

Κεφάλαιο 10

Δειγματοληψία

Οι περισσότερες μετρήσιμες φυσικές διαδικασίες που συμβαίνουν στον κόσμο μας είναι συνεχούς χρόνου, και συνήθως αναλογικές. Από την ηλιακή ακτινοβολία, την ανθρώπινη φωνή, τον ήχο μιας λύρας, τα σεισμικά κύματα, ως μια φωτογραφία, το χτύπο της καρδιάς, και τα εγκεφαλικά κύματα, όλα αυτά είναι σήματα συνεχούς χρόνου.

Ο όρος αυτός έχει την έννοια της συνεχούς συνάρτησης, σε χρόνο και συνήθως και του πλάτους (όχι όμως απαραίτητα), δηλ. ένα τέτοιο σήμα ορίζεται για κάθε χρονική στιγμή και έχει τιμή με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Οι τιμές αυτές εκφράζουν κάτι διαφορετικό, ανάλογα με την εφαρμογή (π.χ. στη φωτογραφία εκφράζουν το χρώμα του pixel, ενώ στον ήχο την ένταση του ήχου).

Με την έγχρηση των ηλεκτρονικών υπολογιστών τη δεκαετία του '50, αναζητήθηκε ο τρόπος να μπορούν να αποθηκευτούν τέτοια σήματα σε έναν υπολογιστή, για περαιτέρω επεξεργασία. Φυσικά, ένας υπολογιστής δεν καταλαβαίνει στην ουσία τίποτα άλλο εκτός από 0 και 1, ενώ η χωρητικότητα και η ακρίβειά του είναι πεπερασμένες. Έτσι λοιπόν έπρεπε να βρεθεί ένας τρόπος να καταγραφούν αυτά τα αναλογικά σήματα σε ψηφιακή μορφή, αλλά με την ικανότητα να μπορούν να “δώσουν πίσω” το αναλογικό σήμα από το οποίο προήλθαν. Με άλλα λόγια, από το συνεχές/αναλογικό σήμα, να μπορούμε να πάρουμε κάποια δείγματά του, αλλά αυτά τα δείγματα να είναι ικανά να μας δώσουν πίσω ολόκληρο το σήμα συνεχούς χρόνου! Σίγουρα δύσκολη δουλειά! ☹Η διαδικασία μετατροπής, λοιπόν, ενός σήματος συνεχούς χρόνου σε διακριτού χρόνου (κι όχι ψηφιακό) λέγεται **Δειγματοληψία**.

10.1 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα της όλης διαδικασίας από την καθημερινότητά σας. Όταν ένας τραγουδιστής ερμηνεύει μπροστά σε ένα μικρόφωνο (Σχήμα 10.1), τα ηχητικά κύματα από τη φωνή του ταξιδεύουν στον αέρα μέσω της ταλάντωσης των μορίων του και φτάνουν ως το μικρόφωνο. Τα ηχητικά αυτά κύματα χτυπούν ένα διάφραγμα μέσα στο μικρόφωνο, το οποίο επίσης ταλαντώνεται και ένα πηνίο που είναι συνδεδεμένο με το διάφραγμα κινείται ταλαντώνεται με τη σειρά του. Ένας μαγνήτης που έρχεται μαζί με το πηνίο παράγει μαγνητικό πεδίο που το διαπερνά και λόγω της ταλάντωσης του πηνίου, παράγεται ροή ηλεκτρικού ρεύματος. Το ρεύμα αυτό ρέει προς έναν ενισχυτή ή μια συσκευή καταγραφής¹. Άρα στην περίπτωση μας το αναλογικό σήμα είναι ηλεκτρικό, αλλά δε μας απασχολεί η φύση του σήματος - είναι ένα σήμα. Αυτό το σήμα θέλουμε να το αποθηκεύσουμε σε έναν υπολογιστή. Πρέπει λοιπόν να το δειγματοληψήσουμε, δηλ. να διαλέξουμε κάποιες χρονικές στιγμές και να πάρουμε τις τιμές του ηλεκτρικού σήματος σε εκείνες τις στιγμές, να πάρουμε δηλ. *δείγματα* του σήματος. Τα δείγματα αυτά πρέπει όμως να ικανοποιούν την αυστηρή απαίτηση που προαναφέρθηκε νωρίτερα: να μπορούν - με κάποιο τρόπο - να χρησιμεύσουν στην ανασύνθεση του σήματος συνεχούς χρόνου!

Εδώ ας κάνουμε μια παρένθεση για να ορίσουμε λίγο την ορολογία. Ορίζουμε ως **περίοδο δειγματοληψίας** T_s την απόσταση (σε δευτερόλεπτα) μεταξύ των δειγμάτων που παίρνουμε. Επίσης, ορίζουμε ως **συχνότητα δειγματοληψίας** f_s το αντίστροφο της περιόδου δειγματοληψίας ($f_s = \frac{1}{T_s}$), και είναι ένας αριθμός που μας λέει πόσα δείγματα παίρνουμε ανά δευτερόλεπτο. Για παράδειγμα, στα μουσικά CD του εμπορίου, η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 44100 Hz. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα δευτερόλεπτο πραγματικού ηχητικού κομματιού, έχουμε πάρει 44100 δείγματα, τα οποία απέχουν $\frac{1}{44100}$ δευτερόλεπτα μεταξύ τους! Πολλά δείγματα, πολύ κοντά το ένα με το άλλο! Γι' αυτό και η ποιότητα της μουσικής είναι τόσο καλή. Ας κλείσουμε όμως εδώ την παρένθεση κι ας επιστρέψουμε στη θεωρία...

¹Άλλα μικρόφωνα χρησιμοποιούν διαφορετικό τρόπο αλλά στην ουσία πάλι μετατρέπουν ηχητική ενέργεια σε ηλεκτρική.



Σχήμα 10.1: Διαδικασία Δειγματοληψίας.

■

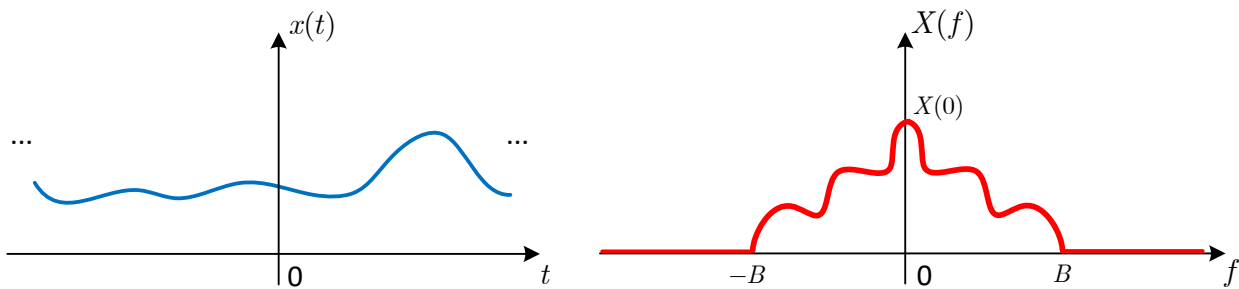
Τα ερωτήματα που μπορεί κανείς να σκεφτεί και να θέσει άμεσα είναι: “ποιά δείγματα να πάρω; Όποια θέλω; Και κάθε πότε να τα παίρνω; Όποτε θέλω ή πρέπει να υπάρχει ένα σταθερό χρονικό διάστημα; Κι αν πάρω τελικά αυτά τα δείγματα, μετά θα μπορώ να ανακατασκευάσω και να ακούσω τη μουσική που ηχογραφήθηκε ή θα ακούσω *bits*;” Όλα αυτά τα ερωτήματα τα απάντησε ο Nyquist και ο Shannon, το 1928 ο πρώτος και το 1949 ο δεύτερος, με κάποιες διαφορές στις εργασίες τους. Το θεώρημα που απαντάει σε αυτά τα ερωτήματα ονομάστηκε **Θεώρημα των Shannon-Nyquist ή Θεώρημα Δειγματοληψίας**.

Στην προσπάθειά μας να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα, θα κάνουμε δυο υποθέσεις:

- Η δειγματοληψία θα είναι ομοιόμορφη, δηλ. τα δείγματα θα λαμβάνονται με σταθερή χρονική απόσταση μεταξύ τους.
- Το υπό δειγματοληψία σήμα θα είναι σήμα βασικής ζώνης - *baseband signal*, δηλ. ο μετασχ. Fourier του θα είναι μη μηδενικός γύρω από ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων που περιλαμβάνει το μηδέν, ήτοι

$$X(f) \neq 0, f \in [-B, B] \quad (10.1)$$

Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ που θέλουμε να δειγματοληπτήσουμε, και αυτό το σήμα έχει φάσμα (μετασχηματισμό Fourier δηλαδή) $X(f)$, όπως στο Σχήμα 10.2. Έστω ότι ο μετασχηματισμός είναι πραγματικός και θετικός, για ευκολία στη σχεδίαση. Παρατηρείτε ότι το φάσμα του σήματος έχει μέγιστη



Σχήμα 10.2: Σήμα συνεχούς χρόνου και Μετασχηματισμός Fourier του.

συχνότητα B . Μετά τη συχνότητα αυτή, δεν υπάρχουν πλάτη για τις υπόλοιπες συχνότητες. Το ίδιο και για το αρνητικό μέρος των συχνοτήτων, πριν τη συχνότητα $-B$.

10.2 Ιδανική Δειγματοληψία

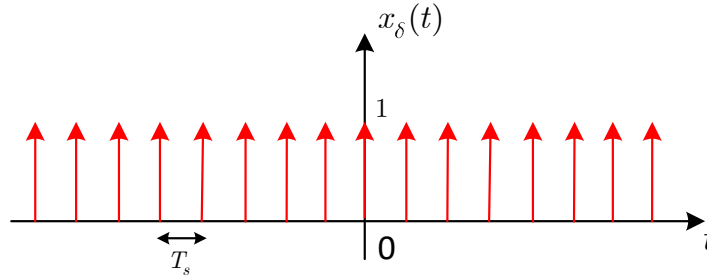
Ας κάνουμε τώρα δειγματοληψία στο σήμα μας στο χρόνο, με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = \frac{1}{f_s}$. Πώς όμως θα αναπαραστήσουμε μαθηματικά τη δειγματοληψία; Θυμηθείτε ότι

$$x(t)\delta(t \pm t_0) = x(\mp t_0)\delta(t \pm t_0) \quad (10.2)$$

Άρα η συνάρτηση δειγματοληψίας δεν είναι τίποτα άλλο από μια (άπειρη, εν γένει) σειρά από τις γνωστές μας Συναρτήσεις Δέλτα:

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad (10.3)$$

Η συνάρτηση δειγματοληψίας φαίνεται στο Σχήμα 10.3.



Σχήμα 10.3: Συνάρτηση Δειγματοληψίας

Όπως φαίνεται, αυτές οι συναρτήσεις Δέλτα απέχουν μεταξύ τους χρόνο T_s .

Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης δειγματοληψίας είναι:

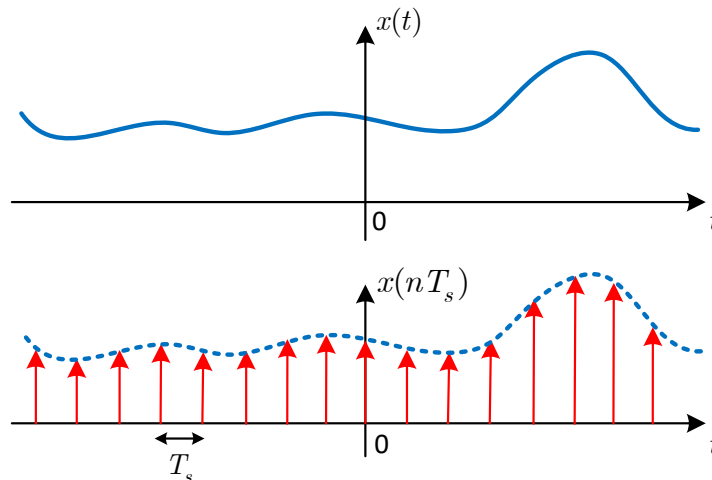
$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \longleftrightarrow \Delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_s) \quad (10.4)$$

δηλ. βλέπουμε ότι και ο μετασχ. Fourier της άπειρης σειράς από Συναρτήσεις Δέλτα στο χρόνο που απέχουν απόσταση T_s είναι μια άπειρη σειρά από συναρτήσεις Δέλτα και στη συχνότητα, οι οποίες μάλιστα απέχουν μεταξύ τους $f_s = 1/T_s$ Hz.

Η δειγματοληψία μπορεί να αναπαρασταθεί λοιπόν μαθηματικά από τον πολλαπλασιασμό στο χρόνο του σήματος πληροφορίας $x(t)$ με τη σειρά από συναρτήσεις Δέλτα, $x_\delta(t)$. Άρα θα έχουμε:

$$x_s(t) = x(t)x_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (10.5)$$

Οπότε αυτό που θα πάρουμε θα είναι οι τιμές του σήματος ως τιμές των επιφανειών των συναρτήσεων Δέλτα. Οι υπόλοιπες τιμές του σήματος χάνονται. Αυτό που μένει λοιπόν είναι ένα σήμα $x(nT_s)$, με n τον αριθμό του δείγματος που λάβαμε. Όλα αυτά μας το δείχνει γραφικά το Σχήμα 10.4. Ας δούμε τι συμβαίνει στο πεδίο της



Σχήμα 10.4: Δειγματοληπτημένο σήμα.

συχνότητας. Το γινόμενο των δυο παραπάνω σημάτων, $x_s(t) = x(t)x_\delta(t)$, γίνεται συνέλιξη στη συχνότητα:

$$X_s(f) = X(f) * \Delta(f) = X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_s) \quad (10.6)$$

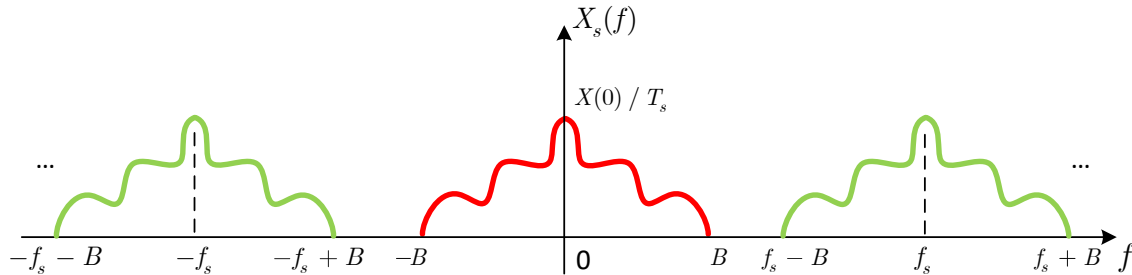
$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (X(f) * \delta(f - nf_s)) \quad (10.7)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_s) \quad (10.8)$$

αφού ξέρουμε ότι η συνέλιξη σήματος με μια συνάρτηση Δέλτα δίνει το ίδιο το σήμα μετατοπισμένο στη θέση της συνάρτησης Δέλτα, δηλ.

$$X(f) * \delta(f \pm f_0) = X(f \pm f_0) \quad (10.9)$$

Άρα λοιπόν, αυτό που παίρνουμε στο πεδίο της συχνότητας σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, είναι επαναλήψεις του φάσματος $X(f)$ γύρω από τις συχνότητες $\pm nf_s$. Αν η συχνότητα δειγματοληψίας f_s είναι “αρκετά μεγάλη” (θα δούμε παρακάτω τι σημαίνει αυτό), τότε αυτό που θα συμβεί στο πεδίο της συχνότητας φαίνεται στο Σχήμα 10.5.



Σχήμα 10.5: Φάσμα δειγματοληπτημένου σήματος.

Τι παρατηρούμε και στο Σχήμα 10.5; Παρατηρούμε ότι, λόγω της διαδικασίας της δειγματοληψίας, εμφανίστηκαν “από το πουθενά” περιοδικές “επαναλήψεις” του αρχικού φάσματος γύρω από τις συχνότητες $\pm nf_s$. Αυτό είναι το φάσμα του δειγματοληπτημένου (δηλ. του διακριτού χρόνου) σήματος. Στο Σχήμα 10.5 φαίνονται μόνο οι “επαναλήψεις” του φάσματος γύρω από τις συχνότητες $\pm f_s$, αλλά αυτή η επανάληψη συνεχίζεται σε όλα τα ακέραια πολλαπλάσια της f_s , από το $-\infty$ ως το $+\infty$.

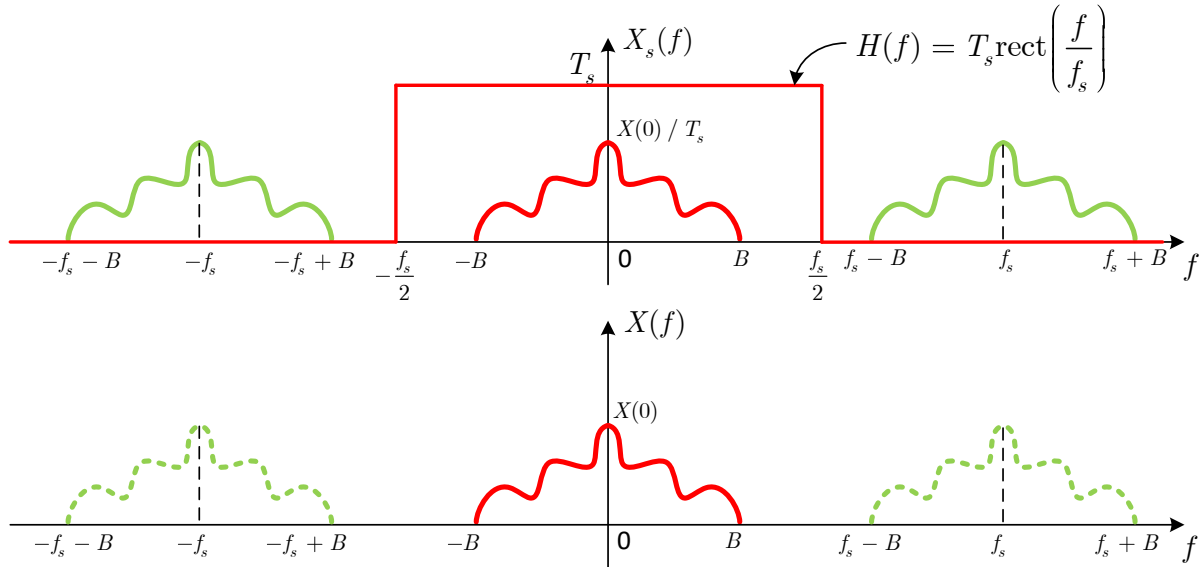
10.2.1 Ανακατασκευή

Υπενθυμίζεται ότι μετά την αποθήκευση ή επεξεργασία του διακριτού σήματος στον υπολογιστή, σκοπός μας είναι να μπορούμε να πάρουμε πίσω το αρχικό σήμα, δηλ. το φάσμα $X(f)$ που θα μας δώσει το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$. Αυτό γίνεται με την εφαρμογή ενός χαμηλοπερατού (lowpass) φίλτρου γύρω από το κεντρικό φάσμα, κόβοντας τα “περισσευούμενα” φάσματα και κρατώντας μόνο αυτό στο διάστημα $[-f_s/2, f_s/2]$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.6. Θυμίζεται ότι το κεντρικό (κόκκινου χρώματος) φάσμα είναι το φάσμα του αρχικού σήματος συνεχούς χρόνου, ενώ τα φάσματα πράσινου χρώματος “ξεφύτρωσαν” λόγω της διαδικασίας της δειγματοληψίας. Οπότε αν θέλουμε να ανακτήσουμε το αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου, θα πρέπει να κρατήσουμε μόνο το κεντρικό φάσμα γύρω από τη μηδενική συχνότητα, γιατί μόνο αυτό αντιστοιχεί στο αρχικό σήμα, όπως δείχνει το Σχήμα 10.6. Το φίλτρο αυτό, που προφανώς το ορίζουμε στη συχνότητα, πρέπει να σας θυμίζει κάτι: είναι ένας τετραγωνικός παλμός που δίνεται από την εξίσωση:

$$H(f) = \frac{1}{f_s} \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = T_s \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) \quad (10.10)$$

Αυτό σημαίνει ότι το παράθυρο ορίζεται στο διάστημα $(-f_s/2, f_s/2)$. Ο αντίστροφος μετασχη. Fourier του σήματος αυτού ξέρουμε ότι είναι:

$$h(t) = T_s f_s \text{sinc}(tf_s) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \quad (10.11)$$



Σχήμα 10.6: Φίλτρο ανακατασκευής.

λόγω της ιδιότητας της Διαικότητας. Πολλαπλασιάζοντας το σήμα $H(f)$ με το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_s) \quad (10.12)$$

θα έχουμε:

$$\frac{1}{T_s} H(f) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_s) = \frac{1}{T_s} T_s X(f) = X(f) \quad (10.13)$$

αφού το $H(f)$ είναι μη μηδενικό στο διάστημα $(-f_s/2, f_s/2)$.

Τέλος, το γινόμενο στη συχνότητα γίνεται συνέλιξη στο χρόνο:

$$h(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) h(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right) \quad (10.14)$$

Η παραπάνω σχέση είναι πολύ σημαντική. Μας λέει ότι, ιδανικά, ένα σήμα συνεχούς χρόνου (το οποίο ορίζεται σε κάθε χρονική στιγμή - άρα σε άπειρες χρονικές στιγμές) δειγματοληπτημένο με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s > 2f_{max}$ μπορεί να ανακατασκευαστεί **πλήρως και ακριβώς** από τα δειγμάτα του $x(nT_s)$ (δηλ. από κάποιες διακριτές τιμές του σήματος) όταν αυτά συνδυαστούν γραμμικά με συναρτήσεις $\text{sinc}(\cdot)$, που κάθε μία έχει τον κεντρικό λοβό της γύρω από τις χρονικές στιγμές nT_s , $n \in \mathbb{Z}$!!! Δείτε το Σχήμα 10.7 για την καλύτερη κατανόηση της ανακατασκευής.

