

Κεφάλαιο 7

Ο Μετασχηματισμός Laplace

7.1 Εισαγωγή

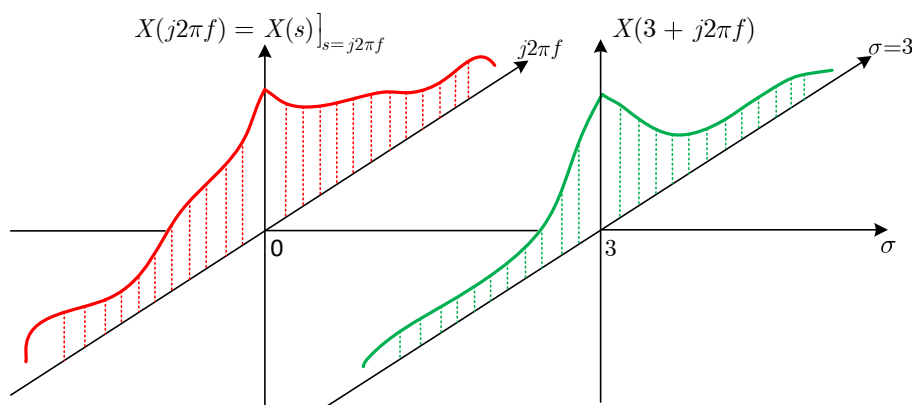
Έχουμε ήδη δει ότι ο μετασχ. Fourier είναι ένα μαθηματικό εργαλείο που μας επιτρέπει να αναπαριστούμε ένα σήμα $x(t)$ σαν ένα συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) εκθετικών μιγαδικών σημάτων της μορφής $e^{j2\pi ft}$, δηλ.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (7.1)$$

που δεν είναι άλλη σχέση φυσικά παρά ο αντίστροφος μετασχ. Fourier. Έστω λοιπόν ένα σήμα

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \quad (7.2)$$

Για λόγους ευκολίας, ας υποθέσουμε ότι το φάσμα του σήματος είναι πραγματικό και θετικό¹, δηλ. $X(f) \in \mathbb{R}$ και $X(f) > 0$. Αυτό το φάσμα φαίνεται στο Σχήμα 7.1. Ο άξονας πάνω στον οποίο ορίζεται ο μετασχηματισμός $X(f)$ είναι αυτός των γνωστών μας συχνοτήτων, που έχουμε απλά αντικαταστήσει το f με το $j2\pi f$, μια αυτό είναι το όρισμα των εκθετικών μας στο μετασχ. Fourier². Σε αυτό το Σχήμα, απλά έχουμε ορίσει ένα χώρο στον οποίο οι x, y διαστάσεις του είναι το μιγαδικό επίπεδο - έστω $\sigma, j2\pi f$ αυτές - και η τρίτη διάσταση είναι οι τιμές του μετασχ. Fourier - που όπως παραδεχτήκαμε χάριν ευκολίας, οι τιμές αυτές είναι θετικές πραγματικές στο παράδειγμά μας ώστε να μη χρειάζεται να συζητάμε ξεχωριστά για φάσμα πλάτους και φάσης. Δε σας το είχα



Σχήμα 7.1: Ο μετασχ. Fourier στο μιγαδικό s -επίπεδο.

πει ρητά (το κρατούσα για έκπληξη ☹), αλλά όσο δουλεύετε με το μετασχ. Fourier, ουσιαστικά ένα τέτοιο σήμα δουλεύετε, υπό αυτή την οπτική, απλά προφανώς είναι πολύ πιο βολικό να το σχεδιάζουμε όπως έχουμε δει πολλές φορές, σε ένα διδιάστατο επίπεδο, παρά όπως στο Σχήμα 7.1. Ένα σήμα λοιπόν όπως το $x(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$ δεν έχει μετασχ. Fourier, υπό την έννοια ότι ο τελευταίος δε συγκλίνει για κάθε f - πρακτικά, για κάποια συχνότητα ή εύρος συχνοτήτων, ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος αυτού απειρίζεται, πράγμα ανεπιθύμητο.

¹Όπως το φάσμα του τριγωνικού παλμού.

²Η προσθήκη του j δεν συνιστά κάποια αλλαγή στο φάσμα καθώς αποτελεί τη φανταστική μονάδα, ενώ η προσθήκη του 2π συντελεί σε μια κλιμάκωση του άξονα των συχνοτήτων. Έτσι, το φάσμα ενός σήματος συναρτήσει της συχνότητας $2\pi f$ θα είναι μια διεσταλμένη “έκδοση” του φάσματος συναρτήσει της συχνότητας f που έχετε συνηθίσει να βλέπετε/σχεδιάζετε.

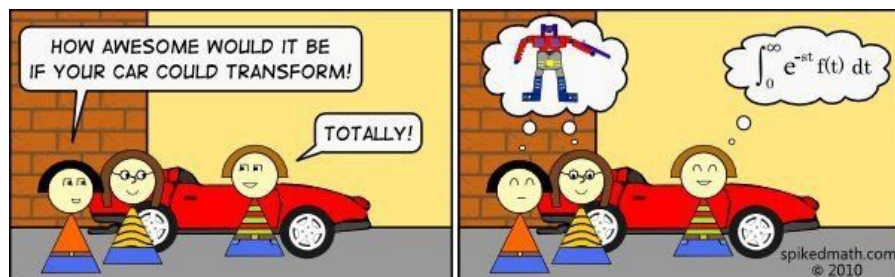
Βλέπετε λοιπόν ότι ο μετασχ. Fourier $X(f)$ ορίζεται πάνω στον κατακόρυφο άξονα των φανταστικών συχνοτήτων $j2\pi f$ του μιγαδικού επιπέδου - *μόνον* εκεί όμως. Το βλέπετε άλλωστε, το σήμα είναι σαν μια “φέτα” που φεύγει μόνο προς τα “πάνω” από το φανταστικό άξονα. Όμως, το μιγαδικό επίπεδο έχει προφανώς κι άλλες ευθείες πάνω στις οποίες μπορούμε να ορίσουμε μετασχηματισμούς. Μια από αυτές φαίνεται στο Σχήμα 7.1, κι αυτή είναι η $\sigma = 3$. Πάνω σε αυτόν τον άξονα, θα είχαμε συχνότητες $s = \sigma + j2\pi f = 3 + j2\pi f$, και η προβολή του σήματος $x(t)$ θα γινόταν πάνω σε εκθετικά της μορφής $e^{-st} = e^{-(3+j2\pi f)t}$. Φυσικά δε θα μπορούσαμε να μη δώσουμε ένα ξεχωριστό όνομα σε αυτό το μετασχηματισμό: ο μετασχηματισμός Laplace, αλλά ας μη βιαζόμαστε. Σταματάμε εδώ προσωρινά, αν και πρέπει ήδη να έχετε υποψιαστεί τι πρόκειται να συμβεί. ☺

7.2 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Επιστρέφουμε στο μετασχ. Fourier λοιπόν. Μια τέτοια αναπαράσταση είναι πολύτιμη στην ανάλυση και επεξεργασία σημάτων. Όμως (παντού υπάρχει ένα “όμως” που μας χαλάει τη διάθεση ☹) είδαμε ότι ο μετασχ. Fourier υπάρχει μόνο για μια περιορισμένη κατηγορία σημάτων, π.χ. ο μετασχ. Fourier δεν ορίζεται για σήματα της μορφής

$$x(t) = e^{at}u(t), \quad a > 0 \quad (7.3)$$

δηλ. για αύξοντα εκθετικά σήματα.



Σχήμα 7.2: Δεν αντιλαμβάνονται τους μετασχηματισμούς όλοι με τον ίδιο τρόπο... ☹

Ο βασικός λόγος για τις δυσκολίες που μας προκύπτουν είναι ότι για μερικά σήματα, όπως το σήμα στη Σχέση (7.3), ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει, επειδή τα συνήθη μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής $X(f)e^{j2\pi ft}$ είναι ανίκανα να συνθέσουν αύξοντα εκθετικά σήματα, όπως το παραπάνω - πολύ λογικό, αν σκεφτείτε ότι έχουν φραγμένο πλάτος $X(f)$, όπως είδαμε στη Σχέση (7.1). Αν αφήσουμε τη φαντασία μας ελεύθερη (πολύ ελεύθερη ☹), θα δούμε ότι το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί. Πώς;

Αν μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ως σήματα ανάλυσης και σύνθεσης εκθετικά της μορφής e^{st} , με το s να μην περιορίζεται μόνο πάνω στο φανταστικό άξονα (όπως γίνεται στον μετασχ. Fourier). Αυτό ακριβώς γίνεται στον περίφημο **μετασχηματισμό Laplace**. Εδώ, η συχνότητες είναι μιγαδικές, της μορφής $s = \sigma + j2\pi f$, και αυτή η γενίκευση μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε αύξοντα εκθετικά μιγαδικά σήματα (και άρα ημίτονα με εκθετικά αυξανόμενο πλάτος, όταν αναλύουμε πραγματικά σήματα) για να συνθέσουμε ένα σήμα $x(t)$, που με τον κλασικό μετασχ. Fourier δε θα μπορούσαμε. Ποιά είναι αυτά τα εκθετικά; Μα φυσικά τα $e^{\sigma t}e^{j2\pi ft}$! ☹Πριν πάμε στα μαθηματικά, ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε διαισθητικά και με ένα απλό παράδειγμα τι ακριβώς κερδίζουμε με το μετασχηματισμό αυτό.

7.3 Ο μετασχηματισμός Laplace

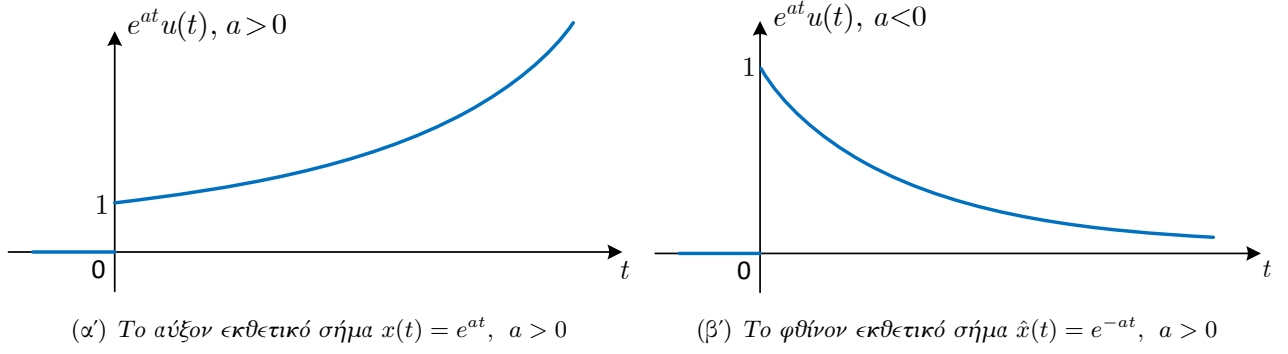
Αν ένα σήμα λοιπόν, όπως το $x(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$, στο Σχήμα 7.3α', δεν έχει μετασχ. Fourier, μπορούμε να το κάνουμε να έχει, πολλαπλασιάζοντάς το με ένα φθίνον εκθετικό σήμα, όπως το $e^{-\sigma t}$. Για παράδειγμα, το σήμα

$$\hat{x}(t) = e^{2t}u(t) \quad (7.4)$$

μπορεί να γίνει “μετασχηματισμένο” (!) κατά Fourier, απλά πολλαπλασιάζοντάς το με το $e^{-\sigma t}$, με $\sigma > 2$, ορίζοντας έτσι το

$$\hat{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t} = e^{(2-\sigma)t}u(t) \quad (7.5)$$

Αυτό το νέο σήμα είναι σήμα ενέργειας πια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.3β' - πάντα για $\sigma > 2$. Άρα το σήμα $\hat{x}(t)$ έχει πλέον μετασχ. Fourier, $\hat{X}(f)$, και οι συνιστώσες του είναι της μορφής $\hat{X}(f)e^{j2\pi ft}$, με συχνότητες f που “τρέχουν” από $-\infty$ ως ∞ . Έστω ένα απειροστό μικρό εύρος συχνοτήτων Δf του συνεχούς φάσματος του σήματος $\hat{X}(f)$. Επειδή αναλύουμε πραγματικά σήματα, θα υπάρχει και το εύρος $-\Delta f$ και το πλάτος τους θα είναι $\hat{X}(\Delta f)$ και $\hat{X}^*(\Delta f)$ αντίστοιχα, λόγω των γνωστών ιδιοτήτων του μετασχ. Fourier για πραγματικά σήματα.



Σχήμα 7.3: Εκθετικά πραγματικά σήματα.

