# Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς - ΗΥ215

## Λύσεις 5ης σειράς ασκήσεων

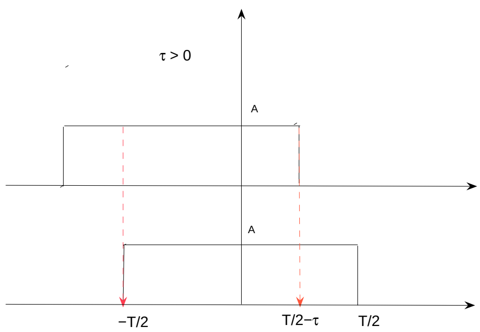
**Άσκηση Α.**

**1.** Η αυτοσυσχέτιση ενός σήματος $x(t)$, είναι:

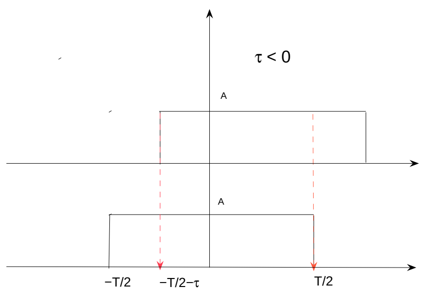
$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t).x(t+\tau)dt.$$

Το σήμα $x(t) = Arect(\frac{t}{T})$ είναι πραγματικό, οπότε $x(t) = x^*(t)$. Προφανώς, για $\tau \leq -T$ ή $\tau \geq T$, η αυτοσυσχέτιση του σήματος είναι 0. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 1(α), για $T > \tau \geq 0$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} Arect(\frac{t}{T}).Arect(\frac{t+\tau}{T})dt \\ &= A^2(\frac{T}{2} - \tau + \frac{T}{2}) = A^2(T-\tau)\end{aligned}$$




1(α)



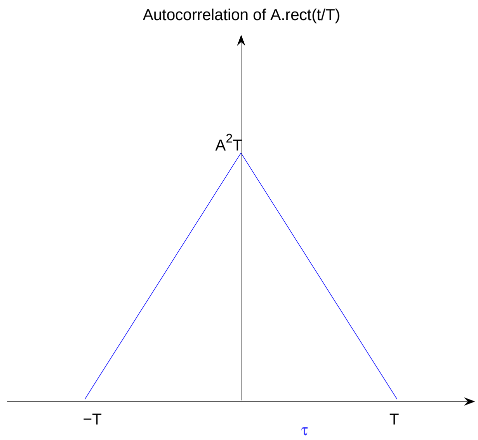

(β)

Αντίστοιχα, για $-T < \tau < 0$, βλ. σχήμα 1(β):

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} Arect(\frac{t}{T}).Arect(\frac{t+\tau}{T})dt$$
$$= A^2(\frac{T}{2} + \tau + \frac{T}{2}) = A^2(T+\tau)$$

Άρα

$$\phi_x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq -T, \quad \tau \geq T \\ A^2(T-\tau), & T \geq \tau > 0, \\ A^2(T+\tau), & -T \leq \tau < 0 \end{cases}$$




1(γ)

**2.** Είναι γνωστό ότι ο μετασχηματισμός Fourier ενός τετραγωνικού παλμού, $x(t)$, είναι:

$$x(t) = Arect(\frac{t}{T}) \Longleftrightarrow X(f) = ATsinc(fT).$$

Δίνεται επιπλέον ότι ο μετασχηματισμός Fourier της αυτοσυσχέτισης, $\phi_x(\tau)$, είναι:

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \Rightarrow \Phi_x(f) = X^*(f)X(f).$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι:

$$\Phi_x(f) = X^*(f)X(f) = \left|X(f)\right|^2 = A^2T^2sinc^2(fT).$$

**3.** Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι $\Phi_x(f) = \left|X(f)\right|^2$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier:

$$\begin{aligned}
\Phi_x(f) =& \mathcal{F}\big(\phi_x(\tau)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(\tau).e^{-j2\pi f\tau} d\tau \Rightarrow \\
\Phi_x(f) =& \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t).x(t+\tau)dt\right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
=& \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau\right] dt \\
=& X(f) \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j2\pi f t} dt \\
=& X(f) X^*(f) = \left|X(f)\right|^2.
\end{aligned}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις έχουμε κάνει μία αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας όπου $t+\tau = t'$, οπότε $dt' = d\tau$ και $e^{-j2\pi f\tau} = e^{-j2\pi f t'} e^{j2\pi f t}$.