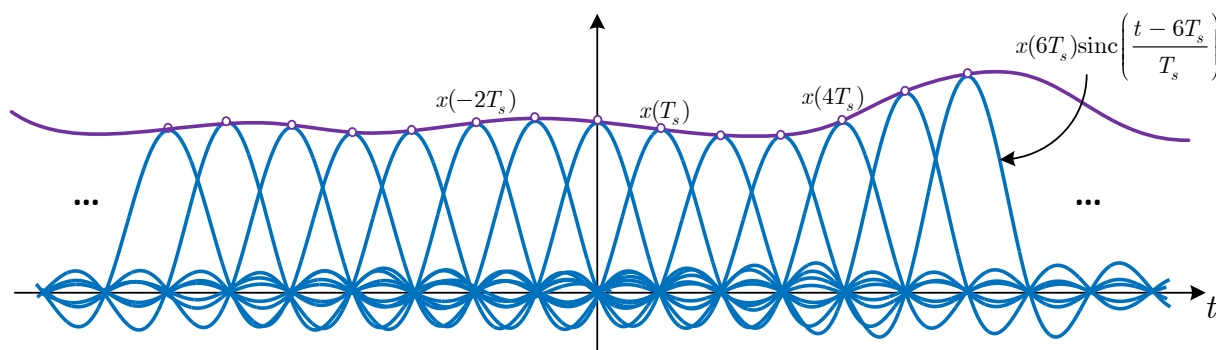
Ας επανέλθουμε λίγο στο φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος, που το παραθέτουμε ξανά για ευκολία, στο Σχήμα 10.8(α). Παρατηρήστε το δεξί άκρο του κεντρικού φάσματος (κόκκινη καμπύλη) και το αριστερό άκρο του φάσματος γύρω από τη συχνότητα f_s (πράσινη καμπύλη). Βλέπετε ότι το ένα έχει συχνότητα B και το άλλο έχει συχνότητα $f_s - B$. Αν αυτά τα δυο άκρα ήταν πιο κοντά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.8(β), θα είχαμε **επικάλυψη** στα φάσματα, και σε εκείνο το διάστημα τα φάσματα θα προστίθενται, αλλοιώνοντας έτσι το αρχικό μας σήμα, όπως στο Σχήμα 10.8(γ).

Για να μη συμβαίνει αυτό, καταλαβαίνετε ότι πρέπει να έχουμε μια κατάσταση όπως στο Σχήμα 10.8(α), δηλ. να ισχύει

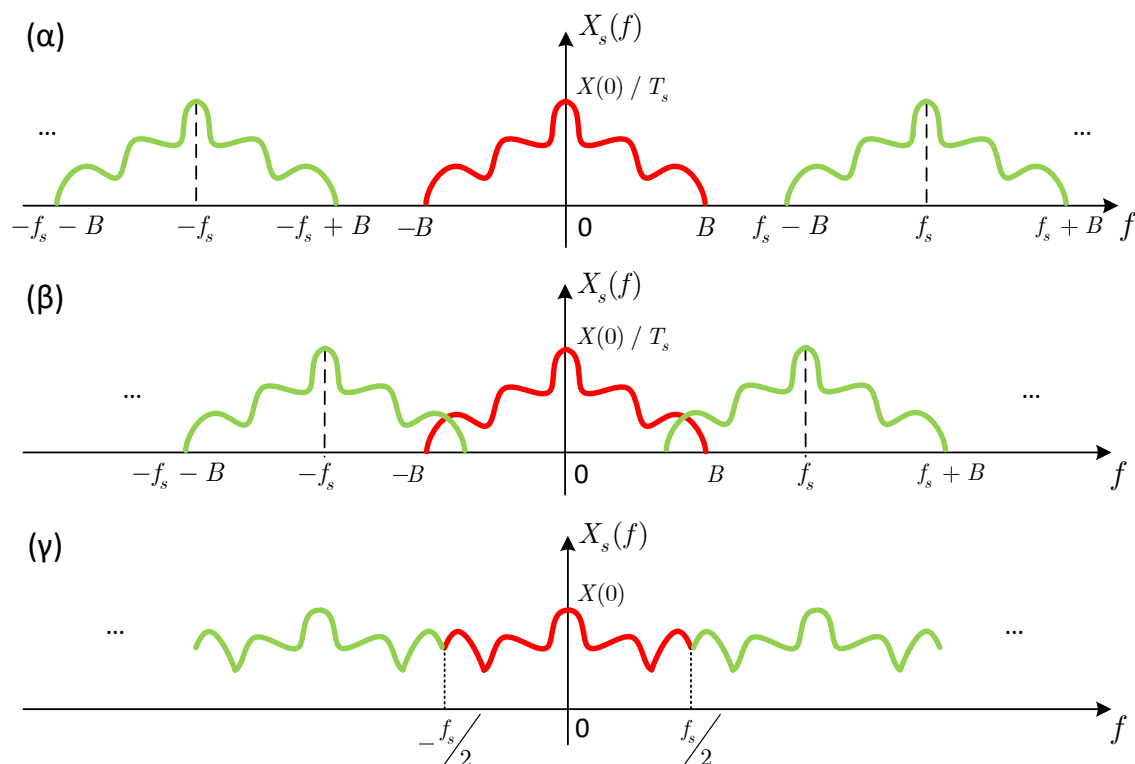
$$B < f_s - B \iff f_s > 2B \quad (10.15)$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί το περίφημο θεώρημα των Shannon-Nyquist. Αυτή ουσιαστικά είναι η απόδειξη του θεωρήματος της δειγματοληψίας: προέρχεται απλά από την παρατήρηση αυτού του σχήματος.

Οπότε:



Σχήμα 10.7: Ανακατασκευή σήματος από Συναρτήσεις sinc(·).



Σχήμα 10.8: Υποδειγματοληψία: (α) φάσμα χωρίς επικαλύψεις, (β) φάσμα με επικαλύψεις, (γ) φάσμα στο οποίο εφαρμόζεται το φίλτρο ανακατασκευής.

Θεώρημα Δειγματοληψίας

Ένα σήμα βασικής ζώνης με μέγιστη συχνότητα (μη-μηδενικού πλάτους) B Hz, μπορεί να ανακτηθεί ακριβώς και πλήρως από τα δείγματά του, αν δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας

$$f_s > 2B, \quad (10.16)$$

δηλ. με περίοδο δειγματοληψίας

$$T_s < \frac{1}{2B} \quad (10.17)$$

Η συνθήκη:

$$f_s > 2B \quad (10.18)$$

λέγεται *συνθήκη των Shannon-Nyquist*. Η μέγιστη συχνότητα B συνήθως αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως $f_{\max}$ και λέγεται *συχνότητα Nyquist*, ενώ το κάτω συχνοτικό όριο $2B$ που αναφέρεται στη συνθήκη του Shannon λέγεται *ρυθμός Nyquist*.

Δείτε ξανά στο Σχήμα 10.8(γ) τι συμβαίνει αν το κριτήριο του Shannon παραβιάζεται, δηλ. η συχνότητα δειγματοληψίας f_s είναι μικρότερη από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα B του σήματος. Στα άκρα του κεντρικού φάσματος έχουν προστεθεί συχνότητες “ζένες και το έχουν αλλοιώσει. Καταλαβαίνετε τι γίνεται αν η f_s είναι ακόμα πιο κοντά στο μηδέν...

Το φαινόμενο αυτό της επικάλυψης των φασμάτων ονομάζεται **aliasing** ή εναλλακτικά, “ψευδωνυμία” ή “ανά-δίπλωση”. Συνοπτικά, η διαδικασία της δειγματοληψίας φαίνεται στο Σχήμα 10.9.

Παρατηρήσεις

1. Θα μπορούσε κάποιος να θέσει το ερώτημα “γιατί δεν σχεδιάζουμε το χαμηλοπερατό φίλτρο στο συχνοτικό διάστημα $[-B, B]$ αλλά στο $[-f_s/2, f_s/2]$ ”; Η απάντηση είναι ότι δε γνωρίζουμε πάντα ποιά είναι η μέγιστη συχνότητα του σήματος, γνωρίζουμε όμως ότι - αν όλα τα έχουμε κάνει σωστά - το σήμα μπορεί να ανακτηθεί πλήρως αν ορίσουμε ως τη μέγιστη συχνότητά του την $f_s/2$, άσχετα αν πράγματι υπάρχει συχνοτικό περιεχόμενο ως και αυτή. Είναι μια δικλείδα ασφαλείας, δεδομένου ότι ο δειγματολήπτης έκανε σωστά τη δουλειά του. ☺
2. Ίσως επίσης αναρωτηθήκατε “γιατί δεν παίρνουμε μια αρκετά μεγάλη συχνότητα δειγματοληψίας ώστε να μην αναγκάζομαστε να εξετάζουμε κάθε φορά το θεώρημα του Shannon;”. Η απάντηση σε αυτό είναι - όπως ίσως μαντέψατε - το κόστος. Για παράδειγμα, σε ηχογραφήσεις φωνής, μια συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από 20 kHz ίσως είναι πλεονασματική, γιατί οι σημαντικές συχνοτικές συνιστώσες της ανθρώπινης φωνής σπάνια ξεπερνούν τα 10 kHz. Οπότε μια συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από $2 \cdot 10 = 20$ kHz αποθηκεύει πληροφορία με λίγη σημασία για την καταληπτότητα και την καθαρότητα της φωνής.

Αντίθετα, μερικά μουσικά όργανα μπορούν να παράξουν συχνότητες ως και τα 20 – 25 kHz, οπότε θα πρέπει να δειγματοληπτήσουμε τέτοιες ηχογραφήσεις με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s > 2 \cdot \{20-25\} = 40 - 50$ kHz. Όμως το ανθρώπινο αυτί μπορεί να ακούσει συχνότητες από 20 Hz ως περίπου 20 kHz. Άρα μια συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από $2 \cdot 20 = 40$ kHz πρακτικά δεν έχει πολύ νόημα.

Παρ’ όλα αυτά, τα CD του εμπορίου καθιέρωσαν (με πρωτεργάτρια τη Sony τη δεκαετία του ‘70) τη συχνότητα δειγματοληψίας των 44.1 kHz, τόσο για το ότι είναι κοντά στο όριο των 20 kHz του ανθρώπινου αυτιού, όσο και για πρακτικούς λόγους υλοποίησης του τετραγωνικού παραθύρου που ανακατασκευάζει το φάσμα του σήματος συνεχούς χρόνου από το περιοδικό φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος.

