ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 16Η

- Δειγματοληψία

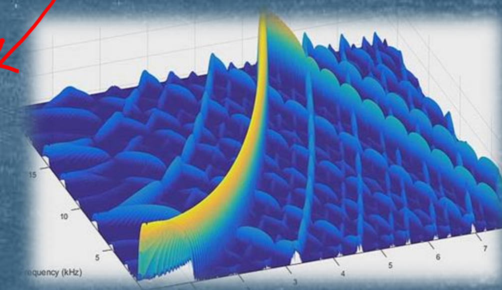
Τι περιέχει το HY215?

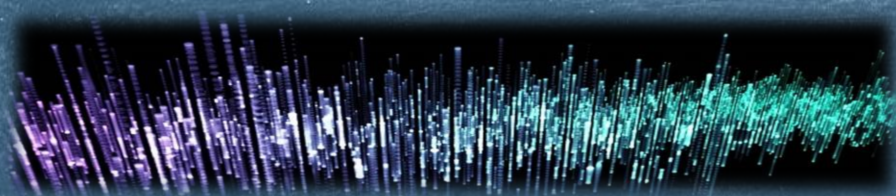
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

2ο Κομμάτι

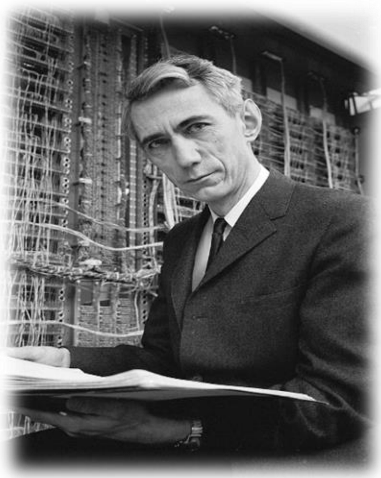
- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- ~~Τυχαία Σήματα~~
- Δειγματοληψία





- **Δειγματοληψία**
- **Πύλη του ψηφιακού κόσμου!**
- **Ερώτημα:** πώς μπορώ να δειγματοληπτήσω (== πάρω κάποιες τιμές, που ονομάζονται *δείγματα - samples*) ένα σήμα συνεχούς χρόνου, έτσι ώστε να μπορώ να το ανακτήσω *πλήρως και ακριβώς* από τα δείγματά του?

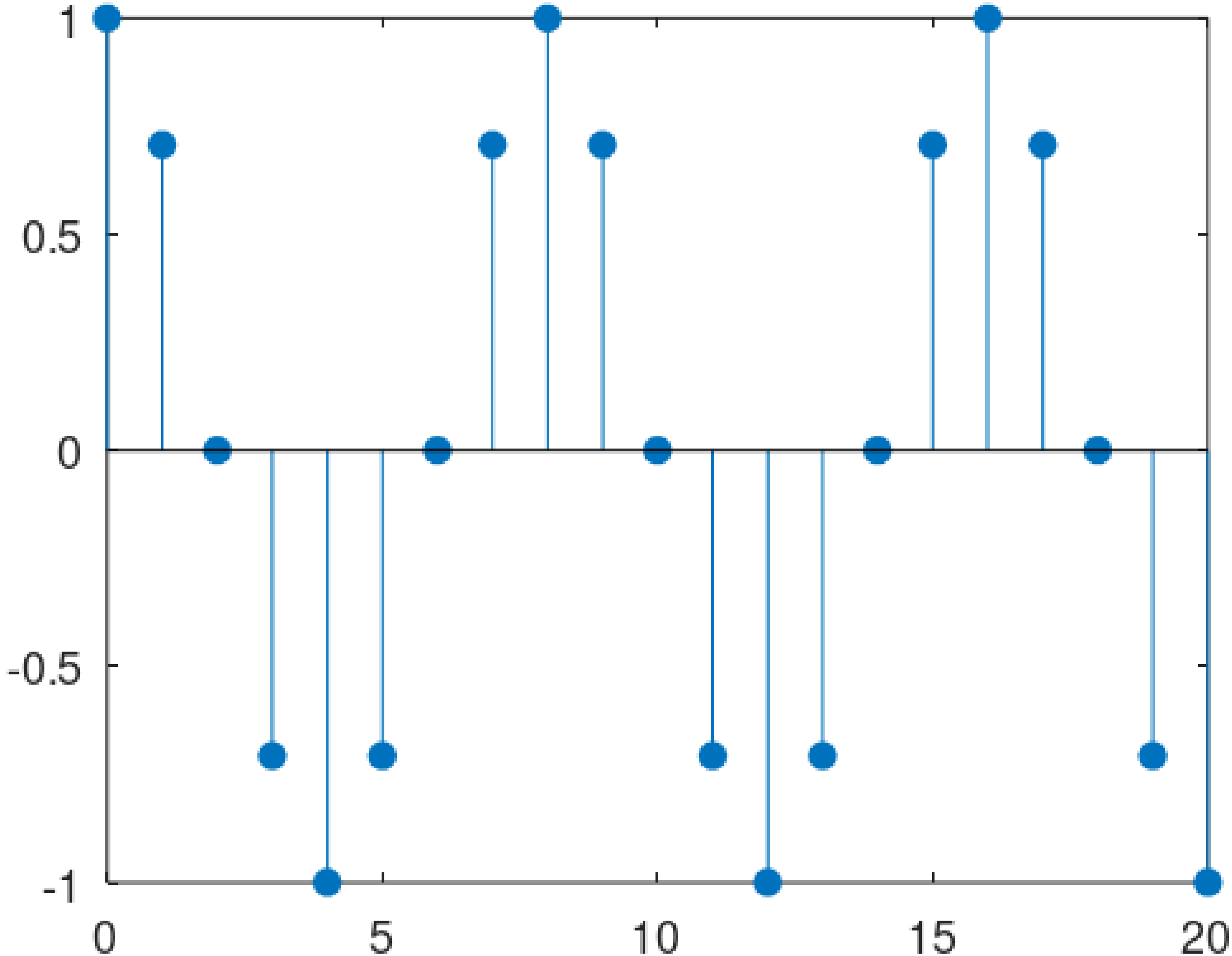
- **Απάντηση**: Θεώρημα Shannon-Nyquist (1949)



- Πριν δούμε πως προκύπτει το θεώρημα αυτό, ας κάνουμε ένα κουίζ! ☺ …

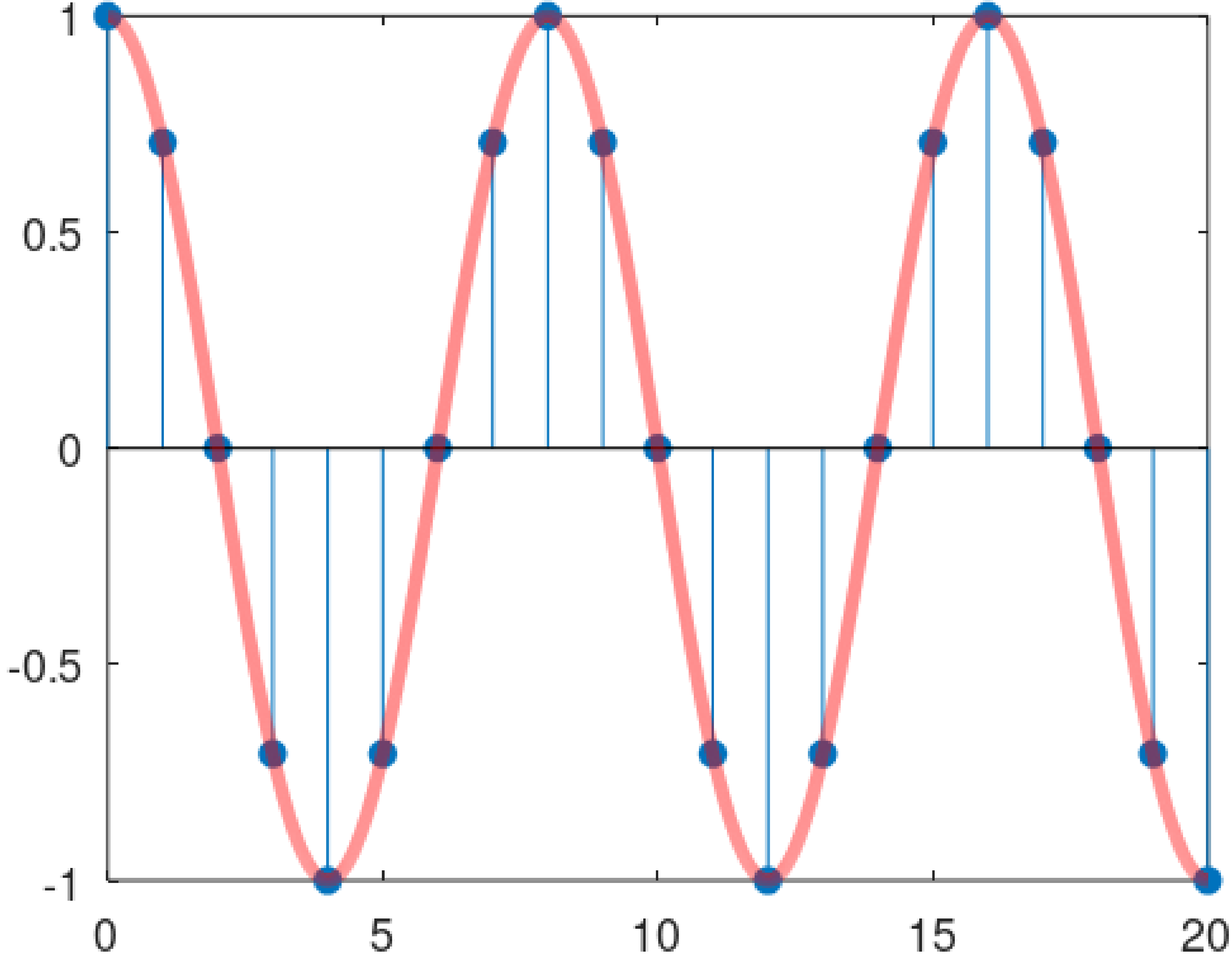
- **Δειγματοληψία**

Quiz:



