $|x(t)|$. Η μετρική που επιλέξαμε όμως είναι όχι μόνο πιο εύκολη να υπολογιστεί αλλά και έχει περισσότερο νόημα γιατί είναι ενδεικτική της ενέργειας που μπορεί να εξαχθεί από το σήμα, αν συνδέσει κανείς τα σήματα με τις τάσεις και τις εντάσεις ενός ηλεκτρικού κυκλώματος.

2.2.2 Ισχύς Σήματος

Η ενέργεια ενός σήματος πρέπει να είναι πεπερασμένος αριθμός ώστε να έχει νόημα. Μια αναγκαία (αλλά όχι και ικανή) συνθήκη για αυτό είναι το πλάτος του σήματος να τείνει στο 0 όταν $|t| \rightarrow \infty$. Αλλιώς, το ολοκλήρωμα της Σχέσης (2.2) δε συγκλίνει.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, όταν το πλάτος του σήματος δεν τείνει στο 0 όταν $|t| \rightarrow \infty$, η ενέργεια του σήματος είναι άπειρη. Τότε, μια μετρική με περισσότερο νόημα όσον αφορά το μέγεθος του σήματος θα ήταν η **χρονική μέση τιμή της ενέργειας**, αν υπάρχει. Αυτή η μετρική λέγεται **ισχύς σήματος**. Για ένα πραγματικό σήμα $x(t)$, ορίζουμε την ισχύ, P_x , ως

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \quad (2.3)$$

και φυσικά μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω σχέση και για μιγαδικά σήματα ως

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (2.4)$$

Παρατηρήστε ότι η ισχύς του σήματος $x(t)$ είναι η μέση τιμή του πλάτους του σήματος στο τετράγωνο. Η μέση τιμή μιας συνάρτησης σε ένα μεγάλο διάστημα που πλησιάζει το άπειρο υπάρχει αν η συνάρτηση είναι είτε περιοδική είτε έχει στατιστική κανονικότητα. Αν μια τέτοια συνθήκη δεν ικανοποιείται, η τιμή αυτή μπορεί να μην υπάρχει. Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = t$ αυξάνει συνεχώς όσο $t \rightarrow +\infty$ (και φθίνει χωρίς όριο όταν $t \rightarrow -\infty$, και δεν μπορούμε να ορίσουμε ούτε την ενέργεια ούτε την ισχύ του. Φυσικά, στην πράξη (ή στη φύση) δεν υπάρχουν σήματα ισχύος (αφού απαιτείται άπειρη διάρκεια), όλα τα σήματα που μπορούμε να δημιουργήσουμε είναι σήματα ενέργειας. Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.1:

Βρείτε τις καταλλήλες μετρικές μεγέθους των σημάτων που φαίνονται στο Σχήμα 2.1.

Λύση:

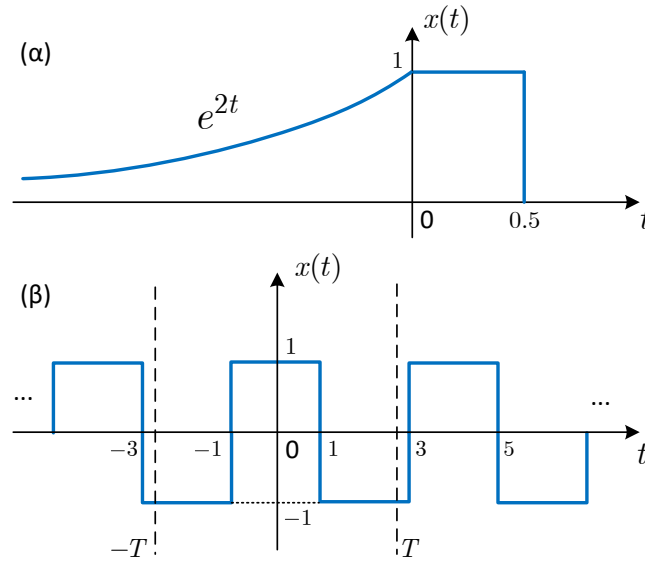
Στο Σχήμα 2.1(α), το πλάτος του σήματος τείνει στο μηδέν, όσο $|t| \rightarrow \infty$. Έτσι, μια κατάλληλη μετρική του μεγέθους του είναι η ενέργειά του.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^0 e^{4t} dt + \int_0^{\frac{1}{2}} 1^2 dt = \frac{3}{4} \quad (2.5)$$

Στο Σχήμα 2.1(β), το πλάτος του σήματος δεν τείνει στο μηδέν, όσο το $|t| \rightarrow \infty$. Όμως είναι περιοδικό, και έτσι υπάρχει η ισχύς του. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (2.3) για να βρούμε την ισχύ του, θέτοντας βολικές θέσεις για το T . Ας το δούμε.

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T}^{-1} (-1)^2 dt + \int_{-1}^1 1^2 dt + \int_1^T (-1)^2 dt \right) \quad (2.6)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\left[t \right]_{-T}^{-1} + \left[t \right]_{-1}^1 + \left[t \right]_1^T \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (1 + T + 2 + T - 1) \quad (2.7)$$



Σχήμα 2.1: Παράδειγμα Σημάτων (α) Ενέργειας και (β) Ισχύος.

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (2T + 2) = 1 \quad (2.8)$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε τη διαδικασία για περιοδικά σήματα (όπως αυτό του Σχήματος 2.1)(β)), απλά παρατηρώντας ότι ένα περιοδικό σήμα επαναλαμβάνεται περιοδικά (κάθε 4 δευτερολεπτα, εν προκειμένω). Έτσι, το να βρούμε τη μέση τιμή του $x^2(t)$ σε ένα άπειρο διάστημα είναι όμοιο με το να βρούμε τη μέση τιμή σε μια μόνο περίοδο. Έτσι,

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^3 x^2(t) dt = \frac{1}{4} \left(\int_{-1}^1 1^2 dt + \int_1^3 (-1)^2 dt \right) \quad (2.9)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\left[t \right]_{-1}^1 + \left[t \right]_1^3 \right) = \frac{1}{4} (2 + 3 - 1) = 1 \quad (2.10)$$

που είναι και το ίδιο αποτέλεσμα με παραπάνω.

■

Παράδειγμα 2.2:

Βρείτε την ισχύ των παρακάτω σημάτων:

(α') $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$

(β') $x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \theta_2), \quad f_1 \neq f_2$

(γ') $x(t) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t}, \text{ με } A \in \mathbb{C}$

Λύση:
Θα είναι

(α') Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = 1/f_0$. Η πιο βολική μετρική για αυτό το σήμα είναι η ισχύς του. Επειδή το σήμα είναι περιοδικό, μπορούμε να υπολογίσουμε την ισχύ του μετρώντας την ενέργειά του σε μια περίοδο T_0 . Όμως, θα χρησιμοποιήσουμε εδώ τον ορισμό, για να δείτε πως δουλεύει. Είναι

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^T [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\theta)] dt \quad (2.11)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^T dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^T \cos(4\pi f_0 t + 2\theta) dt \quad (2.12)$$

Ο πρώτος όρος είναι ίσος με $A^2/2$. Επίσης, ο δεύτερος όρος είναι μηδέν, γιατί το ολοκλήρωμα αναπαριστά

ένα εμβαδό κάτω από το ημίτονο σε πολύ ένα μεγάλο διάστημα διάρκειας $2T$, με $T \rightarrow \infty$. Άρα

$$P_x = \frac{A^2}{2} \quad (2.13)$$

Αυτό μας δείχνει ότι ένα ημίτονο με πλάτος A έχει ισχύ $A^2/2$, ανεξαρτήτως της τιμής της συχνότητας f_0 (φυσικά πρέπει $f_0 \neq 0$) και της φάσης θ . Σε περίπτωση που $f_0 = \theta = 0$, δείξτε εσείς – εξάσκηση! ☹– ότι η ισχύς είναι ίση με A^2 .