10.2.2 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Ας δούμε πως εφαρμόζεται η δειγματοληψία σε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 10.1:

Ένα συνεχές σήμα της μορφής

$$x(t) = 3 \cos(400\pi t) + 5 \sin(1200\pi t) + 6 \cos(4400\pi t) \quad (10.19)$$

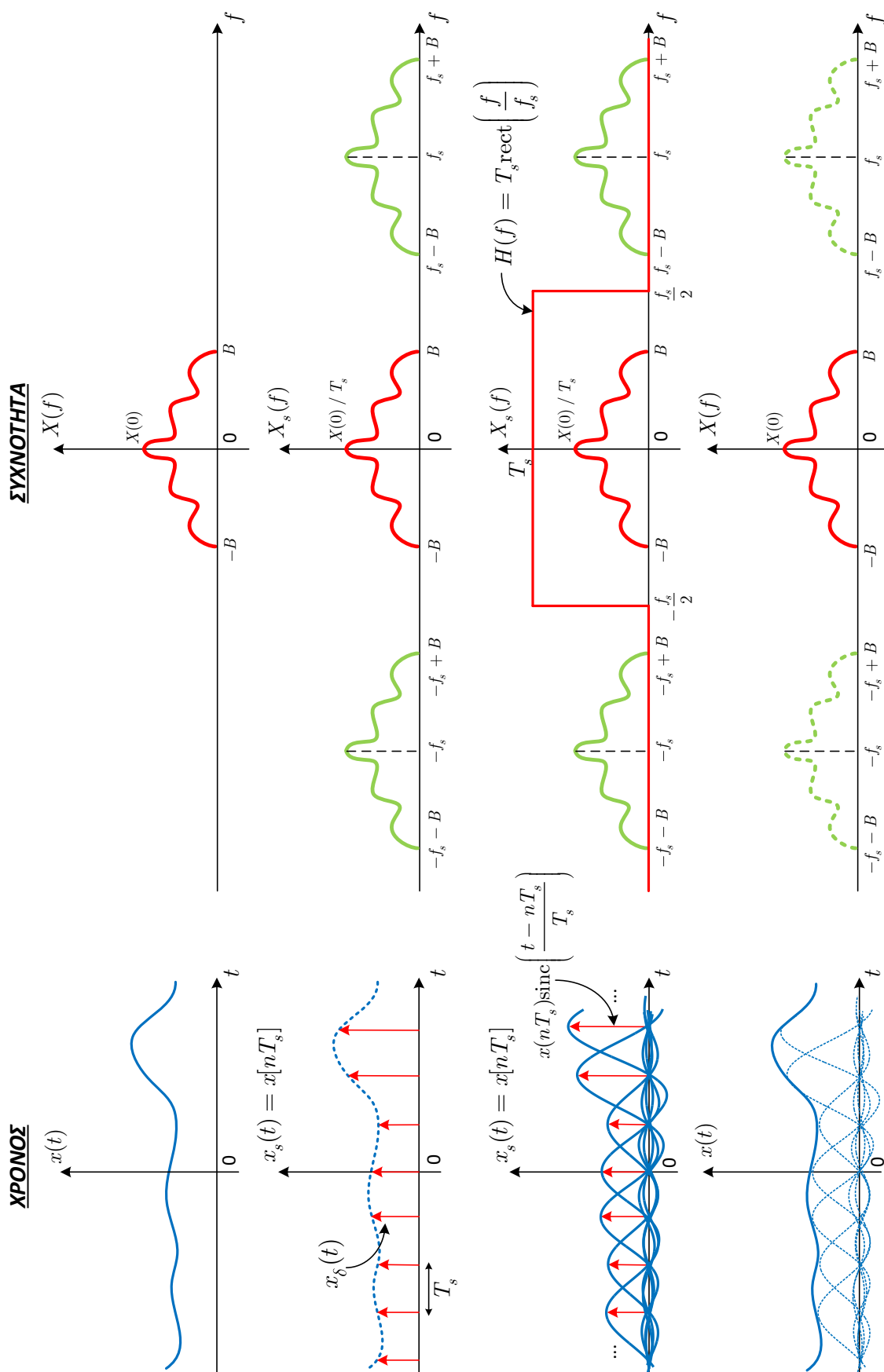
δειγματοληπτείται με $f_s = 4000$ Hz παράγοντας την ακολουθία $x[n]$. Ελέγξτε αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι ικανή να μας δώσει πίσω το αρχικό σήμα από τα δείγματά του, και βρείτε τη μαθηματική έκφραση του $x[n]$. Ποιο είναι το σήμα $x_r(t)$ που ανακατασκευάζεται από τα δείγματά του;

Λύση:

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος $x(t)$ είναι προφανώς η μέγιστη συχνότητα που υπάρχει στα ημίτονά του, κι αυτή δεν είναι άλλη από την $f_{max} = 2200$ Hz. Όμως

$$2f_{max} = 2 \cdot 2200 = 4400 > f_s \quad (10.20)$$

άρα το κριτήριο των Shannon-Nyquist δεν ικανοποιείται, οπότε δεν μπορούμε να πάρουμε πίσω το αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου από τα δείγματά του. Παρ’ όλα αυτά, δε μας απαγορεύει κανείς να δειγματοληπτήσουμε με αυτή τη συχνότητα και να πάρουμε ένα σήμα διακριτού χρόνου. ☺



Σχήμα 10.9: Η διαδικασία της δειγματοληψίας στο χώρο του χρόνου και της συχνότητας.

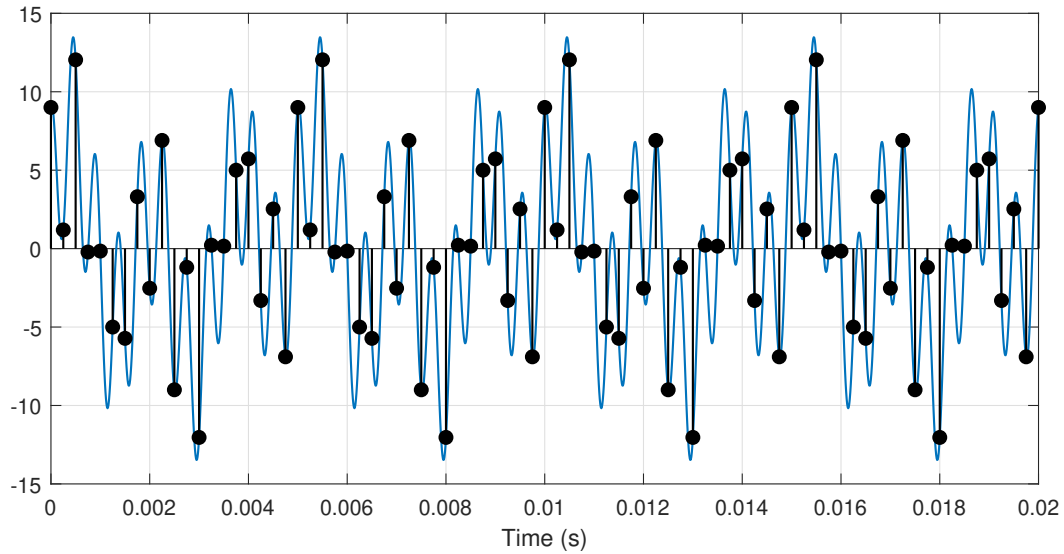
Προφανώς $t = nT_s = n \frac{1}{4000}$ s, $n \in \mathbb{Z}$. Αντικαθιστούμε όπου t με nT_s . Άρα θα είναι:

$$x[n] = 3 \cos(400\pi nT_s) + 5 \sin(1200\pi nT_s) + 6 \cos(4400\pi nT_s) \quad (10.21)$$

$$= 3 \cos\left(\frac{\pi n}{10}\right) + 5 \sin\left(\frac{3\pi n}{10}\right) + 6 \cos\left(\frac{11\pi n}{10}\right) \quad (10.22)$$

$$= 3 \cos\left(\frac{\pi n}{10}\right) + 5 \sin\left(\frac{3\pi n}{10}\right) + 6 \cos\left(\frac{9\pi n}{10}\right) \quad (10.23)$$

Το σήμα συνεχούς χρόνου καθώς και τα δείγματά του φαίνονται στο Σχήμα 10.10. Για να βρούμε το ανακατα-



Σχήμα 10.10: Σήμα συνεχούς χρόνου και δείγματα αυτού για $f_s < 2f_{max}$.

σκευασμένο σήμα, μπορούμε να κάνουμε την αντίστροφη διαδικασία, δηλ. μπορούμε να θέσουμε

$$\frac{n}{f_s} = t \quad (10.24)$$

Έτσι

$$x(t) = 3 \cos\left(\frac{4000\pi t}{10}\right) + 5 \sin\left(\frac{12000\pi t}{10}\right) + 6 \cos\left(\frac{36000\pi t}{10}\right) \quad (10.25)$$

$$= 3 \cos(400\pi t) + 5 \sin(1200\pi t) + 6 \cos(3600\pi t) \quad (10.26)$$

Παρατηρήστε ότι λόγω του φαινομένου της φασματικής αναδίπλωσης, μια “ξένη” συχνότητα, αυτή των 1800 Hz, έχει εισέλθει στο αρχικό σήμα ενώ η αρχική συχνότητα των 2200 Hz έχει αποκοπεί.

Στην Άσκηση XXXX μπορείτε να επιβεβαιώσετε το παραπάνω μελετώντας το χώρο της συχνότητας.

Παράδειγμα 10.2:

Έστω το σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, ο οποίος έχει μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $[-B, B]$. Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τη δειγματοληψία των παρακάτω σημάτων:

(α') $x(t)$	(γ') $x(2t)$	(ε') $x(t - t_0) + x(t + t_0)$	(ζ') $x(t)x(t)$
(β') $x(t - t_0)$	(δ') $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	(ς') $\frac{dx(t)}{dt}$	(η') $x(t) * x(t)$

Λύση:

Προφανώς η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας (ρυθμός Nyquist) καθορίζεται αποκλειστικά από το φάσμα πλάτους του σήματος. Άρα:

(α') Η μέγιστη συχνότητα είναι B , άρα ο ρυθμός Nyquist είναι $2B$.

(β') Ισχύει ότι

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0} \quad (10.27)$$

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος παραμένει B , άρα ο ρυθμός Nyquist είναι $2B$.

(γ') Η ιδιότητα της χρονικής κλιμάκωσης συνεπάγεται κλιμάκωση και στη συχνότητα, δηλ.

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (10.28)$$

Οπότε

$$x(2t) \longleftrightarrow \frac{1}{2} X\left(\frac{f}{2}\right) \quad (10.29)$$

Το φάσμα $X(f/2)$ είναι μια διεσταλμένη έκδοση του αρχικού φάσματος, άρα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[-2B, 2B]$. Ο ρυθμός Nyquist είναι $4B$.

(δ') Ισχύει ότι

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f - f_0) \quad (10.30)$$

Το σήμα έχει μετατοπιστεί γύρω από τη συχνότητα f_0 , άρα ο ρυθμός του είναι πλέον $f_0 + B$, άρα $2(f_0 + B)$.

(ε') Ισχύει ότι

$$x(t - t_0) + x(t + t_0) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0} + X(f)e^{j2\pi ft_0} = 2X(f)\cos(2\pi ft_0) \quad (10.31)$$

Η μέγιστη συχνότητα του φάσματος παραμένει B , άρα ο ρυθμός Nyquist είναι $2B$.

(ς') Ισχύει ότι

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f X(f) \quad (10.32)$$

Κι εδώ, η μέγιστη συχνότητα του φάσματος παραμένει B , άρα ο ρυθμός Nyquist είναι $2B$.

(ζ') Ισχύει ότι

$$x(t)x(t) \longleftrightarrow X(f) * X(f) \quad (10.33)$$

Η συνέλιξη, όπως έχουμε δει, δυο σημάτων που είναι μη μηδενικά σε πεπερασμένα διαστήματα είναι μη μηδενική στο διάστημα που ορίζεται ως το άθροισμα των άκρων των διαστημάτων. Άρα το φάσμα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[-B - B, B + B] = [-2B, 2B]$. Οπότε ο ρυθμός Nyquist είναι $4B$.

(η') Ισχύει ότι

$$x(t) * x(t) \longleftrightarrow X(f)X(f) = X^2(f) \quad (10.34)$$

Προφανώς ο ρυθμός Nyquist είναι $2B$.