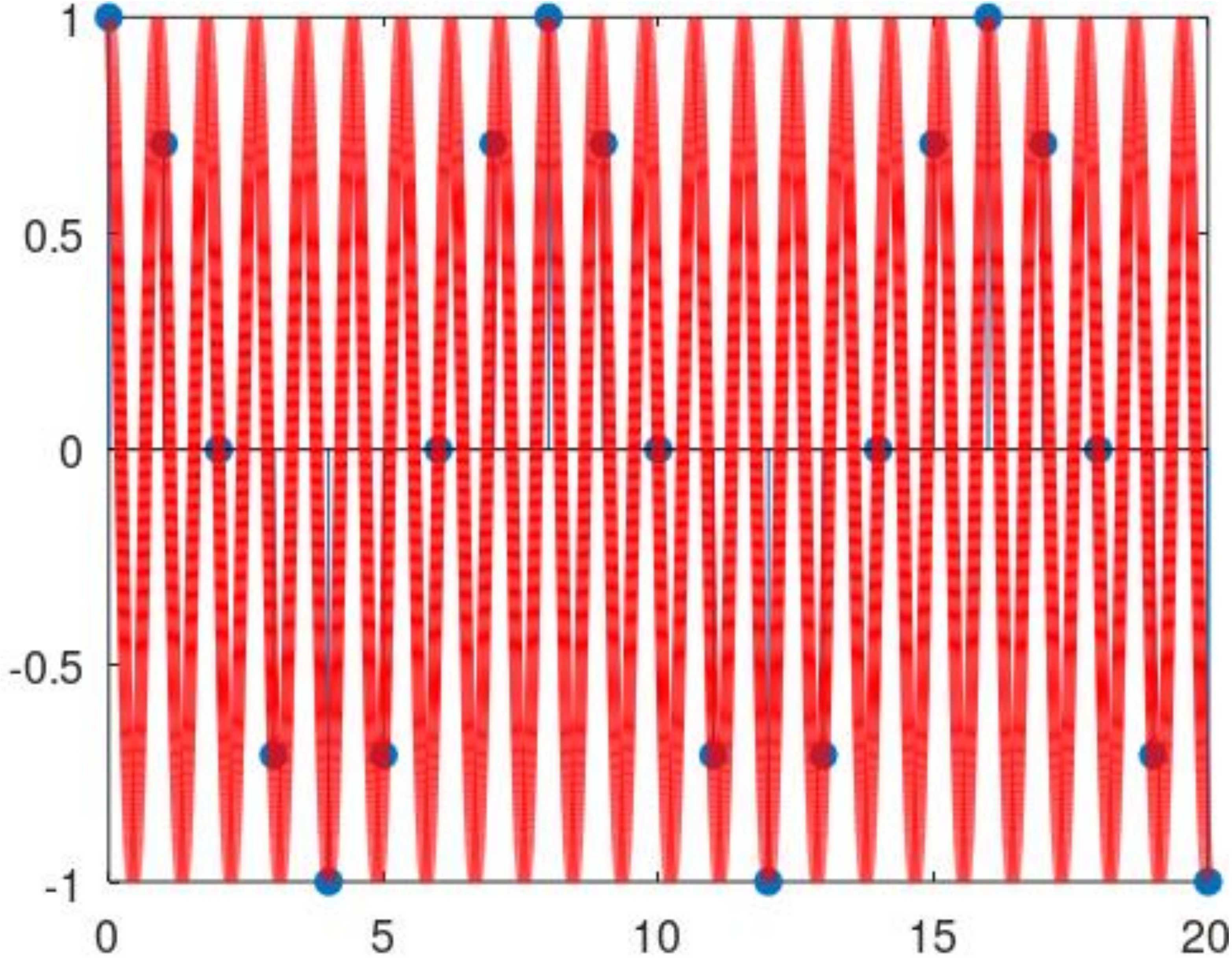
- **Δειγματοληψία**

Quiz:



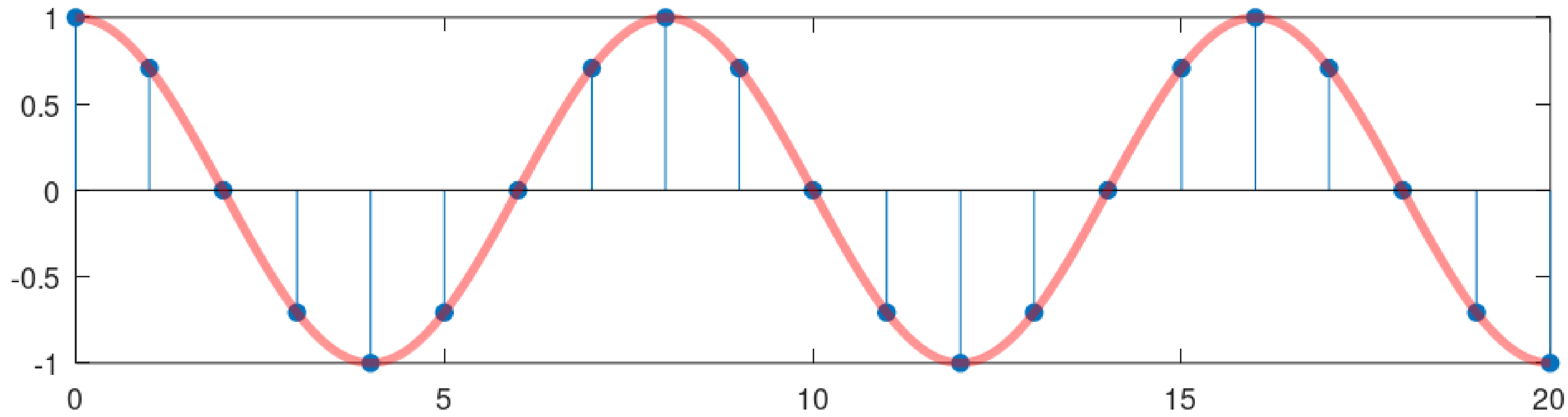
• **Δειγματοληψία**

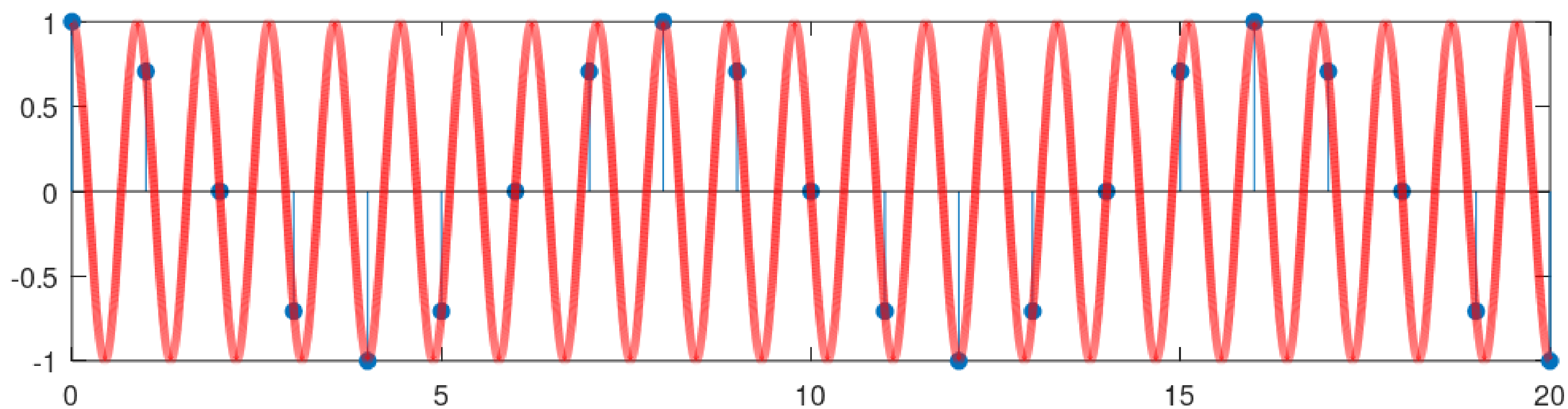
Quiz:



• Δειγματοληψία

Quiz:





- **Δειγματοληψία**

- Θέλουμε να αποθηκεύσουμε ένα σήμα $x(t)$ σε έναν Η/Υ

- Προφανώς δεν μπορούμε να αποθηκεύσουμε τις *άπειρες* τιμές του
    - Ακόμα κι αν αυτό είναι μη μηδενικό σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα

- Πρέπει να πάρουμε μερικά **δείγματα (a.k.a. τιμές)** του σήματος $x(t)$
    - **Τιμές**: $x(-20), x(-1), x(0), x(10), x\left(\sqrt{152}\right), x(62.7)$, κ.ο.κ

- Τα δείγματα αυτά θέλουμε να είναι ικανά να μας δώσουν πίσω ξανά ***ακριβώς*** το σήμα συνεχούς χρόνου

- **Ερώτημα Ι**: ***ποιες*** τιμές πρέπει να πάρουμε;
    - Όποιες θέλουμε? Κάποιες συγκεκριμένες? Έχει σημασία?

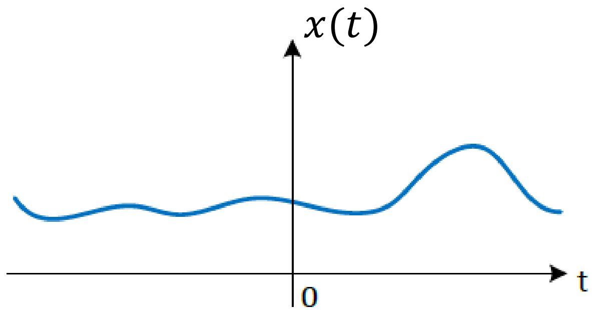
- **Ερώτημα ΙΙ**: ***πόσο συχνά*** πρέπει να τις πάρουμε;
    - Μια τιμή-δείγμα κάθε δευτερόλεπτο? Πιο συχνά? Λιγότερο συχνά? Έχει σημασία?