(β') Θα έχουμε

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [A_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \theta_2)]^2 dt \quad (2.14)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A_1^2 \cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A_2^2 \cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2) dt \quad (2.15)$$

$$+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_1 A_2}{T} \int_{-T}^T \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) dt \quad (2.16)$$

Τα δυο πρώτα ολοκληρώματα είναι οι ισχύεις των δυο συνημιτόνων, άρα είναι ίσα με $A_1^2/2$ και $A_2^2/2$, μια και το δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Όμοια με το πρώτο ερώτημα, βλέπουμε ότι το τρίτο ολοκλήρωμα είναι μηδέν, άρα¹

$$P_x = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} \quad (2.17)$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γενικευτεί σε ένα άθροισμα ημιτόνων με διακριτές συχνότητες

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi f_k t + \theta_k) \quad (2.18)$$

και τότε η ισχύς θα είναι

$$P_x = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \quad (2.19)$$

(γ') Σε αυτήν την περίπτωση, το σήμα είναι μιγαδικό, και άρα θα έχουμε

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} \right|^2 dt \quad (2.20)$$

Όμως ισχύει ότι $|e^{j2\pi f_0 t}| = 1$, και έτσι $\left| \frac{A}{2} e^{j\pi f_0 t} \right|^2 = \left| \frac{A}{2} \right|^2$ και τέλος

$$P_x = \frac{|A|^2}{4} \quad (2.21)$$

Αυτό ήταν λίγο-πολύ αναμενόμενο, καθώς είδαμε πιο πριν ότι ένα ημίτονο πλάτους A έχει ισχύ $A^2/2$. Γνωρίζουμε από τις σχέσεις του Euler ότι ένα ημίτονο αποτελείται από δυο συζυγείς μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις ως

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (2.22)$$

Θα μπορούσε να υποφιαστεί κανείς ότι η συνολική ισχύς του ημιτόνου καταναίμεται εξίσου και εξ ημισείας στις δυο αυτές μιγαδικές συνιστώσες, αφού καθεμιά έχει πλάτος $A/2$, με την κάθε μια να λαμβάνει ισχύ $|A|^2/4$, πράγμα που επιβεβαιώθηκε αναλυτικά παραπάνω.

■

Εν κατακλείδει, μπορούμε με βάση τα παραπάνω να διαχωρίζουμε αν ένα σήμα $x(t)$ είναι σήμα ενέργειας ή ισχύος ως εξής:

¹ Αυτό ισχύει μόνον αν $f_1 \neq f_2$. Τι συμβαίνει όταν $f_1 = f_2$;

Σήματα Ενέργειας και Ισχύος

• Σήμα ενέργειας:

- Το πλάτος και η διάρκεια του σήματος είναι πεπερασμένα.
- Αν το πλάτος είναι πεπερασμένο αλλά όχι και η διάρκεια, τότε αναγκαία συνθήκη είναι η $x(t) \rightarrow 0$ όταν $|t| \rightarrow \infty$. Η συνθήκη αυτή όμως δεν είναι και ικανή^α.

• Σήμα ισχύος:

- Εμφανίζει περιοδικότητα με περίοδο T_0 και απολύτως φραγμένο πλάτος, δηλ.

$$|x(t)| < M_x, \quad \forall t \text{ και } M_x \in \mathbb{R} \quad (2.24)$$

- Δεν εμφανίζει περιοδικότητα, αλλά η διάρκεια του σήματος είναι άπειρη με το πλάτος του να είναι απολύτως φραγμένο.

^αΔείτε ότι παρ' όλο που το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{t}}, & t \geq 1 \end{cases} \quad (2.23)$$

φθίνει στο μηδέν όταν $|t| \rightarrow \infty$, η ενέργειά του είναι άπειρη!

Αν δεν ισχύει τίποτε από τα παραπάνω, το σήμα δεν είναι ούτε ενέργειας ούτε ισχύος. Φυσικά υπάρχουν συναρτήσεις που ικανοποιούν τα παραπάνω κριτήρια αλλά δεν αποτελούν σήματα ενέργειας ή ισχύος. Όμως αυτές δεν είναι τίποτε άλλο από μαθηματικές “κατασκευές” και δεν έχουν ιδιαίτερη πρακτική σημασία, ούτε απαντώνται στη φύση ή στο εργαστήριο.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.3:

Ελέγξτε ποιά από τα παρακάτω σήματα είναι ενέργειας, ισχύος, ή τίποτε από τα δύο.

(α') $x(t) = e^{at}, \quad a > 0, \quad t \geq 0$

(β') $x(t) = e^{at}, \quad a < 0, \quad t \geq 0$

(γ') $x(t) = 2 \sin(2\pi t)$, αν γνωρίζετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 0$.

(δ') $x(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

(ε') $x(t) = e^{2t}, \quad t \in [0, 1]$

Λύση:

α') Το σήμα δεν είναι ούτε ενέργειας, ούτε ισχύος. Είναι άπειρης διάρκειας, μη περιοδικό, με μη φραγμένο πλάτος σήματος.

β') Πιθανόν να είναι σήμα ενέργειας, γιατί είναι άπειρης διάρκειας και $|x(t)| \rightarrow 0$ όταν $t \rightarrow +\infty$. Ας το ελέγξουμε.

$$E_x = \int_0^{+\infty} (e^{at})^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{2at} dt = \frac{1}{2a} (\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{2at} - 1) = \frac{1}{2a} (0 - 1) = -\frac{1}{2a}, \quad a < 0 \quad (2.25)$$

γ') Είναι σήμα ισχύος, γιατί είναι περιοδικό με φραγμένο πλάτος. Ας το λύσουμε αναλυτικά.

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T 4 \sin^2(2\pi t) dt \quad (2.26)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2}{T} \int_{-T}^T \sin^2(2\pi t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2}{T} \int_{-T}^T \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\pi t \right) dt \quad (2.27)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T}^T dt - \frac{1}{T} \int_{-T}^T \cos 4\pi t dt \right) \quad (2.28)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} 2T - \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{4\pi} \sin 4\pi t \Big|_{-T}^T \right) \quad (2.29)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{4\pi T} (\sin 4\pi T + \sin 4\pi T) \right) \quad (2.30)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{2 \sin 4\pi T}{4\pi T} \right) = 2 - \lim_{T \rightarrow +\infty} 2 \frac{\sin 4\pi T}{4\pi T} = 2 - 0 = 2 \quad (2.31)$$

Άρα $P_x = 2$. Φυσικά ήταν αναμενόμενο, μια και νωρίτερα δείξαμε ότι η ισχύς ενός ημιτόνου ισούται με το πλάτος του σήματος στο τετράγωνο δια δυο.

δ') Είναι άπειρης διάρκειας και φραγμένου πλάτους, άρα είναι σήμα ισχύος.