Παράδειγμα 10.3:

Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα σήματα

(α') $\text{sinc}^2(100t)$

(γ') $\text{sinc}(100t) + 3\text{sinc}^2(60t)$

(β') $\frac{1}{100}\text{sinc}^2(100t)$

(δ') $\text{sinc}(50t) * \text{sinc}(100t)$

Λύση:

Ο ρυθμός Nyquist είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που ικανοποιεί το θεώρημα του Shannon, δηλ. η $2f_{\max}$ του σήματος.

Επίσης, εδώ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της Δυσικότητας του Μετασχ. Fourier, που θυμίζεται ότι είναι

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \implies X(t) \longleftrightarrow x(-f) \quad (10.35)$$

Επειδή εδώ έχουμε σήματα $\text{sinc}(\cdot)$ στο χρόνο, από τα γνωστά μας ζεύγη (θέτοντας $A = 1$), και με την ιδιότητα της Δυσικότητας που μας λέει ότι αν

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow T\text{sinc}(fT) \quad (10.36)$$

τότε

$$T \text{sinc}(tT) \longleftrightarrow \text{rect}\left(\frac{-f}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (10.37)$$

και αν

$$\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow T \text{sinc}^2(fT) \quad (10.38)$$

τότε

$$T \text{sinc}^2(tT) \longleftrightarrow \text{tri}\left(\frac{-f}{T}\right) = \text{tri}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (10.39)$$

όπου το $-f$ γίνεται f επειδή οι συναρτήσεις $\text{sinc}(\cdot)$, $\text{rect}(\cdot)$ είναι άρτιες. Άρα θα είναι

(α')

$$\text{sinc}^2(100t) \longleftrightarrow \frac{1}{100} \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right) \quad (10.40)$$

Το σήμα $\text{tri}(\cdot)$ είναι ένας τριγωνικός παλμός με διάρκεια στο $[-100, 100]$ Hz. Άρα η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 100 Hz, άρα ο ρυθμός Nyquist θα είναι $f_s = 200$ Hz.

(β') Η αλλαγή στο πλάτος δεν επηρεάζει το φάσμα, άρα κι εδώ $f_s = 200$ Hz.

(γ') Είναι

$$\text{sinc}(100t) + 3\text{sinc}^2(60t) \longleftrightarrow \frac{1}{100} \text{rect}\left(\frac{f}{100}\right) + 3\frac{1}{60} \text{tri}\left(\frac{f}{60}\right) \quad (10.41)$$

άρα η μέγιστη συχνότητα είναι 60 Hz, οπότε ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 120$ Hz.

(δ') Είναι

$$\text{sinc}(50t) * \text{sinc}(100t) \longleftrightarrow \frac{1}{50} \text{rect}\left(\frac{f}{50}\right) \frac{1}{100} \text{rect}\left(\frac{f}{100}\right) \quad (10.42)$$

άρα η μέγιστη συχνότητα είναι 25 Hz, οπότε ο ρυθμός Nyquist θα είναι $f_s = 50$ Hz.

10.3 Πρακτικά προβλήματα κατά τη δειγματοληψία

Όλη η διαδικασία της ιδανικής δειγματοληψίας που περιγράφηκε νωρίτερα υποφέρει από ένα πολύ σοβαρό πρόβλημα: είναι *ιδανική*! ☹

Πρακτικά, η δειγματοληψία γίνεται πολύ διαφορετικά από την περιγραφή που προηγήθηκε και τα προβλήματα που καλούνται να ξεπεράσουν οι μηχανικοί είναι αρκετά. Τρία από αυτά θα συζητήσουμε σε αυτήν την Παράγραφο.

1. Το πιο προφανές πρόβλημα της ιδανικής δειγματοληψίας είναι **η απουσία - στην πράξη - των συναρτήσεων Δέλτα!** Ταυτόχρονα όμως η πιο προφανής λύση είναι η αντικατάστασή τους με αρκετά μικρούς σε διάρκεια τετραγωνικούς παλμούς. Η επιλογή μας αυτή οδηγεί σε δυο νέα σχήματα δειγματοληψίας, τη *φυσική δειγματοληψία* και τη *δειγματοληψία με διατήρηση τιμής*. Θα συζητήσουμε αυτά τα δυο είδη δειγματοληψίας στη συνέχεια.
2. **Κανένα πραγματικό σήμα δεν έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης συχνοτήτων!** Ο λόγος είναι απλός και τον γνωρίζετε ήδη: η ιδιότητα της δυϊκότητας! Με άλλα λόγια, όταν ένα σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο τότε είναι υποχρεωτικά άπειρης διάρκειας στη συχνότητα, και το αντίστροφο. Όλα τα σήματα που μπορούμε να παράξουμε στο εργαστήριο ή να μετρήσουμε στη φύση είναι πεπερασμένης διάρκειας: κάποτε ξεκινάμε τη μέτρηση και κάποτε θα τη σταματήσουμε. Άρα το φάσμα τέτοιων σημάτων είναι αναγκαστικά άπειρης διάρκειας.

Για να υπερκεραστεί αυτή η δυσκολία, εφαρμόζουμε στο σήμα πριν τη δειγματοληψία το περίφημο anti-aliasing φίλτρο. Το φίλτρο αυτό έχει χαμηλοπερατά χαρακτηριστικά και αναλαμβάνει να αποκόψει συχνοτική πληροφορία από το σήμα η οποία θεωρείται μη σημαντική. Καταλαβαίνετε ότι ο τελευταίος όρος είναι αρκετά αφαιρετικός και εξαρτάται πάντα από την εφαρμογή στην οποία δουλεύουμε.

3. Το τρίτο πρόβλημα είναι οτι **το χαμηλοπερατό φίλτρο που αποκόπτει το φάσμα βασικής ζώνης δεν μπορεί να είναι ιδανικό** (και προφανώς το ίδιο ισχύει και για το anti-aliasing φίλτρο που προαναφέρθηκε)! Η χροστική απόκριση ενός ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου είναι άπειρης διάρκειας και μη αιτιατή, όπως έχουμε δείξει στην Παράγραφο 6.3. Η λύση εδώ είναι να προσεγγίσουμε το φίλτρο αυτό από μη ιδανικά φίλτρα, δηλ. από χροστικές αποκρίσεις πεπερασμένης διάρκειας και αιτιατές, προσπαθώντας όσο γίνεται περισσότερο να πλησιάσουμε τις προδιαγραφές και τα χαρακτηριστικά του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου.

10.4 Ιδανικό φίλτρο Ανακατασκευής

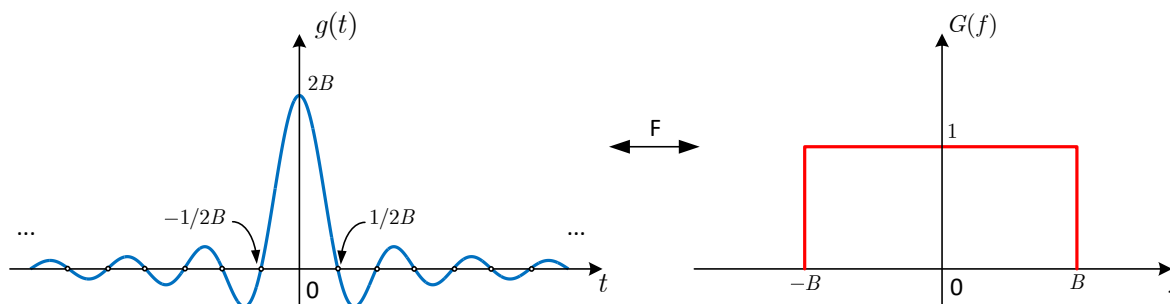
Ας ξεκινήσουμε από το τελευταίο αριθμητικά πρόβλημα της ιδανικής δειγματοληψίας, μια και είναι περισσότερο καθολικό από τα άλλα. Όπως γνωρίζουμε, ένα χαμηλοπερατό φίλτρο αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση $\text{sinc}(\cdot)$ στο χρόνο. Συγκεκριμένα αν το φίλτρο χαρακτηρίζεται από την εξίσωση

$$G(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \quad (10.43)$$

τότε έχει εύρος συχνοτήτων $2B$, από τη συχνότητα $-B$ έως τη συχνότητα B , με πλάτος 1, και εκτός αυτού του εύρους συχνοτήτων έχει πλάτος 0. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του $G(f)$ θα μας δίνει μια περιγραφή του φίλτρου στο χρόνο:

$$g(t) = F^{-1}\{G(f)\} = 2B\text{sinc}(2Bt) \quad (10.44)$$

Το φίλτρο στο χώρο της συχνότητας και του χρόνου φαίνεται στο Σχήμα 10.11. Σημειώστε ότι το φίλτρο που



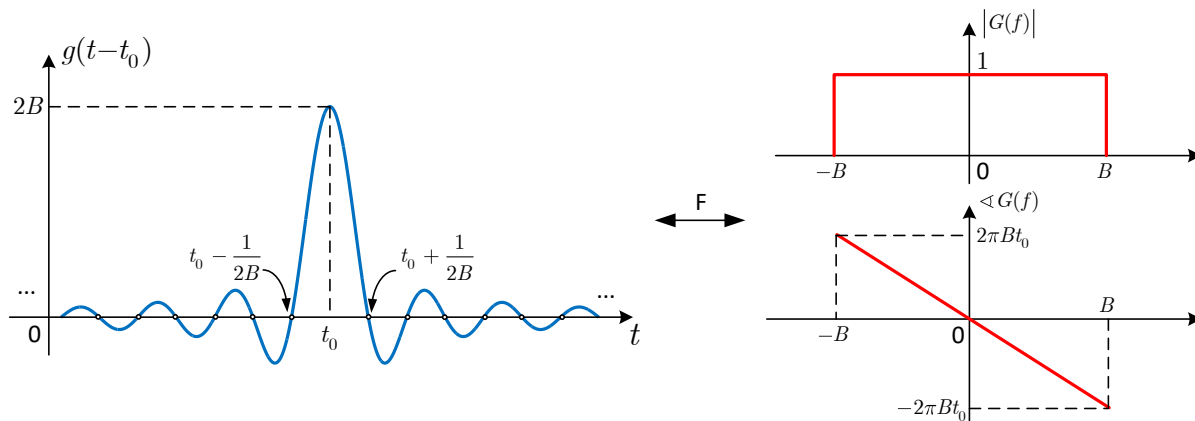
Σχήμα 10.11: Αριστερά: Φίλτρο παραθύρου στη συχνότητα. Δεξιά: Φίλτρο παραθύρου στη συχνότητα.

απεικονίζει το Σχήμα 10.11 έχει μηδενική φάση.

Το πρόβλημα με αυτό το φίλτρο είναι ότι η χρονιστική απόκριση $g(t)$ είναι ένα μη αιτιατό σήμα

$$g(t) \neq 0, \quad \text{για } t < 0 \quad (10.45)$$

και επομένως μη πραγματοποιήσιμο. Αρα δεν μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να απομονώσουμε τις συχνότητες που μας ενδιαφέρουν. Μια λύση (και μοναδική) είναι να μεταφέρουμε την χρονιστική απόκριση $g(t)$ δεξιά στο χρόνο π.χ. κατά $t = t_0$, έτσι ώστε η περισσότερη ενέργεια του σήματος να βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα του χρόνου. Σε μια τέτοια περίπτωση ίσως να μπορούμε να αμελήσουμε το μέρος του σήματος που βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα μιας και αυτό το μέρος δεν θα έχει πολύ μεγάλο πλάτος (ενέργεια). Κατ' αρχάς, μια τέτοια μετακίνηση του σήματος στο χρόνο θα έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας γραμμικής φάσης στο φάσμα φάσης του φίλτρου. Αυτό φαίνεται και στο Σχήμα 10.12, όπου το σήμα $g(t)$ έχει μετατοπιστεί δεξιά κατά $t = t_0$. Αυτό σημαίνει ότι το



Σχήμα 10.12: Αριστερά: Φίλτρο παραθύρου στη συχνότητα. Δεξιά: Φίλτρο παραθύρου στο χρόνο. Το φίλτρο έχει μετατοπιστεί δεξιά στο χρόνο κατά $t = t_0$.