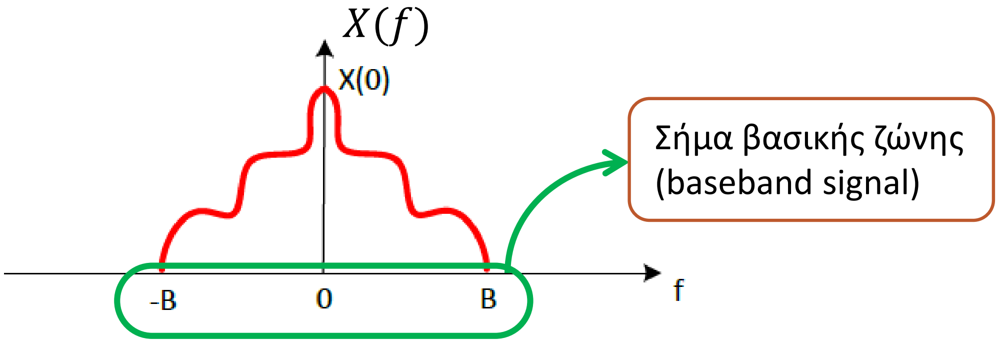
- Ας υποθέσουμε ότι θα δειγματοληπτήσουμε ***ομοιόμορφα*** και ότι το σήμα μας είναι σήμα ***βασικής ζώνης (baseband signal)***
    - Δηλ. με σταθερή χρονική απόσταση μεταξύ των δειγμάτων και θεωρώντας ότι ο μετασχ. Fourier του σήματος είναι μηδενικός εκτός ενός πεπερασμένου διαστήματος συχνοτήτων που περιλαμβάνει το μηδέν, δηλ. $X(f) = 0,\ f \notin [-B, B]$

- **Δειγματοληψία**

$$1)\quad \sum X_k e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow \sum X_k \delta(f - k f_0)$$

- Έστω ένα σήμα $x(t)$ και ο μετασχ. Fourier του $X(f)$ όπως στο σχήμα





- Για να «τραβήξουμε» δείγματα από το σήμα $x(t)$, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη δειγματοληπτική ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

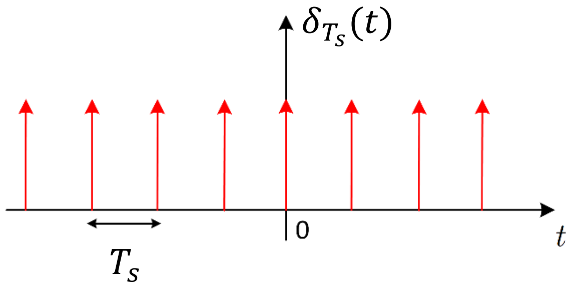
- Ας ορίσουμε μια **συνάρτηση (ομοιόμορφης) δειγματοληψίας με περίοδο δειγματοληψίας T_s**

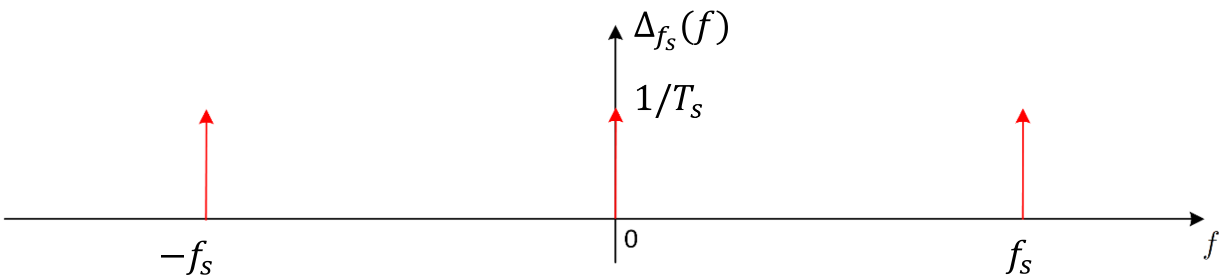
- Η **συχνότητα δειγματοληψίας** είναι $f_s = 1/T_s$

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k f_s t} \overset{1}{\leftrightarrow} \Delta_{f_s}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_s)$$

- **Δειγματοληψία**

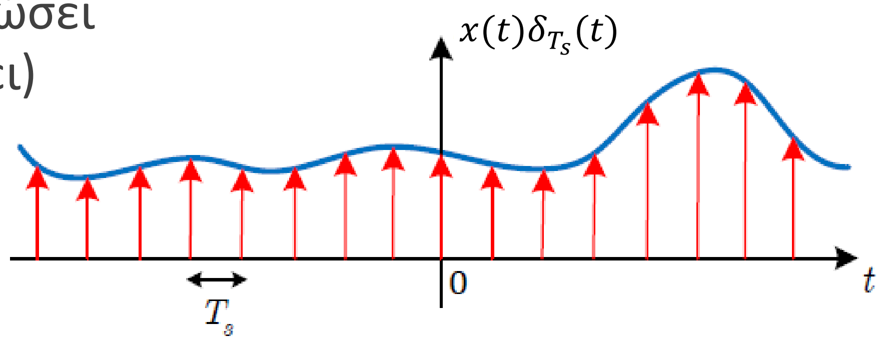
$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \leftrightarrow \Delta_{f_s}(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s)$$



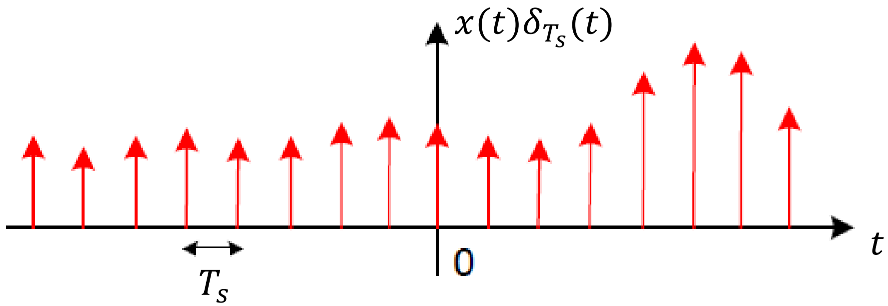


- Το γινόμενο της $\delta_{T_s}(t)$ με το σήμα $x(t)$ θα δώσει μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα με (εν γένει) *μη μοναδιαίους* συντελεστές
  - Συναρτήσεις δέλτα που η "επιφάνειά" τους έχει αλλάξει με βάση το σήμα

$$\boldsymbol{x(t)\sum\delta(t - nT_s) = \sum x(nT_s)\delta(t - nT_s)}$$



- Τα δείγματα απέχουν χρόνο T_s μεταξύ τους
  - Ας υποθέσουμε ότι αυτή η τιμή είναι «αρκετά μικρή»
  - Οπότε η $f_s = 1/T_s$ «αρκετά μεγάλη»



- **Δειγματοληψία**

- Γνωρίζουμε ότι το **γινόμενο** των δυο σημάτων **στο χρόνο** θα μετατραπεί σε συνέλιξη στο χώρο της **συχνότητας**

- Δηλ.

$$x(t)\delta_{T_s}(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

και

$$X(f) * \Delta_{f_s}(f) = X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}\delta(f-kf_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}X(f-kf_s)$$

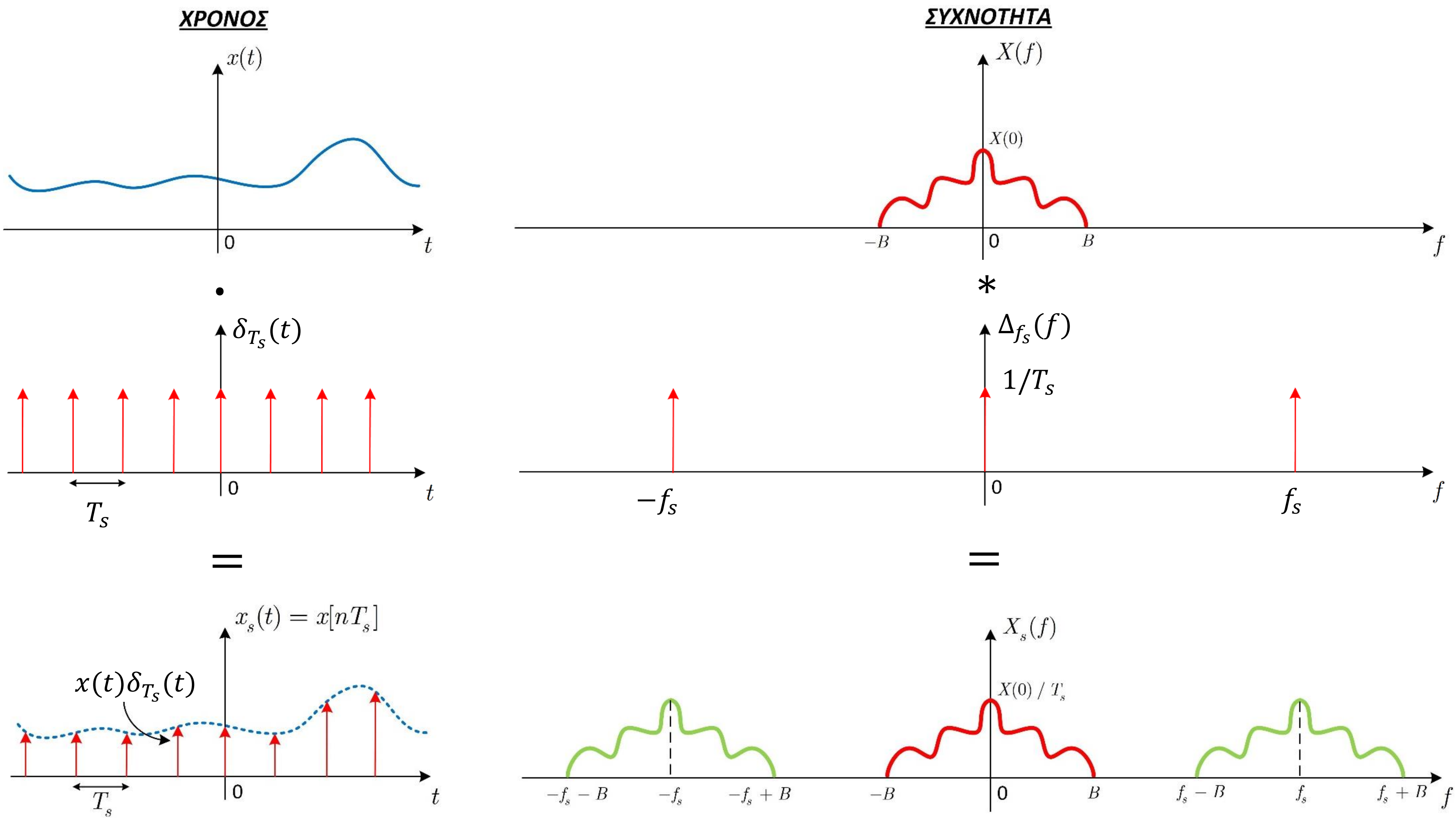
λόγω της ιδιότητας

$$X(f) * \delta(f-f_0) = X(f-f_0)$$

- Η τελευταία σχέση μας λέει ότι **ο μετασχηματισμός Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος είναι ένα άθροισμα από τους μετασχηματισμούς Fourier του σήματος συνεχούς χρόνου, τοποθετημένους σε απόσταση f_s (ανά δυο) μεταξύ τους**!!