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^0 (-1)^2 dt + \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T 1^2 dt \quad (2.32)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \Big|_{-T}^0 + \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \Big|_0^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} T + \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} T \quad (2.33)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (2.34)$$

ε') Είναι σήμα πεπερασμένης διάρκειας και πλάτους, άρα είναι σήμα ενέργειας.

$$E_x = \int_0^1 e^{4t} dt = \frac{1}{4} (e^4 - 1) \quad (2.35)$$

■

2.3 Μετασχηματισμοί Σημάτων

Ένα πολύ σημαντικό κομμάτι της ανάλυσης σημάτων και συστημάτων είναι αυτό του μετασχηματισμού ενός σήματος. Για παράδειγμα, όταν θέλουμε να τροποποιήσουμε σήματα ήχου ή ομιλίας (audio transformations) ώστε να ακούγονται σε υψηλότερη ή χαμηλότερη ταχύτητα αναπαραγωγής, τότε πρέπει να μετασχηματίσουμε τη μεταβλητή του χρόνου. Επίσης, στα συστήματα σύνθεσης ομιλίας από κείμενο που βασίζονται στη συνένωση ηχογραφημένων τμημάτων φωνής (concatenated speech synthesis), το σήμα εισόδου (ομιλία) υφίσταται κάποιες τροποποιήσεις, όπως για παράδειγμα η χρονική ολίσθηση, με σκοπό την εύρεση της βέλτιστης θέσης συνένωσης μεταξύ διαδοχικών τμημάτων ηχογράφησης, και κατά συνέπεια την αύξηση της ποιότητας της σύνθεσης. Τέλος, στα συστήματα ραντάρ (aircraft detection), το σήμα που ανακλάται από το αεροσκάφος συσχετίζεται με το σήμα που εστάλη από τη συσκευή ραντάρ ώστε να βρεθεί η θέση και η ταχύτητα του αεροσκάφους.

Εδώ θα συζητήσουμε τρεις χρήσιμους και πολύ απλούς μετασχηματισμούς σημάτων οι οποίοι εκτελούνται επάνω στην ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλ. του χρόνου: *χρονική ολίσθηση*, *κλιμάκωση*, και *αντιστροφή*. Όπως θα δείτε αμέσως, οι μετασχηματισμοί αυτοί δεν είναι τίποτε περισσότερο από απλές πράξεις επάνω στην ανεξάρτητη μεταβλητή t .

2.3.1 Χρονική Ολίσθηση

Θεωρήστε ένα σήμα $x(t)$ και το ίδιο σήμα καθυστερημένο κατά t_0 δευτερόλεπτα, το οποίο συμβολίζουμε με $y(t)$. Ό,τι συμβαίνει στο σήμα $x(t)$, συμβαίνει και στο σήμα $y(t)$ με καθυστέρηση T δευτερόλεπτα. Άρα

$$y(t+T) = x(t) \quad (2.36)$$

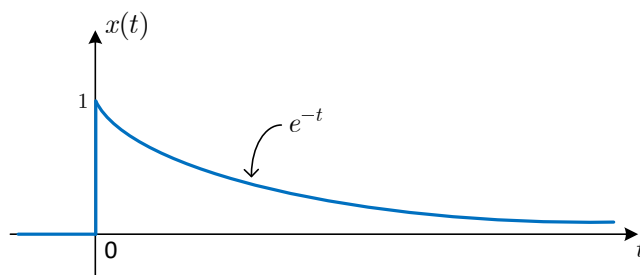
και

$$y(t) = x(t-T) \quad (2.37)$$

Έτσι, για να ολισθήσουμε χρονικά ένα σήμα κατά t_0 , αντικαθιστούμε το t με το $t - t_0$. Έτσι, το $x(t - t_0)$ αντιπροσωπεύει το $x(t)$, έχοντας υποστεί ολίσθηση κατά t_0 δευτερόλεπτα. Αν το t_0 είναι θετικό, η ολίσθηση είναι προς τα δεξιά (καθυστερήση), αλλιώς η ολίσθηση είναι προς τα αριστερά (προήγηση). Έτσι, το $x(t - 2)$ είναι το $x(t)$ καθυστερημένο κατά 2 δευτερόλεπτα, και το $x(t + 2)$ είναι το $x(t)$ που προηγείται 2 δευτερόλεπτα. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.4:

Μια εκθετική συνάρτηση που φαίνεται στο Σχήμα 2.2 καθυστερεί κατά $t_0 = 1$ δευτερόλεπτο.



Σχήμα 2.2: Χρονική ολίσθηση σήματος Παραδείγματος 2.4.

Σχεδιάστε και περιγράψτε μαθηματικά την ολισθημένη συνάρτηση. Επαναλάβετε αν η $x(t)$ προηγείται κατά $t_0 = 1$ δευτερόλεπτο.

Λύση:

Το σήμα του Σχήματος 2.2 μπορεί να παρασταθεί μαθηματικά ως

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

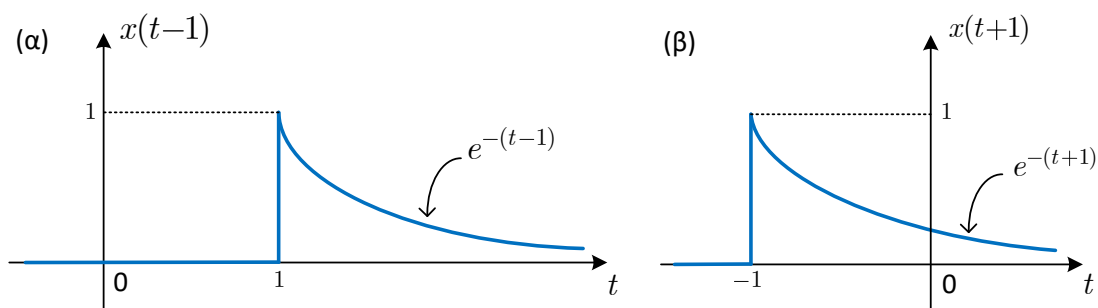
και έστω ότι $x_d(t) = x(t - 1)$ είναι η καθυστερημένη συνάρτηση (μετατοπισμένη προς τα δεξιά) κατά $t_0 = 1$ δευτερόλεπτο, όπως στο Σχήμα 2.3(α). Η μαθηματική της περιγραφή προκύπτει αντικαθιστώντας όπου t το $t - 1$. Άρα

$$x(t) = \begin{cases} e^{-(t-1)}, & t - 1 > 0 \Leftrightarrow t > 1 \\ 0, & t - 1 < 0 \Leftrightarrow t < 1 \end{cases} \quad (2.39)$$

Έστω ότι $x_a(t) = x(t + 1)$ είναι η συνάρτηση που προηγείται (μετατόπιση προς τα αριστερά) κατά $t_0 = 1$ δευτερόλεπτο, όπως στο Σχήμα 2.3(β). Η μαθηματική της περιγραφή προκύπτει αντικαθιστώντας το t με το $t + 1$. Άρα

$$x(t) = \begin{cases} e^{-(t+1)}, & t + 1 > 0 \Leftrightarrow t > -1 \\ 0, & t + 1 < 0 \Leftrightarrow t < -1 \end{cases} \quad (2.40)$$

■



Σχήμα 2.3: Χρονική ολίσθηση ενός σήματος: σήμα (α) καθυστερημένο κατά $t_0 = 1$ δευτερόλεπτο, (β) προηγούμενο κατά $t_0 = 1$ δευτερόλεπτο.