Προσθέτοντάς τα, όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα, θα έχουμε:

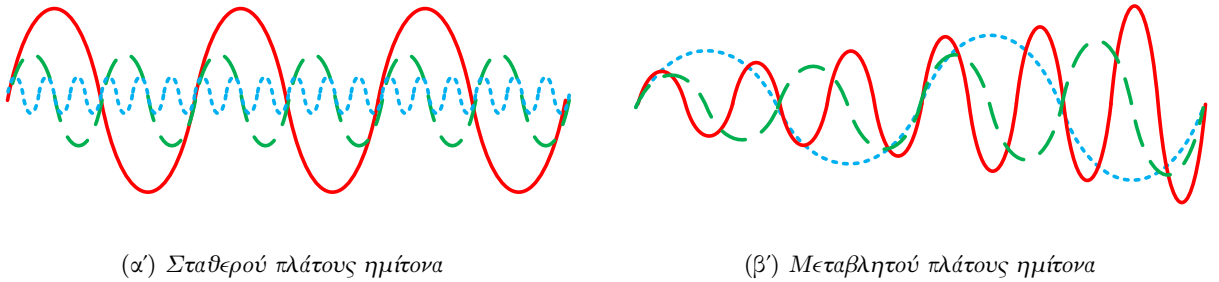
$$\hat{X}(\Delta f)e^{j2\pi\Delta ft} + \hat{X}^*(\Delta f)e^{-j2\pi\Delta ft} = |\hat{X}(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + (|\hat{X}(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}})^*e^{-j2\pi\Delta ft} \quad (7.6)$$

$$= |\hat{X}(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + |\hat{X}(\Delta f)|e^{-j\phi_{\Delta f}}e^{-j2\pi\Delta ft} \quad (7.7)$$

$$= |\hat{X}(\Delta f)|e^{j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} + |\hat{X}(\Delta f)|e^{-j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} \quad (7.8)$$

$$= 2|\hat{X}(\Delta f)|\cos(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f}) \quad (7.9)$$

Το φάσμα περιέχει έναν άπειρο αριθμό από τέτοια ημίτονα, σταθερού πλάτους $2|\hat{X}(f)|$ και ανεξάρτητου του χρόνου t . Θα ήταν χρονοβόρο να σχεδιάσουμε όλα αυτά τα ημίτονα, έτσι στο Σχήμα 7.4α' δείχνουμε μόνο τρία από αυτά. Η πρόσθεση όλων αυτών των συνιστωσών (άπειρων σε αριθμό) θα μας δώσει το $\hat{x}(t)$. Είναι όμως προφανές ότι



Σχήμα 7.4: Ημίτονα των δυο μετασχηματισμών

το επιθυμητό σήμα $x(t)$ – μην ξεχνάτε, το $x(t)$ θέλουμε να μετασχηματίσουμε! ☹– μπορεί να συντεθεί από τον πολλαπλασιασμό του $\hat{x}(t)$ με τα σήματα $e^{+\sigma t}$, έτσι δεν είναι; Αυτό τι σημαίνει; Σημαίνει ότι πολλαπλασιάζουμε κάθε φασματική συνιστώσα $\hat{X}(f)e^{j2\pi ft}$ του $\hat{x}(t)$ με $e^{+\sigma t}$, και μετά τις προσθέτουμε. Ιδού:

$$x(t) = \hat{x}(t)e^{+\sigma t} = e^{+\sigma t} \int \hat{X}(f)e^{j2\pi ft} df = \int (e^{+\sigma t} \hat{X}(f))e^{j2\pi ft} df = \int \hat{X}(f)(e^{+\sigma t}e^{j2\pi ft}) df \quad (7.10)$$

Αλλά μια τέτοια κίνηση σημαίνει επίσης ότι τα ημίτονα που προκύπτουν θα έχουν αύξοντα πλάτη! Η πρόσθεση όλων αυτών των αύξοντων ημιτόνων θα μας δώσει το ζητούμενο σήμα $x(t)$! Γιατί; Ας κάνουμε το ίδιο με τη Σχέση (7.9), μόνο που τώρα ας υποθέσουμε ότι έχουμε πλάτη $\hat{X}(\Delta f)e^{\sigma t}$:

$$e^{\sigma t} \hat{X}(\Delta f)e^{j2\pi\Delta ft} + e^{\sigma t} \hat{X}^*(\Delta f)e^{-j2\pi\Delta ft} = 2|\hat{X}(\Delta f)|e^{\sigma t} \cos(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f}) \quad (7.11)$$

Είναι φανερό εδώ ότι τα πλάτη των ημιτόνων δεν είναι σταθερά συναρτήσεως του χρόνου, όπως στην περίπτωση του μετασχ. Fourier, αλλά μεταβάλλονται συναρτήσεως του χρόνου ως $2|\hat{X}(\Delta f)|e^{\sigma t}$, όπως στο Σχήμα 7.4β'!

Επίσης, από τη Σχέση (7.10) βλέπουμε ότι ο πολλαπλασιασμός των συνιστωσών του $\hat{x}(t)$ με το $e^{+\sigma t}$ θα μας δώσει συνιστώσες της μορφής $e^{(\sigma+j2\pi f)t}$, προσθέτοντας τους εκθέτες μέσα στο ολοκλήρωμα! Άρα, κάθε συχνότητα της μορφής $j2\pi f$ του $\hat{x}(t)$ μετασχηματίζεται σε μια άλλη συχνότητα $\sigma+j2\pi f$ στο φάσμα του $x(t)$. Όμως πού θα βρίσκονται αυτές οι νέες συχνότητες; Πού αλλού, εκτός από πάνω σε μια νέα ευθεία στο μιγαδικό s -επίπεδο, στην ευθεία που περιλαμβάνει τις συχνότητες $\sigma+j2\pi f$!

Πλέον είναι ξεκάθαρο ότι το σήμα $x(t)$ μπορεί να συντεθεί από μεταβαλλόμενου πλάτους, συναρτήσει του χρόνου t , μιγαδικά εκθετικά σήματα που βρίσκονται στο ημιεπίπεδο $\sigma + j2\pi f$, $\sigma > 2$, του μιγαδικού επιπέδου, με το f να κυμαίνεται από $-\infty$ έως ∞ . Η τιμή του σ είναι μεταβλητή. Για παράδειγμα, αν $x(t) = e^{2t}u(t)$, τότε το $\hat{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t}$ μπορεί να γίνει “μετασχηματισμός” αν διαλέξουμε $\sigma > 2$. Καταλαβαίνετε ότι έχουμε άπειρες επιλογές για την τιμή του σ . Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός του $x(t)$ όπως παρουσιάστηκε παραπάνω δεν είναι μοναδικός, και ότι υπάρχουν άπειροι τρόποι να συνθέσουμε το $x(t)$ από μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής $e^{(\sigma+j2\pi f)t}$, όμως κάθε μετασχηματισμός θα ορίζεται επάνω σε μια ευθεία $\sigma = c$, $c \in \mathbb{R}$ του μιγαδικού επιπέδου, η οποία εμφανώς είναι παράλληλη στο φανταστικό άξονα. Όμως, το σ έχει μια ελάχιστη, συγκεκριμένη τιμή σ_0 για ένα δεδομένο $x(t)$ (όπως εδώ, $\sigma_0 = 2$, για $x(t) = e^{2t}u(t)$). Αυτή η περιοχή του μιγαδικού s -επιπέδου που ορίζονται άπειροι τρόποι σύνθεσης του $x(t)$ από τα αύξοντα εκθετικά σήματα λέγεται **Πεδίο ή Περιοχή Σύγκλισης - Region of Convergence (ROC)** του νέου αυτού μετασχηματισμού του $x(t)$.

Αυτός ο νέος μετασχηματισμός λοιπόν, που χρησιμοποιεί μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής $e^{(\sigma+j2\pi f)t}$ λέγεται **Μετασχηματισμός Laplace** και ορίζεται ως:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad (7.12)$$

ενώ ο αντίστροφός του ως:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds \quad (7.13)$$

ο οποίος όμως δε θα χρησιμοποιηθεί για τους σκοπούς μας, μια και υπάρχουν πιο εύκολοι τρόποι να βρει κανείς το σήμα στο χρόνο $x(t)$ από το μετασχ. Laplace του, αποφεύγοντας την επίλυση ενός ολοκληρώματος στο μιγαδικό επίπεδο.

Ο μετασχ. Laplace μπορεί να γραφεί ως

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad (7.14)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} \cos(2\pi ft)dt + j \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} \sin(2\pi ft)dt \quad (7.15)$$

$$= \text{Re}\{X(s)\} + j \text{Im}\{X(s)\} = X_R(s) + jX_I(s) \quad (7.16)$$

με $X_R(s), X_I(s)$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού, αντίστοιχα. Άρα ο μετασχ. Laplace είναι εν γένει μιγαδικό σήμα, με το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος να υπολογίζεται ως

$$X_R(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} \cos(2\pi ft)dt \quad (7.17)$$

$$X_I(s) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} \sin(2\pi ft)dt \quad (7.18)$$

Μια εναλλακτική αναπαράσταση του μετασχ. Laplace είναι η πολική μορφή, δηλ.

$$X(s) = |X(s)|e^{j\phi_x(s)} \quad (7.19)$$

με

$$|X(s)| = \sqrt{X_R^2(s) + X_I^2(s)} \quad (7.20)$$

να είναι το μέτρο του μετασχηματισμού και

$$\phi_x(s) = \tan^{-1} \left(\frac{X_I(s)}{X_R(s)} \right) \quad (7.21)$$

η φάση του μετασχηματισμού.

7.3.1 Ύπαρξη του μετασχ. Laplace

Μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του μετασχ. Laplace είναι η

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (7.22)$$

Όταν το παραπάνω ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάποιες τιμές του σ , τότε υπάρχει ο μετασχ. Laplace. Αποδεικνύεται ότι κάθε σήμα που αυξάνει όχι γρηγορότερα από το εκθετικό σήμα $Me^{\sigma_0 t}$, για κάποια $M, \sigma_0 \in \mathbb{R}$, ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη (7.22). Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{t^2}$ αυξάνει πιο γρήγορα από το $e^{\sigma_0 t}$, και άρα δεν έχει μετασχ. Laplace. Ευτυχώς, τέτοια σήματα έχουν ελάχιστη πρακτική σημασία.

Βέβαια, όπως και στο μετασχ. Fourier, αυτή η συνθήκη δεν είναι και αναγκαία. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} u(t) \quad (7.23)$$

απειρίζεται στο $t = 0^+$ και η Σχέση (7.22) δεν ικανοποιείται αλλά ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει και είναι ο

$$X(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad (7.24)$$

Δεν ασχολούμαστε με τέτοια σήματα, και πάντα όταν ζητείται ο μετασχ. Laplace θα υποθέτουμε ότι υπάρχει, δηλ. ότι το ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace συγκλίνει.

■

Συνοψίζοντας, ο μετασχ. Laplace μπορεί να ιδωθεί ως μια “επέκταση” του μετασχ. Fourier, για σήματα των οποίων το συχνотικό περιεχόμενο δεν μπορεί να υπολογιστεί απ’ την κλασική θεωρία Fourier. Ο μετασχ. Fourier προβάλλει το σήμα πάνω σε μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις με συχνότητες που ορίζονται στο φανταστικό άξονα ($e^{-j2\pi ft}$). Αλλάζοντας τις συναρτήσεις βάσης $e^{-j2\pi ft}$ σε $e^{-(\sigma+j2\pi f)t}$, προβάλλουμε το σήμα σε συχνότητες που βρίσκονται σε ευθείες παράλληλες με τον άξονα των φανταστικών. Οι νέες συχνότητες $\sigma + j2\pi f$ είναι, όπως είναι φανερό, μιγαδικές πλέον.

Ο μετασχ. Laplace ορίζεται ως:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (7.25)$$

με $s = \sigma + j2\pi f$, $\sigma, f \in \mathbb{R}$ και με Πεδίο Σύγκλισης R_x . Για αιτιατά σήματα, ορίζεται ο μονόπλευρος μετασχ. Laplace ως:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (7.26)$$

που δε διαφέρει σε πολλά από τον δίπλευρο μετασχ. Laplace που συζητούσαμε ως τώρα, αλλά δε θα τον χρησιμοποιήσουμε παρά μόνο αργότερα, όταν συζητήσουμε για συστήματα στο χώρο του Laplace.

7.3.2 Αιτιατά Σήματα

Προτού εφαρμόσουμε το νέο μας μετασχηματισμό σε διάφορα σήματα, θα μας φανεί πολύ χρήσιμο να κατηγοριοποιήσουμε μερικά σήματα ανάλογα με τη χρονική διάρκειά τους. Αυτή η διάκριση θα μας βοηθήσει πολύ στη συνέχεια στο να ορίζουμε εύκολα και γρήγορα την περίφημη Περιοχή Σύγκλισης του μετασχ. Laplace, για την οποία θα αναφέρουμε περισσότερες λεπτομέρειες στην επόμενη παράγραφο. Πρώτα όμως ας δούμε τα είδη σημάτων όσον αφορά την πλευρικότητα και την αιτιατότητά τους:

- **Αριστερόπλευρο** λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (Σχήμα 15.15)

$$x(t) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (7.27)$$

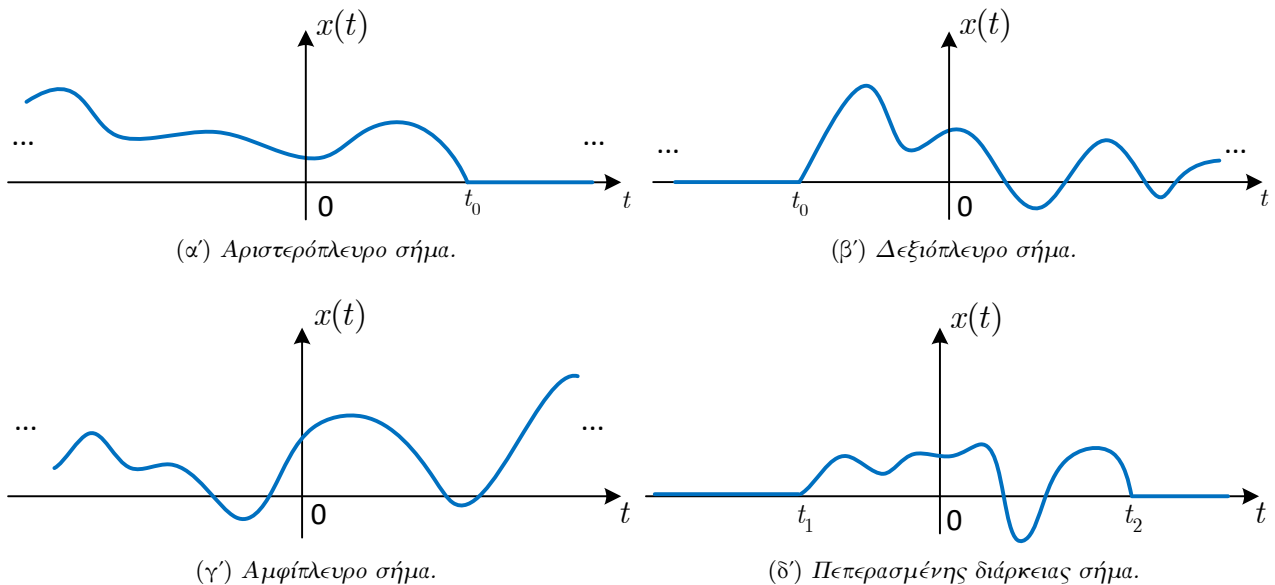
- **Δεξιόπλευρο** λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (Σχήμα 15.14)

$$x(t) = 0, \quad t \leq t_0 \quad (7.28)$$

- **Αμφίπλευρο (ή δίπλευρο)** λέγεται το σήμα το οποίο (Σχήμα 7.5γ') είναι άπειρης διάρκειας αλλά ούτε δεξιόπλευρο ούτε αριστερόπλευρο.