- Με άλλα λόγια, ο μετασχ. Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος είναι **περιοδικός** στη **συχνότητα** με περίοδο f_s!!!

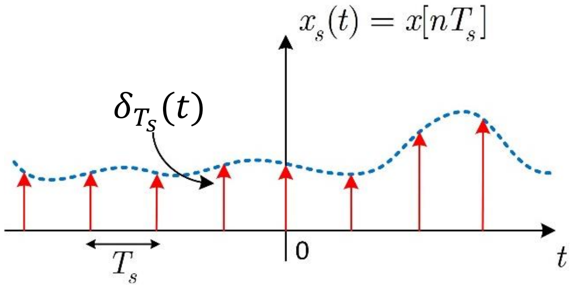
- **Δειγματοληψία**
- Σχηματικά, έχουμε την παρακάτω εικόνα:

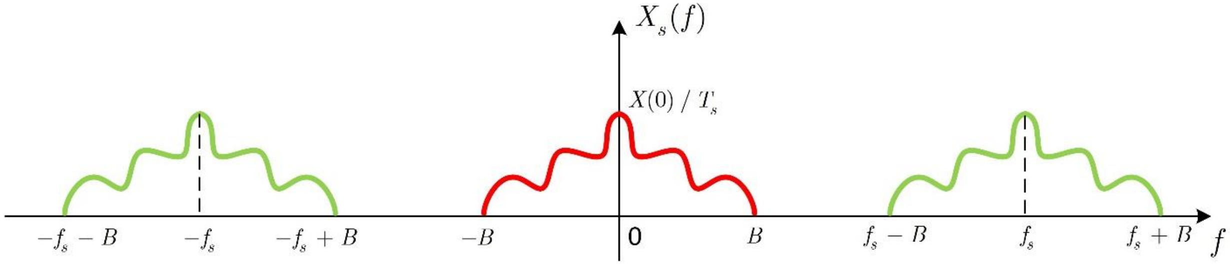


- **Δειγματοληψία – Ανακατασκευή**

- Έχουμε τώρα τα **δείγματα** από το αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου
  - Αυτά τα δείγματα μπορούν να αποθηκευτούν κάπου

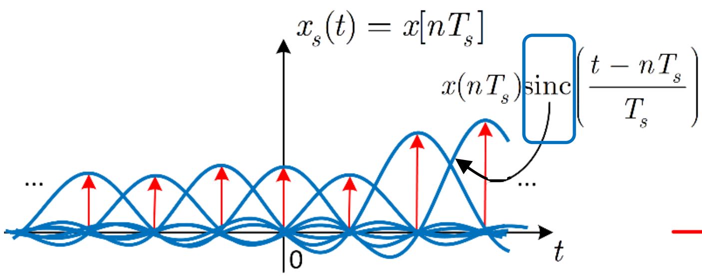
- Πως θα **ανακτήσουμε** το αρχικό φάσμα – και έτσι, το αρχικό σήμα – από τα δείγματά του, δηλ. από το δειγματοληπτημένο σήμα?

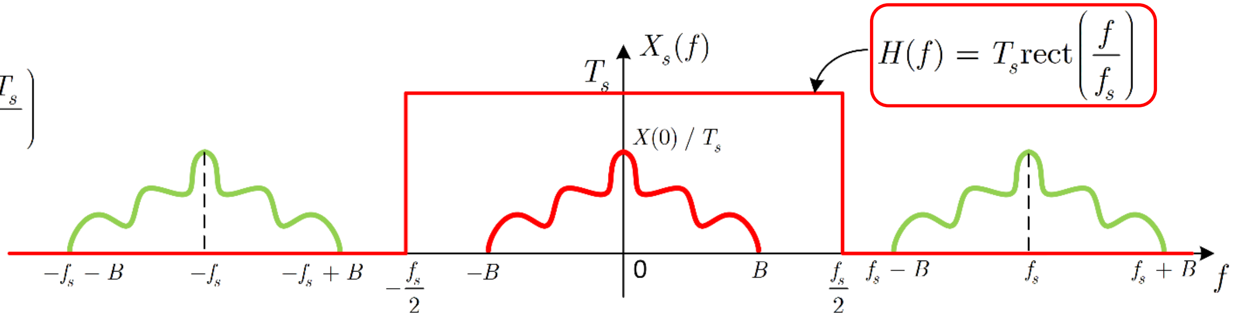




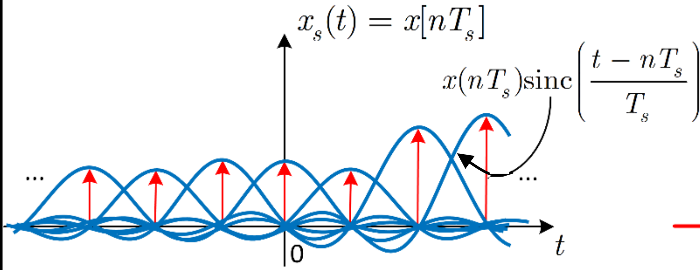
- Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι ένα χαμηλοπερατό φίλτρο, διάρκειας f_s, θα μπορούσε να **απομονώσει** το κεντρικό φάσμα που αντιστοιχεί στο σήμα συν. χρόνου

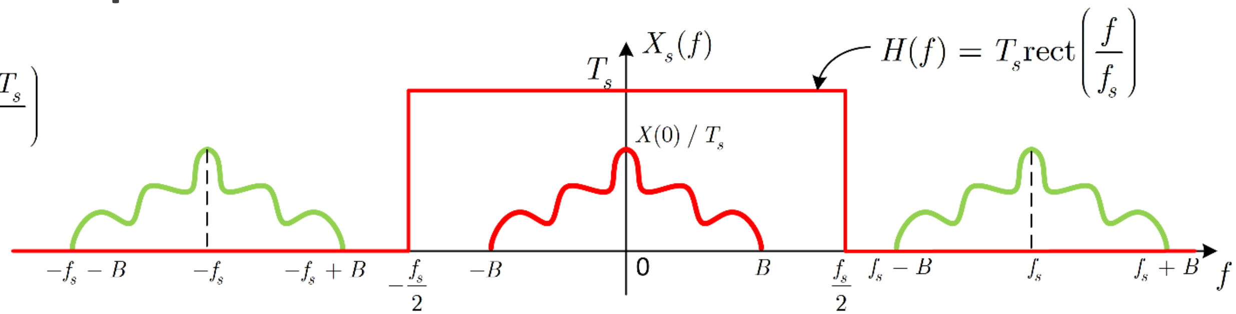
- Το **γινόμενο** του φίλτρου με το φάσμα στη **συχνότητα** αντιστοιχεί σε **συνέλιξη στο χρόνο** των δειγμάτων του σήματος με μια συνάρτηση $\mathrm{sinc}(.)$!!!!





- **Δειγματοληψία – Ανακατασκευή**





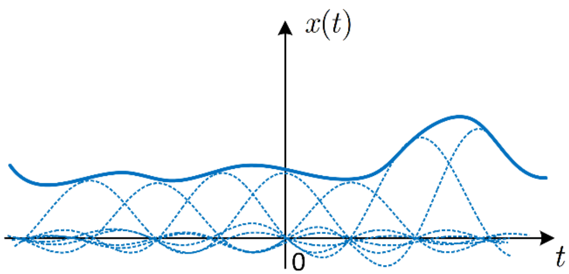
- Με μαθηματικά:

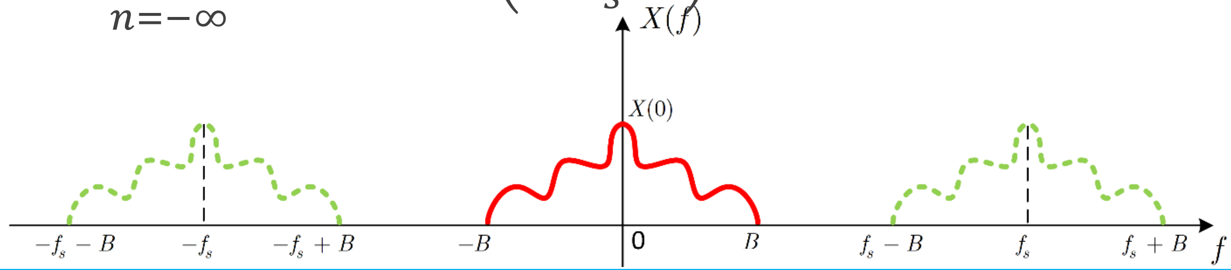
$$[X(f) * \Delta_{f_s}(f)]H(f) = [X(f) * \Delta_{f_s}(f)]T_s\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = X(f)$$

- Στο πεδίο του χρόνου:

$$\left(x(t)\delta_{T_s}(t)\right) * h(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)\right) * \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