2.3.2 Χρονική Κλιμάκωση

Η συμπίεση ή η διαστολή ενός σήματος στο χρόνο είναι γνωστή ως χρονική κλιμάκωση. Θεωρήστε το σήμα $x(t)$ και το σήμα $y(t) = x(at)$, δηλ. το $x(t)$ κλιμακώμενο στο χρόνο με παράγοντα $0 < a < 1$. Έτσι, ό,τι συμβαίνει

στο σήμα $x(t)$ σε κάποιο χρόνο t , επίσης συμβαίνει στο $y(t)$ αλλά σε χρόνο t/a , έτσι ώστε

$$y(t/a) = x(t) \quad (2.41)$$

Με παρόμοιο συλλογισμό, μπορούμε να δείξουμε ότι αν το $x(t)$ αν κλιμακωθεί στο χρόνο κατά παράγοντα $a > 1$ δίνεται ως

$$y(t) = x\left(\frac{t}{a}\right) \quad (2.42)$$

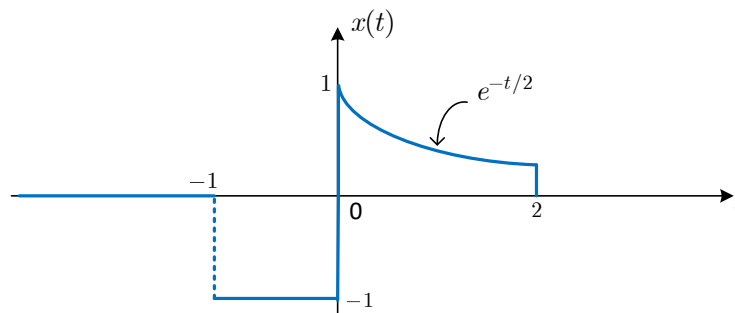
έτσι ώστε

$$y(at) = x(t) \quad (2.43)$$

Συνοψίζοντας, για να κάνουμε χρονική κλιμάκωση ενός σήματος κατά ένα παράγοντα a , αντικαθιστούμε το t με το at . Αν $a > 1$, η κλιμάκωση μετατρέπεται σε χρονική συμπίεση, ενώ αν $0 < a < 1$, η κλιμάκωση γίνεται χρονική διαστολή.

Παράδειγμα 2.5:

Το Σχήμα 2.4 δείχνει ένα σήμα $x(t)$.



Σχήμα 2.4: Χρονική κλιμάκωση σήματος Παραδείγματος 2.5.

Σχεδιάστε και περιγράψτε μαθηματικά το συμπίεμένο κατά παράγοντα 2 σήμα. Επαναλάβετε για το διεσταλμένο κατά παράγοντα 2 σήμα.

Λύση:

Το σήμα $x(t)$ μπορεί να περιγραφεί ως

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -1 < t < 0 \\ e^{-t/2}, & 0 < t < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.44)$$

Το Σχήμα 2.5(α) δείχνει το σήμα $x_e(t)$, που είναι το $x(t)$ με χρονική διαστολή κατά παράγοντα $a = 2$. Κατά συνέπεια, μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως $x(t/2)$, που προκύπτει αντικαθιστώντας το t με το $t/2$. Έτσι:

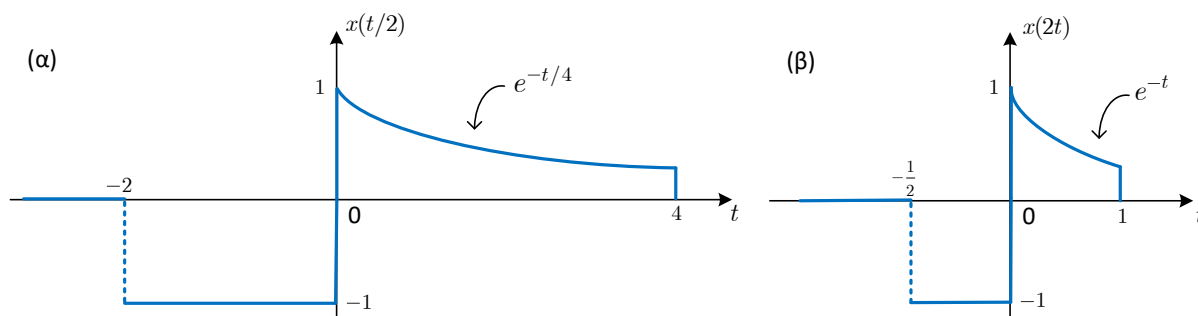
$$x_e(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} -1, & -1 < t/2 < 0 \Leftrightarrow -2 < t < 0 \\ e^{-t/4}, & 0 < t/2 < 2 \Leftrightarrow 0 < t < 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.45)$$

Παρατηρήστε τις χρονικές στιγμές $t = -1$ και $t = 2$ στο σήμα $x(t)$: ανταποκρίνονται στις χρονικές στιγμές $t = -2$ και $t = 4$ στο συμπίεμένο σήμα $x(t/2)$.

Το Σχήμα 2.5(β) δείχνει το σήμα $x_c(t)$, που είναι συμπίεμένο κατά παράγοντα $a = 2$. Κατά συνέπεια, μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως $x(2t)$, που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το t με το $2t$, έτσι:

$$x_c(t) = \begin{cases} -1, & -1 < 2t < 0 \Leftrightarrow -0.5 < t < 0 \\ e^{-t/2}, & 0 < 2t < 2 \Leftrightarrow 0 < t < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.46)$$

Παρατηρήστε ότι οι χρονικές στιγμές $t = -1$ και $t = 2$ στο σήμα $x(t)$ ανταποκρίνονται στις χρονικές στιγμές



Σχήμα 2.5: Χρονική κλιμάκωση ενός σήματος: σήμα (α) διεσταλμένο κατά παράγοντα $a = 2$, (β) συμπιεσμένο κατά παράγοντα $a = 2$.

$t = -0.5$ και $t = 1$ στο συμπιεσμένο σήμα $x(2t)$.

2.3.3 Χρονική Αντιστροφή

Θεωρήστε ένα σήμα $x(t)$. Για να αντιστρέψουμε χρονικά το $x(t)$, το περιστρέφουμε κατά 180 μοίρες γύρω από τον κατακόρυφο άξονα. Σκεφτείτε αυτήν την περιστροφή ως μια ανάκλαση του σήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα. Αυτή η κίνηση μας δίνει το $y(t) = x(-t)$. Έτσι

$$y(-t) = x(t) \quad (2.47)$$

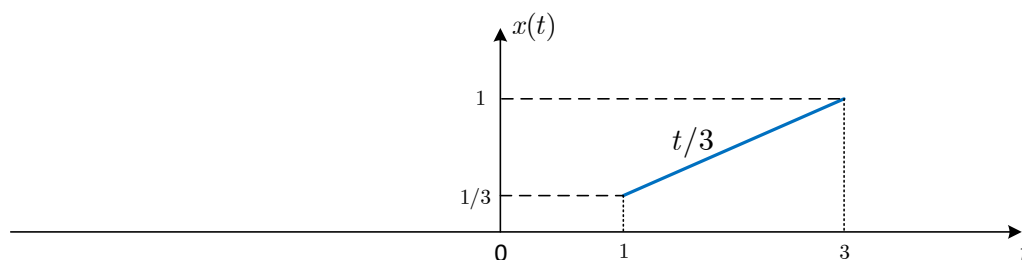
έτσι ώστε

$$y(t) = x(-t) \quad (2.48)$$

Άρα, για να αντιστρεψουμε χρονικά ένα σήμα, αντικαθιστούμε το t με το $-t$. Έτσι, η αντιστροφή χρόνου του $x(t)$ μας δίνει το $x(-t)$.