σήμα που θα λάβουμε μετά το φιλτράρισμα θα περιέχει πέρα της δικής του φάσης και μια πρόσθετη: την γραμμική φάση του φίλτρου. Ευτυχώς μια τέτοια φάση μπορεί εύκολα να αφαιρεθεί αν γνωρίζουμε την μετατόπιση $t = t_0$. Παρόλα αυτά το φίλτρο και πάλι δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί αφού η διάρκειά του επεκτείνεται έως το $+\infty$. Για



Σχήμα 10.13: Κάθε μη αιτιατό φίλτρο μπορεί να γίνει αιτιατό με κάποια χρονική καθυστέρηση!

να μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τελικά το φίλτρο, θα πρέπει να το περιορίσουμε και στον θετικό άξονα του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε με ένα τετραγωνικό παράθυρο διάρκειας L , δηλ.

$$h(t) = 2B \text{rect}\left(\frac{t}{L}\right) \quad (10.46)$$

ώστε να λάβουμε το

$$\hat{g}(t) = g(t)h(t) \quad (10.47)$$

με μετασχ. Fourier ως

$$\hat{G}(f) = G(f) * H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) * 2B \text{sinc}(fL) \quad (10.48)$$

Μετατοπίζουμε το σήμα $\hat{g}(t)$ τη χρονική στιγμή $t = t_0$, οπότε έχουμε το σήμα

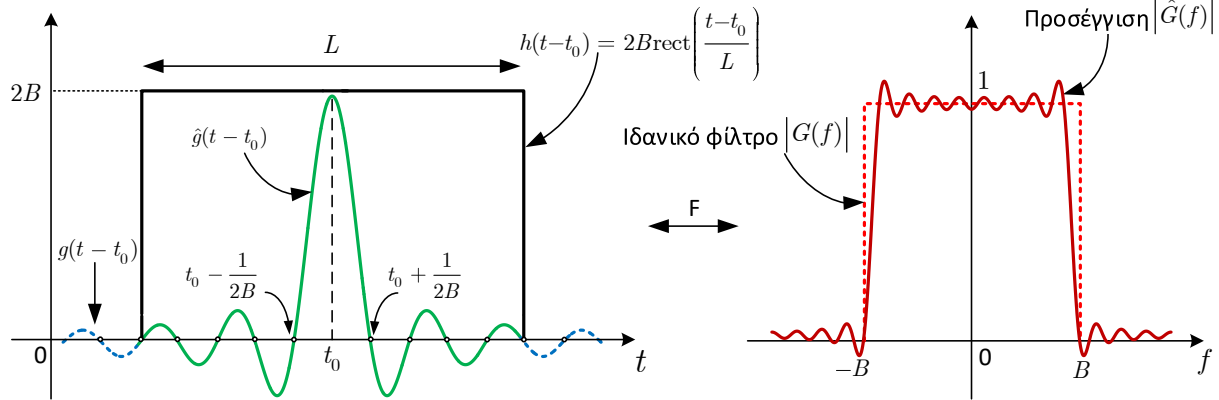
$$\hat{g}(t - t_0) = g(t - t_0)h(t - t_0) = g(t - t_0)2B \text{rect}\left(\frac{t - t_0}{L}\right) \quad (10.49)$$

Ο μετασχ. Fourier του προσεγγιστικού φίλτρου θα είναι

$$F\{\hat{g}(t - t_0)\} = \hat{G}(f)e^{-j2\pi ft_0} = \left(\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) * 2B \text{sinc}(fL)\right)e^{-j2\pi ft_0} \quad (10.50)$$

Αν η διάρκεια L είναι μικρή, το σφάλμα στην πραγματοποίηση του φίλτρου θα είναι μεγάλο. Ομως τότε θα έχουμε ένα μικρής διάρκειας φίλτρο που είναι εύκολα πραγματοποιήσιμο και η συνέλιξη του σήματος με το φίλτρο θα υπολογίζεται γρήγορα. Αν, αντίθετα, η διάρκεια L επιλεγεί να είναι μεγάλη, τότε το σφάλμα στην πραγματοποίηση του φίλτρου θα είναι μικρό αλλά το φίλτρο θα είναι δύσκολο να πραγματοποιηθεί και θα είναι και χρονοβόρο στο να φιλτράρει ένα σήμα. Ο πολλαπλασιασμός του $g(t - t_0)$ με ένα παράθυρο διάρκειας L φαίνεται στο Σχήμα 10.14, μαζί με το μέτρο του μετασχ. Fourier τόσο του ιδανικού φίλτρου όσο και της προσέγγισης. Από το σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι τώρα και το φάσμα πλάτους έχει αλλάξει, όπως αναμενόταν αφού αποκόψαμε ενεργειακό περιεχόμενο του σήματος στο χρόνο. Όταν μεγαλώσουμε τη διάρκεια L τότε το φάσμα πλάτους θα πλησιάζει περισσότερο το φάσμα πλάτους του ιδανικού φίλτρου (αλλά με τα γνωστά προβλήματα).

Το σήμα που λαμβάνουμε μετά την ιδανική δειγματοληψία είναι μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα. Ένα τέτοιο σήμα δεν είναι πραγματοποιήσιμο μιας και οι τιμές των δειγμάτων δεν έχουν διάρκεια - γι'αυτό και η ονομασία ιδανική δειγματοληψία. Μπορούμε επίσης να βγάλουμε το ίδιο συμπέρασμα (δηλ. ότι το ιδανικά δειγματοληπτημένο σήμα δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί) ελέγχοντας το φάσμα του σήματος μετά τη δειγματοληψία. Για παράδειγμα,



Σχήμα 10.14: Αριστερά: παράθυρο $h(t - t_0)$, σήμα $\hat{g}(t - t_0)$, και σήμα $g(t - t_0)$. Δεξιά: Ιδανικό (διακεκομμένη γραμμή) και προσεγγιστικό (συνεχές γραμμή) φίλτρο παραθύρου.

στο Σχήμα ;; φαίνεται ότι το (βασικό) φάσμα που αντιστοιχεί στο σήμα συνεχούς χρόνου επαναλαμβάνεται στο άπειρο χωρίς καμία βαθμιαία μείωση καθώς η συχνότητα τείνει στο άπειρο ($|f| \rightarrow \infty$). Βλέπουμε λοιπόν πως είτε από το χώρο του χρόνου είτε από το χώρο της συχνότητας φτάνουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Για να μπορούμε να πραγματοποιήσουμε μια δειγματοληψία, θα πρέπει τα δείγματα που θα πάρουμε από το σήμα συνεχούς χρόνου να έχουν κάποια (έστω και μικρή) διάρκεια.

10.5 Φυσική Δειγματοληψία

Στη Φυσική Δειγματοληψία αντικαθιστούμε τη σειρά από συναρτήσεις Δέλτα με μια σειρά από τετραγωνικού παλμούς διάρκειας D . Σε αντίθεση με την Ιδανική Δειγματοληψία, όπου η ακολουθία των πράξεων ήταν

$$x_s(t) = x(t) * \delta_{T_s}(t) \quad (10.51)$$

στη Φυσική Δειγματοληψία έχουμε την εξής ακολουθία:

$$x_{ns}(t) = [\delta_{T_s}(t) * g(t)]x(t) \quad (10.52)$$

με $g(t)$ τον προαναφερθέντα τετραγωνικό παλμό που περιγράφεται ως

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{D}{2}}{D}\right) \quad (10.53)$$

και ο μετασχ. Fourier του ως

$$G(f) = D \text{sinc}(fD) e^{-j\pi f D} \quad (10.54)$$

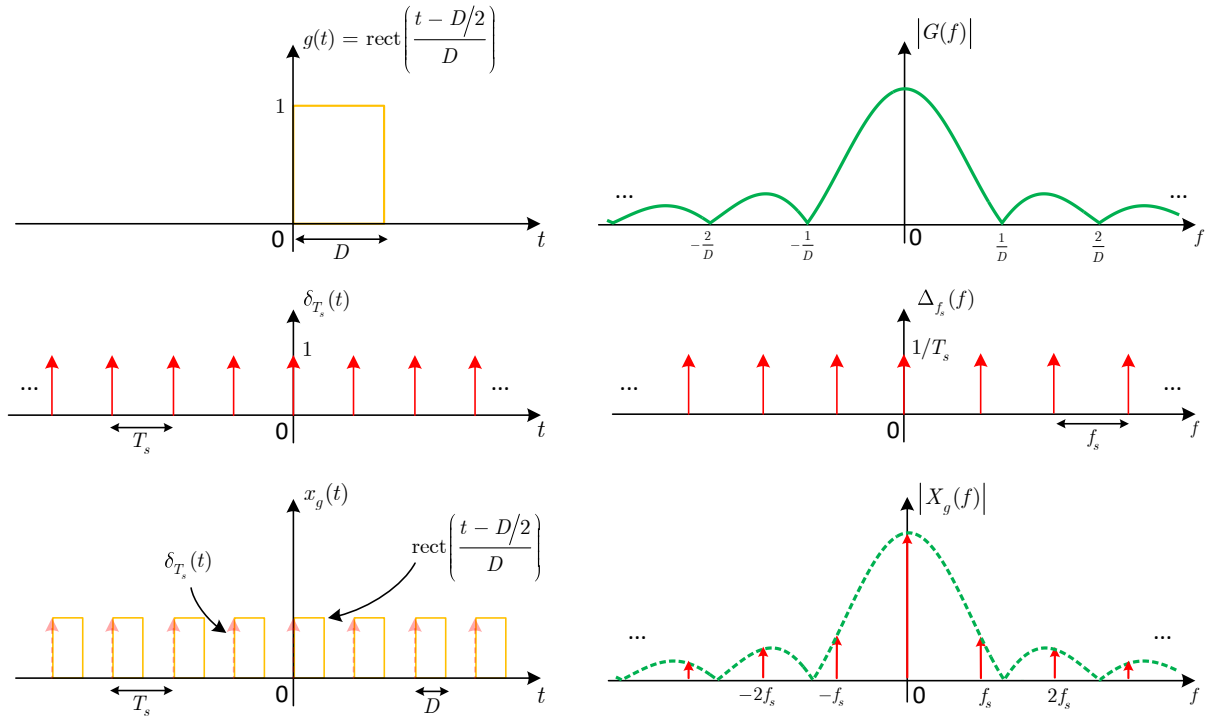
Για να δημιουργήσουμε τη σειρά από τετραγωνικούς παλμούς, μπορούμε να εκτελέσουμε την πράξη της συνέλιξης μεταξύ του παλμού και μιας σειράς από συναρτήσεις Δέλτα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.15(α). Έτσι, η νέα μας συνάρτηση δειγματοληψίας θα είναι

$$x_g(t) = g(t) * x_s(t) = g(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - nT_s) \quad (10.55)$$

και ο μετασχ. Fourier της θα είναι

$$X_g(f) = G(f) \Delta_{f_s}(f) = G(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_s} \delta(f - kf_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(kf_s) \delta(f - kf_s) \quad (10.56)$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.15(β). Παρατηρήστε ότι η εικόνα της συνάρτησης δειγματοληψίας μας στο χώρο της συχνότητας αποτελείται από μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα που απέχουν f_s μεταξύ τους αλλά κάθε μια έχει επιφάνεια ίση με $G(kf_s)$, δηλ. εξαρτάται από την τιμή του μετασχ. Fourier του τετραγωνικού παλμού στη συχνότητα kf_s !