- Πεπερασμένης διάρκειας λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (Σχήμα 7.5δ')

$$x(t) \neq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (7.29)$$



Σχήμα 7.5: Είδη σημάτων σε σχέση με τη χρονική διάρκειά τους.

Η διάκριση των σημάτων όσον αφορά την πλευρικότητά τους είναι σχετικά εύκολη υπόθεση, είτε από τον ορισμό τους είτε από τη γραφική τους παράσταση. Ας γνωρίσουμε όμως εδώ και μια νέα - αλλά και γνωστή μας - κατηγοριοποίηση σημάτων, που αφορά την αιτιατότητά τους:

- **Αιτιατά** λέγονται τα σήματα για τα οποία ισχύει

$$x(t) = 0, \quad t < 0 \quad (7.30)$$

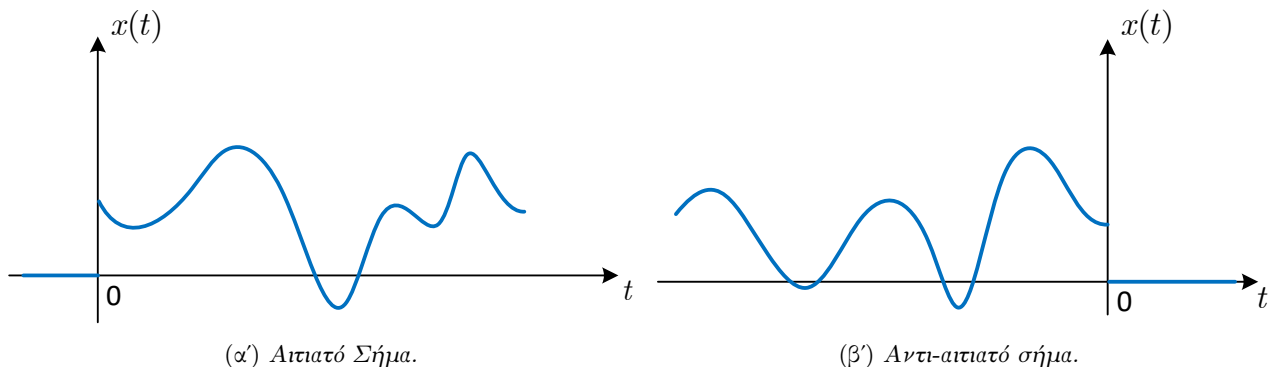
όπως στο Σχήμα 15.18.

- **Αντί-αιτιατά** λέγονται τα σήματα για τα οποία ισχύει η σχέση

$$x(t) = 0, \quad t > 0 \quad (7.31)$$

όπως αυτό στο Σχήμα 15.20.

- Υπάρχουν και τα **μη αιτιατά** σήματα, για τα οποία η Σχέση (7.30) δεν ισχύει, όπως τα σήματα σε όλα τα Σχήματα 7.5(α-δ).



Σχήμα 7.6: Αιτιατό και αντι-αιτιατό σήμα.

7.3.3 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Τόσο ο μετασχ. Laplace όσο και η Περιοχή Σύγκλισης προκαλούν συχνά σύγχυση τόσο όσον αφορά την προέλευσή τους, όσο και τη χρήση τους και τη σημασία τους. Εδώ θα ξεκαθαρίσουμε όλα αυτά, χρησιμοποιώντας τέσσερα χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 7.1:

Έστω το σήμα

$$x(t) = e^{at}u(t), \quad a \in \mathbb{R} \quad (7.32)$$

Βρείτε το μετασχ. Laplace του.

Λύση:

Γι' αυτό το σήμα, δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier αν $a > 0$, γιατί το ολοκλήρωμά του θα αποκλίνει στο $+\infty$. Απ' την άλλη, αν $a < 0$, τότε ο μετασχ. Fourier υπάρχει, μια και το σήμα μας είναι σήμα ενέργειας. Ας θεωρήσουμε στο παράδειγμά μας, ότι $a \in \mathbb{R}$, για περισσότερη γενικότητα. Προσέξτε ότι το σήμα μας είναι δεξιόπλευρο. Ας δοκιμάσουμε να εφαρμόσουμε τον μετασχ. Laplace και να δούμε μερικά πράγματα:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}dt = \left. \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) \quad (7.33)$$

Γνωρίζουμε όμως ³ ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a+jb)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} e^{jbt} = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \infty, & a > 0 \end{cases} \quad (7.34)$$

άρα ξέρουμε ότι η συνάρτηση $e^{-st} = e^{(a-s)t} e^{-j2\pi ft}$ φθίνει στο 0 όταν $t \rightarrow +\infty$, αν και μόνο αν

$$a - \sigma < 0 \iff a < \sigma \iff \operatorname{Re}\{s\} > a \quad (7.35)$$

Αυτή η σχέση αποτελεί το *Πεδίο Σύγκλισης*, γιατί αποτελεί το χώρο πάνω στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο υπάρχει ο μετασχ. Laplace, δηλ. το σχετικό ολοκλήρωμα συγκλίνει⁴! Οπότε δείξαμε ότι η συνάρτηση $e^{(a-s)t}$ γράφεται ως γινόμενο δυο συναρτήσεων και το γινόμενό τους συγκλίνει στο μηδέν. Ας ολοκληρώσουμε τη λύση μας.

$$X(s) = \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) = \frac{1}{a-s} (0 - 1) = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > a \quad (7.36)$$

Άρα ο μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = e^{at}u(t)$, $a \in \mathbb{R}$, είναι

$$x(t) = e^{at}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > a \quad (7.37)$$

και το Πεδίο Σύγκλισης φαίνεται στο Σχήμα 7.7(α). Θα μπορούσε το a να βρίσκεται στο δεξιό ημιεπίπεδο, αφού $a \in \mathbb{R}$. Δε μας ενδιαφέρει τώρα η θέση του, όσο η περιοχή που ορίζεται στα δεξιά του. Ο αριθμός a , που αποτελεί ρίζα του παρονομαστή του μετασχηματισμού, λέγεται **πόλος** του μετασχ. Laplace, και το πεδίο σύγκλισης για το δεξιόπλευρο σήμα μας είναι το ημιεπίπεδο δεξιά της κατακόρυφης ευθείας $\sigma = a$, όπως βρήκαμε παραπάνω, χωρίς να την περιλαμβάνει. Φυσικά, στο ημιεπίπεδο $\operatorname{Re}\{s\} \leq a$, ο μετασχ. Laplace δε συγκλίνει!

Παρατηρήστε το Σχήμα 7.7(β), όπου φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Laplace. Δείτε ότι στην ευθεία $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma = a$ ανήκει το σημείο $s = a$ όπου ο μετασχηματισμός απειρίζεται. Επίσης παρατηρήστε ότι το πεδίο σύγκλισης βρίσκεται δεξιά του πόλου a , και συμβολίζεται με R_x .

Παράδειγμα 7.2:

Έστω το σήμα

$$x(t) = -e^{at}u(-t) \quad (7.38)$$

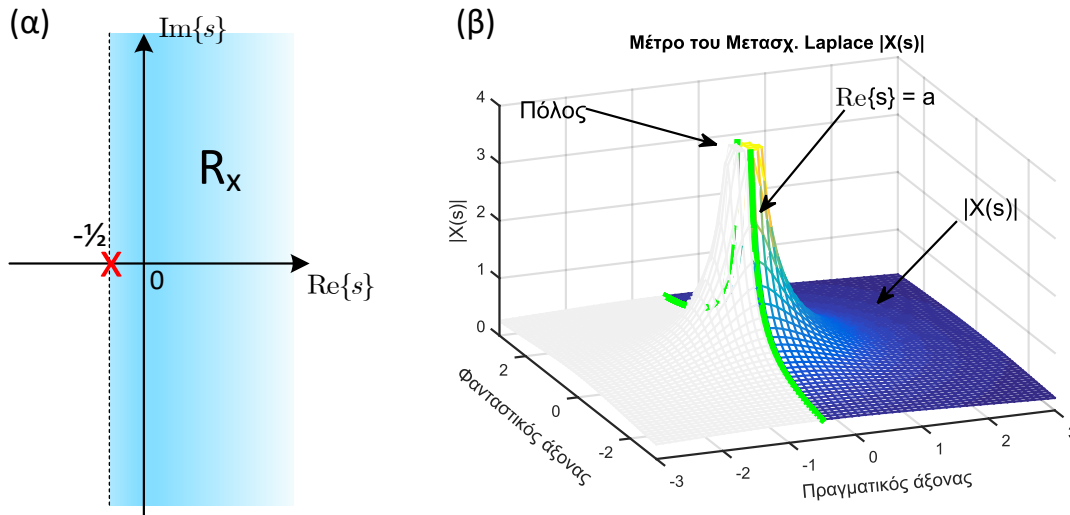
για το οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Laplace.

Λύση:

Αν $a \in \mathbb{R}^+$, τότε το σήμα είναι σήμα ενέργειας, και ο μετασχ. Fourier του υπάρχει. Αν όμως $a \in \mathbb{R}^-$, τότε δεν

³Πρέπει να έχετε καταλάβει τι πρόκειται να συμβεί από παρόμοια διαδικασία που είδαμε στο μετασχ. Fourier.

⁴Όμοια με το πεδίο ορισμού στις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής.



Σχήμα 7.7: Παράδειγμα 7.1: (α) Πεδίο Σύγκλισης R_x , (β) Μέτρο Μετασχ. Laplace.

υπάρχει ο μετασχ. Fourier, και το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier αποκλίνει στο ∞ . Ας θεωρήσουμε ότι $a \in \mathbb{R}$, χωρίς περιορισμούς. Προσέξτε ότι το σήμα μας είναι *αριστερόπλευρο*. Ο μετασχ. Laplace θα είναι:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{(a-s)t} dt = - \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_{-\infty}^0 = - \frac{1}{a-s} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t} \right) \quad (7.39)$$

Εχουμε ξανά την ίδια κατάσταση με το προηγούμενο παράδειγμα. Θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t} \quad (7.40)$$

Σκεπτόμενοι ακριβώς όμοια, καταλήγουμε ότι το όριο αυτό φθίνει στο 0 *μόνο αν*

$$a - \sigma > 0 \iff a > \operatorname{Re}\{s\} \iff \operatorname{Re}\{s\} < a \quad (7.41)$$

και αυτό είναι το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace. Στο πεδίο αυτό, το όριο φθίνει στο μηδέν, και άρα από τη Σχέση (7.39) έχουμε:

$$X(s) = - \frac{1}{a-s} (1 - 0) = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < a \quad (7.42)$$

Άρα τελικά, έχουμε ότι

$$x(t) = -e^{at}u(-t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < a \quad (7.43)$$

με το Πεδίο Σύγκλισης για ένα τυχαίο a να φαίνεται στο Σχήμα 7.8(α). Και σε αυτό το παράδειγμα, θα μπορούσε το a να βρίσκεται στο δεξιό ημιεπίπεδο, αλλά μας ενδιαφέρει μόνο το ημιεπίπεδο στα αριστερά του. Παρατηρήστε ότι το πεδίο σύγκλισης για το *αριστερόπλευρο* σήμα μας είναι το ημιεπίπεδο *αριστερά* της κατακόρυφης ευθείας $\sigma = a$, όπως βρήκαμε παραπάνω, χωρίς να την περιλαμβάνει.

Παρατηρήστε το Σχήμα 7.8(β), όπου φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Laplace. Δείτε ότι στην ευθεία $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma = a$ ανήκει το σημείο $s = a$ όπου ο μετασχηματισμός απειρίζεται. Επίσης παρατηρήστε ότι το πεδίο σύγκλισης βρίσκεται αριστερά του πόλου a , και συμβολίζεται με R_x .