Παράδειγμα 2.6:

Για το σήμα του Σχήματος 2.6,



Σχήμα 2.6: Χρονική αντιστροφή σήματος Παραδείγματος 2.6.

σχεδιάστε το $x(-t)$, που είναι το ανεστραμμένο $x(t)$.

Λύση:

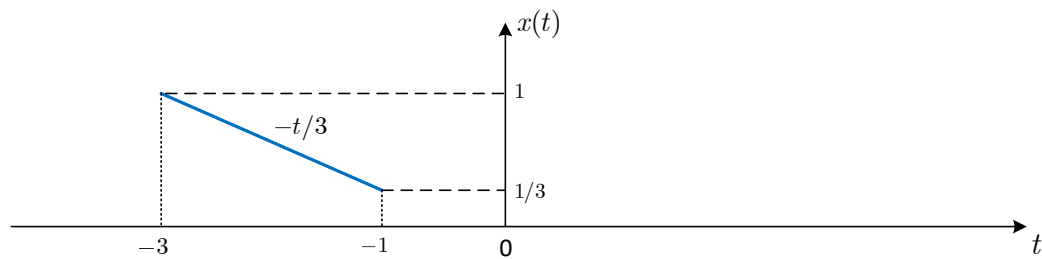
Τις χρονικές στιγμές 1 και 3 του $x(t)$ αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές -1 και -3 στο $x(-t)$. Επειδή $x(t) = t/3$, έχουμε $x(-t) = -t/3$. Μπορούμε να περιγράψουμε τα σήματα ως

$$x(t) = \begin{cases} t/3, & 1 < t < 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.49)$$

και η αντεστραμμένη έκδοση του $x(t)$, δηλ. το $x(-t)$ προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το t με το $-t$ στο $x(t)$ ως

$$x(-t) = \begin{cases} -t/3, & 1 < -t < 3 \Leftrightarrow -3 < t < -1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.50)$$

Το σήμα $x(-t)$ φαίνεται στο Σχήμα 2.7.



Σχήμα 2.7: Χρονική αντιστροφή ενός σήματος.

2.4 Μερικά χρήσιμα μοντέλα σημάτων

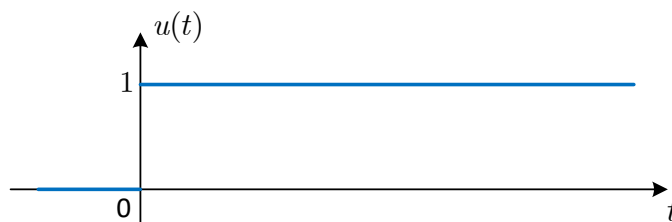
Σε αυτήν την παράγραφο θα γνωρίσουμε μερικά σήματα που θα αποδειχθούν πολύ χρήσιμα στη συνέχεια. Τα περισσότερα από αυτά αποτελούν “πρότυπα” για κάποια ιδανική φυσική διαδικασία, αποτελούν δηλαδή *μοντέλα* σημάτων. Αυτά είναι τέσσερα: (α) η βηματική συνάρτηση (step function), (β) ο τετραγωνικός παλμός (rectangular pulse), (γ) ο τριγωνικός παλμός (triangular pulse), και (δ) η κρουστική συνάρτηση Δέλτα (Delta function).

2.4.1 Η βηματική συνάρτηση $u(t)$

Σε πολλά από τα παραδείγματά μας ως τώρα, τα σήματά μας έχουν μηδενικές τιμές για $t < 0$, δηλ. ξεκινούν τη χρονική στιγμή $t = 0$. Αυτά τα σήματα λέγονται *αιτιατά*, για λόγους που θα γίνουν εμφανείς αργότερα. Τέτοια σήματα μπορούν να περιγραφούν εύκολα με τη χρήση της περίφημης *βηματικής συνάρτησης* $u(t)$, της οποίας ο ορισμός είναι πολύ απλός:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

Μπορείτε να φανταστείτε τη βηματική συνάρτηση ως ένα σήμα-“διακόπτη”, που είναι μηδέν για $t < 0$ (κλειστός διακόπτης) και γίνεται μονάδα για $t > 0$ (ανοικτός διακόπτης). Αν θέλουμε λοιπόν ένα σήμα μας να ξεκινάει από το $t = 0$ (δηλ. να έχει μηδενικές τιμές για $t < 0$), απλά το πολλαπλασιάζουμε με τη βηματική συνάρτηση $u(t)$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 2.8. Αντίστοιχα, αν θέλουμε να ξεκινάει από μια χρονική στιγμή



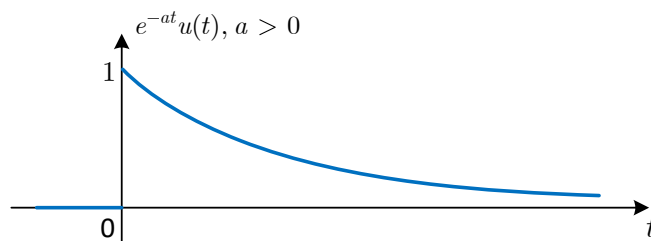
Σχήμα 2.8: Η βηματική συνάρτηση $u(t)$.

$t = t_0 > 0$, το πολλαπλασιάζουμε με τη βηματική $u(t - t_0)$. Για παράδειγμα, το σήμα e^{-at} , $a > 0$ αναπαρίσταται γραφικά ως ένα άπειρης διάρκειας εκθετικό που ξεκινά από το $t = -\infty$. Αν θέλουμε να βρούμε την αιτιατή του μορφή, απλά θα πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε με τη βηματική συνάρτηση, παίρνοντας τη γραφική παράσταση του Σχήματος 2.9 και η μαθηματική μορφή θα είναι φυσικά η $e^{-at}u(t)$. Η βηματική απόκριση αποδεικνύεται επίσης πολύ χρήσιμη στην περιγραφή συναρτήσεων που έχουν ανά διαστήματα διαφορετικές μαθηματικές αναπαραστάσεις. Αυτά τα σήματα έχουν διαφορετική μαθηματική περιγραφή ανά τμήματα του χρόνου. Μια τέτοια σύνθετη περιγραφή αποδεικνύεται άβολη όταν θέλουμε να κάνουμε πράξεις με σήματα. Αν όμως χρησιμοποιήσουμε τη βηματική συνάρτηση, τότε θα έχουμε μια και μόνο μαθηματική έκφραση για κάθε τιμή του t !

2.4.2 Ο Τετραγωνικός Παλμός

Ο τετραγωνικός παλμός είναι πολύ χρήσιμος και θα τον χρησιμοποιήσουμε αρκετά στη συνέχεια, οπότε ας του δώσουμε ένα βολικό όνομα κι έναν ορισμό. Ας τον πούμε *rect*, από τη συντομογραφία του *rectangular*². Οπότε

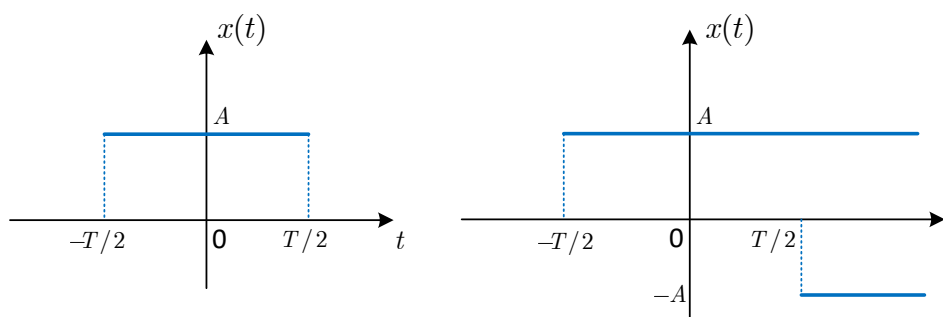
²Τετραγωνικός, στα Αγγλικά.

