ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 13$^{\text{Η}}$

- Συστήματα στο χώρο του Laplace

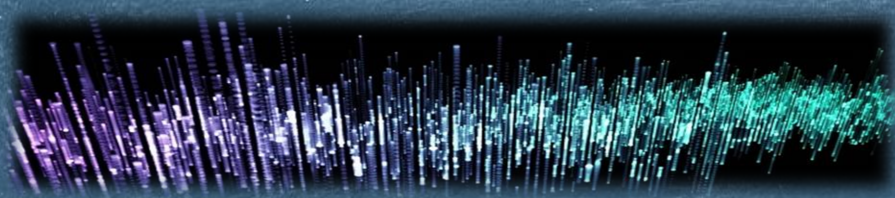
Τι περιέχει το ΗΥ215?

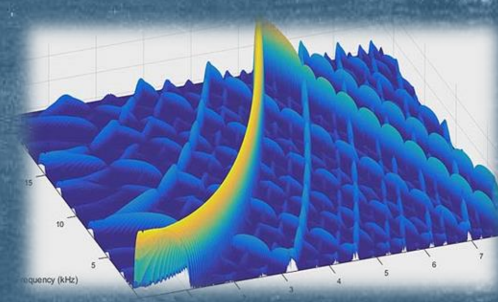
1^{o} Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία





- Συστήματα στο χώρο του Laplace

REMINDER

- Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι **ευσταθές** αν και μόνο αν ο φανταστικός άξονας $\sigma = 0$ περιέχεται στο πεδίο σύγκλισής R_H της συνάρτησης μεταφοράς του $H(s)$
- Κάθε ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ έχει τον **ΙΔΙΟ αριθμό πόλων και μηδενικών**
- **Αντίστροφο σύστημα** $h_{inv}(t)$

$$h_{inv}(t) * h(t) = \delta(t) \leftrightarrow H_{inv}(s)H(s) = 1, \qquad R_H \cap R_{H_{inv}} \neq \emptyset$$

- Σύστημα **ελάχιστης φάσης**:
  - Σύστημα με όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς του στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο
  - Σύστημα ευσταθές και αιτιατό με ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα
- Σύστημα **all-pass**:
  - Σύστημα με απόκριση πλάτους ίση με τη μονάδα

$$\left|H_{ap}(f)\right| = 1, \qquad \forall f$$

  - Σύστημα με ζεύγη πόλων-μηδενικών $(a_k, -a_k^*)$

- **Παραγοντοποίηση σε Ελάχιστης Φάσης x All-pass**
- Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε κάθε ΓΧΑ σύστημα σε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης και ένα all-pass:

$$H(s) = H_{ap}(s)H_{min}(s)$$

- Γιατί είναι χρήσιμη μια τέτοια παραγοντοποίηση?
- Χώρος Fourier:

$$H(f) = H_{ap}(f)H_{min}(f)$$

- Απόκριση πλάτους:

$$|H(f)| = \left|H_{ap}(f)\right||H_{min}(f)|$$

δηλ:

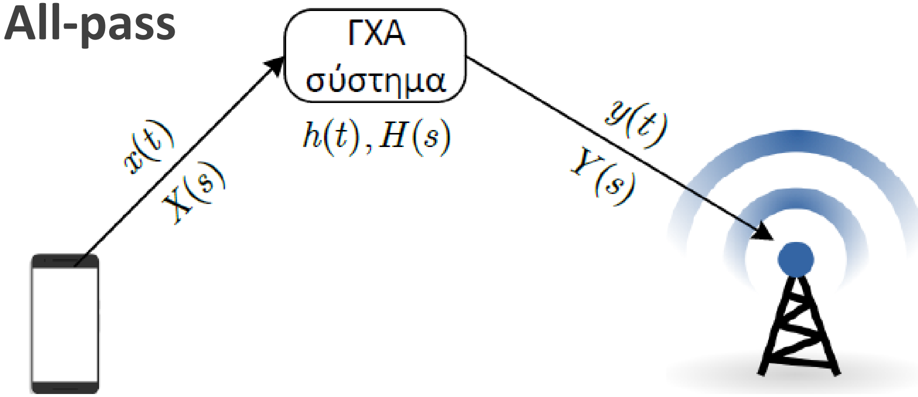
$$|H(f)| = \left|H_{ap}(f)\right||H_{min}(f)| = 1 \cdot |H_{min}(f)| = |H_{min}(f)|$$

