ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2023-24
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1 - Συνέλιξη στο χρόνο και στη συχνότητα
Στο πεδίο του χρόνου

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3\tau}u(\tau)e^{2(t-\tau)}u(-t+\tau)d\tau \quad (1)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3\tau}e^{2(t-\tau)}u(-t+\tau)u(\tau)d\tau = e^{2t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5\tau)}u(-t+\tau)u(\tau)d\tau \quad (2)$$

Ισχύει

$$u(-t+\tau)u(\tau) = 1,\ \ 0 < \tau \text{ και } \tau > t \quad (3)$$

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- $t > 0$: τότε

$$c_{xy}(t) = e^{2t}\int_{t}^{+\infty} e^{-5\tau}d\tau = -\frac{1}{5}e^{2t}\Big[e^{-5\tau}\Big]_{t}^{+\infty} = -\frac{1}{5}e^{2t}(0-e^{-5t}) = \frac{1}{5}e^{-3t}, t > 0 \quad (4)$$

- $t < 0$: τότε

$$c_{xy}(t) = e^{2t}\int_{0}^{+\infty} e^{-5\tau}d\tau = -\frac{1}{5}e^{2t}\Big[e^{-5\tau}\Big]_{0}^{+\infty} = -\frac{1}{5}e^{2t}(0-1) = \frac{1}{5}e^{2t}, t < 0 \quad (5)$$

Συνολικά

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{5}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{5}e^{-3t}u(t) \quad (6)$$

Στο πεδίο της συχνότητας, η συνέλιξη γίνεται γινόμενο, άρα

$$C_{xy}(f) = X(f)Y(f) = \frac{1}{3+j2\pi f}\frac{1}{2-j2\pi f} = \frac{A}{3+j2\pi f} + \frac{B}{2-j2\pi f} \quad (7)$$

με

$$A = \frac{1}{(2-j2\pi f)}\Big|_{j2\pi f=-3} = \frac{1}{5} \quad (8)$$

$$B = \frac{1}{(3+j2\pi f)}\Big|_{j2\pi f=2} = \frac{1}{5} \quad (9)$$

οπότε

$$C_{xy}(f) = \frac{\frac{1}{5}}{3+j2\pi f} + \frac{\frac{1}{5}}{2-j2\pi f} \longleftrightarrow c_{xy}(t) = \frac{1}{5}e^{-3t}u(t) + \frac{1}{5}e^{2t}u(-t) \quad (10)$$

από τους πίνακες γνωστών ζευγών.

Ασκηση 2 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier I
Από την ιδιότητα της δυικότητας, έχουμε

$$A\text{tri}(t/T) \longleftrightarrow AT\text{sinc}^2(fT) \quad (11)$$

$$AT\text{sinc}^2(Tt) \longleftrightarrow A\text{tri}(-f/T) = A\text{tri}(f/T) \quad (12)$$

λόγω αρτιότητας της συνάρτησης $\mathrm{tri}()$. Οπότε

$$A\mathrm{tri}\Big(\frac{f-f_0}{B}\Big) \longleftrightarrow AB\mathrm{sinc}^2(Bt)e^{j2\pi f_0 t} \tag{13}$$

και

$$A\mathrm{tri}\Big(\frac{f+f_0}{B}\Big) \longleftrightarrow AB\mathrm{sinc}^2(Bt)e^{-j2\pi f_0 t} \tag{14}$$

από την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα. Οπότε

$$x(t) = AB\mathrm{sinc}^2(Bt)e^{j2\pi f_0 t} + AB\mathrm{sinc}^2(Bt)e^{-j2\pi f_0 t} = 2AB\mathrm{sinc}^2(Bt)\cos(2\pi f_0 t) \tag{15}$$

Ασκηση 3 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier II
Είναι

$$X(f) = \frac{4}{-(2\pi f)^2 + j8\pi f + 3} = \frac{4}{(j2\pi f^2 + 4(j2\pi f) + 3} = \frac{4}{w^2 + 4w + 3} \tag{16}$$

με $w = j2\pi f$. Οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι $w = -3, w = -1$, οπότε

$$X(f) = \frac{4}{(j2\pi f + 3)(j2\pi f + 1)} = \frac{A}{j2\pi f + 3} + \frac{B}{j2\pi f + 1} \tag{17}$$

με

$$A = \frac{4}{(j2\pi f + 1)}\Big|_{j2\pi f = -3} = -2 \tag{18}$$

$$B = \frac{4}{(j2\pi f + 3)}\Big|_{j2\pi f = -1} = 2 \tag{19}$$

Άρα

$$X(f) = \frac{-2}{j2\pi f + 3} + \frac{2}{j2\pi f + 1} \longleftrightarrow x(t) = 2e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) \tag{20}$$

από τους πίνακες γνωστών ζευγών μετασχ. Fourier.