Σχήμα 2.9: Η αιτιατή εκθετική συνάρτηση $e^{-at}u(t)$, $a > 0$.

ας ορίσουμε ότι

$$\text{παλμός πλάτους } A \text{ στο διάστημα } \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A, & t \in (-T/2, T/2) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.52)$$

όπως στο Σχήμα 2.10. Παρατηρήστε ότι η διάρκεια του παλμού αναφέρεται ως παρονομαστής του ορίσματος της



Σχήμα 2.10: Ορισμός βασικού παλμού με βηματικές συναρτήσεις.

$\text{rect}(\cdot)$. Από τον ορισμό φαίνεται ότι ο παλμός είναι άρτια συνάρτηση του t . Έτσι, ο παλμός θα γραφτεί με χρήση βηματικών ως

$$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) = A(u(t - (-T/2)) - u(t - T/2)) = A\left(u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) \quad (2.53)$$

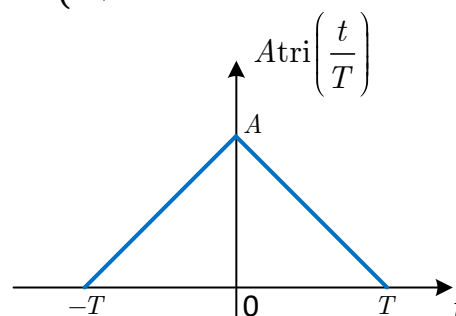
2.4.3 Ο Τριγωνικός Παλμός

Αντίστοιχα μπορεί να οριστεί ο *τριγωνικός* παλμός, τον οποίο θα συμβολίζουμε ως *tri*, από τη συντομογραφία του *triangular*³. Οπότε ας ορίσουμε ότι

$$\text{τριγωνικός παλμός πλάτους } A \text{ στο διάστημα } (-T, T) = \text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right), & t \in (-T, T) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.54)$$

όπως στο Σχήμα 2.11.

Από τον ορισμό φαίνεται ότι ο τριγωνικός παλμός είναι επίσης άρτια συνάρτηση του t . Παρατηρήστε ότι η *μισή* διάρκεια του τριγωνικού παλμού αναφέρεται ως παρονομαστής του ορίσματος της $\text{tri}(\cdot)$ - σε αντίθεση με τον τετραγωνικό παλμό, όπου όλη η διάρκειά του εμφανιζόταν ως παρονομαστής στο όρισμα του rect . Ο λόγος αυτής της “ασυνέπειας” στο συμβολισμό θα φανεί στη συνέχεια.



Σχήμα 2.11: Τριγωνικός παλμός.

2.4.4 Κρουστική Συνάρτηση Δέλτα $\delta(t)$

Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα (ή συνάρτηση Δέλτα απλά, ή ακόμα απλούστερα, $\delta(t)$, από δω και πέρα), είναι μια από τις σημαντικότερες συναρτήσεις στην ανάλυση σημάτων και συστημάτων. Ακριβέστερα, δε θα έλεγε

³Τριγωνικός, στα Αγγλικά.

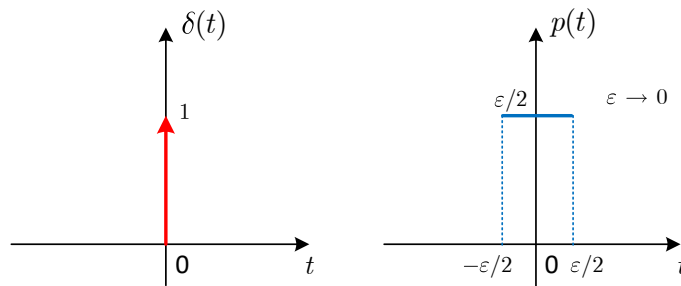
κανείς ότι η συνάρτηση Δέλτα είναι συνάρτηση με την αυστηρή έννοια του όρου. Η συνάρτηση Δέλτα είναι μια γενικευμένη συνάρτηση⁴ ή αλλιώς μια κατανομή. Θα κρατήσουμε τον όρο συνάρτηση Δέλτα, αλλά θα έχουμε πάντα υπ' όψη μας ότι η συνάρτηση Δέλτα δεν είναι συνάρτηση με τη συνήθη έννοια του όρου - όπως άλλωστε θα γίνει εμφανές στη συζήτηση που ακολουθεί.

Η συνάρτηση Δέλτα ορίζεται ως

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (2.55)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.56)$$

Βλέπετε ότι η συνάρτηση Δέλτα δεν ορίζεται με κάποιο κλειστό τύπο όπως οι περισσότερες συναρτήσεις. Μπορούμε όμως να φανταστούμε τη συνάρτηση Δέλτα ως μια ψηλή, πολύ πολύ στενή “έκδοση” του τετραγωνικού παλμού που είδαμε νωρίτερα, με μοναδιαίο εμβαδό (όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα της Σχέσης (2.56)). Η διάρκεια ϵ του παλμού θα έχει πολύ πολύ μικρή τιμή $\epsilon \rightarrow 0$. Έτσι, το ύψος του παλμού θα έχει πολύ μεγάλη τιμή, $\frac{1}{\epsilon}$ (για να ικανοποιείται η σχέση του εμβαδού $\frac{1}{\epsilon} \epsilon = 1$). Οπότε, η συνάρτηση Δέλτα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τετραγωνικός παλμός με απειροστά μικρή διάρκεια, και απειροστά μεγάλο πλάτος, αλλά εμβαδό ίσο με μονάδα! Περίεργο, έτσι δεν είναι; ©Το Σχήμα 2.12 δείχνει τη θεωρητική αναπαράσταση της συνάρτησης Δέλτα, και την προσέγγισή της από τετραγωνικό παλμό, όπως την εξηγήσαμε μόλις. Τι είναι λοιπόν αυτό το τόσο σπουδαίο που καθιστά τη



Σχήμα 2.12: Συνάρτηση Δέλτα: ορισμός και προσέγγισή της.

συνάρτηση Δέλτα χρήσιμη για τους μηχανικούς; Ίσως έχετε ήδη καταλάβει ότι η συνάρτηση Δέλτα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσομοιώσει ένα ακαριαίας φύσως σήμα, που δρα στιγμιαία και ύστερα εξαφανίζεται. Ένα τέτοιο - θεωρητικό - σήμα είναι πολύ χρήσιμο στη μελέτη των συστημάτων, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

2.4.4.1 Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα

Ας δούμε τι συμβαίνει όταν πολλαπλασιάσουμε τη συνάρτηση Δέλτα με μια άλλη συνάρτηση $x(t)$, η οποία είναι συνεχής στο $t = 0$. Αφού η συνάρτηση Δέλτα είναι μη μηδενική μόνο για $t = 0$, και η τιμή της $x(t)$ για $t = 0$ είναι προφανώς $x(0)$, τότε θα έχουμε

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad (2.57)$$

Όμοια, αν η $x(t)$ πολλαπλασιαστεί από μια μετατοπισμένη έκδοση της $\delta(t)$, έστω την $\delta(t - T)$ (η οποία είναι μια συνάρτηση Δέλτα τη χρονική στιγμή $t = T$), θα έχουμε