**Άσκηση Β. 1 & 2**

Το σήμα $x(t) = Arect(\frac{t}{T})$ είναι πραγματικό και άρτιο, ισχύει λοιπόν ότι: $x^*(t) = x(t) = x(-t)$. Από τη σχέση που δίνεται ανάμεσα στην ετεροσυσχέτιση και την συνέλιξη δύο σημάτων, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την συνέλιξη του σήματος $x(t) = Arect(\frac{t}{T})$ με τον εαυτό του, ξεκινώντας από τον τύπο της αυτοσυσχέτισης του σήματος:

$$\phi_x(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau) = x(-\tau) * x(\tau) = x(\tau) * x(\tau) = c_x(\tau)$$

Άρα η συνέλιξη του σήματος $x(t) = Arect(\frac{t}{T})$ με τον εαυτό του, ισούται με την αυτοσυσχέτισή του:

$$c_x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq -T, \quad \tau \geq T \\ A^2(T-\tau), & T \geq \tau > 0, \\ A^2(T+\tau), & -T \leq \tau < 0 \end{cases}$$

Την παραπάνω σχέση μπορούμε προφανώς να την αποδείξουμε εάν εργαστούμε όπως ακριβώς και στην Α1, αφού $x(t)$ άρτιο και $x(-t+\tau) = x(t+\tau)$.

**Άσκηση Γ.**

**1.** Η ετεροσυσχέτιση των δύο τετραγωνικών παλμών $x(t) = A.rect(\frac{t-2}{T})$ και $y(t) = A.rect(\frac{t+1}{T})$, όπου $T < 1$, θα είναι μη μηδενική, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, για μετατόπιση του $y(t)$ προς τα δεξιά, δηλαδή $\tau < 0$, είτε για μετατόπιση του $x(t)$ προς τα αριστερά, δηλαδή $\tau > 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε την πρώτη περίπτωση, μετατοπίζουμε δηλαδή δεξιά το $y(t)$. Θα έχουμε $\tau < 0$, και η ετεροσυσχέτιση είναι μη μηδενική για $-\frac{T}{2} + 2 < \frac{T}{2} - 1 - \tau < \frac{T}{2} + 2 \Rightarrow -3 < \tau < T - 3 < 0$ (αφού $T < 1$) :

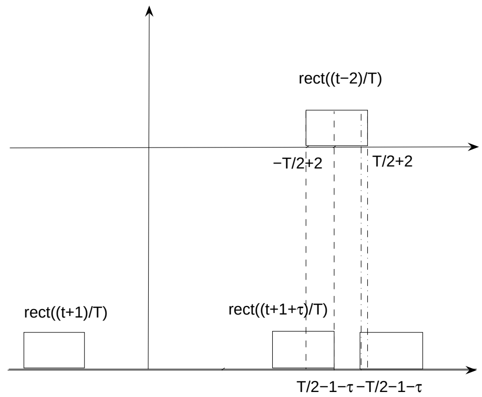
$$\begin{aligned}
\phi_{xy}(\tau) =& \int_{-\frac{T}{2}+2}^{\frac{T}{2}-1-\tau} Arect(\frac{t-2}{T}).Arect(\frac{t+1+\tau}{T}) dt \\
=& A^2(\frac{T}{2} - 1 - \tau + \frac{T}{2} - 2) = A^2(T - \tau - 3)
\end{aligned}$$

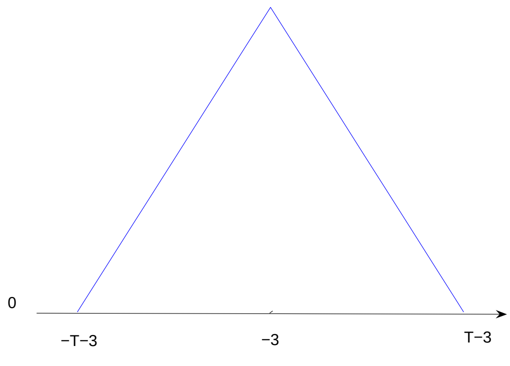
Η ετεροσυσχέτιση φτάνει στο μέγιστό της όταν τα δύο σήματα συμπέσουν, για $\tau = -3$, ενώ για $\tau < -3$, ϑα ισχύει $-\frac{T}{2} + 2 < -\frac{T}{2} - 1 - \tau < \frac{T}{2} + 2 \Rightarrow -T - 3 < \tau < -3$:

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(\tau) = &\int_{-\frac{T}{2}-1-\tau}^{\frac{T}{2}+2} Arect(\frac{t-2}{T})Arect(\frac{t+1+\tau}{T})dt \\ =&A^2(\frac{T}{2} + 2 + \frac{T}{2} + 1 + \tau) = A^2(T + \tau + 3)\end{aligned}$$

Άρα

$$\phi_{xy}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq -T-3, \quad \tau \geq T-3 \\ A^2(T-\tau-3), & -3 \leq \tau < T-3 < 0, \\ A^2(T+\tau+3), & -T-3 < \tau < -3 \end{cases}$$




**2.** Το μέγιστο της αυτοσυσχέτισης ισούται με $A^2T$, και βρίσκεται στο $\tau = -3$. Για χρονική μετατόπιση του $y(t)$ προς τα δεξιά, ίση με $\tau = -3$, τα δύο σήματα συμπίπτουν ακριβώς αφού πρόκειται για δύο όμοιους τετραγωνικού παλμούς οι οποίοι ¨απέχουν' χρονικά κατά $|\tau| = 3$.