Ασκηση 4 - Έξοδος ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο
Γνωρίζουμε ότι η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k |H(kf_0)| \cos(2\pi k f_0 + \phi_k + \angle H(kf_0)) \tag{21}$$

(α΄) Θα είναι

$$y(t) = 2|H(1/2\pi)|\cos(t + \angle H(1/2\pi)) \tag{22}$$

με

$$H(1/2\pi) = \frac{4}{4+j} = \frac{4(4-j)}{|4+j|^2} = \frac{16-j4}{17} = \frac{16}{17} + j\frac{-4}{17} \tag{23}$$

Με υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε ότι

$$|H(1/2\pi)| = 0.97 \quad \angle H(1/2\pi) = -14^o \tag{24}$$

οπότε συνολικά

$$y(t) = 2|H(1/2\pi)|\cos(t + \angle H(1/2\pi)) = 1.94\cos(t - 14^o) \tag{25}$$

(β΄) Θα είναι

$$y(t) = |H(4/2\pi)| \cos(4t + \pi/4 + \angle H(4/2\pi)) \tag{26}$$

με

$$H(4/2\pi) = \frac{4}{4+4j} = \frac{4(4-4j)}{|4+4j|^2} = \frac{16-j16}{32} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \tag{27}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$|H(4/2\pi)| = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \angle H(4/2\pi) = -45^o = -\frac{\pi}{4} \tag{28}$$

οπότε συνολικά

$$y(t) = |H(4/2\pi)| \cos(4t + \pi/4 + \angle H(4/2\pi)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(4t) \tag{29}$$

(γ΄) Το σύστημα είναι ΓΧΑ, οπότε το άθροισμα των εισόδων θα δώσει το άθροισμα των επιμέρους εξόδων, άρα

$$y(t) = y_{(a)}(t) + y_{(\beta)}(t) = 1.94 \cos(t - 14^o) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(4t) \tag{30}$$

Ασκηση 5 - ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις

Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t) - 8x(t) \tag{31}$$

(α΄) Εφαρμόζουμε την ιδιότητα της παραγώγισης.

$$(j2\pi f)^2 Y(f) + 5j2\pi f Y(f) + 6Y(f) = (j2\pi f)^2 X(f) + 2j2\pi f X(f) - 8X(f) \tag{32}$$

$$Y(f)((j2\pi f)^2 + 5(j2\pi f) + 6) = X(f)((j2\pi f)^2 + 2(j2\pi f) - 8) \tag{33}$$

$$H(f) = \frac{(j2\pi f)^2 + 2(j2\pi f) - 8}{(j2\pi f)^2 + 5(j2\pi f) + 6} \tag{34}$$

Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα γιατί το πολυώνυμο του αριθμητή είναι ίδιου βαθμού με του παρονομαστή. Πρέπει να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων, και τότε παίρνουμε

$$H(f) = 1 + \frac{-3(j2\pi f) - 14}{(j2\pi f + 2)(j2\pi f + 3)} \tag{35}$$

το οποίο αναπτύσσεται σε μερικά κλάσματα ως

$$H(f) = 1 + \frac{A}{j2\pi f + 2} + \frac{B}{j2\pi f + 3} = 1 + \frac{-8}{j2\pi f + 2} + \frac{5}{j2\pi f + 3} \tag{36}$$

Η κρουστική απόκριση βρίσκεται εύκολα από έτοιμους πίνακες ως

$$h(t) = \delta(t) - 8e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t) \tag{37}$$

(β΄) Η είσοδος έχει μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{1}{4 + j2\pi f} \tag{38}$$