- Το σύστημα ελάχιστης φάσης έχει **την ίδια απόκριση πλάτους** με το ΓΧΑ σύστημα!
  - Προφανώς όμως δε θα έχει την ίδια απόκριση φάσης
- Απόκριση φάσης:

$$\angle z_1 z_2 = \angle z_1 + \angle z_2$$

$$\angle H(f) = \angle H_{ap}(f) + \angle H_{min}(f)$$

- **Παραγοντοποίηση σε Ελάχιστης Φάσης x All-pass**



- Επιστρέφοντας στο πρόβλημα…
- Αν το σύστημα $\frac{1}{H(s)}$ δεν είναι ευσταθές και αιτιατό, τότε δεν μπορούμε να το υλοποιήσουμε
- Μπορούμε όμως να υλοποιήσουμε το $\frac{1}{H_{min}(s)}$!!
- Εγγυημένα, το σύστημα αυτό θα είναι ευσταθές και αιτιατό! ☺

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{H_{min}(s)}} \longrightarrow y'(t)$$

- Τι συμβαίνει στην έξοδο της παραπάνω διάταξης?

$$Y(s)' = Y(s)\frac{1}{H_{min}(s)} = H(s)X(s)\frac{1}{H_{min}(s)} = \left[H(s)\frac{1}{H_{min}(s)}\right]X(s)$$

- **Και τι συμβαίνει στο χώρο του Μετασχ. Fourier???**

- **Παραγοντοποίηση σε Ελάχιστης Φάσης x All-pass**

1) $\angle z_1 z_2 z_3 = \angle z_1 + \angle z_2 + \angle z_3$

2) $\angle \frac{1}{z_1} = -\angle z_1$

- Στο χώρο του Fourier:

$$|Y'(f)| = \cancel{|H(f)|}\frac{1}{\cancel{|H_{min}(f)|}}|X(f)| = |X(f)|$$

- **Πλήρης** ακύρωση της απόκρισης πλάτους του καναλιού!
- Το λαμβανόμενο σήμα έχει **ακριβώς το ίδιο φάσμα πλάτους** με αυτό που έφυγε από τον πομπό! ☺
- Προφανώς, η **φάση** του ληφθέντος σήματος θα διαφέρει από αυτή του πομπού
- Ας δούμε πόσο:

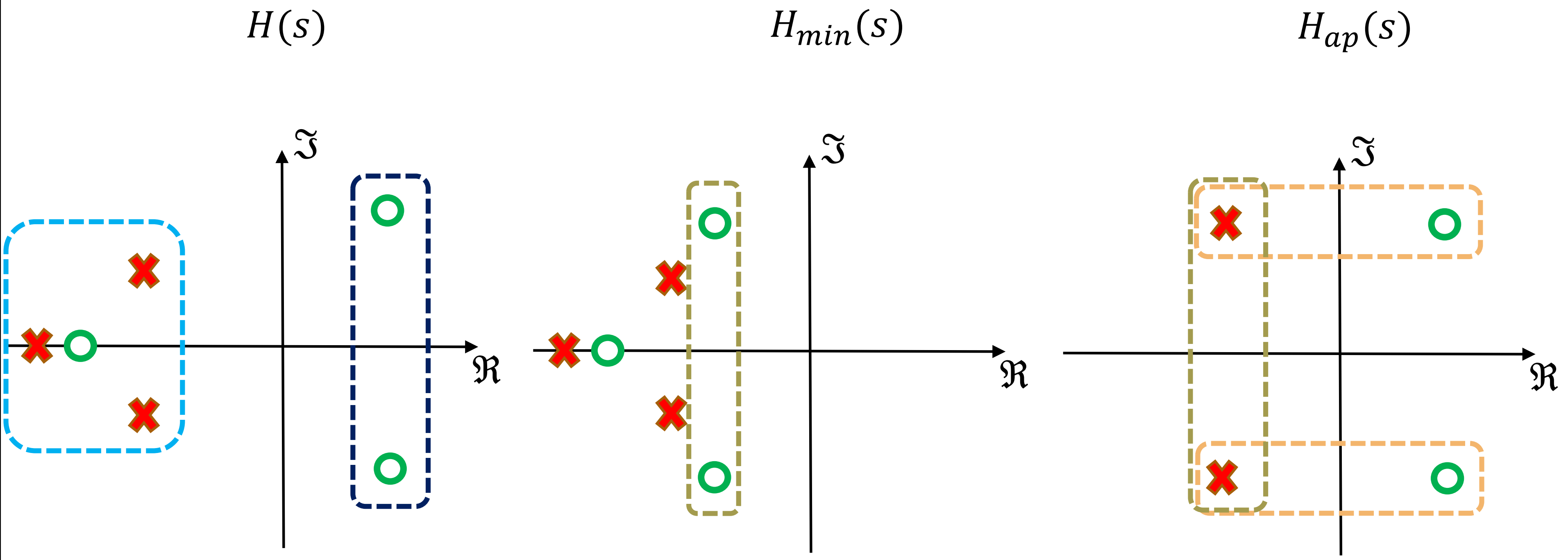
$$Y(s)' = \left[H(s)\frac{1}{H_{min}(s)}\right]X(s)$$