Παράδειγμα 7.3:

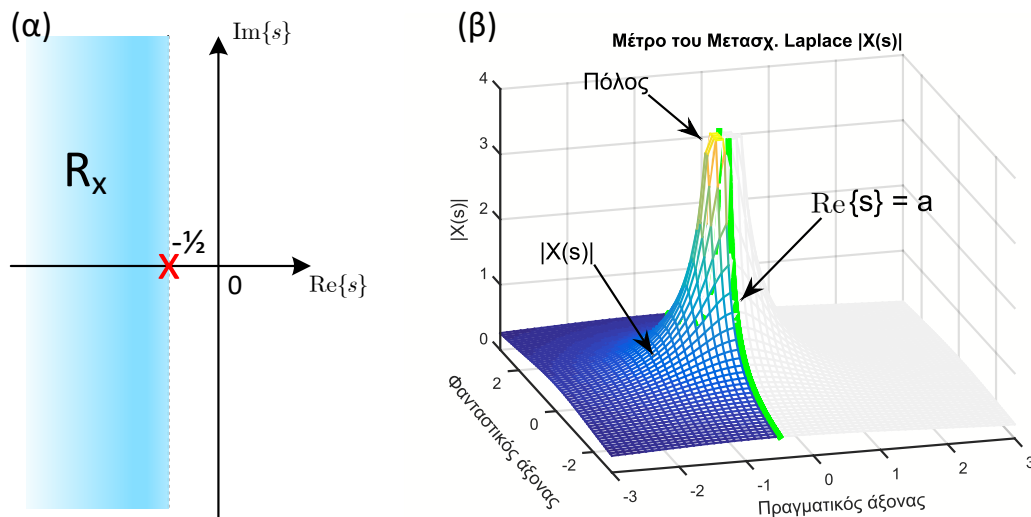
Ας ορίσουμε το σήμα

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{at}u(-t), \quad a \in \mathbb{R} \quad (7.44)$$

του οποίου ζητούμε το μετασχ. Laplace.

Λύση:

Δεν το αναφέραμε ως τώρα, αλλά δεν είναι και μυστικό, αφού αποδεικνύεται εύκολα - και θα το δούμε παρακάτω: ο μετασχ. Laplace είναι γραμμικός. Άρα το άθροισμα δυο σημάτων έχει μετασχ. Laplace το άθροισμα των επιμέρους μετασχηματισμών. Όσο για το πεδίο σύγκλισης, αυτό είναι - όπως θα δούμε σύντομα - ένα υπερσύνολο



Σχήμα 7.8: Παράδειγμα 7.2: (α) Πεδίο Σύγκλισης R_x , (β) Μέτρο Μετασχ. Laplace.

που περιλαμβάνει τουλάχιστον την τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης. Άρα λοιπόν,

$$X(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-a} = \frac{2}{s-a}, \quad R_x = R_{x_1} \cap R_{x_2} = \{\sigma > a\} \cap \{\sigma < a\} = \emptyset \quad (7.45)$$

Βλέπουμε ότι παρ' όλο που μπορούμε να προσθέσουμε τους επιμέρους μετασχηματισμούς, ο συνολικός μετασχηματισμός Laplace δεν υπάρχει, γιατί δεν υπάρχει περιοχή στο s -επίπεδο στην οποία να συγκλίνει! Άρα βλέπουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει ο μετασχ. Laplace για ένα άθροισμα σημάτων τα οποία έχουν επιμέρους μετασχ. Laplace.

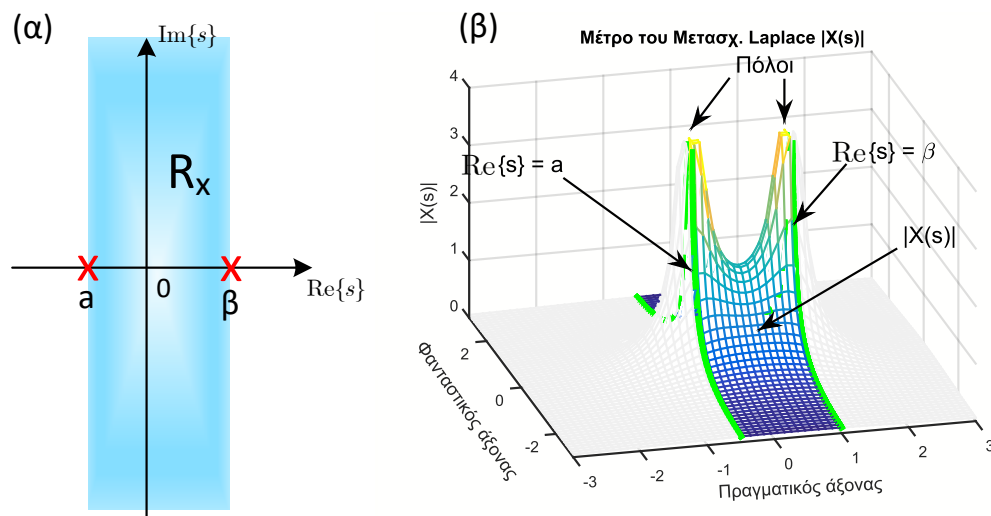
Ας δούμε όμως τι θα συνέβαινε αν είχαμε

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{\beta t}u(-t), \quad a, \beta \in \mathbb{R}, \quad a \neq \beta \quad (7.46)$$

Τότε

$$X(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-\beta} = \frac{2s - (a+\beta)}{(s-a)(s-\beta)}, \quad R_x = R_{x_1} \cap R_{x_2} = \{\sigma > a\} \cap \{\sigma < \beta\} \quad (7.47)$$

το οποίο δεν είναι απαραίτητα το κενό σύνολο. Εξαρτάται από τις σχετικές θέσεις των a, β . Π.χ. αν $a < \beta$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι μια “λωρίδα” στο s -επίπεδο, η περιοχή $a < \text{Re}\{s\} < \beta$, όπως στο Σχήμα 7.9, ενώ αν $a > \beta$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο. Άρα στη γενικότερη περίπτωση



Σχήμα 7.9: Παράδειγμα 7.3: (α) Πεδίο Σύγκλισης R_x , (β) Μέτρο Μετασχ. Laplace.

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{\beta t}u(-t), \quad a \neq \beta \in \mathbb{R} \longleftrightarrow X(s) = \frac{2s - (a + \beta)}{(s - a)(s - \beta)}, \quad a < \operatorname{Re}\{s\} < \beta \quad (7.48)$$

Προσέξτε ότι εδώ, το συνολικό μας σήμα $x(t)$ είναι *αμφίπλευρο*, και έτσι το πεδίο σύγκλισης δεν προέκυψε ούτε δεξιόπλευρο ούτε αριστερόπλευρο, αλλά μια “λωρίδα” στο μιγαδικό επίπεδο. Επίσης, στο παράδειγμα αυτό το πολυώνυμο του αριθμητή δεν είναι σταθερό όπως στα προηγούμενα παραδείγματα. Οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή ονομάζονται **μηδενικά**, κι εδώ η ρίζα είναι μια, η $s = (a + \beta)/2$. Οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι οι $s = a, s = \beta$ και είπαμε ότι ονομάζονται **πόλοι**. Θα μιλήσουμε για τους πόλους, τα μηδενικά, και τη σημασία τους εκτενέστερα στη συνέχεια.

Παρατηρήστε το Σχήμα 7.9(β), όπου φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Laplace. Δείτε ότι στις ευθείες $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma = a$ και $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma = \beta$ ο μετασχηματισμός απειρίζεται. Επίσης παρατηρήστε ότι το πεδίο σύγκλισης βρίσκεται ανάμεσα στον πόλο a και β , και συμβολίζεται με R_x , όπως στο Σχήμα 7.9(α).

Παράδειγμα 7.4:

Ας βρούμε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = \delta(t) \quad (7.49)$$

Λύση:
Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1 \quad (7.50)$$

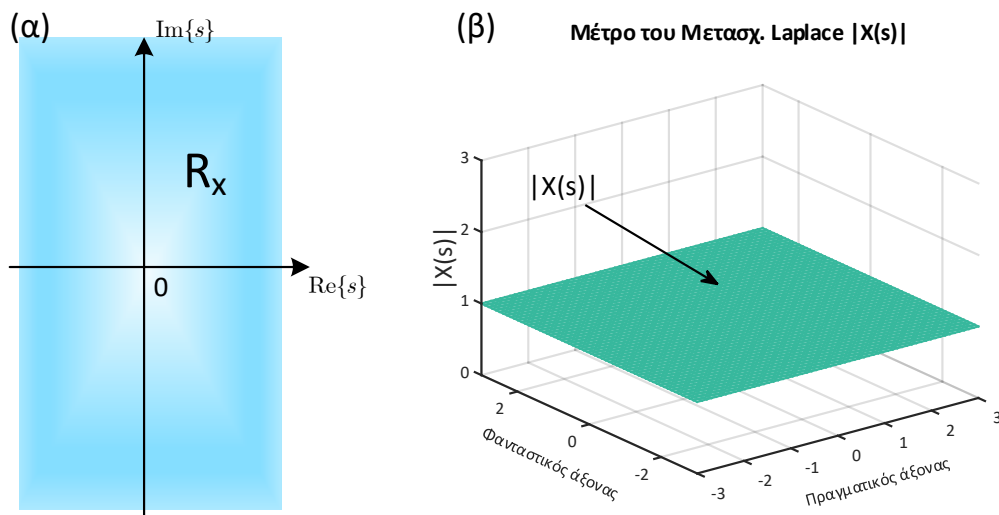
από τη γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \quad (7.51)$$

Άρα

$$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(s) = 1, \quad \forall s \quad (7.52)$$

Παρατηρήστε ότι δεν προέκυψε κανείς περιορισμός για το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης Δέλτα, οπότε αυτό είναι όλο το s -επίπεδο, όπως στο Σχήμα 7.10(α).



Σχήμα 7.10: Παράδειγμα 7.4: (α) Πεδίο Σύγκλισης R_x , (β) Μέτρο Μετασχ. Laplace.

Παρατηρήστε το Σχήμα 7.10(β), όπου φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Laplace, το οποίο και είναι μοναδιαίο για κάθε s . Επίσης, δείτε ότι ο μετασχηματισμός δεν απειρίζεται σε κανένα σημείο.

Ας ξεκινήσουμε τις παρατηρήσεις μας.

Παρατηρήσεις

- (α') Η πιο σημαντική παρατήρηση έρχεται αν συγκρίνουμε τις Σχέσεις (7.37) και (7.43). Ας τις ξαναγράψουμε εδώ για ευκολία:

$$x(t) = e^{at}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > a \quad (7.53)$$

$$x(t) = -e^{at}u(-t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < a \quad (7.54)$$

Θα μπορούσε κάποιος να πει ότι “παρατηρούμε ότι δυο εντελώς διαφορετικά σήματα στο χρόνο, έχουν τον ίδιο μετασχ. Laplace.” Αυτό όμως είναι λάθος! Τα σήματα αυτά έχουν την ίδια αλγεβρική έκφραση στο χώρο του μετασχ. Laplace. Ο μετασχηματισμός Laplace όμως περιλαμβάνει και το πεδίο σύγκλισης! Αυτό είναι που ξεχωρίζει τους δυο, ίδιους κατά τα άλλα, μετασχηματισμούς. Χωρίς το πεδίο σύγκλισης, δε θα μπορούσαμε να αποφασίσουμε σε ποιο σήμα στο χρόνο αντιστοιχεί ο μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ που έχουμε παραπάνω!

- (β') Είδατε παραπάνω ότι το πεδίο σύγκλισης δεν είναι κάτι τυχαίο. Προκύπτει απ' την ανάγκη να συγκλίνει το ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace! Κάθε μετασχ. Laplace έρχεται “μαζί” με το πεδίο σύγκλισης. Χωρίς αυτό, ο μετασχ. Laplace είναι χωρίς νόημα! Συνηθίστε λοιπόν να γράφετε το μετασχηματισμό μαζί με το εκάστοτε πεδίο σύγκλισης.
- (γ') Προφανώς δε χρειάζεται σε κάθε άσκηση να αποδεικνύετε το πεδίο σύγκλισης, εκτός αν σας ζητείται ρητά, όπως για παράδειγμα σε εφαρμογή του ορισμού. Ακόμα και τότε, δε χρειάζεται να δείχνετε αναλυτικά ότι οι συναρτήσεις είναι φραγμένες, κλπ. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε έτοιμα τα αποτελέσματα της θεωρίας, ότι δηλαδή αρκεί το πραγματικό μέρος του εκθέτη να είναι θετικό ή αρνητικό, ανάλογα με τη σύγκλιση του σχετικού ορίου στο μηδέν.
- (δ') Ίσως παρατηρήσατε ότι όλοι οι μετασχ. Laplace που υπολογίσαμε μπορούν να γραφούν στη γενικότερη μορφή

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (7.55)$$

με $P(s)$, $Q(s)$ πολυώνυμα του s . Αναφέραμε νωρίτερα ότι οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή ονομάζονται πόλοι - απειρίζουν το μετασχ. Laplace - ενώ οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή ονομάζονται μηδενικά - προφανώς μηδενίζουν το μετασχ. Laplace.

- (ε') Ο πόλος a που είδαμε στα Παραδείγματα 7.1 και 7.2 θα μπορούσε να είναι μιγαδικός αριθμός. Γενικά, οι πόλοι δεν είναι απαραίτητο να είναι πάντα πραγματικοί. Δεν αλλάζει τίποτα σε όσα είπαμε παραπάνω, παρά μόνον ότι πλέον τα πεδία σύγκλισης θα είναι στη μορφή

$$\operatorname{Re}\{s\} \geq \operatorname{Re}\{a\} \quad (7.56)$$

ή

$$\operatorname{Re}\{a\} < \operatorname{Re}\{s\} < \operatorname{Re}\{\beta\} \quad (7.57)$$

δηλ. χρησιμοποιούμε το πραγματικό μέρος του, κατάλληλου κάθε φορά, μιγαδικού πόλου στην περιγραφή του πεδίου σύγκλισης. Αυτό προκύπτει αναλυτικά από την εφαρμογή του ορισμού.

7.3.4 Ιδιότητες Πεδίου Σύγκλισης

Μπορεί κανείς εύκολα να αποδείξει κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες του Πεδίου Σύγκλισης του μετασχ. Laplace. Οι περισσότερες πρέπει να σας είναι εμφανείς διαισθητικά αλλά και με βάση τα παραδείγματα που είδαμε νωρίτερα. Οι τυπικές αποδείξεις βρίσκονται στο Παράρτημα ;;;.