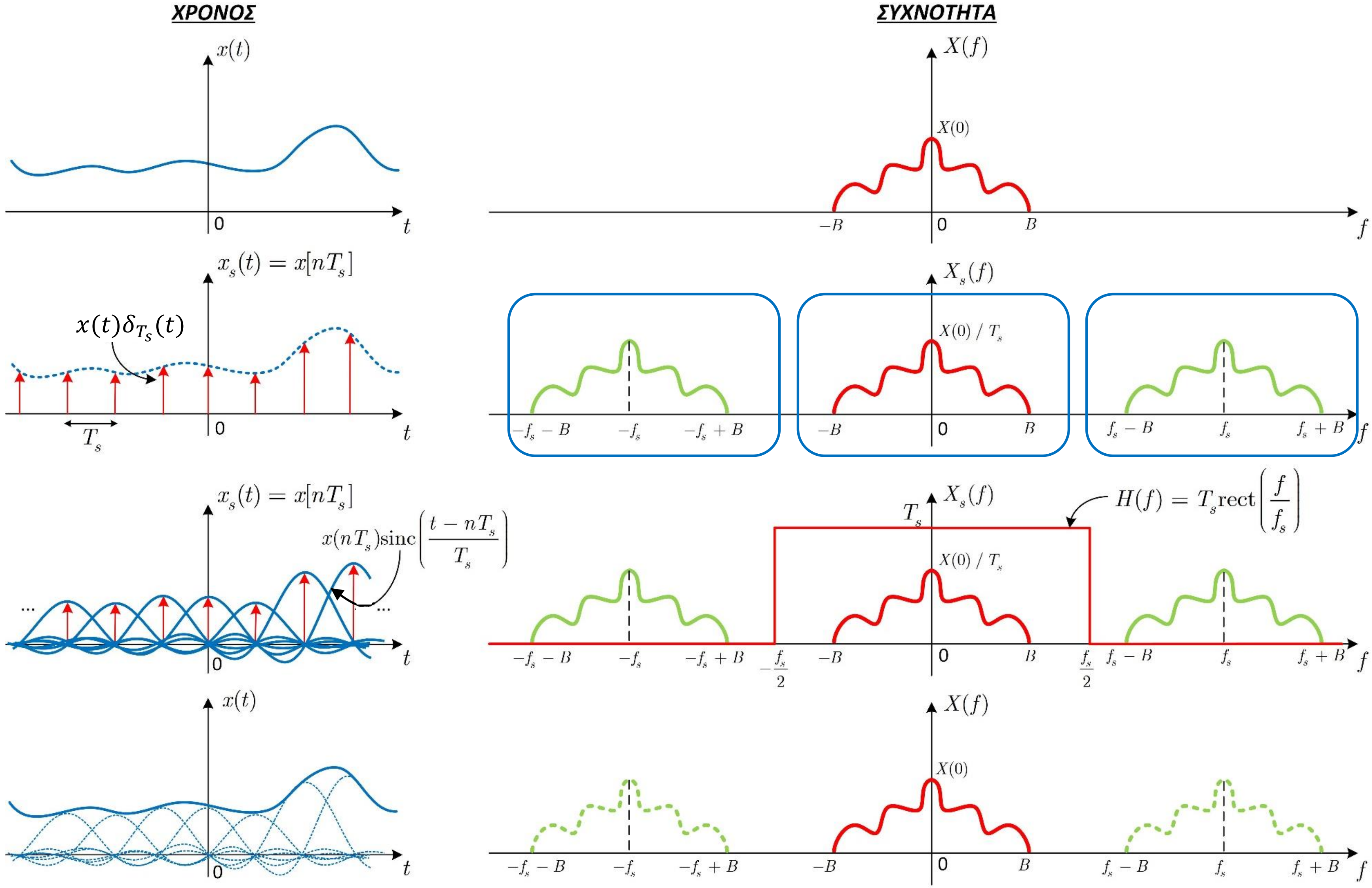
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right) = x(t)$$



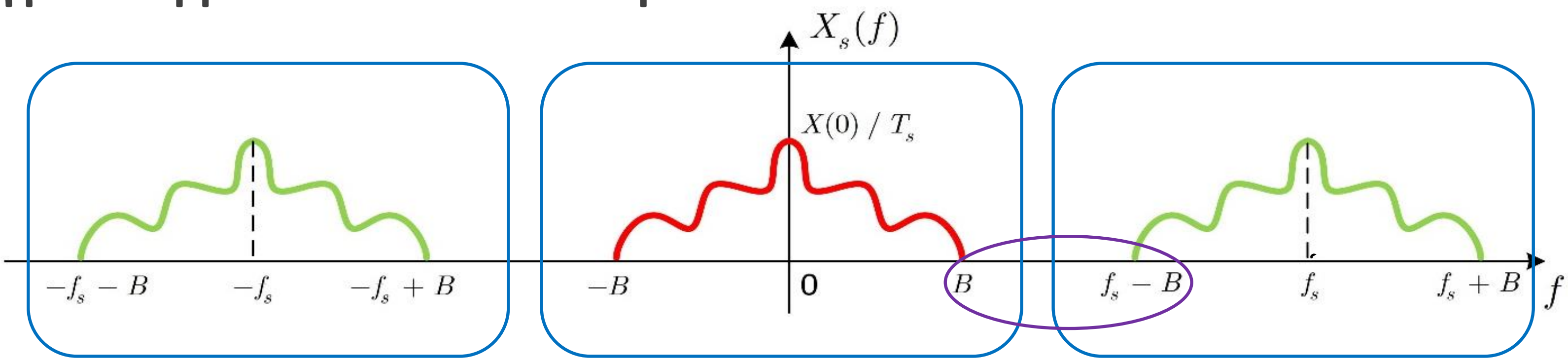


- **Δειγματοληψία και Ανακατασκευή**

- Συγκεντρωτικά:



- **Δειγματοληψία – Ανακατασκευή**



- Για να ισχύουν όλα τα προηγούμενα, πρέπει το περιοδικό φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος να μην έχει επικαλύψεις!
  - Η **συχνότητα δειγματοληψίας f_s** να είναι «**αρκετά μεγάλη**»
  - **Πόσο** μεγάλη?

Ορολογία:
Ρυθμός Nyquist: $2f_{max}$
Συχνότητα Nyquist: f_{max}

- Αρκεί

$$\boxed{f_s - B > B \Leftrightarrow f_s > 2B = 2f_{max}}$$

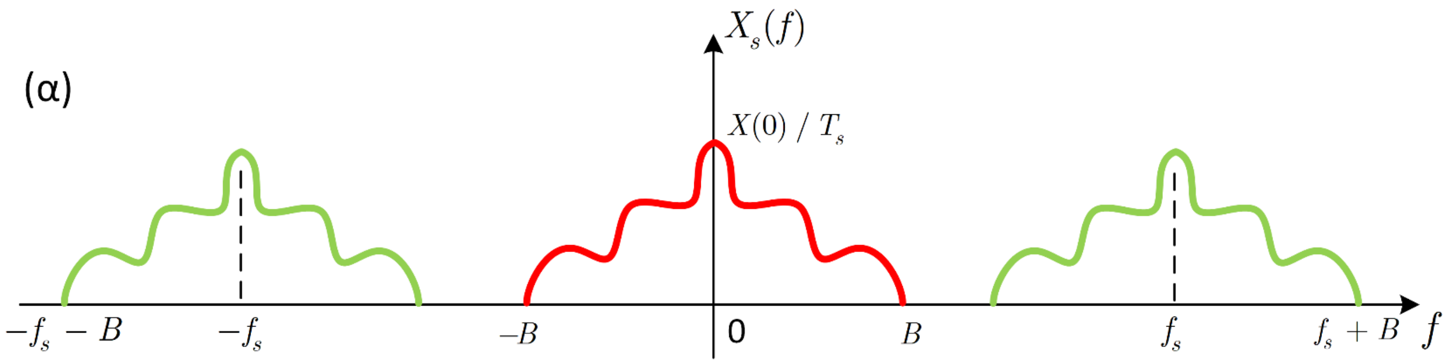
που αποτελεί και το **θεώρημα της Δειγματοληψίας**

- Με άλλα λόγια, **μπορούμε να ανακατασκευάσουμε <u>πλήρως και ακριβώς</u> το σήμα συνεχούς χρόνου από μια δειγματοληπτημένη έκδοσή του (ένα σήμα *διακριτού* χρόνου) αν τα δείγματα έχουν ληφθεί με ρυθμό μεγαλύτερο από $2B$ Hz, με $2B$ τη διπλάσια μέγιστη (μη μηδενικού πλάτους) συχνότητα, $2f_{max}$, του σήματος**

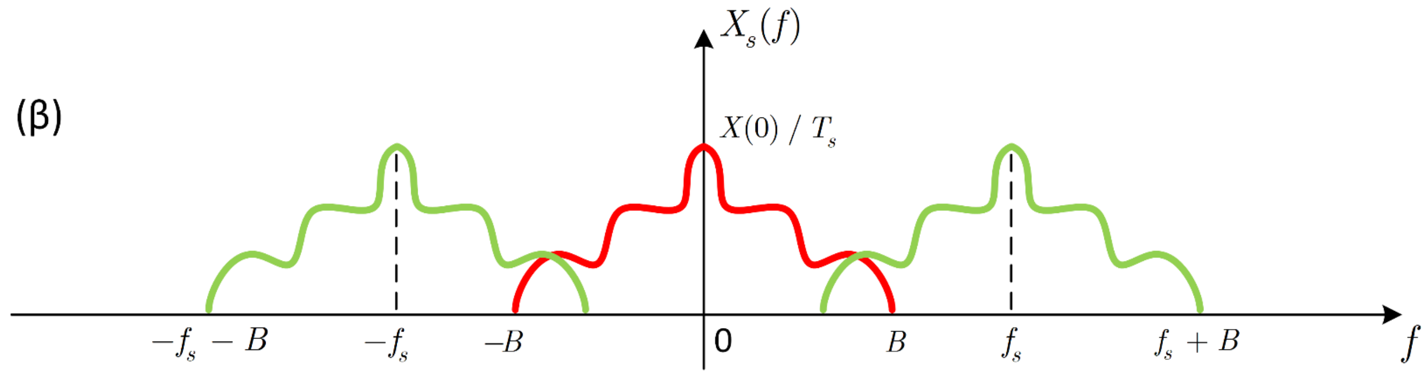
• Δειγματοληψία – Aliasing

• Τι θα συμβεί αν **ΔΕΝ** τηρηθεί η συνθήκη του Shannon?