$$\angle Y'(f) \overset{1}{=} \angle H(f) + \angle \frac{1}{H_{min}(f)} + \angle X(f)$$

$$\overset{2}{=} \angle H(f) - \angle H_{min}(f) + \angle X(f) = \angle H_{ap}(f) + \angle X(f)$$

- Ανάλογα με την εφαρμογή, η διαταραχή στη φάση μπορεί να είναι ανεπαίσθητη ή αρκετά σοβαρή
- Σε επικοινωνίες φωνής, δεν αποτελεί σοβαρό πρόβλημα…

- **Παραγοντοποίηση σε Ελάχιστης Φάσης x All-pass**
- Πως κάνουμε αυτήν την τόσο σημαντική παραγοντοποίηση?
- Τρια βήματα:



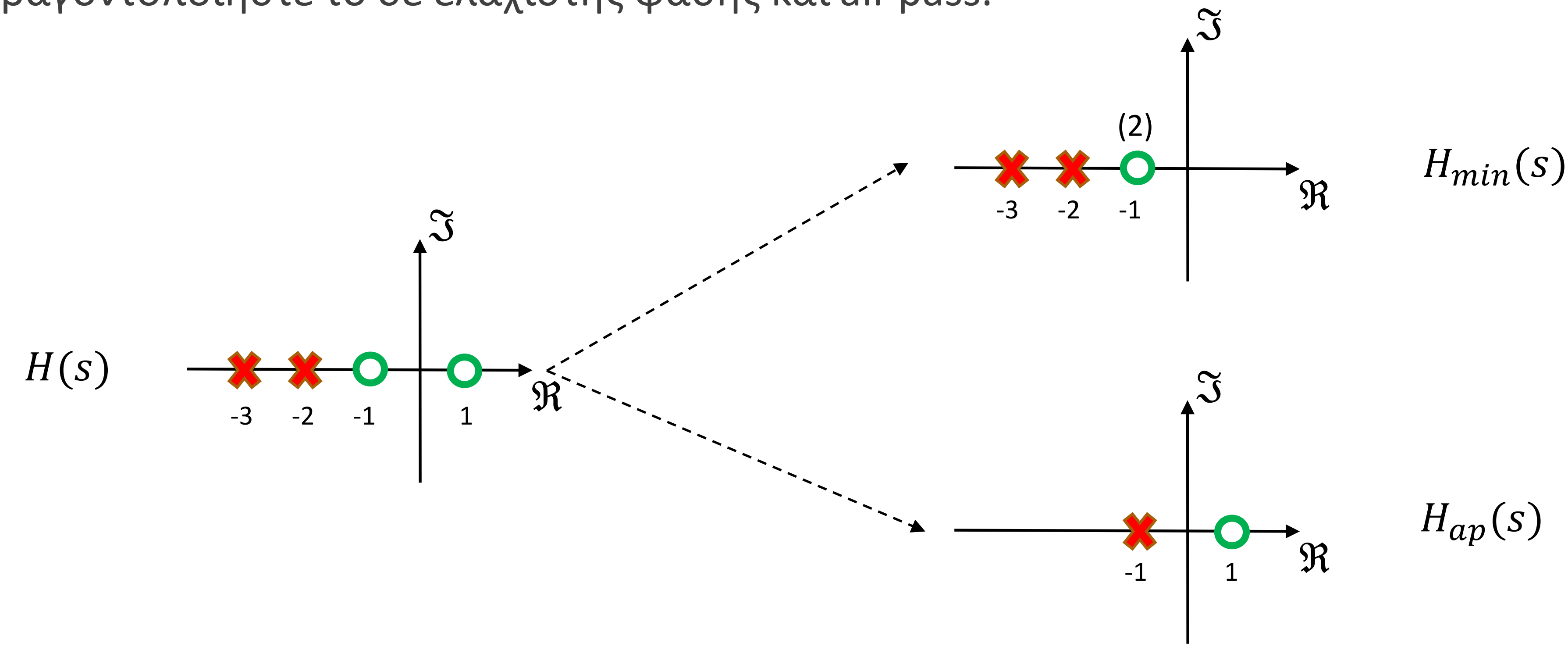
- **Παραγοντοποίηση σε Ελάχιστης Φάσης x All-pass**