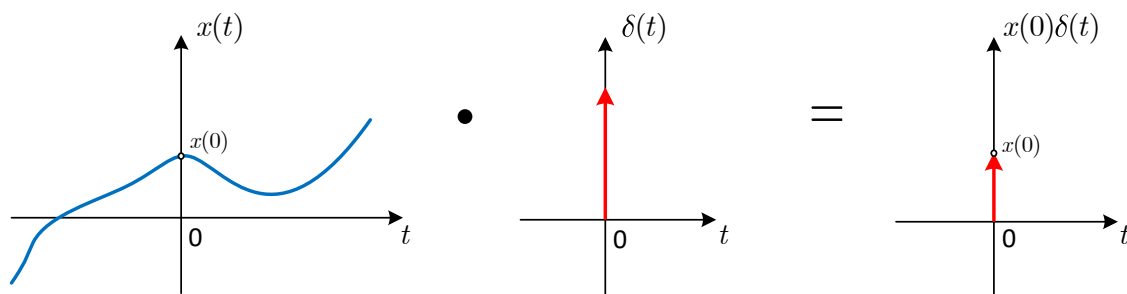
$$x(t)\delta(t - T) = x(T)\delta(t - T) \quad (2.58)$$

Τι σημαίνουν τα παραπάνω; Σημαίνουν ότι ο πολλαπλασιασμός μιας συνάρτησης Δέλτα με μια συνάρτηση $x(t)$, μας δίνει την ίδια συνάρτηση Δέλτα με πλάτος την τιμή της συνάρτησης $x(t)$ τη χρονική στιγμή που ορίζεται η συνάρτηση Δέλτα! Με άλλα λόγια, η συνάρτηση Δέλτα μπορεί να δειγματοληπτήσει μια άλλη συνάρτηση, ανάλογα με τη θέση (χρονική στιγμή) που θα διαλέξουμε να την τοποθετήσουμε! Αυτή η ιδιότητα φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 2.13.

Άρα, αν έχουμε ένα κάπως ασυνήθιστο σήμα, που ορίζεται μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, όπως το

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t = -2 \\ -1, & t = 0 \\ 2, & t = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.59)$$

⁴Μια γενικευμένη συνάρτηση ορίζεται από την επίδρασή της σε άλλες συναρτήσεις ή από τις τιμές της για κάθε χρονική στιγμή t .



Σχήμα 2.13: Διεγματοληπτική ικανότητα συνάρτησης Δέλτα.

τότε η συνάρτηση Δέλτα θα μας βοηθήσει να το γράψουμε ως

$$x(t) = 1\delta(t+2) - 1\delta(t) + 2\delta(t-3) \quad (2.60)$$

Τώρα, αν ολοκληρώσουμε τη Σχέση (2.57), θα έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = x(0) \quad (2.61)$$

δεδομένου πάντα ότι η $x(t)$ είναι συνεχής στο $t=0$. Μπορούμε να ερμηνεύσουμε την παραπάνω σχέση ως εξής: το εμβαδό του γινομένου μιας συνάρτησης $x(t)$ με τη συνάρτηση Δέλτα ισούται με την τιμή της συνάρτησης τη χρονική στιγμή $t=0$.

Μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω σχέση ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t \pm T)dt = x(\mp T) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t \pm T)dt = x(\mp T) \quad (2.62)$$

Η ερμηνεία της παραπάνω σχέσης είναι ακριβώς η ίδια με προηγουμένως, μόνο που πλέον η τιμή της συνάρτησης εξαρτάται από τη θέση της συνάρτησης Δέλτα.

Παραπάνω είδατε κάποιες πράξεις που μπορούν να γίνουν με τη συνάρτηση Δέλτα. Αυτό δε σημαίνει ότι όλες οι κοινές πράξεις που γίνονται σε συνήθεις συναρτήσεις μπορούν να γίνουν και με τη συνάρτηση Δέλτα. Για παράδειγμα, επιτρέπεται η ολίσθηση, καθώς και το άθροισμα με άλλες συναρτήσεις. Δε θα προτείναμε να την υψώσετε στο τετράγωνο, να υψώσετε στο τετράγωνο τη μεταβλητή t του ορίσμά της, ή να την πολλαπλασιάσετε με μια συνάρτηση που δεν είναι συνεχής στο σημείο που βρίσκεται η συνάρτηση Δέλτα.

Η συνάρτηση Δέλτα έχει επιπλέον τις ακόλουθες ιδιότητες, οι οποίες παρατίθενται χωρίς απόδειξη (Άσκηση XXXX).

$$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|}, \quad a \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.63)$$

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (2.64)$$

2.4.4.2 Σχέση Συνάρτησης Δέλτα και Βηματικής Συνάρτησης

Τέλος, μια πολύ σημαντική ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα είναι ότι ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t) \quad (2.65)$$

δηλ. η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης που είδαμε νωρίτερα ισούται με τη συνάρτηση Δέλτα. Το “μυστικό” αυτής της σχέσης είναι ότι αν σκεφτούμε τη βηματική συνάρτηση ως μια ασυνέχεια (μια και από την τιμή 0 αλλάζει ακαριαία στην τιμή 1, όταν $t=0$), τότε μόλις ορίσαμε την παράγωγο της ασυνέχειας!⁵

Κατ’ αρχάς, γνωρίζετε ότι μια συνάρτηση που είναι ασυνεχής σε ένα σημείο - όπως η βηματική συνάρτηση - δεν μπορεί να έχει παράγωγο με τη συνήθη έννοια. Ας κάνουμε όμως την ερώτηση: “αν η βηματική συνάρτηση $u(t)$ είχε παράγωγο $\frac{d}{dt}u(t)$, τότε ποιές θα ήταν οι ιδιότητές της;” Ας ξεκινήσουμε από τα απλά: προφανώς η βηματική συνάρτηση έχει παράγωγο μηδέν σε όλα τα σημεία της, πλην του $t=0$. Άρα μια πρώτη ιδιότητα θα πρέπει να είναι η

$$\frac{d}{dt}u(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (2.66)$$

⁵Βεβαίως γνωρίζετε ότι μια ασυνεχής συνάρτηση δεν παραγωγίζεται με τη συνήθη έννοια της παραγώγου.... γι’ αυτό και η παραπάνω παράγωγος ονομάζεται γενικευμένη παράγωγος, όπως η συνάρτηση Δέλτα είναι μια γενικευμένη συνάρτηση.

Μια δεύτερη ιδιότητα της βηματικής συνάρτησης προέρχεται από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού: για $t_1 < 0 < t_2$, πρέπει

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} u(t) dt = u(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = u(t_2) - u(t_1) = 1 - 0 = 1 \quad (2.67)$$

Άρα μια δεύτερη ιδιότητα πρέπει να είναι η

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} u(t) dt = 1, \quad \forall \quad t_1 < 0 < t_2 \quad (2.68)$$

Καμιά συνάρτηση - με την αυστηρή έννοια του όρου - δεν έχει αυτές τις δυο ιδιότητες! Δείτε όμως τις Σχέσεις (2.55, 2.56). Αν $t_1 \rightarrow -\infty$ και $t_2 \rightarrow +\infty$, υπάρχει απόλυτη ταύτιση των σχέσεων! Άρα η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση Δέλτα!