• Αν $f_s > 2f_{max}$, τότε:



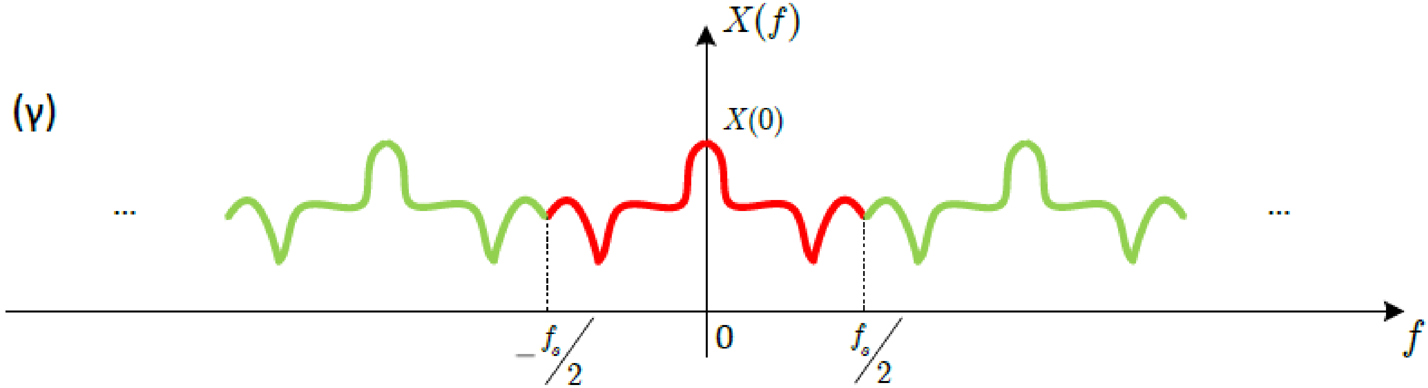
• Αν όμως $f_s < 2f_{max}$, τότε:



- **Δειγματοληψία – Aliasing**

- Τι θα συμβεί αν **ΔΕΝ** τηρηθεί η συνθήκη του Shannon?

- Το φάσμα που θα αποκόψει το χαμηλοπερατό φίλτρο θα μοιάζει με το παρακάτω:



- Το φάσμα αυτό αντιστοιχεί σε ένα εντελώς διαφορετικό σήμα στο χρόνο, σε σχέση με αυτό που δειγματοληπτήθηκε!!

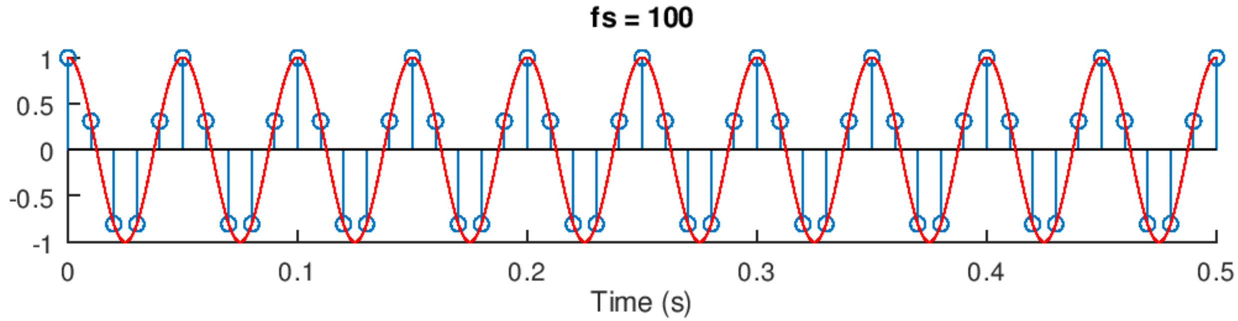
- Βλέπετε ότι έχουν εισαχθεί (και αλλοιώσει) το φάσμα συχνότητες που δεν ανήκουν σε αυτό (ξένες συχνότητες)
  - … οι οποίες προέρχονται από το άθροισμα συχνοτήτων του ίδιου του σήματος και των γειτονικών αντιγράφων του

- Οι συχνότητες αυτές λέγονται **ψευδώνυμες** συχνότητες (**aliased** frequencies)

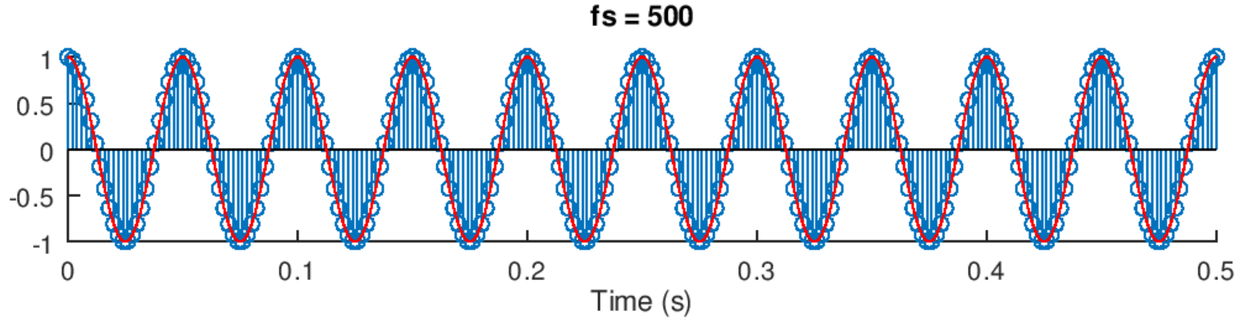
- Το φαινόμενο της επικάλυψης των γειτονικών φασμάτων (και κατά συνέπεια της αλλοίωσης του φάσματος βασικής ζώνης) κατά τη δειγματοληψία ονομάζεται **aliasing**
  - **Ψευδωνυμία** ή **Αναδίπλωση** (in Greek)

- **Δειγματοληψία**
- Ας δούμε ένα παράδειγμα
- Έστω ένα απλό ημίτονο με $f_0 = 20$ Hz το οποίο δειγματοληπτείται με συχνότητες δειγματοληψίας

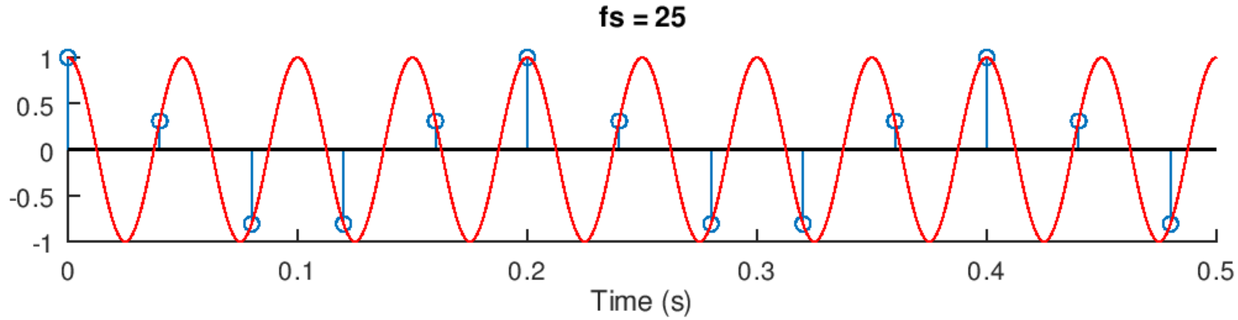
❑ $f_s = 100$ Hz



❑ $f_s = 500$ Hz



❑ $f_s = 25$ Hz

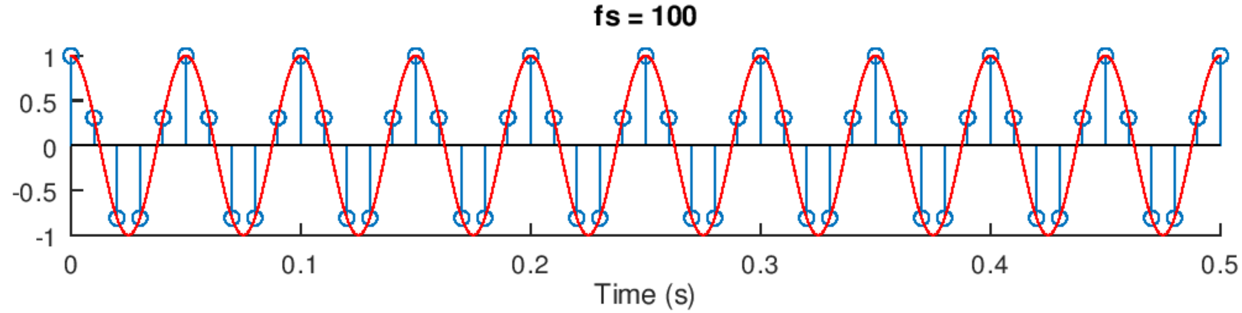


- **Δειγματοληψία**
- Ας δούμε ένα παράδειγμα

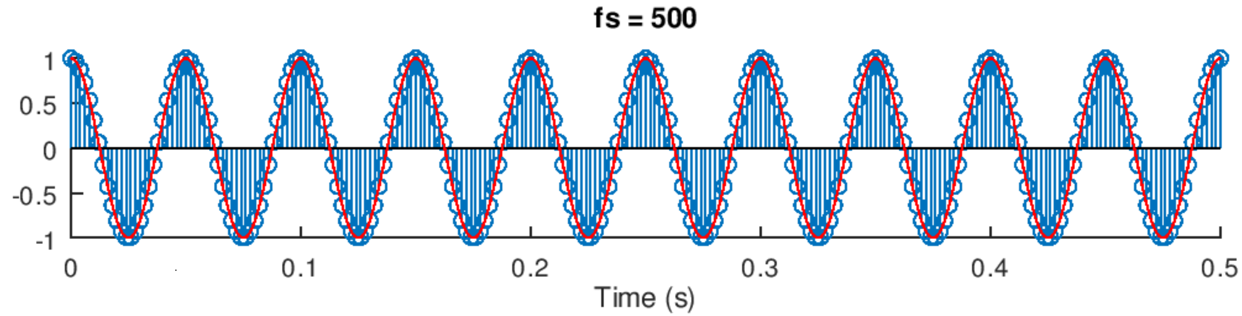
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{f_s}\right) \text{sinc}(f_s t - n)$$

- Ποιο είναι το σήμα που ανακατασκευάζεται στην τελευταία περίπτωση?