Σχήμα 10.15: Συνέλιξη ορθογώνιου παλμού με σειρά συναρτήσεων Δέλτα.

Έτσι, πολλαπλασιάζοντας το σήμα συνεχούς χρόνου με τη συνάρτηση δειγματοληψίας μας έχουμε

$$x_{ns}(t) = x_g(t)x(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - nT_s) \quad (10.57)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)g(t - nT_s) \quad (10.58)$$

και στο χώρο της συχνότητας

$$X_{ns}(f) = X_g(f) * X(f) = \frac{1}{T_s} \left[X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(kf_s)\delta(f - kf_s) \right] = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(kf_s)X(f - kf_s) \quad (10.59)$$

Προσέξτε ότι επειδή οι τιμές $G(kf_s)$ είναι φθίνουσες για $|f| \rightarrow \infty$, το ίδιο συμβαίνει και με τα “αντίγραφα” $G(kf_s)X(f - kf_s)$ του βασικού φάσματος $X(f)$. Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα αυτού του τρόπου δειγματοληψίας, αφού για την ανακατασκευή του σήματος χρειάζεται να μηδενίσουμε τμήματα του φάσματος με σταδιακά φθίνοντα πλάτη.

Η φυσική δειγματοληψία φαίνεται συνοπτικά στο Σχήμα 10.16.

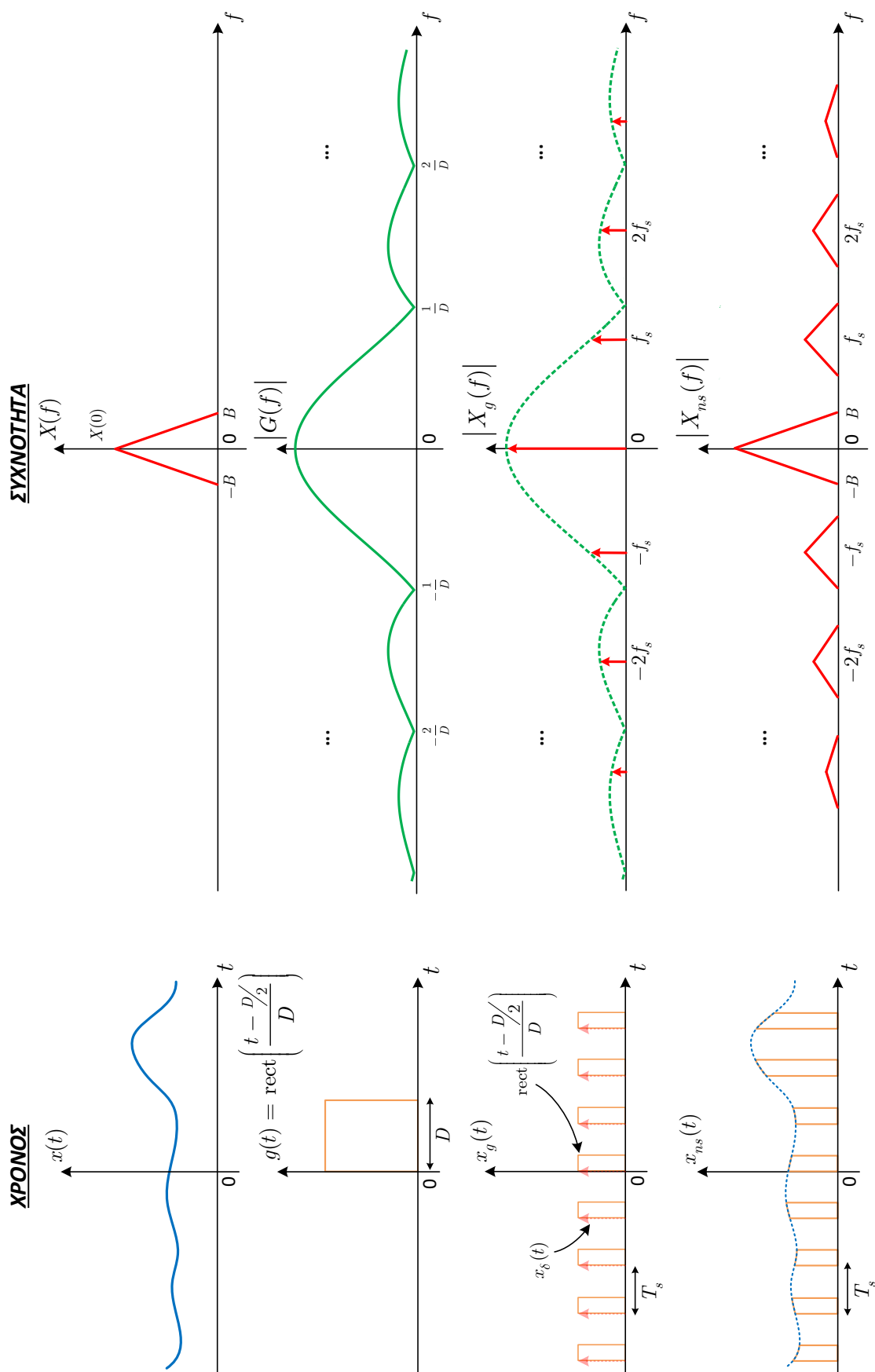
10.6 Δειγματοληψία με Διατήρηση Τιμής

Ένα εναλλακτικό σχήμα δειγματοληψίας (και πιο δημοφιλές) περιλαμβάνει τη σειρά τετραγωνικών παλμών να διατηρεί σταθερό το πλάτος κάθε παλμού, σύμφωνα με τη χρονική στιγμή της δειγματοληψίας. Από μαθηματικής σκοπιάς, η Δειγματοληψία με Διατήρηση Τιμής - sampling with holding περιγράφεται ως

$$x_{sh}(t) = [x(t)\delta_{T_s}(t)] * g(t) \quad (10.60)$$

Ξανά, ο βασικός τετραγωνικός παλμός διάρκειας D και μετατοπισμένος κατά $D/2$ γράφεται ως

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t - D/2}{D}\right) \quad (10.61)$$



Σχήμα 10.16: Φυσική δειγματοληψία στο χώρο του χρόνου και της συχνότητας.

και ο μετασχ. Fourier αυτού του παλμού είναι

$$G(f) = D \operatorname{sinc}(fD) e^{-j\pi fD} \quad (10.62)$$

Στο χώρο της συχνότητας, η Δειγματοληψία με Διατήρηση Τιμής γράφεται ως

$$X_{sh}(f) = [X(f) * \Delta_{f_s}(f)] G(f) = \left[\frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_s) \right] G(f) \quad (10.63)$$

$$= \frac{1}{T_s} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_s) \right] G(f) \quad (10.64)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(f) X(f - kf_s) \quad (10.65)$$

Παρατηρούμε ότι το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος θα επαναλαμβάνεται περιοδικά όπως και στην ιδανική δειγματοληψία. Όμως η βασική διαφορά είναι ότι σε αυτή την περίπτωση το φάσμα θα πολλαπλασιάζεται με μια συνάρτηση $\operatorname{sinc}(\cdot)$. Έτσι, το φάσμα θα τείνει στο μηδέν καθώς η συχνότητα θα τείνει στο άπειρο. Στο Σχήμα 10.17 φαίνεται ένα παράδειγμα Δειγματοληψίας με Διατήρηση Τιμής. Παρατηρήστε ότι σε αυτήν την περίπτωση το δειγματοληπτημένο σήμα αποτελείται από τετραγωνικούς παλμούς με την ίδια τιμή για τη διάρκεια D του παλμού, εξ ου και το όνομα της μεθόδου. ■

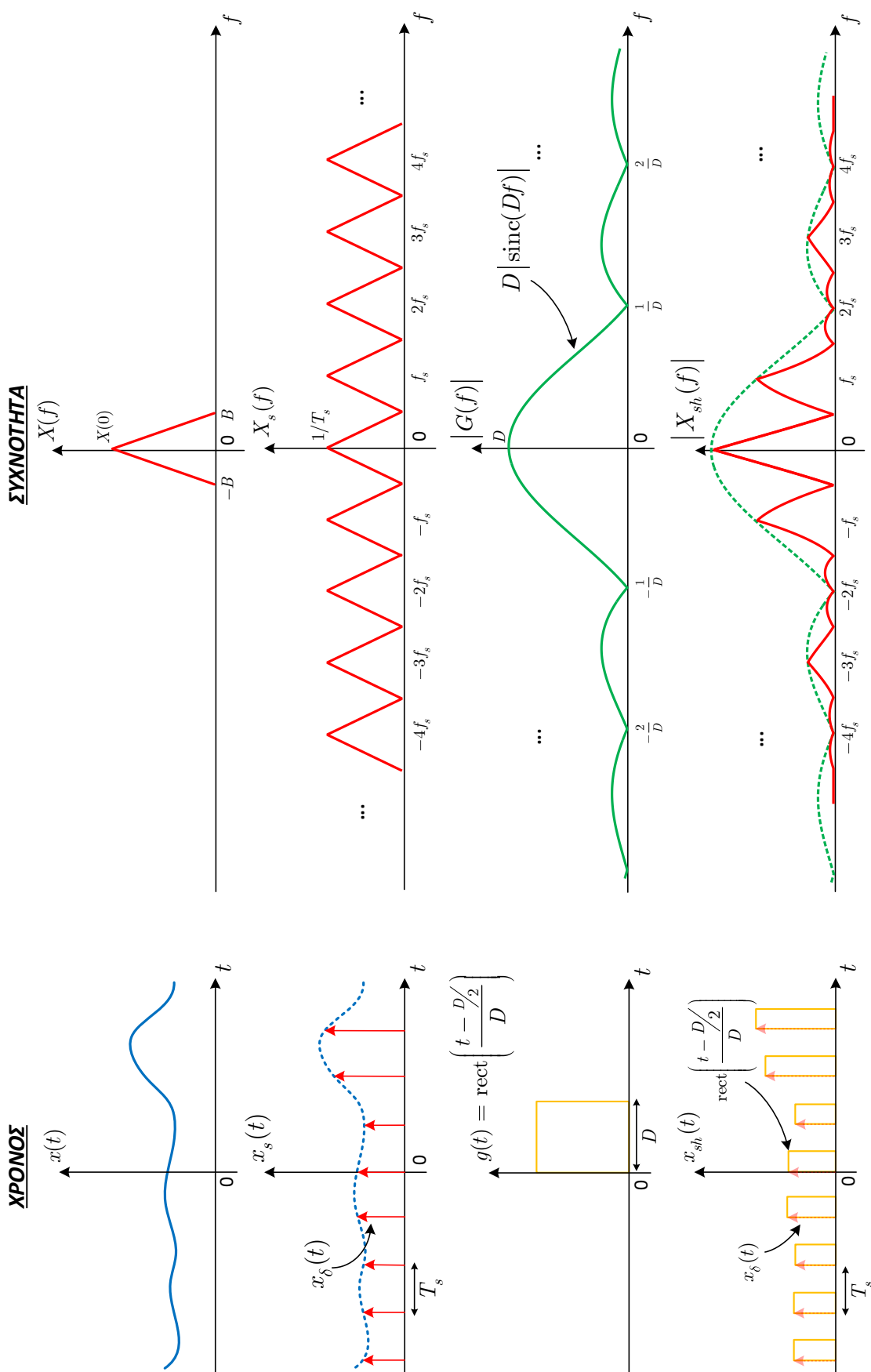
Θα αναρωτιέστε βέβαια γιατί τόσες πολλές (και υπάρχουν κι άλλες!) μέθοδοι δειγματοληψίας. Η αλήθεια είναι ότι κάθε μια έχει τα πλεονεκτήματά της και μειονεκτήματά της. Στη Δειγματοληψία με Διατήρηση Τιμής, το ηλεκτρικό κύκλωμα που απαιτείται για τη δειγματοληψία είναι πολύ λιγότερο πολύπλοκο συγκρινόμενο με αυτό της Φυσικής Δειγματοληψίας, προφανώς γιατί είναι πιο εύκολο να δημιουργήσει κανείς παλμούς σταθερού πλάτους. Όμως από την άλλη πλευρά, όταν το σήμα ανακατασκευάζεται με τη μέθοδο του χαμηλοπερατού φίλτρου, τα δείγματα της Φυσικής Δειγματοληψίας δεν έχουν καμία (θεωρητικά) αλλοίωση συγκριτικά με αυτά της Δειγματοληψίας με Διατήρηση Τιμής, αφού στην τελευταία το βασικό φάσμα έχει αλλοιωθεί από τον πολλαπλασιασμό του με τη συνάρτηση $\operatorname{sinc}(\cdot)$. Όμως η αλλοίωση αυτή είναι αναστρέψιμη: μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα τροποποιημένο χαμηλοπερατό φίλτρο (φίλτρο εξίσωσης - equalizing filter) το οποίο θα αναστρέφει την επίδραση της συνάρτησης $\operatorname{sinc}(\cdot)$ στη βασική ζώνη.