1. Τα πεδία σύγκλισης δεν περιέχουν **ποτέ** πόλους, αφού εξ' ορισμού ένας πόλος είναι σημείο του μιγαδικού επιπέδου που απειρίζεται ο μετασχ. Laplace, οπότε η συμπερίληψή ενός πόλου του στο πεδίο σύγκλισης δεν έχει νόημα.
2. Από τη στιγμή που οι συναρτήσεις $\sigma = \lambda$ ορίζουν κατακόρυφες ευθείες στο επίπεδο των μιγαδικών αριθμών (το λεγόμενο s -επίπεδο), τα πεδία σύγκλισης οποιουδήποτε μετασχηματισμού Laplace θα είναι είτε
 - (α') μια περιοχή του επιπέδου αριστερά μιας κατακόρυφης ευθείας, η οποία θα ορίζεται από τον αριστερότερο πόλο, είτε

- (β') μια περιοχή του επιπέδου δεξιά μιας κατακόρυφης ευθείας, η οποία θα ορίζεται από το δεξιότερο πόλο, είτε
- (γ') μια "λωρίδα" μεταξύ δυο κατακόρυφων ευθειών, οι οποίες θα ορίζονται από δυο πόλους.
3. Ένας μετασχ. Laplace μπορεί να έχει κανέναν, έναν, ή περισσότερους πόλους. Το ίδιο ισχύει και για τα μηδενικά του.
 4. Αποδεικνύεται ότι αν το σήμα $x(t)$ είναι δεξιόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης είναι "δεξιόπλευρο", δηλ. μια περιοχή του επιπέδου δεξιά μιας κατακόρυφης ευθείας, η οποία θα ορίζεται από το δεξιότερο πόλο. Για παράδειγμα, $\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{a\}$, με a να είναι ο πόλος με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος από όλους τους πόλους του μετασχηματισμού.
 5. Αποδεικνύεται ότι αν το σήμα $x(t)$ είναι αριστερόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης είναι "αριστερόπλευρο", δηλ. μια περιοχή του επιπέδου αριστερά μιας κατακόρυφης ευθείας, η οποία θα ορίζεται από τον αριστερότερο πόλο. Για παράδειγμα, $\text{Re}\{s\} < \text{Re}\{a\}$, με a να είναι ο πόλος με το μικρότερο πραγματικό μέρος από όλους τους πόλους του μετασχηματισμού.
 6. Αποδεικνύεται ότι αν το σήμα $x(t)$ είναι αμφίπλευρο, δηλ. άθροισμα δεξιόπλευρων και αριστερόπλευρων σημάτων, το πεδίο σύγκλισης είναι είτε μια "λωρίδα" στο ημιεπίπεδο μεταξύ δυο πόλων (π.χ. $\text{Re}\{a\} < \text{Re}\{s\} < \text{Re}\{b\}$), είτε το κενό σύνολο (γιατί τα επιμέρους πεδία σύγκλισης δε θα επικαλύπτονται). Στην περίπτωση που το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο, προφανώς ο μετασχ. Laplace δεν ορίζεται.
 7. Αν το σήμα $x(t)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, το πεδίο σύγκλισης είναι όλο το s -επίπεδο. Αυτό μπορείτε εύκολα να το κατανοήσετε μια και το ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace θα έχει άκρα δυο συγκεκριμένες χρονικές τιμές, οπότε δε θα προκύψει κάποιος περιορισμός λόγω κάποιου ορίου στο $\pm\infty$ - τέτοια όρια δεν υπάρχουν στην περίπτωση αυτή.
 8. Το πεδίο σύγκλισης γράφεται σύντομα ως ROC, από τα αρχικά της αγγλικής μετάφρασης του πεδίου σύγκλισης: Region Of Convergence. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε αυτή τη συντομογραφία αρκετά συχνά.
 9. Ξαναδιαβάστε τις παραπάνω παρατηρήσεις! (το loop τερματίζει όταν τις κατανοήσετε) ☺

7.4 Σύνδεση με το μετασχηματισμό Fourier

Στην εισαγωγή περιγράψαμε το μετασχ. Laplace ως μια "επέκταση" του μετασχ. Fourier κατάλληλη για σήματα που ο τελευταίος είναι προβληματικός. Όταν θέτουμε $\sigma = 0$ στο ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace, αυτό που κάνουμε "σιωπηλά" είναι ότι εκτιμούμε το μετασχ. Laplace σε συχνότητες που βρίσκονται πάνω στην κατακόρυφη ευθεία $\sigma = 0$ του μιγαδικού επιπέδου, που δεν είναι άλλη απ' τον άξονα των φανταστικών αριθμών $j2\pi f$!

Για να μπορούμε όμως να το κάνουμε αυτό, είναι υποχρεωτικό ο κατακόρυφος άξονας των φανταστικών $j2\pi f$, δηλ. η κατακόρυφη ευθεία $\sigma = 0$, να περιέχεται μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace! Αλλιώς δεν έχει κανένα νόημα ο υπολογισμός του $X(s)|_{\sigma=0}$! Γι' αυτό λοιπόν, όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier μέσω του μετασχ. Laplace, πρέπει να προσέχουμε πρώτα αν ο φανταστικός άξονας περιέχεται μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace. Αν περιέχεται, αντικαθιστούμε $\sigma = 0$ στον τύπο του μετασχ. Laplace και έχουμε το μετασχ. Fourier. Αν όχι, τότε ο μετασχ. Fourier δεν μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Laplace! Ας μιλήσουμε όμως με λίγο μεγαλύτερη ακρίβεια σχετικά με αυτά...

Ο ορισμός του μετασχ. Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (7.58)$$

είναι ταυτόσημος με τον ορισμό του μετασχ. Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (7.59)$$

αν στη Σχέση (7.59) θέσουμε όπου f το $s = \sigma + j2\pi f$. Είναι εύλογο να περιμένει κανείς ότι ο μετασχ. Laplace $X(s)$ ενός σήματος $x(t)$ να είναι ίδιος με τον μετασχ. Fourier $X(f)$ του ίδιου σήματος, με το $j2\pi f$ να έχει αντικατασταθεί από το s . Για παράδειγμα, μάθαμε πριν λίγο ότι

$$e^{-at}u(t), a > 0 \xrightarrow{L} \frac{1}{a+s} \quad (7.60)$$

Αντικαθιστώντας το s με το $j2\pi f$, έχουμε ότι

$$X(s) \Big|_{s=j2\pi f} = \frac{1}{a + j2\pi f} = X(f) \quad (7.61)$$

που είναι ο μετασχ. Fourier, όπως είδαμε σε προηγούμενο Κεφάλαιο. Δυστυχώς αυτή η διαδικασία δεν ισχύει για κάθε σήμα $x(t)$. Μπορούμε να την χρησιμοποιούμε μόνο όταν η περιοχή σύγκλισης του μετασχ. Laplace περιέχει το φανταστικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου.

Ως αντιπαράδειγμα, ο μετασχ. Fourier της βηματικής συνάρτησης $x(t) = u(t)$ είναι ο

$$x(t) = u(t) \xrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (7.62)$$

Ο αντίστοιχος μετασχ. Laplace είναι ο

$$x(t) = u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s}, \operatorname{Re}\{s\} > 0 \quad (7.63)$$

και όπως βλέπουμε από την περιοχή σύγκλισης, δεν περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας $\sigma = 0$. Άρα, ο μετασχ. Laplace ΔΕΝ μπορεί να μας δώσει το μετασχ. Fourier, αλλά ούτε και το αντίστροφο! Σε αυτές τις περιπτώσεις, η σχέση μεταξύ των δυο μετασχηματισμών δεν είναι τόσο απλή. Ο λόγος για αυτήν την περιπλοκή σχετίζεται με τη σύγκλιση του ολοκληρώματος του μετασχ. Fourier, όπου η ολοκλήρωση περιορίζεται πάνω στον φανταστικό άξονα. Λόγω αυτού του περιορισμού, το ολοκλήρωμα Fourier για τη βηματική συνάρτηση δε συγκλίνει. Χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μια γενικευμένη συνάρτηση ($\delta(f)$) για τη σύγκλιση.

Αντιθέτως, το ολοκλήρωμα Laplace για τη βηματική συνάρτηση συγκλίνει αλλά μόνο για $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, μια περιοχή που είναι “απαγορευμένη” για το μετασχ. Fourier! ☹

Ένα ακόμα ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι παρ’ όλο που ο μετασχ. Laplace είναι μια γενίκευση του μετασχ. Fourier, υπάρχουν σήματα (π.χ. περιοδικά σήματα), για τα οποία ο μετασχ. Laplace δεν υπάρχει, ενώ ο μετασχ. Fourier υπάρχει! ☹ (αλλά δεν προκύπτει από απλή σύγκλιση του ολοκληρώματος).

Οπότε για ένα οποιοδήποτε σήμα

Σχέση Μετασχ. Laplace και Μετασχ. Fourier

Ο μετασχ. Fourier $X(f)$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Laplace $X(s)$ θέτοντας $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma = 0$, δηλ. $X(f) = X(s) \Big|_{s=j2\pi f}$, μόνον αν το Πεδίο Σύγκλισης του μετασχ. Laplace περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα $j2\pi f$.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα που θα επιβεβαιώσουν την παραπάνω συζήτηση.

Παράδειγμα 7.5:

Βρείτε το μετασχ. Laplace και το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad (7.64)$$

με $a = 4$ και $a = 2$. Τι παρατηρείτε;

Λύση:

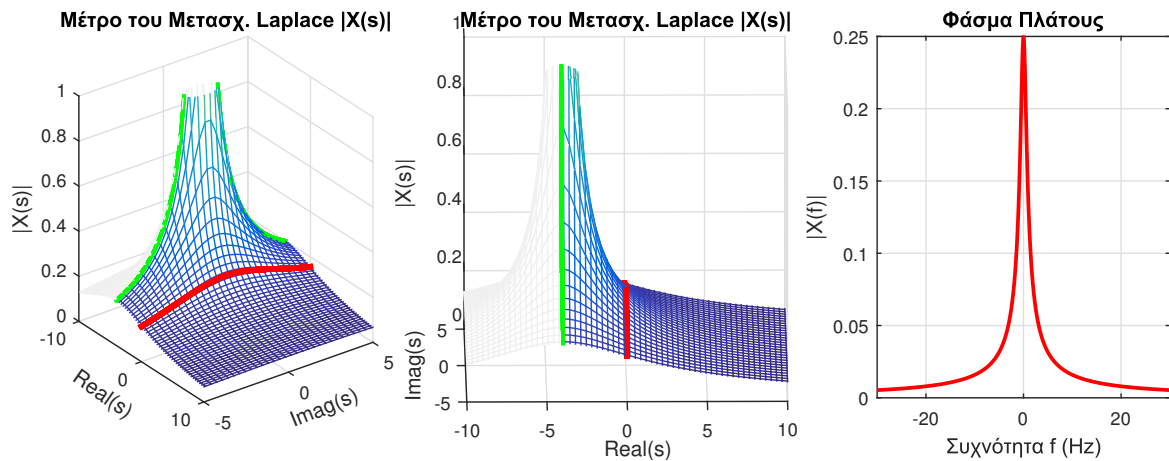
Είδαμε νωρίτερα ότι αυτό το σήμα έχει μετασχ. Laplace ως

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}\{s\} > -a \quad (7.65)$$

και γνωρίζουμε ότι έχει μετασχ. Fourier ως

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f + a} \quad (7.66)$$

Στα Σχήματα 7.11, 7.12 βλέπετε το μέτρο του μετασχ. Laplace $|X(s)|$ για μερικές τιμές του s από δυο οπτικές γωνίες, και για $a = 4$ και $a = 2$ αντίστοιχα, καθώς και το μέτρο του Μετασχ. Fourier του ίδιου σήματος, το

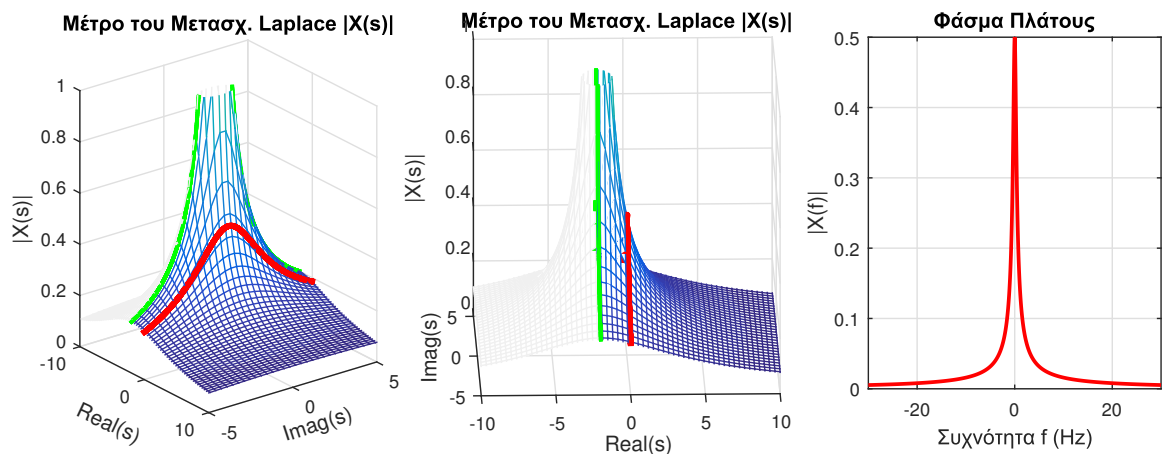


Σχήμα 7.11: Παράδειγμα 7.5: Μέτρο μετασχ. Laplace $|X(s)|$ και φανταστικός άξονας (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους $|X(f)|$, για $a = 4$

οποίο θυμίζεται ότι είναι

$$|X(f)| = \left| \frac{1}{j2\pi f + a} \right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \quad (7.67)$$

Παρατηρήστε στα τρισδιάστατα γραφήματα τις τιμές του μετασχηματισμού επάνω στο φανταστικό άξονα που



Σχήμα 7.12: Παράδειγμα 7.5: Μέτρο μετασχ. Laplace $|X(s)|$ και φανταστικός άξονας (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους $|X(f)|$, για $a = 2$.