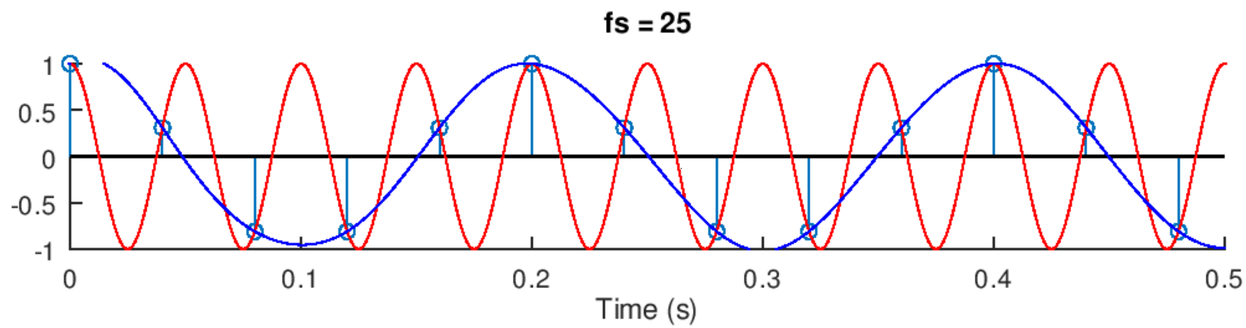
❑ $f_s = 100$ Hz



❑ $f_s = 500$ Hz



❑ $f_s = 25$ Hz



- **Δειγματοληψία**
- Παράδειγμα:
  - Ένα σήμα συνεχούς χρόνου της μορφής

200Hz 600Hz 2200Hz

$$x(t) = 3\cos(400\pi t) + 5\sin(1200\pi t) + 6\cos(4400\pi t)$$

δειγματοληπτείται με συχνότητα $f_s = 4000$ Hz. Βρείτε τη μαθηματική μορφή του σήματος που προκύπτει.

Αντικαθιστώ όπου t το $nT_s \Rightarrow t := nT_s$

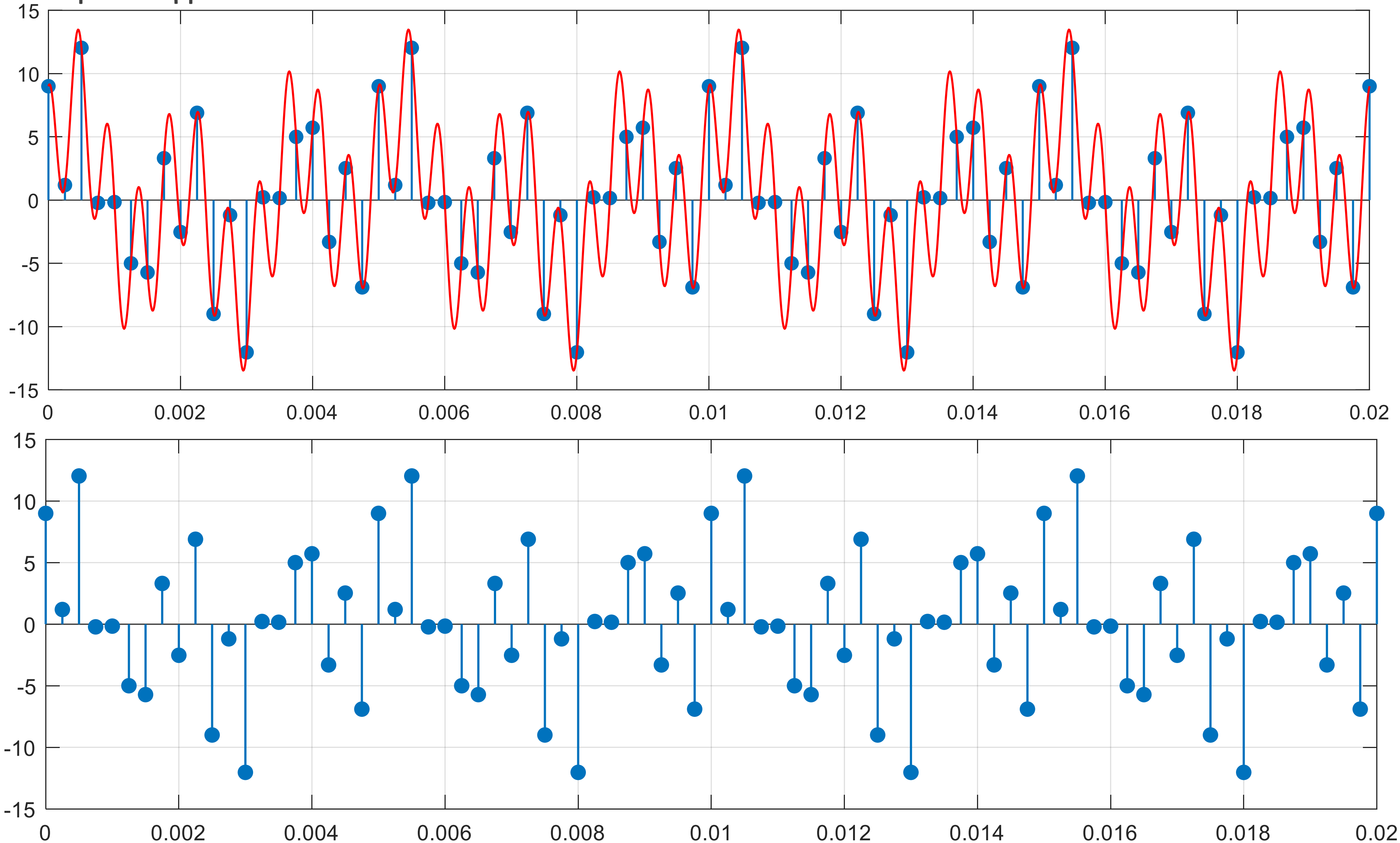
Οπότε

$$x(nT_s) = 3\cos(400\pi nT_s) + 5\sin(1200\pi nT_s) + 6\cos(4400\pi nT_s)$$

$$= 3\cos\left(\frac{400\pi n}{4000}\right) + 5\sin\left(\frac{1200\pi n}{4000}\right) + 6\cos\left(\frac{4400\pi n}{4000}\right)$$

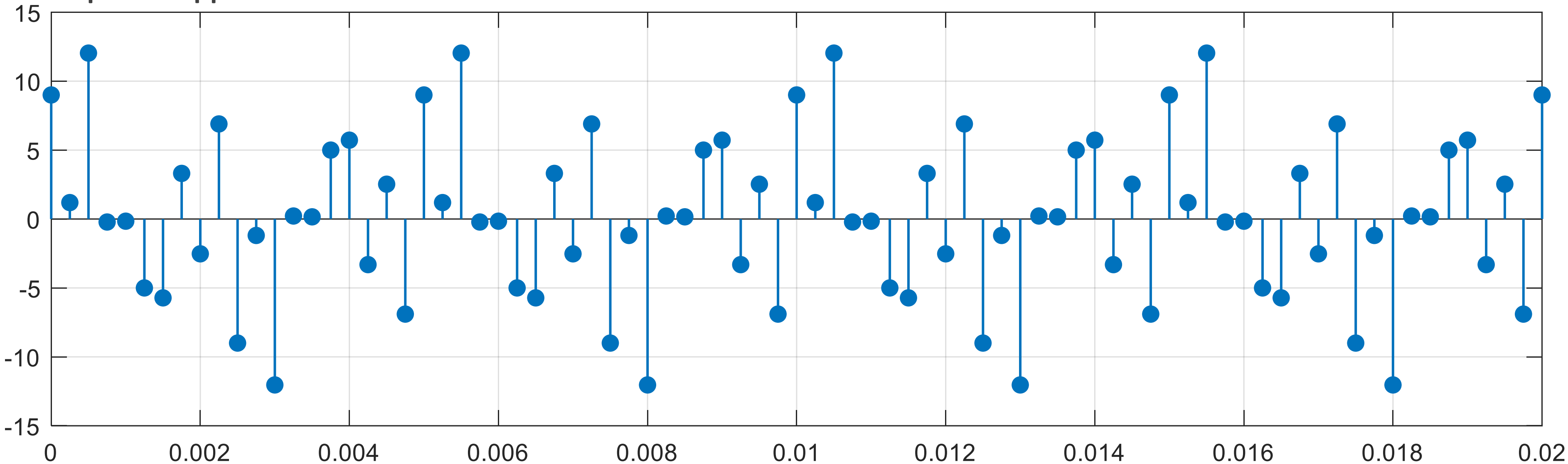
$$= 3\cos\left(\frac{\pi n}{10}\right) + 5\sin\left(\frac{3\pi n}{10}\right) + 6\cos\left(\frac{11\pi n}{10}\right)$$

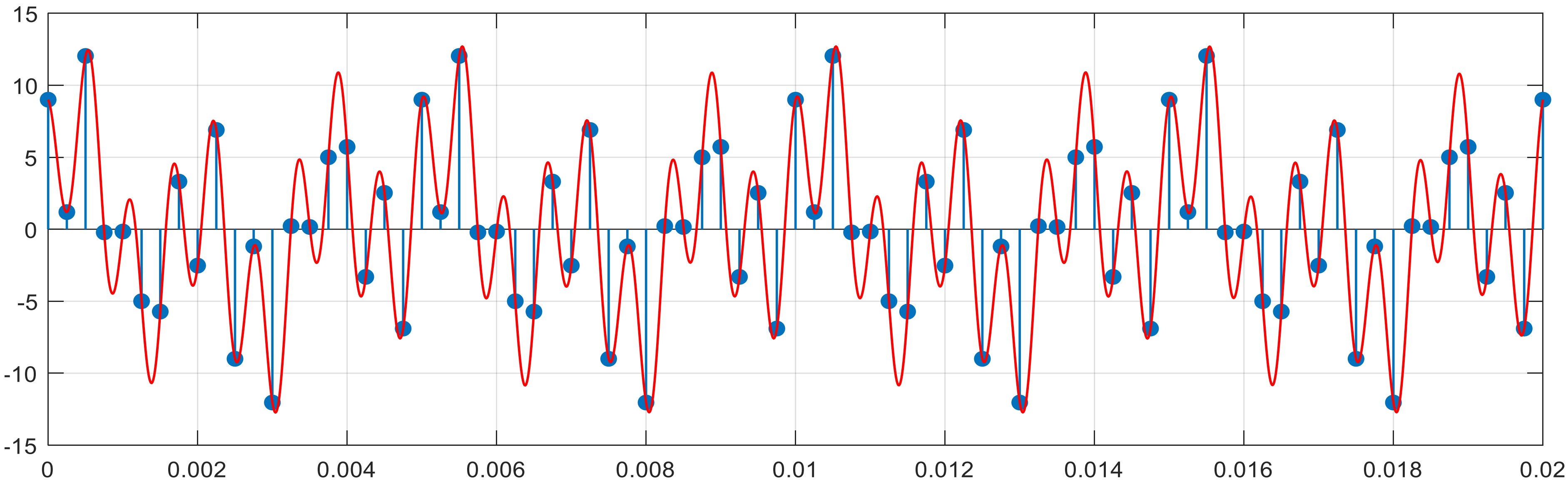
- **Δειγματοληψία**
- Παράδειγμα:
  - Επάνω: δειγματοληψία με 4000 Hz
  - Κάτω: δειγματοληπτημένο σήμα με $f_s = 4000$ Hz