10.7 Εφαρμογές της δειγματοληψίας στις Τηλεπικοινωνίες

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει η δειγματοληψία δίνει τη δυνατότητα να επεξεργαστούμε με υπολογιστές πολλά είδη σημάτων. Ένα σημαντικό πεδίο εφαρμογής της δειγματοληψίας είναι στις Τηλεπικοινωνίες.

Η δειγματοληψία μας επιτρέπει να στείλουμε αντί του αναλογικού σήματος συνεχούς χρόνου μια σειρά από παλμούς (ψηφιακή επικοινωνία). Με αυτό τον τρόπο μπορούμε εύκολα να ενισχύσουμε το σήμα στα σημεία αναμετάδοσης του σήματος. Η ενίσχυση του σήματος σε τακτά χρονικά διαστήματα είναι αναγκαία λόγω εξασθένησης του εκπεμπόμενου σήματος. Το κακό στην περίπτωση του αναλογικού σήματος συνεχούς χρόνου είναι ότι μαζί με το χρήσιμο σήμα φτάνει στον αναμεταδότη και θόρυβος που προέρχεται από μηχανικές λειτουργίες του συστήματος ή από παρεμβολές και άλλες πηγές θορύβου. Δυστυχώς, το χρήσιμο σήμα εξασθενεί όσο ταξιδεύει μέσα στο κανάλι επικοινωνίας, ενώ ο θόρυβος και οι παρεμβολές - ως αθροιστικά φαινόμενα - γίνονται όλο και ισχυρότεροι. Όταν ένας αναμεταδότης ενισχύει το συνολικό σήμα ενισχύει τόσο το χρήσιμο σήμα όσο και το θόρυβο. Προϊόντος του χρόνου, η συχνή επανάληψη της ενίσχυσης του συνολικού σήματος (χρήσιμο σήμα και θόρυβος) θα έχει ως αποτέλεσμα την παρουσία ισχυρού θορύβου στο δέκτη, με αποτέλεσμα τη μείωση της ποιότητας της επικοινωνίας. Μάλιστα αν το κανάλι μετάδοσης είναι αρκετά “μακρύ” τότε ακόμα και το παλμικό σήμα θα υποστεί σοβαρή αλλοίωση.

Αντίθετα, η χρήση παλμών μέσω της δειγματοληψίας του αναλογικού σήματος συνεχούς χρόνου δίνει τη δυνατότητα στον αναμεταδότη να εκτιμήσει που βρίσκονται οι παλμοί και να ξαναφτιάξει από την αρχή το μεταδιδόμενο σήμα, μηδενίζοντας έτσι το θόρυβο που έχει φτάσει μέχρι τον αναμεταδότη. Αυτός είναι ένας βασικός λόγος για τον οποίο τα συστήματα ψηφιακής επικοινωνίας έχουν υψηλή ποιότητα μετάδοσης δεδομένων σε σχέση με τα συστήματα αναλογικής μετάδοσης, καθώς το αναλογικό σήμα δεν μπορεί να εκτιμηθεί και να ξαναφτιαχτεί από την αρχή,



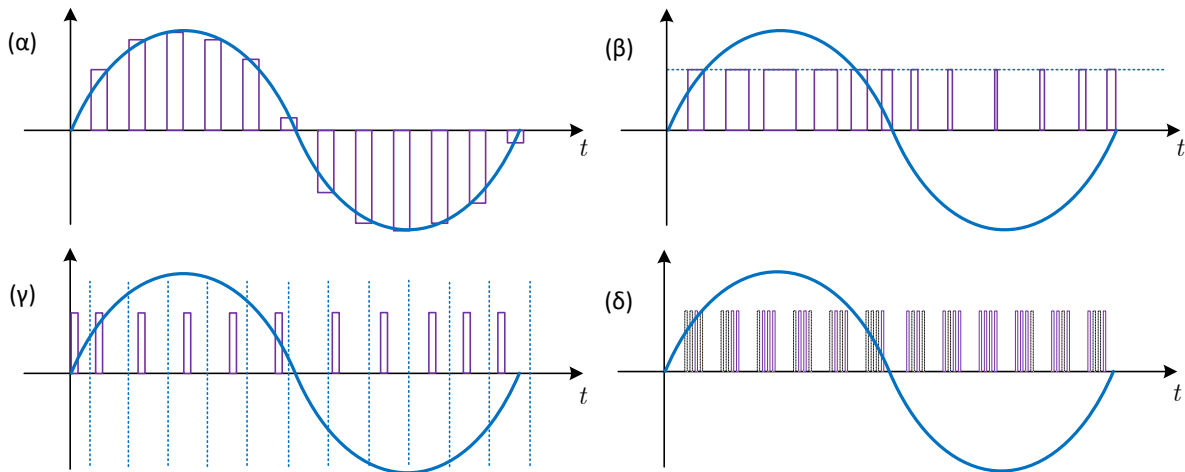
Σχήμα 10.17: Δεγματοληψία με διατήρηση τιμής στο χρόνο και το αποτέλεσμα αυτής στο χώρο της συχνότητας.

καθώς ο θόρυβος θα έχει ήδη αλλοιώσει ανεπανόρθωτα τις τιμές του σήματος. Ασφαλώς υπάρχουν όρια τα οποία πρέπει να ικανοποιούνται για να μπορεί ο αναμεταδότης να εκτιμήσει χωρίς σφάλμα το παλμικό σήμα. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι το σφάλμα ανάγνωσης ενός παλμού είναι αμελητέο.

Ένα άλλο πλεονέκτημα της μετάδοσης παλμικού σήματος είναι η δυνατότητα ταυτόχρονης μετάδοσης πολλών σημάτων. Αυτό μπορεί να γίνει με δυο τρόπους.

- Χωρίζοντας το κανάλι σε χρονικές στιγμές: επειδή ένα (πρώτο) παλμικό σήμα καταλαμβάνει ένα μόνο τμήμα του χρόνου, ένα δεύτερο παλμικό σήμα μπορεί να σταλεί σε χρόνους όπου το πρώτο σήμα δεν καταλαμβάνει. Αν μικρύνουμε τη διάρκεια των παλμών, μπορούμε να μεταδώσουμε αρκετά σήματα μέσα από το ίδιο κανάλι ταυτόχρονα. Η μετάδοση αυτή ονομάζεται *Πολυπλεξία Διαίρεσης Χρόνου - Time-division Multiplexing (TDM)*.
- Χωρίζοντας το κανάλι σε συχνότητες: ένα συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων καταλαμβάνεται από ένα και μόνο σήμα, χωρίς το εύρος αυτό να επικαλύπτεται με κάποιο άλλο. Έτσι, κάθε σήμα απασχολεί ένα συγκεκριμένο εύρος, το οποίο είναι γνωστό στο δέκτη. Η μετάδοση αυτή ονομάζεται *Πολυπλεξία Διαίρεσης Συχνότητας - Frequency-division Multiplexing (FDM)*.

Παραδείγματα παλμικής διαμόρφωσης φαίνονται στο Σχήμα 10.18. Συγκεκριμένα, απεικονίζονται η Διαμόρφωση Παλμών Κατά Πλάτος - Pulse Amplitude Modulation - PAM, η Διαμόρφωση Παλμών Κατά Εύρος - Pulse Width Modulation - PWM, η Διαμόρφωση Παλμών Κατά Θέση - Pulse Position Modulation - PPM, και η Παλμοκωδική Διαμόρφωση - Pulse Code Modulation-PCM. Η τελευταία είναι και η πιο δημοφιλής στις μέρες μας. Σε όλες τις παραπάνω διαμορφώσεις, μεταδίδεται το διαμορφωμένο σήμα αντί του πραγματικού αναλογικού σήματος συνεχούς χρόνου. Συγκεκριμένα, στη Διαμόρφωση Παλμών Κατά Πλάτος, το ύψος των παλμών μεταβάλλεται σύμφωνα με



Σχήμα 10.18: Διάφορα συστήματα παλμικής διαμόρφωσης: (α) Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος, (β) Διαμόρφωση παλμών κατά εύρος, (γ) Διαμόρφωση παλμών κατά θέση, (δ) Παλμοκωδική διαμόρφωση.

τις τιμές της αναλογικής κυματομορφής. Στη Διαμόρφωση Παλμών Κατά Εύρος, το εύρος των παλμών μεταβάλλεται σύμφωνα με τις τιμές της κυματομορφής, με το ύψος του να παραμένει σταθερό, ενώ στη Διαμόρφωση Παλμών Κατά Θέση, ο παλμός έχει συγκεκριμένο εύρος και ύψος, αλλά μεταβάλλεται η θέση του εντός ενός συγκεκριμένου διαστήματος ανάλογα με την τιμή της κυματομορφής. Τέλος, στην Παλμοκωδική Διαμόρφωση, οι τιμές της κυματομορφής κωδικοποιούνται είτε από 1 ως N το πλήθος παλμούς, είτε από N το πλήθος παλμούς, όπου κάθε παλμός είναι θετικός ή αρνητικός.