έχουν σχεδιαστεί επάνω στο γράφημα του $|X(s)|$ - εκεί ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier, και ο άξονας αυτός έχει “απλωθεί” επάνω στο τρισδιάστατο γράφημα για να μας δώσει τις τιμές του $|X(f)|$! Είναι σχεδόν οι ίδιες τιμές με το $|X(f)|$ που είναι σχεδιασμένο ως δισδιάστατο σήμα και στα δύο Σχήματα: η μόνη διαφορά είναι ότι η κόκκινη καμπύλη επάνω στις τριδιάστατες επιφάνειες αποτελεί συνάρτηση του $\omega = 2\pi f$ αντί του f . Ακολουθήστε τις τιμές του φανταστικού άξονα από $-\infty$ ως $+\infty$ επάνω στο $|X(s)|$ και δείτε ότι ακολουθούν ακριβώς την ίδια μονοτονία με το $|X(f)|$, με τη μόνη διαφορά της συχνοτικής κλιμάκωσης κατά 2π . Το τελευταίο σημαίνει ότι η κόκκινη γραμμή επάνω στην επιφάνεια του $|X(s)|$ αποτελεί το $|X(j2\pi f)|$ και όχι το $|X(f)|$ - όμως εύκολα μπορεί κανείς να πάρει το $|X(f)|$ από το $|X(j2\pi f)|$ απλώς κάνοντας μια κλιμάκωση της μεταβλητής $2\pi f$ κατά $1/(2\pi)$.

Επίσης, προσέξτε τον πόλο στη θέση $s = -4$ και $s = -2$, ο οποίος απειρίζεται το $|X(s)|$. Τέλος, το $|X(s)|$ μηδενίζεται για $s \rightarrow \infty$, οπότε καταλαβαίνετε γιατί η γραφική παράσταση έχει αυτή τη μορφή όσο μεγαλώνουν οι συχνότητες κατά απόλυτη τιμή.

Συγκρίνετε το Σχήμα 7.11 με το Σχήμα 7.12. Καταλαβαίνετε γιατί άλλαξε το μέτρο του μετασχ. Fourier κατ’ αυτόν τον τρόπο; Πώς επηρεάστηκε το μέτρο του φάσματος πλάτους όταν ο πόλος πλησίασε το φανταστικό άξονα; Μπορείτε να αντιληφθείτε τι θα συμβεί αν ο πόλος βρεθεί ακριβώς επάνω στο φανταστικό άξονα, δηλ. στη θέση $s = 0$;

Παράδειγμα 7.6:

Βρείτε το μετασχ. Laplace και Fourier της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t) = \delta(t) \quad (7.68)$$

Λύση:

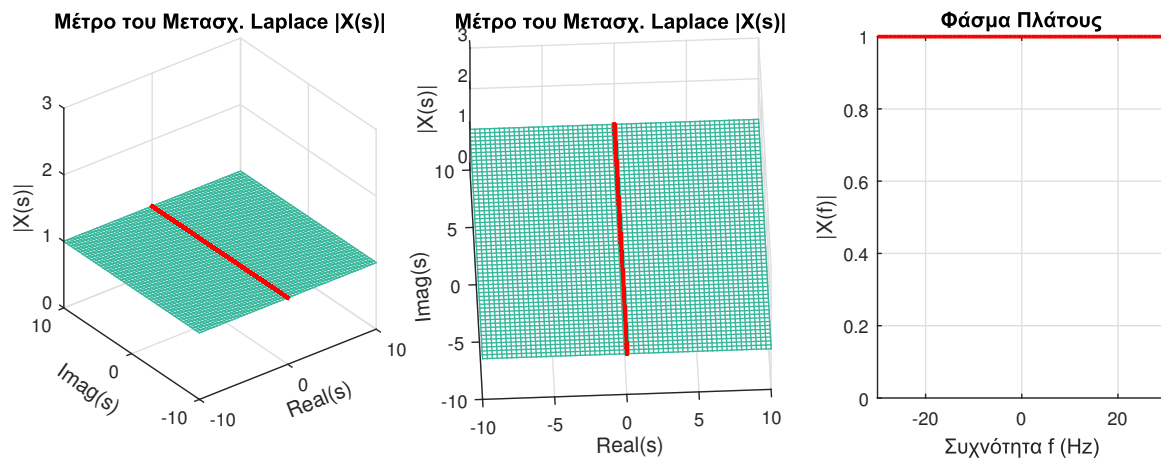
Νωρίτερα δείξαμε ότι

$$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(s) = 1, \quad \forall s \quad (7.69)$$

και γνωρίζουμε ότι

$$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(f) = 1 \quad (7.70)$$

Στο Σχήμα 7.13, βλέπουμε ακριβώς αυτό που περιμέναμε. Για κάθε τιμή του s , ο μετασχ. Laplace είναι σταθερός



Σχήμα 7.13: Παράδειγμα 7.6: Μέτρο μετασχ. Laplace $|X(s)|$ και φανταστικός άξονας (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους $|X(f)|$, της συνάρτησης $x(t) = \delta(t)$.

και ίσος με 1, το ίδιο και ο μετασχ. Fourier που ορίζεται επάνω στο φανταστικό άξονα.

7.5 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Οι ιδιότητες του μετασχ. Laplace είναι εντυπωσιακά όμοιες με αυτές των σειρών και του μετασχ. Fourier - και δεν πρέπει αυτό να σας ξαφνιάζει ☺. Οι κυριότερες βρίσκονται στον Πίνακα 7.1, όπου ξεχωριστά εμφανίζονται μόνο οι ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχ. Laplace που είναι διαφορετικές από αυτές του δίπλευρου - υπενθυμίζεται ότι ο μονόπλευρος μετασχ. Laplace θα μας απασχολήσει αργότερα στη μελέτη των συστημάτων.

7.5.1 Αποδείξεις και Παραδείγματα

Παρακάτω ακολουθούν αποδείξεις των ιδιοτήτων του Πίνακα 7.1, μαζί με παραδείγματα εφαρμογής τους. Σε όλες τις ιδιότητες, θεωρούμε ότι ένα σήμα $x(t)$ έχει μετασχ. Laplace $X(s)$ με πεδίο σύγκλισης R_x , και - όπου χρειάζεται - ένα σήμα $y(t)$ έχει μετασχ. Laplace $Y(s)$ με πεδίο σύγκλισης R_y .

7.5.1.1 Γραμμικότητα

Για ένα σήμα $z(t) = Ax(t) + By(t)$, με A, B σταθερές, ο μετασχ. Laplace του δίνεται ως

$$Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (Ax(t) + By(t))e^{-st}dt \quad (7.71)$$

$$= A \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt + B \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt \quad (7.72)$$

$$= AX(s) + BY(s) \quad (7.73)$$

με $R_z \supseteq R_x \cap R_y$.
Άρα

$$Ax(t) + By(t) \longleftrightarrow AX(s) + BY(s), \quad R \supseteq R_x \cap R_y \quad (7.74)$$

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$x(t)$ $y(t)$	$X(s)$ $Y(s)$	R_x R_y
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(s) + BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$	R_x
Μετατόπιση στο χώρο του s	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	Μετατόπιση του R_x
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-s)$	$-R_x$
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R \supseteq R_x$
n -οστή παραγωγή στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$R \supseteq R_x$
Παραγωγή στη συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R_x
n -οστή παραγωγή στη συχνότητα	$(-1)^n t^n x(t)$	$\frac{d^n X(s)}{ds^n}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	$R \supseteq (R_x \cap \{\operatorname{Re}\{s\} > 0\})$

Πίνακας Ιδιοτήτων Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Laplace			
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$R \supseteq R_x$
n -οστή παραγωγή στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t) \Big _{t=0}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau$	$R \supseteq (R_x \cap \{\operatorname{Re}\{s\} > 0\})$

Πίνακας 7.1: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Laplace

Στις περισσότερες περιπτώσεις, η εφαρμογή της γραμμικότητας είναι εύκολη και το πεδίο σύγκλισης αποτελείται από την τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης. Θα ήταν πιο ενδιαφέρον να δούμε ένα παράδειγμα όπου το πεδίο σύγκλισης του αθροίσματος είναι υπερσύνολο της τομής των επιμέρους πεδίων.

Παράδειγμα 7.7:

Έστω οι μετασχ. Laplace

$$X(s) = \frac{1}{s-2} \quad (7.75)$$

και

$$Y(s) = -\frac{1}{(s-1)(s-2)} \quad (7.76)$$

των οποίων τα επιμέρους πεδία σύγκλισης είναι $R_x = \{\sigma > 2\}$ και $R_y = \{\sigma > 2\}$. Ζητείται ο μετασχ. Laplace του αθροίσματος των δυο μετασχηματισμών.

Λύση:

Η τομή των δυο πεδίων είναι $R = \{\sigma > 2\}$. Όμως ο μετασχ. Laplace του αθροίσματος $x(t) + y(t)$ είναι

$$X(s) + Y(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)(s-1)} = \frac{s-1}{(s-1)(s-2)} - \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{s-2}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-1} \quad (7.77)$$

το οποίο έχει πεδίο σύγκλισης το $R_{x+y} = \{\sigma > 1\}$, που είναι υπερσύνολο του $\{\sigma > 2\}$.

7.5.1.2 Χρονική Μετατόπιση

Για το σήμα $y(t) = x(t - t_0)$, με $t_0 \in \mathbb{R}$, ο μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-s(u+t_0)} du = e^{-st_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-su} du \\ &= e^{-st_0} X(s) \end{aligned}$$

με το πεδίο σύγκλισης να παραμένει το $R_y = R_x$.

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow X(s)e^{-st_0}, \quad R = R_x \quad (7.78)$$

Παράδειγμα 7.8:

Έστω το σήμα

$$y(t) = 3e^{-3t+6}u(t-2) \quad (7.79)$$

Ας βρούμε το μετασχ. Laplace του.

Λύση:

Παρατηρήστε ότι μπορούμε να γράψουμε το σήμα ως

$$y(t) = 3e^{-3t+6}u(t-2) = 3e^{-3(t-2)}u(t-2) = x(t-2) \quad (7.80)$$

με

$$x(t) = 3e^{-3t}u(t) \quad (7.81)$$

του οποίου ο μετασχ. Laplace είναι γνωστός ως

$$X(s) = 3 \frac{1}{s+3}, \quad R_x = \{\sigma > -3\} \quad (7.82)$$

Άρα για το $y(t) = x(t-2)$ θα έχουμε

$$Y(s) = 3e^{-2s} \frac{1}{s+3}, \quad R_y = \{\sigma > -3\} \quad (7.83)$$

7.5.1.3 Μετατόπιση στο χώρο του s

Για το σήμα $Y(s) = X(s - s_0)$, με $s_0 \in \mathbb{C}$, ο αντίστροφος μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s - s_0)e^{st} ds \quad (7.84)$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-\text{Re}\{s_0\}-j\infty}^{\sigma-\text{Re}\{s_0\}+j\infty} X(u)e^{(u+s_0)t} du = e^{s_0 t} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-\text{Re}\{s_0\}-j\infty}^{\sigma-\text{Re}\{s_0\}+j\infty} X(u)e^{ut} du \quad (7.85)$$

$$= e^{s_0 t} x(t) \quad (7.86)$$

με το πεδίο σύγκλισης να είναι το πεδίο R_x μετατοπισμένο κατά $\text{Re}\{s_0\}$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Άρα

$$e^{s_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(s - s_0), \quad R = \text{μετατοπισμένο } R_x \quad (7.87)$$

Παράδειγμα 7.9:

Για το αιτιατό σήμα με μετασχ. Laplace

$$X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad R_x = \{\sigma > -2\} \quad (7.88)$$

μπορούμε να ορίσουμε το ακόλουθο μετατοπισμένο σήμα στο χώρο του s

$$Y(s) = X(s-2) = \frac{1}{(s-2)+2} = \frac{1}{s} \quad (7.89)$$

Αναζητούμε το πεδίο σύγκλισης του τελευταίου και το σήμα στο χρόνο.

Λύση:

Το πεδίο σύγκλισης $R_x = \{\sigma > -2\}$ γίνεται $R_y = \{(\sigma - 2) > -2\} = \{\sigma > 0\}$, που συμφωνεί με το αναμενόμενο πεδίο σύγκλισης του $Y(s)$, ενώ σύμφωνα με την ιδιότητα το σήμα στο χρόνο είναι

$$y(t) = e^{2t} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} = e^{2t} e^{-2t} u(t) = u(t) \quad (7.90)$$

με $\sigma > 0$.

7.5.1.4 Συζυγές σήμα στο χρόνο

Για το σήμα $y(t) = x^*(t)$, ο μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-st} dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-s^* t} dt \right)^* = X^*(s^*) \quad (7.91)$$

με το πεδίο σύγκλισης να παραμένει ίδιο, $R_y = R_x$.

Άρα

$$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(s^*), \quad R = R_x \quad (7.92)$$

Παράδειγμα 7.10:

Έστω ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ με μετασχ. Laplace $X(s)$. Σας δίνεται ότι το σήμα αυτό έχει έναν πόλο στη θέση $s = \frac{1}{2}e^{j\pi/3}$ κι ένα μηδενικό στη θέση $s = -1$. Ο μετασχηματισμός δεν έχει άλλους πόλους ή μηδενικά στο s -επίπεδο. Επίσης σας δίνεται ότι $X(0) = 2$. Βρείτε όσα περισσότερα μπορείτε στοιχεία μπορείτε για το μετασχ. Laplace $X(s)$.