- **Δειγματοληψία**
- Παράδειγμα:

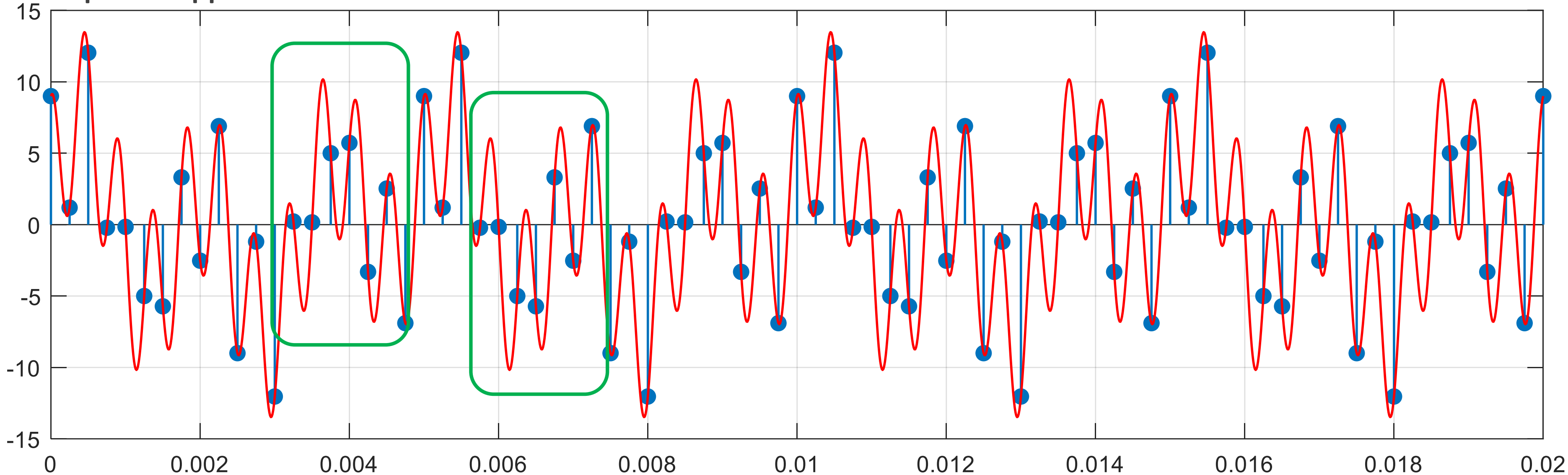
- Επάνω: δειγματοληπτημένο σήμα με $f_s = 4000$ Hz
- Κάτω: ανακατασκευασμένο σήμα με $f_s = 4000$ Hz

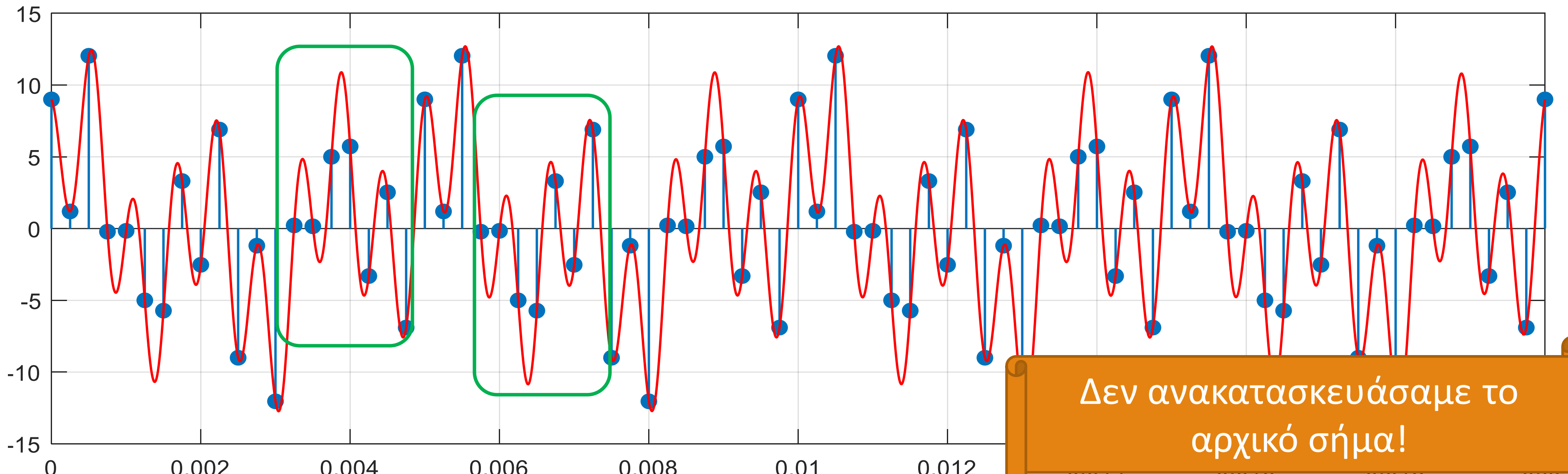




- **Δειγματοληψία**
- Παράδειγμα:

- Επάνω: αρχικό σήμα και δειγματοληψία του με $f_s = 4000$ Hz
- Κάτω: ανακατασκευασμένο σήμα με $f_s = 4000$ Hz





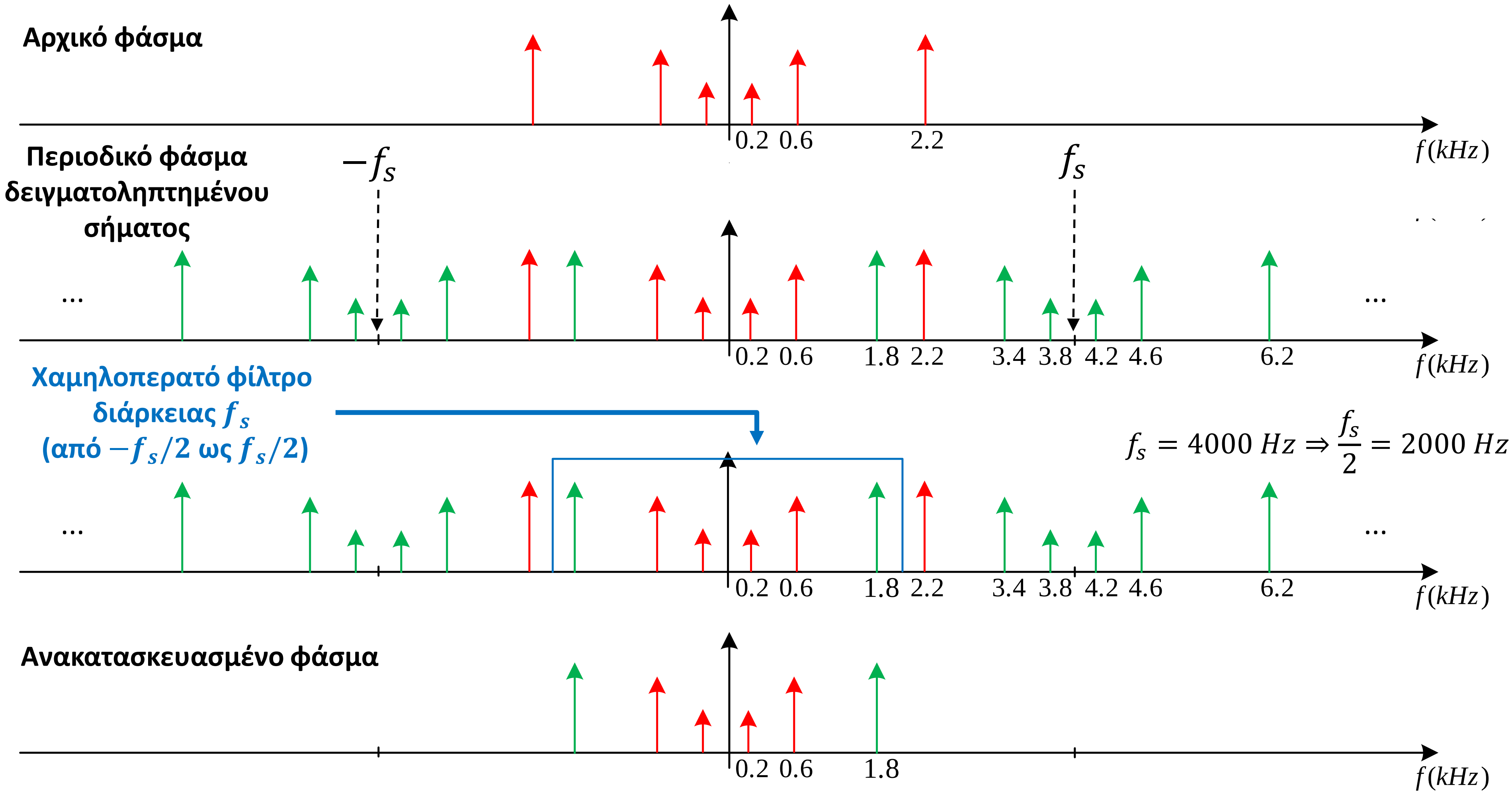
Δεν ανακατασκευάσαμε το αρχικό σήμα!

- **Δειγματοληψία**

$f_s = 4000\ Hz$

- Ποιο είναι το φασματικό περιεχόμενο του ανακατασκευασμένου σήματος?

$$x(t) = 3\cos(400\pi t) + 5\sin(1200\pi t) + 6\cos(4400\pi t)$$



$$x_r(t) = 3\cos(400\pi t) + 5\sin(1200\pi t) + 6\cos(3600\pi t)$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