Ας θεωρήσουμε τη Σχέση (2.65) ως αληθής. Τότε, η παράγωγος της $u(t)$ πρέπει να ικανοποιεί τις ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} u(t) x(t) dt = u(t) x(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{d}{dt} x(t) dt \quad (2.69)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) u(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) u(t) - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} x(t) dt \quad (2.70)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - 0 - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} x(t) dt \quad (2.71)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - x(t) \Big|_0^{+\infty} \quad (2.72)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) + \lim_{t \rightarrow 0} x(t) \quad (2.73)$$

$$= x(0) \quad (2.74)$$

δεδομένου ότι η $x(t)$ είναι συνεχής στο $t = 0$. Άρα δείξαμε ότι η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης ικανοποιεί την ιδιότητα της δειγματοληψίας της συνάρτησης Δέλτα. Άρα είναι και αυτή μια συνάρτηση Δέλτα!

Άμεση συνέπεια της Σχέσης (2.65) είναι ότι

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.75)$$

2.4.4.3 Παράγωγοι της συνάρτησης Δέλτα

Η παράγωγος της συνάρτησης Δέλτα ορίζεται από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} \delta(t) x(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \frac{d}{dt} x(t) dt = - \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=0} \quad (2.76)$$

Όμοια ορίζεται η n -οστή παράγωγος ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t) x(t) dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} x(0) \Big|_{t=0} \quad (2.77)$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη αυτή μελέτη των σημάτων, ας καταγράψουμε μερικά σχόλια και παρατηρήσεις.

Παρατηρήσεις

- (α') Οι μετρικές της ενέργειας και της ισχύος που ορίσαμε νωρίτερα δεν έχουν μονάδα μέτρησης (όπως ίσως θα περιμένατε), γιατί δεν τις ορίσαμε με βάση τις έννοιες που γνωρίζετε από τη Φυσική ή τον Ηλεκτρισμό. Οι μονάδες ενέργειας και ισχύος, όπως ορίστηκαν εδώ, εξαρτώνται από τη φύση του σήματος $x(t)$. Αν το $x(t)$ είναι ένα σήμα τάσης, προφανώς η ενέργεια έχει μονάδες μέτρησης $V^2 s$ (Volts στο τετράγωνο επί seconds), και η ισχύς του έχει μονάδες μέτρησης V^2 (Volt στο τετράγωνο). Αν το σήμα $x(t)$ είναι σήμα έντασης, οι μονάδες αυτές θα είναι $A^2 s$ (Ampere στο τετράγωνο επί seconds)

και A^2 (Ampere στο τετράγωνο), αντίστοιχα. Στη συνέχεια του βιβλίου δε θα μας απασχολήσουν τόσο οι μονάδες μέτρησης, μια και η ενέργεια και η ισχύς ενός σήματος θα έχουν την πιο... αφηρημένη έννοια που ορίσαμε νωρίτερα.

- (β') Η τιμή της βηματικής συνάρτησης για $t = 0$ είναι μη ορισμένη. Σε διάφορα συγγράμματα μπορεί να βρείτε την τιμή της βηματικής να παίρνει την τιμή 0, 1, ή και 1/2. Σε πρακτικές εφαρμογές, η αλήθεια είναι πως ελάχιστη σημασία έχει η τιμή της σε αυτή τη χρονική στιγμή, όμως πρέπει να είμαστε συνεπείς ως προς τη χρήση της.
- (γ') Η Σχέση (2.67) που αποτελεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού ισχύει για συναρτήσεις που είναι συνεχείς στο διάστημα $[t_1, t_2]$. Προφανώς η εφαρμογή της για την εξαγωγή της σχέσης μεταξύ της συνάρτησης Δέλτα και της βηματικής συνάρτησης είναι προβληματική, λόγω της ασυνέχειας της τελευταίας στο $t = 0$. Γι' αυτό και η σχέση των δυο συναρτήσεων περιγράφεται από την έννοια της γενικευμένης παραγώγου.
- (δ') Κατά τη συζήτηση για τη συνάρτηση Δέλτα ίσως αναρωτηθήκατε ποιός είναι ο λόγος εισαγωγής μιας τόσο φαινομενικά πολύπλοκης συνάρτησης/κατανομής για τη μοντελοποίηση ενός ακαριαίου σήματος. Δε θα μπορούσαμε άραγε απλά να χρησιμοποιήσουμε έναν πολύ στενό τετραγωνικό παλμό, του οποίου η διάρκεια να είναι μεν πολύ μικρή αλλά το πλάτος του να είναι σταθερό και μετρήσιμο; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι (δυστυχώς) όχι. Ο λόγος δεν προέρχεται από όσα έχουμε πει και θα γίνει περισσότερο εμφανής στη συνέχεια, αλλά μπορείτε να τον κατανοήσετε: η επεξεργασία των σημάτων γίνεται μέσω των συστημάτων - που θα δούμε αμέσως μετά με περισσότερη λεπτομέρεια. Καταλαβαίνετε ότι τα συστήματα εν γένει δεν αποκρίνονται ακαριαία στις εισόδους που δέχονται. Αν όμως η εισόδός τους είναι αρκετά μικρής διάρκειας - όπως ο υπο συζήτηση τετραγωνικός παλμός πολύ μικρής διάρκειας - τότε η έξοδος του συστήματος δε θα χαρακτηρίζεται από το ακριβές σχήμα ή την ακριβή διάρκεια της εισόδου. Αντίθετα, το μόνο που θα έχει πραγματική σημασία θα είναι η συνολική επίδραση του σήματος εισόδου, δηλ. η επιφάνεια κάτω από τον παλμό: το εμβαδό του. Ένας τετραγωνικός παλμός πολύ μικρής διάρκειας και σταθερού πλάτους θα είχε πολύ μικρό εμβαδό, άρα πολύ μικρή επίδραση στο σύστημα. Επιπλέον, υπάρχουν συστήματα που αποκρίνονται πολύ γρήγορα στις εισόδους τους. Σε αυτά, θα χρειαστείτε έναν ακόμα μικρότερης διάρκειας τετραγωνικό παλμό έτσι ώστε ξανά να μην έχει σημασία το ακριβές σχήμα ή η διάρκειά του. Αυτό ακριβώς περιγράφει εν τέλει η συνάρτηση Δέλτα: έναν παλμό που είναι αρκετά μικρής διάρκειας για οποιοδήποτε σύστημα, ενώ ταυτόχρονα η επίδρασή του στο σύστημα (το εμβαδό του) δεν είναι αμελητέα.

Η συνάρτηση Δέλτα θα παίζει τόσο σημαντικό ρόλο στη συνέχεια που αξίζει να αναφέρουμε όλες τις ιδιότητες της στον Πίνακα 2.1.

Ιδιότητες συνάρτησης Δέλτα	
Ορισμός	$\delta(t) = 0, t \neq 0$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$
Δειγματοληπτική ιδιότητα	$x(t)\delta(t \pm t_0) = x(\mp t_0)\delta(t \pm t_0)$
Ολοκλήρωση γινομένου	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t \pm t_0) dt = x(\mp t_0)$
Στάθμιση στο χρόνο	$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{ a }, a \in \mathbb{R} - \{0\}$
Άρτια συμμετρία	$\delta(-t) = \delta(t)$
Ολοκλήρωση συνάρτησης Δέλτα	$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$
Παραγώγιση	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} \delta(t) x(t) dt = - \left. \frac{d}{dt} x(t) \right _{t=0}$
n -οστή παραγώγιση	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t) x(t) dt = (-1)^n \left. \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right _{t=0}$

Πίνακας 2.1: Ιδιότητες συνάρτησης Δέλτα.