Λύση:

Αφού το σήμα είναι πραγματικό στο πεδίο του χρόνου, θα ισχύει $x(t) = x^*(t)$, και από την ιδιότητα της συζυγίας θα ισχύει

$$X(s) = X^*(s^*) \quad (7.93)$$

Αυτό σημαίνει ότι αν το $X(s)$ έχει πόλο στο $s = s_0$, υποχρεωτικά θα έχει πόλο και στο $s = s_0^*$! Άρα μια έκφραση για το μετασχηματισμό θα είναι

$$X(s) = \frac{A(s-s_1)}{(s-s_0)(s-s_0^*)} = \frac{A(s+1)}{\left(s - \frac{1}{2}e^{j\pi/3}\right)\left(s - \frac{1}{2}e^{-j\pi/3}\right)} = \frac{A(s+1)}{s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}} \quad (7.94)$$

Η τιμή της σταθεράς A μπορεί να βρεθεί από τη σχέση $X(0) = 2$, αφού

$$X(0) = \left. \frac{A(s+1)}{s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}} \right|_{s=0} = \frac{A}{\frac{1}{4}} = 2 \iff A = \frac{1}{2} \quad (7.95)$$

Για το πεδίο σύγκλισης δεν έχουμε αρκετά στοιχεία αλλά εφ'όσον γνωρίζουμε τους πόλους, τα πιθανά πεδία σύγκλισης θα είναι

- $\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{s_0\} = \frac{1}{4}$
- $\text{Re}\{s\} < \text{Re}\{s_0\} = \frac{1}{4}$

Η παραπάνω ιδιότητα μας αποκαλύπτει κάτι πολύ σημαντικό: ότι ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ στο πεδίο του χρόνου θα έχει:

- πραγματικούς πόλους και μηδενικά ή/και
- συζυγείς μιγαδικούς πόλους και μηδενικά

7.5.1.5 Αντιστροφή στο χρόνο

Για το σήμα $y(t) = x(-t)$, ο μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-st}dt \quad (7.96)$$

$$= - \int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{su}du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-(-s)u}du \quad (7.97)$$

$$= X(-s) \quad (7.98)$$

με το πεδίο σύγκλισης να αντιστρέφεται, δηλ. $R_y = -R_x$.

Άρα

$$x(-t) \longleftrightarrow X(-s), \quad R = -R_x \quad (7.99)$$

Παράδειγμα 7.11:

Για το σήμα $x(t) = e^{at}u(t)$, ο μετασχ. Laplace είναι

$$X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad R_x = \{\sigma > a\} \quad (7.100)$$

Βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(-t)$.

Λύση:

Σύμφωνα με την ιδιότητα, για το σήμα $y(t) = x(-t) = e^{-at}u(-t)$, ο μετασχ. Laplace είναι

$$Y(s) = \frac{1}{-s-a} = -\frac{1}{s+a}, \quad R_y = \{\sigma < -a\} \quad (7.101)$$

αποτέλεσμα που συμφωνεί με το Παράδειγμα 7.2 που είδαμε νωρίτερα.

7.5.1.6 Στάθμιση στο χρόνο

Για το σήμα $y(t) = x(at)$ με $a > 0$, ο μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-st}dt \quad (7.102)$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-s\frac{u}{a}}du = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-\frac{s}{a}u}du \quad (7.103)$$

$$= \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad (7.104)$$

ενώ για $a < 0$, ο μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-st}dt \quad (7.105)$$

$$= \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{-s\frac{u}{a}}du = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-\frac{s}{a}u}du \quad (7.106)$$

$$= -\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad (7.107)$$

Άρα σε κάθε περίπτωση,

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad R = aR_x \quad (7.108)$$

Παράδειγμα 7.12:

Αν το σήμα $x(t) = e^{at}u(t)$ έχει μετασχ. Laplace

$$X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad R_x = \{\sigma > a\} \quad (7.109)$$

τότε βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος $y(t) = e^{2at}u(2t)$.

Λύση:

Το σήμα $y(t) = e^{2at}u(2t)$ θα έχει μετασχ. Laplace

$$Y(s) = \frac{1}{2}X\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{s}{2}-a} = \frac{1}{s-2a}, \quad R_y = \{\sigma > 2a\} \quad (7.110)$$

Ο αναγνώστης καλείται να το επιβεβαιώσει αναλυτικά.

7.5.1.7 Συνέλιξη στο χρόνο

Για τα σήματα $x(t), y(t)$, που το καθένα έχει πεδίο σύγκλισης R_x, R_y αντίστοιχα, το σήμα $z(t) = x(t) * y(t)$ έχει μετασχ. Laplace ως

$$Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * y(t))e^{-st}dt \quad (7.111)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)e^{-st}dt \right) d\tau \quad (7.112)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(e^{-s\tau}Y(s) \right) d\tau = Y(s) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (7.113)$$

$$= Y(s)X(s) \quad (7.114)$$

με πεδίο σύγκλισης $R_z \supseteq R_x \cap R_y$.

Άρα

$$x(t) * y(t) \longleftrightarrow X(s)Y(s), \quad R \supseteq R_x \cap R_y \quad (7.115)$$

Παράδειγμα 7.13:

Ας θεωρήσουμε δυο αιτιατά σήματα

$$x(t) = e^{at}u(t) \quad (7.116)$$

$$y(t) = e^{2at}u(t) \quad (7.117)$$

με $a > 0$. Βρείτε το μετασχ. Laplace της συνέλιξής τους.

Λύση:

Η συνέλιξή τους μας δίνει (δείξτε το!)

$$x(t) * y(t) = \frac{1}{a}(e^{2at} - e^{at})u(t) \quad (7.118)$$

Οι μετασχ. Laplace των δυο σημάτων είναι

$$X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad R_x = \{\sigma > a\} \quad (7.119)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-2a}, \quad R_y = \{\sigma > 2a\} \quad (7.120)$$

Το γινόμενο $X(s)Y(s)$ δίνει

$$X(s)Y(s) = \frac{1}{(s-a)(s-2a)}, \quad R = \{\sigma > 2a\} \quad (7.121)$$

και μπορούμε αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα να βρούμε το αποτέλεσμα της συνέλιξης ως

$$x(t) * y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-a)(s-2a)} \right\}, \quad R = \{\sigma > 2a\} \quad (7.122)$$

$$= L^{-1} \left\{ \frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-2a)} \right\}, \quad R = \{\sigma > 2a\} \quad (7.123)$$

με

$$A = \frac{1}{(s-a)(s-2a)}(s-a) \Big|_{s=a} = -\frac{1}{a} \quad (7.124)$$

$$B = \frac{1}{(s-a)(s-2a)}(s-2a) \Big|_{s=2a} = \frac{1}{a} \quad (7.125)$$

οπότε

$$x(t) * y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-2a)} \right\}, \quad R = \{\sigma > 2a\} \quad (7.126)$$

$$= L^{-1} \left\{ -\frac{1/a}{(s-a)} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{1/a}{(s-2a)} \right\}, \quad R = \{\sigma > 2a\} \cap \{\sigma > a\} \quad (7.127)$$

$$= -\frac{1}{a} e^{at} u(t) + \frac{1}{a} e^{2at} u(t) \quad (7.128)$$

$$= \frac{1}{a} (e^{2at} - e^{at}) u(t) \quad (7.129)$$

που είναι και το ίδιο αποτέλεσμα που καταλήγουμε στο πεδίο του χρόνου.

7.5.1.8 Παραγωγή στο χρόνο

Για το σήμα $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, ο μετασχ. Laplace έχει ως

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-st} dt \quad (7.130)$$

$$= x(t)e^{-st} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{d}{dt}e^{-st} dt \quad (7.131)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)e^{-st} - \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)e^{-st} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-s)e^{-st} dt \quad (7.132)$$

$$= 0 - 0 + s \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (7.133)$$

$$= sX(s) \quad (7.134)$$

με πεδίο σύγκλισης το $R_y \supseteq R_x$, διότι ο όρος s μπορεί να απαλείφει κάποιον πόλο στον παρονομαστή του $X(s)$, με αποτέλεσμα το πεδίο σύγκλισης που θα προκύψει να είναι υπερσύνολο του αρχικού πεδίου σύγκλισης.

Άρα

$$\boxed{\frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow sX(s), \quad R \supseteq R_x} \quad (7.135)$$

Παράδειγμα 7.14:

Η παράγωγος του σήματος $x(t) = e^{4at}u(t)$ είναι

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = u(t) \frac{d}{dt}e^{4at} + e^{4at} \frac{d}{dt}u(t) = 4ae^{4at}u(t) + e^{4at}\delta(t) = 4ae^{4at}u(t) + \delta(t) \quad (7.136)$$

Βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος $y(t)$.

Λύση:

Ο μετασχ. Laplace του σήματος $y(t)$ είναι

$$Y(s) = L \left\{ \frac{d}{dt}x(t) \right\} = 4a \frac{1}{s-4a} + 1, \quad R_y = \{\sigma > 4a\} \quad (7.137)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγωγίσης στο χρόνο, έχουμε

$$Y(s) = sX(s) = s \frac{1}{s-4a} = \frac{s-4a+4a}{s-4a} = 4a \frac{1}{s-4a} + 1, \quad R_y = \{\sigma > 4a\} \quad (7.138)$$

που επιβεβαιώνει το προηγούμενο αποτέλεσμα.

7.5.1.9 n -οστή παραγωγή στο χρόνο

Επαναλαμβάνοντας n φορές τη διαδικασία της Παραγράφου 7.5.1.8, έχουμε ότι

$$y(t) = \frac{d^n}{dt^n} x(t) \longleftrightarrow s^n X(s) \quad (7.139)$$

με πεδίο σύγκλισης το $R_y \supseteq R_x$, διότι ο όρος s^n μπορεί να απαλείφει κάποιον/ους πόλο/ους στον παρονομαστή του $X(s)$, με αποτέλεσμα το πεδίο σύγκλισης που θα προκύψει να είναι υπερσύνολο του αρχικού πεδίου σύγκλισης. Άρα

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} x(t) \longleftrightarrow s^n X(s), \quad R \supseteq R_x} \quad (7.140)$$

Παράδειγμα 7.15:

Ας δούμε εδώ ένα παράδειγμα όπου το πεδίο σύγκλισης της παραγώγου είναι υπερσύνολο του πεδίου σύγκλισης του σήματος. Έστω το αιτιατό σήμα

$$x(t) = \left(-\frac{5}{36} + \frac{1}{6}t + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{9}e^{-3t} \right) u(t) \quad (7.141)$$

το οποίο έχει μετασχ. Laplace

$$X(s) = -\frac{5}{36} \frac{1}{s} + \frac{1}{6} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{s+2} - \frac{1}{9} \frac{1}{s+3} \quad (7.142)$$

$$= \frac{1}{s^2(s+2)(s+3)}, \quad R_x = \{\sigma > 0\} \quad (7.143)$$

Βρείτε το μετασχ. Laplace της δεύτερης παραγώγου του σήματος $x(t)$.

Λύση:

Η δεύτερη παράγωγος του σήματος $x(t)$ είναι (δείξτε το αναλυτικά)

$$y(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) = e^{-2t} u(t) - e^{-3t} u(t) \quad (7.144)$$

και ο μετασχ. Laplace της είναι

$$Y(s) = L\left\{ \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right\} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}, \quad R_y = \{\sigma > -2\} \quad (7.145)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της n -οστής παραγωγίσης καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα και έχουμε

$$Y(s) = s^2 X(s) = s^2 \frac{1}{s^2(s+2)(s+3)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}, \quad R_y = \{\sigma > -2\} \quad (7.146)$$

Παρατηρήστε ότι το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace της δευτέρας παραγώγου του σήματος είναι υπερσύνολο του πεδίου σύγκλισης του μετασχ. Laplace του σήματος.

7.5.1.10 Παραγωγή στη συχνότητα

Αν παραγωγίσουμε τον ορισμό του μετασχ. Laplace, έχουμε

$$\frac{d}{ds} X(s) = \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt \quad (7.147)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-tx(t)) e^{-st} dt \quad (7.148)$$

$$= L\{-tx(t)\} \quad (7.149)$$

Άρα η ιδιότητα της παραγώγισης στη συχνότητα είναι η ακόλουθη

$$-tx(t) \longleftrightarrow \frac{d}{ds}X(s) \quad (7.150)$$

με το πεδίο σύγκλισης να παραμένει R_x .

Άρα

$$-tx(t) \longleftrightarrow \frac{d}{ds}X(s), \quad R = R_x \quad (7.151)$$

Παράδειγμα 7.16:

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = tu(t) \quad (7.152)$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$e^{at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-a}, \quad \sigma > a \quad (7.153)$$

και για $a = 0$ έχουμε

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}, \quad \sigma > 0 \quad (7.154)$$

Με την ιδιότητα της παραγώγισης στη συχνότητα, θα έχουμε

$$x(t) = tu(t) \longleftrightarrow X(s) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}, \quad R_x = \{\sigma > 0\} \quad (7.155)$$

7.5.1.11 n -οστή παραγώγιση στη συχνότητα

Επαναλαμβάνοντας n φορές τη διαδικασία της Παραγράφου 7.5.1.10, έχουμε ότι

$$(-1)^n t^n x(t) \longleftrightarrow \frac{d^n}{ds^n} X(s) \quad (7.156)$$

με πεδίο σύγκλισης το R_x .