- Παράδειγμα:

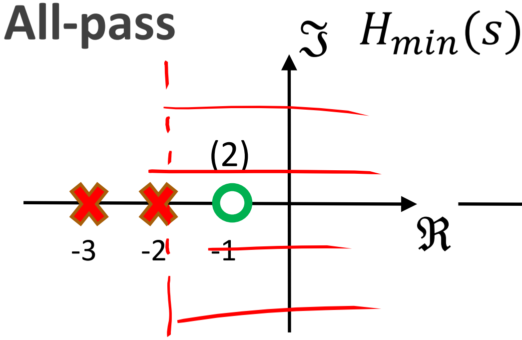
○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

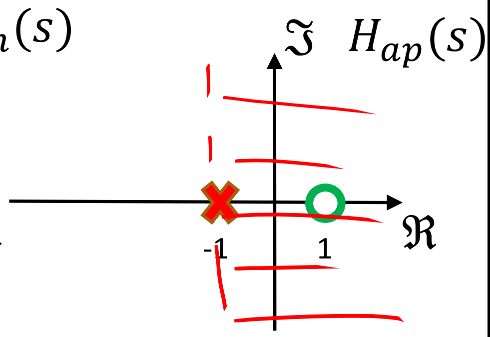
$$H(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{(s+2)(s+3)}, \qquad \sigma > -2$$

Παραγοντοποιήστε το σε ελάχιστης φάσης και all-pass.



- **Παραγοντοποίηση σε Ελάχιστης Φάσης x All-pass**
- Παράδειγμα:





$$H_{min}(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+3)(s+2)}, \quad \sigma > -2$$

$$H_{ap}(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad \sigma > -1$$

- **Παραγοντοποίηση σε Ελάχιστης Φάσης x All-pass**
- Πως κάνουμε αυτήν την τόσο σημαντική παραγοντοποίηση?
- Τρια βήματα:

Παραγοντοποίηση σε Ελάχιστης Φάσης και all-pass

1. Οι πόλοι και τα μηδενικά του αριστερού μιγαδικού επιπέδου μεταφέρονται στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης.
2. Τα μηδενικά του δεξιού μιγαδικού επιπέδου μεταφέρονται στο σύστημα all-pass. Για να είναι αυτό έγκυρο all-pass σύστημα, προσθέτουμε πόλους σε συμμετρικές θέσεις εκατέρωθεν του άξονα των φανταστικών.
3. Οι πόλοι που προστέθηκαν στο all-pass σύστημα πρέπει να ακυρωθούν στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης. Έτσι, προσθέτουμε μηδενικά στο τελευταίο σύστημα, στις ίδιες ακριβώς θέσεις με τους πόλους του all-pass συστήματος.

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