οπότε η έξοδος θα έχει μετασχ. Fourier

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{(j2\pi f + 4)(j2\pi f - 2)}{(j2\pi f + 3)(j2\pi f + 2)(j2\pi f + 4)} = \frac{j2\pi f - 2}{(j2\pi f + 3)(j2\pi f + 2)} \tag{39}$$

το οποίο αναπτύσσεται σε μερικά κλάσματα και με όμοια διαδικασία με το προηγούμενο ερώτημα καταλήγουμε στην έξοδο

$$y(t) = (5e^{-3t} - 4e^{-2t})u(t) \tag{40}$$

[⋆] Ασκηση 6 - Θεώρημα Parseval
Από τους πίνακες μετασχ. Fourier έχουμε

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}, \;\; a > 0 \tag{41}$$

Για $a = 1$ γίνεται

$$e^{-|t|} \longleftrightarrow \frac{2}{1 + 4\pi^2 f^2} \tag{42}$$

Από το θεώρημα Parseval έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{2}{1 + 4\pi^2 f^2} \right|^2 df \tag{43}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(1 + 4\pi^2 f^2)^2} df \tag{44}$$

Λόγω αρτιότητας και των δυο συναρτήσεων (χρόνου και συχνότητας) έχουμε διαδοχικά

$$2\int_{0}^{+\infty} e^{-2|t|} dt = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{4}{(1 + 4\pi^2 f^2)^2} df \tag{45}$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-2|t|} dt = 4\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1 + 4\pi^2 f^2)^2} df \tag{46}$$

$$-\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^{+\infty} = 4\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1 + 4\pi^2 f^2)^2} df \tag{47}$$

$$\frac{1}{2} = 4\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1 + 4\pi^2 f^2)^2} df \tag{48}$$

$$\frac{1}{8} = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1 + 4\pi^2 f^2)^2} df \tag{49}$$

Θέτουμε $2\pi f = x \Longrightarrow dx = 2\pi df$ και τότε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx = \frac{1}{8} \tag{50}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4} \tag{51}$$

Εναλλακτικά, μπορείτε να θέσετε $a = 2\pi$ και να πάρετε

$$e^{-2\pi|t|} \longleftrightarrow \frac{4\pi}{4\pi^2 + 4\pi^2 f^2} \tag{52}$$

που γράφεται ως

$$e^{-2\pi|t|} \longleftrightarrow \frac{1}{\pi + \pi f^2} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + f^2} \tag{53}$$

$$\pi e^{-2\pi|t|} \longleftrightarrow \frac{1}{1 + f^2} \tag{54}$$

και έτσι έχετε, με αλλαγή μεταβλητής $f = x$ τη συνάρτηση χωρίς τετράγωνο κάτω από το ολοκλήρωμα.

[⋆] Ασκηση 7 - Περιοδικά Σήματα και Μετασχ. Fourier
Αφού το σήμα μιας περιόδου έχει μετασχ. Fourier

$$X(f) = 2\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}^2(f) \tag{55}$$

τότε μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές Fourier μέσω της σχέσης

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f)\Big|_{f=k/T_0} \tag{56}$$

με $T_0 = 2$ την περίοδο του περιοδικού σήματος. Έτσι, θα έχουμε

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{2} X(f)\Big|_{f=k/2} && (57)\\ &= \frac{1}{2}\big(2\text{sinc}(2f) - \text{sinc}^2(f)\big)\Big|_{f=k/2} && (58)\\ &= \frac{1}{2}\big(2\text{sinc}(k) - \text{sinc}^2(k/2)\big) && (59)\\ &= 2\text{sinc}(k) - \frac{1}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) && (60) \end{aligned}$$

Είναι

$$\text{sinc}(k) = \frac{\sin(\pi k)}{\pi k} = 0, \ \ \forall k \in Z - \{0\} \tag{61}$$

ενώ

$$\text{sinc}^2(k/2) = \frac{\sin^2(\pi k/2)}{(\pi k/2)^2} = \frac{1}{(\pi k/2)^2}, \ \ \forall k \text{ περιττό} \tag{62}$$

Οπότε

$$X_k = -\frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{\pi k}{2})^2} = -\frac{2}{\pi^2 k^2}, \ \ \forall k \text{ περιττά}, \ \ k \neq 0 \tag{63}$$