Άρα

$$(-1)^n t^n x(t) \longleftrightarrow \frac{d^n}{ds^n} X(s), \quad R = R_x \quad (7.157)$$

Παράδειγμα 7.17:

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = t^4 u(t) \quad (7.158)$$

Λύση:

Γνωρίζουμε από το προηγούμενο παράδειγμα ότι

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}, \quad \sigma > 0 \quad (7.159)$$

Με την ιδιότητα της n -οστής παραγώγισης στη συχνότητα, θα έχουμε

$$x(t) = t^4 u(t) \longleftrightarrow X(s) = (-1)^4 \frac{d^4}{ds^4} \frac{1}{s} = \frac{24}{s^5}, \quad R_x = \{\sigma > 0\} \quad (7.160)$$

7.5.1.12 Ολοκλήρωση στο χρόνο

Για το σήμα $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$, το οποίο γράφεται ως

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = x(t) * u(t) \quad (7.161)$$

θα έχουμε τον ακόλουθο μετασχ. Laplace

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * u(t)) e^{-st} dt \quad (7.162)$$

$$= X(s)U(s) = \frac{X(s)}{s} \quad (7.163)$$

λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο, η οποία και ορίζει το πεδίο σύγκλισης ως $R_y \supseteq \{R_x \cap \{\sigma > 0\}\}$.

Άρα

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{X(s)}{s}, \quad R \supseteq R_x \cap \{\sigma > 0\} \quad (7.164)$$

Παράδειγμα 7.18:

Ας βρούμε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{\tau} \sin(\tau) u(-\tau) d\tau \quad (7.165)$$

Λύση:
Το σήμα

$$y(t) = e^t \sin(t) u(-t) \quad (7.166)$$

έχει μετασχ. Laplace

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^t \sin(t) e^{-st} dt \quad (7.167)$$

$$= \int_{-\infty}^0 \sin(t) e^{(1-s)t} dt = \frac{e^{(1-s)t}}{(1-s)^2 + 1} ((1-s) \sin(t) - \cos(t)) \Big|_{-\infty}^0 \quad (7.168)$$

$$= -\frac{1}{(1-s)^2 + 1} \quad (7.169)$$

με $R_y = \{\sigma < 1\}$, ώστε τα όρια στο $-\infty$ στο ολοκλήρωμα να τείνουν στο μηδέν. Άρα ο μετασχ. Laplace του $x(t)$ θα είναι

$$X(s) = -\frac{1}{s((1-s)^2 + 1)} \quad (7.170)$$

με το πεδίο σύγκλισης να είναι

$$R_x = \{\sigma > 0\} \cap \{\sigma < 1\} = \{0 < \sigma < 1\} \quad (7.171)$$

Οι αποδείξεις των τεσσάρων ιδιοτήτων του μονόπλευρου μετασχ. Laplace που διαφέρουν από αυτές του δίπλευρου αφήνονται ως άσκηση στον αναγνώστη (Άσκήσεις XXXX, XXXX, XXXX, XXXX).

7.6 Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Ο πίνακας 7.2 παραθέτει μερικά γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών που μπορείτε να χρησιμοποιείτε χωρίς απόδειξη.

7.7 Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχ. Laplace διαφέρει ελάχιστα στον τρόπο υπολογισμού του σε σχέση με το μετασχ. Fourier - είναι παρόμοια ολοκληρώματα και ως εκ τούτου χρησιμοποιούνται παρόμοιες τεχνικές για την εύρεση των μετασχημα-

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace		
Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	Όλο το s -επίπεδο
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	Όλο το s -επίπεδο
$\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{A}{s}(e^{sT/2} - e^{-sT/2})$	Όλο το s -επίπεδο
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-tu(-t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 - s^2}$	$a > \text{Re}\{s\} > -a$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} > -\text{Re}\{a\}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} < -\text{Re}\{a\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\text{Re}\{s\} > -\text{Re}\{a\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\text{Re}\{s\} < -\text{Re}\{a\}$
$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\text{Re}\{s\} > -\text{Re}\{a\}$
$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\text{Re}\{s\} > -\text{Re}\{a\}$
$t \cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s^2 - (2\pi f_0)^2}{(s^2 + (2\pi f_0)^2)^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$t \sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2s2\pi f_0}{(s^2 + (2\pi f_0)^2)^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$

Πίνακας 7.2: Πίνακας ζευγών μετασχ. Laplace

τισμών. Αντίθετα, ο αντίστροφος μετασχ. Laplace, ο οποίος υπενθυμίζεται ότι ορίζεται ως

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds \quad (7.172)$$

είναι λίγο περισσότερο περίπλοκος σε σχέση με τον αντίστροφο μετασχ. Fourier.

Ο λόγος αυτής της διαφοράς βρίσκεται στο γεγονός ότι ο μετασχ. Laplace ορίζεται σε ένα τμήμα (ημιεπίπεδο ή λωρίδα) του μιγαδικού επιπέδου. Η αντιστροφή του μετασχηματισμού συνίσταται στην ολοκλήρωση πάνω στις ευθείες του μιγαδικού επιπέδου όπου ορίζεται ο μετασχ. Laplace. Παρατηρήστε το ολοκλήρωμα της Σχέσης (7.172): η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος της γραμμής $\text{Re}\{s\} = \sigma$ στο μιγαδικό επίπεδο. Η ολοκλήρωση στο μιγαδικό επίπεδο είναι εκτός των σκοπών αυτού του βιβλίου - για το θέμα αυτό μπορείτε να συμβουλευτείτε τα σχετικά εξαιρετικά συγγράμματα, είτε αμιγώς μαθηματικά είτε προσανατολισμένα σε επιστήμες μηχανικού: [1], [9], [81], [60], [23], [76]. Αντίθετα, θα χρησιμοποιήσουμε τα ζεύγη του Πίνακα 7.2, τις ιδιότητες του Πίνακα 7.1, και τη γνωστή μέθοδο του Αναπτύγματος σε Μερικά Κλάσματα.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα εύρεσης του αντίστροφου μετασχ. Laplace.

Παράδειγμα 7.19:

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2-3s-10} \quad (7.173)$$

με ROC: $\sigma < -2$.

Λύση:

Μπορούμε να αναπτύξουμε το $X(s)$ σε Μερικά Κλάσματα ως

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2-3s-10} = \frac{s+7}{(s+2)(s-5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-5} \quad (7.174)$$

με

$$A = X(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{s+7}{s-5} \Big|_{s=-2} = -\frac{5}{7} \quad (7.175)$$

$$B = X(s)(s-5) \Big|_{s=5} = \frac{s+7}{s+2} \Big|_{s=5} = \frac{12}{7} \quad (7.176)$$

και άρα

$$X(s) = \frac{s+7}{(s+2)(s-5)} = -\frac{5}{7} \frac{1}{s+2} + \frac{12}{7} \frac{1}{s-5} \quad (7.177)$$

Από τα δεδομένα μας, το πεδίο σύγκλισης είναι το ROC: $\sigma < -2$, που αντιστοιχεί σε αριστερόπλευρο σήμα στο χρόνο. Δεδομένου ότι οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $s = -2$, $s = 5$, το πεδίο σύγκλισης μπορεί να γραφεί ως

$$\{\sigma < -2\} = \{\sigma < 5\} \cap \{\sigma < -2\} \quad (7.178)$$

Τα σύνολα της παραπάνω τομής αποτελούν τα πεδία σύγκλισης των όρων του αθροίσματος της Σχέσης (7.177). Οπότε από τον Πίνακα 7.2

$$x(t) = \frac{5}{7} e^{-2t} u(-t) - \frac{12}{7} e^{5t} u(-t) \quad (7.179)$$

Παράδειγμα 7.20:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{3s}{(s^2+1)^2} \quad (7.180)$$

με ROC: $\sigma > 0$.

Λύση:

Μπορούμε κι εδώ να αναπτύξουμε σε Μερικά Κλάσματα αλλά υπάρχει και διαφορετικός τρόπος. Προσέξτε ότι

$$\frac{3s}{(s^2+1)^2} = -\frac{3}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2+1} \quad (7.181)$$

Από τους Πίνακες 7.2, 7.1, και από το γεγονός ότι το σήμα στο χρόνο θα είναι δεξιόπλευρο βρίσκουμε ότι

$$x(t) = \frac{3}{2} t \sin(t) u(t) \quad (7.182)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει την παραπάνω λύση με χρήση αναπτύγματος σε Μερικά Κλάσματα (Άσκηση XXXX).

Παράδειγμα 7.21:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+4)} \quad (7.183)$$

με ROC: $\sigma > 0$.

Λύση:

Ο αναγνώστης μπορεί να εφαρμόσει Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα για να επιβεβαιώσει την παρακάτω λύση (Άσκηση XXXX). Από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης στο χρόνο έχουμε

$$X(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s^2 + 4} = \frac{X_1(s)}{s} \longleftrightarrow x(t) = \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau \quad (7.184)$$

και από τον Πίνακα 7.2 έχουμε

$$\frac{1}{s^2 + 4}, \sigma > 0 \longleftrightarrow \frac{1}{2} \sin(2t)u(t) \quad (7.185)$$

Οπότε

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \sin(2\tau)u(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \sin(2\tau) d\tau = \frac{1}{4} (1 - \cos(2t))u(t) \quad (7.186)$$

Παράδειγμα 7.22:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 - s} \quad (7.187)$$

με ROC: $0 < \sigma < 1$.

Λύση:

Εκφράζουμε το μετασχηματισμό ως

$$X(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 - s} = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 - 1)} = \frac{s^2 + 2}{s(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1} \quad (7.188)$$

με

$$A = X(s)s \Big|_{s=0} = \frac{s^2 + 2}{(s-1)(s+1)} \Big|_{s=0} = -2 \quad (7.189)$$

$$B = X(s)(s-1) \Big|_{s=1} = \frac{s^2 + 2}{s(s+1)} \Big|_{s=1} = \frac{3}{2} \quad (7.190)$$

$$C = X(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{s^2 + 2}{s(s-1)} \Big|_{s=-1} = \frac{3}{2} \quad (7.191)$$

Άρα

$$X(s) = -2 \frac{1}{s} + \frac{3}{2} \frac{1}{s-1} + \frac{3}{2} \frac{1}{s+1} \quad (7.192)$$

Το πεδίο σύγκλισης μπορεί να γραφεί ως

$$\{0 < \sigma < 1\} = \{\sigma > 0\} \cap \{\sigma < 1\} \cap \{\sigma > -1\} \quad (7.193)$$

με τα επιμέρους πεδία σύγκλισης να αντιστοιχούν στους όρους του αθροίσματος της Σχέσης (7.192). Οπότε από τον Πίνακα 7.2

$$x(t) = -2u(t) - \frac{3}{2}e^t u(-t) + \frac{3}{2}e^{-t} u(t) \quad (7.194)$$

Το σήμα είναι πράγματι αμφίπλευρο, όπως υποδηλώνεται από το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού.

7.8 Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

Σε κάποιες εφαρμογές είναι επιθυμητό να γνωρίζουμε τις τιμές ενός σήματος $x(t)$ όταν αυτό τείνει στο 0 και στο ∞ , μέσω του μετασχ. Laplace του. Τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής μας βοηθούν σε αυτό.

Το *θεώρημα της αρχικής τιμής* - Θ.Α.Τ. δηλώνει ότι αν το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό, και αυτό κι η παράγωγός του, $dx(t)/dt$, έχουν μετασχ. Laplace, τότε

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (7.195)$$

δεδομένου ότι το παραπάνω όριο υπάρχει.

Το θεώρημα της τελικής τιμής - Θ.Τ.Τ. δηλώνει ότι αν το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό, και αυτό κι η παράγωγός του, $dx(t)/dt$, έχουν μετασχ. Laplace, τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (7.196)$$

δεδομένου ότι το $sX(s)$ δεν έχει πόλους στο δεξιά μιγαδικό ημιεπίπεδο ή πάνω στον φανταστικό άξονα.

Το Θ.Α.Τ. πρέπει να εφαρμόζεται μόνον αν το $X(s)$ έχει αυστηρά μεγαλύτερη τάξη παρονομαστή απ' ότι αριθμητή, αλλιώς το όριο δεν υπάρχει, και το θεώρημα δεν εφαρμόζεται.

Αντίστοιχα, το Θ.Τ.Τ. εφαρμόζεται μόνον αν οι πόλοι του $sX(s)$ είναι όλοι στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αν υπάρχει πόλος στο φανταστικό άξονα, το $\lim_{t \rightarrow 0} sX(s)$ δεν υπάρχει, ενώ αν υπάρχει πόλος στο δεξιά μιγαδικό ημιεπίπεδο, το $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ δεν υπάρχει.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.23:

Έστω το σήμα

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t} \cos(3t)u(t) \quad (7.197)$$

(α') Να βρεθεί ο μετασχ. Laplace.

(β') Να βρεθεί η αρχική συνθήκη $x(0^+)$ μέσω του μετασχ. Laplace.

(γ') Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ μέσω του μετασχ. Laplace.

(δ') Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα των παραπάνω δυο ερωτημάτων υπολογίζοντας αναλυτικά τα όρια.

Λύση:

(α')

$$X(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} + \mathcal{L}\{e^{-t} \cos(3t)u(t)\} = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9}, \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad (7.198)$$

και κάνοντας λίγες πράξεις, έχουμε

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} \quad (7.199)$$

(β')

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{2s^2 + 5s + 12}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} \quad (7.200)$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^3 + 5s^2 + 12s}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} \quad (7.201)$$

$$(\text{De L' Hospital}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{6s^2 + 10s + 12}{3s^2 + 10s + 14} \quad (7.202)$$

$$(\text{De L' Hospital}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{12s + 10}{6s + 10} \quad (7.203)$$

$$(\text{De L' Hospital}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{12}{6} = 2 \quad (7.204)$$

$$x(0^+) = 2 \quad (7.205)$$

(γ')

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^3 + 5s^2 + 12s}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} = 0 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (7.206)$$

(δ') Δικό σας. ☺