**Άσκηση Δ.**

**1.** Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\big(\phi_{xy}(-\tau)\big) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}(-\tau).e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t).y(t-\tau)dt\right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau\right] dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \left[-\int_{+\infty}^{-\infty} y(t')e^{j2\pi f t'} dt'\right] e^{-j2\pi f t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t')e^{-j2\pi(-f)t'} dt'\right] e^{-j2\pi f t} dt \\
&= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j2\pi f t} dt\right] Y(-f) \\
&= X^*(-f)Y(-f)
\end{aligned}
$$

Στις παραπάνω εξισώσεις έχουμε κάνει μία αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας όπου $t-\tau = t'$, οπότε $d\tau = -dt' \quad$ και $\quad e^{-j2\pi f\tau} = e^{j2\pi f t'} e^{-j2\pi f t}$.

**2.** Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier σε συνδυασμό με τη σχέση ανάμεσα στην ετεροσυσχέτιση και την συνέλιξη δύο μιγαδικών σημάτων:

$$
\begin{aligned}
\phi_{xy}(\tau) &= x^*(-\tau) * y(\tau) \Rightarrow \\
\phi_{xy}(-\tau) &= x^*(\tau) * y(-\tau) \Rightarrow \\
\mathcal{F}\big(\phi_{xy}(-\tau)\big) &= \mathcal{F}\big(x^*(\tau)\big)\mathcal{F}\big(y(-\tau)\big) \\
&= X^*(-f)Y(-f)
\end{aligned}
$$

ή ακόμα ότι:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\big(\phi_{xy}(\tau)\big) &= \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) \Rightarrow \\
\mathcal{F}\big(\phi_{xy}(-\tau)\big) &= \Phi_{xy}(-f) = X^*(-f)Y(-f)
\end{aligned}
$$

**Άσκηση Ε.**

Το σήμα αποτελείται από τρία τμήματα, $x_1(t), \quad x_2(t), \quad x_3(t), \quad$ τα οποία περιγράφονται αντίστοιχα από τις συναρτήσεις:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= -\frac{A}{2}t + A, && 0 \le t \le 1 \\
x_2(t) &= \frac{A}{2} rect(\frac{t-2}{2}), && 1 < t \le 3 \\
x_3(t) &= -\frac{A}{4}t + \frac{5A}{4}, && 3 \le t \le 5
\end{aligned}
$$

οπότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος θα είναι το άθροισμα τριών μετασχηματισμών Fourier:

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) + X_3(f).$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της παραγώγισης του μ. Fourier :

$$\mathcal{F}\big(x_i'(t)\big) = j2\pi f X_i(f) \Rightarrow X_i(f) = \frac{1}{j2\pi f}\mathcal{F}\big(x_i'(t)\big) \tag{1}$$

για να υπολογίσουμε τα $X_1(f), X_3(f)$, όπου:

$$\begin{aligned} x_1'(t) =& A\delta(t) - \frac{A}{2}rect(t-\frac{1}{2}) - \frac{A}{2}\delta(t-1), && 0 \le t \le 1 \\ x_3'(t) =& \frac{A}{2}\delta(t-3) - \frac{A}{4}rect(\frac{t-4}{2}), && 3 \le t \le 5 \end{aligned}$$

Έχουμε :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\big(x_1'(t)\big) =& A - \frac{A}{2}e^{-j2\pi f/2}sinc(f) - \frac{A}{2}e^{-j2\pi f} \\ =& A - \frac{A}{2}e^{-j\pi f}sinc(f) - \frac{A}{2}e^{-j2\pi f} \\ \mathcal{F}\big(x_3'(t)\big) =& \frac{A}{2}e^{-j2\pi f.3} - \frac{A}{2}e^{-j2\pi f.4}sinc(2f) \\ =& \frac{A}{2}e^{-j6\pi f} - \frac{A}{2}e^{-j8\pi f}sinc(2f) \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} X_1(f) =& \frac{1}{j2\pi f}\left(A - \frac{A}{2}e^{-j\pi f}sinc(f) - \frac{A}{2}e^{-j2\pi f}\right) \\ X_2(f) =& Ae^{-j2\pi 2f}sinc(2f) = Ae^{-j4\pi f}sinc(2f) \\ X_3(f) =& \frac{1}{j2\pi f}\left(\frac{A}{2}e^{-j6\pi f} - \frac{A}{2}e^{-j8\pi f}sinc(2f)\right) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} X(f) =& \frac{1}{j2\pi f}\left(A - \frac{A}{2}e^{-j\pi f}sinc(f) - \frac{A}{2}e^{-j2\pi f}\right) \\ &+ Ae^{-j4\pi f}sinc(2f) + \frac{1}{j2\pi f}\left(\frac{A}{2}e^{-j6\pi f} - \frac{A}{2}e^{-j8\pi f}sinc(2f)\right) \\ =& \frac{A}{j4\pi f}\left(2 - e^{-j\pi f}sinc(f) - e^{-j2\pi f} + e^{-j6\pi f} - e^{-j8\pi f}sinc(2f)\right) \\ &+ Ae^{-j4\pi f}sinc(2f) \end{aligned}$$