Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς - ΗΥ215

Λύσεις 4ης σειράς ασκήσεων

Άσκηση 2.
Δίνεται ότι:

$$x(t) = Arect(\frac{t}{T}) \Longleftrightarrow X(f) = ATsinc(fT)$$

Θα έχουμε λοιπόν:

$$x(2t) = Arect(\frac{2t}{T}) = Arect(\frac{t}{T/2}) \Longleftrightarrow \frac{AT}{2}sinc(\frac{fT}{2}) = \frac{1}{2}X(\frac{f}{2})$$
$$x(t/2) = Arect(\frac{t/2}{T}) = Arect(\frac{t}{2T}) \Longleftrightarrow 2ATsinc(2fT) = 2X(2f)$$

Παρατηρούμε ότι ο μετ. Fourier του τετραγωνικού παλμού $x(t) = Arect(\frac{t}{T})$ είναι πραγματικό σήμα το οποίο παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές, ενώ μηδενίζεται όταν $sinc(fT) = 0$, δηλαδή όταν $fT = \pm n \Rightarrow f = \pm\frac{n}{T}$ σε ακτίνια (radians). Το φάσμα πλάτους είναι πάντα θετικό, προφανώς, ενώ το φάσμα φάσης θα είναι είτε 0 (όταν $\left|sinc(fT)\right| = sinc(fT) > 0$), είτε $\pm\pi$ (όταν $-\left|sinc(fT)\right| = sinc(fT) < 0$) . Επιπλέον, το φάσμα φάσης είναι περιττή συνάρτηση της συχνότητας f, και κατά σύμβαση θεωρούμε ότι θα παίρνει θετικές τιμές στις θετικές συχνότητες (αριστερόστροφα).

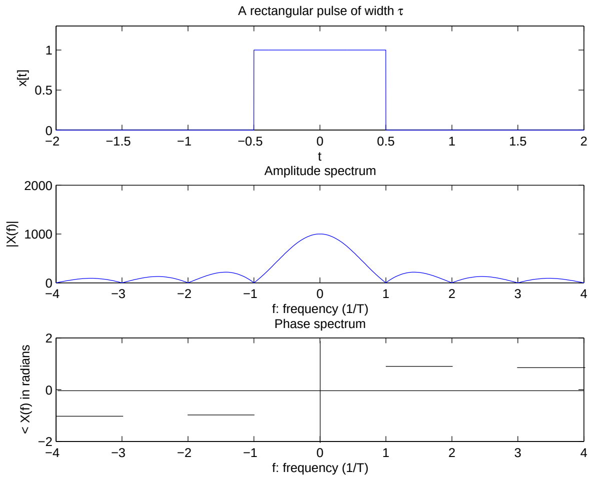
Στα σχήματα 1(α), 1(β) και 1(γ) απεικονίζονται τα φάσματα πλάτους και φάσης των μετ. Fourier των σημάτων $x(t)$, $x(2t)$ και $x(t/2)$ αντίστοιχα.

Άσκηση 3.
Είναι γνωστό ότι ο μετ. Fourier ενός παλμού Gauss είναι επίσης μία συνάρτηση Gauss:

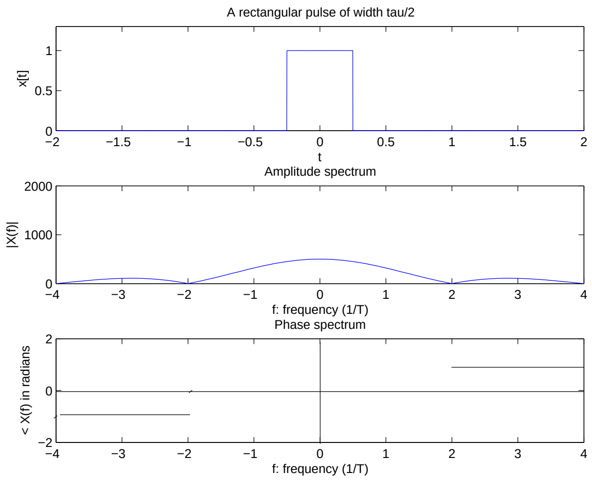
$$x(t) = \exp^{-\alpha t^2} \Longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\exp^{-f^2/4\alpha},$$

όπου $\alpha > 0$ (δεν υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \exp^{-\alpha t^2}$ όταν $\alpha < 0$ γιατί τότε δεν συγκλίνει το ολοκλήρωμα Fourier).

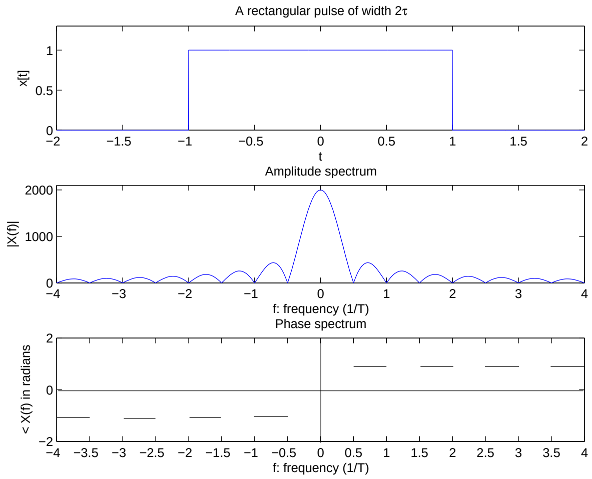
Μπορούμε ωστόσο να αποδείξουμε τον παραπάνω τύπο χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετ. Fourier: συμπληρώνουμε το τετράγωνο στο εκθετικό και βγάζουμε έξω από το ολοκλήρωμα


A rectangular pulse of width τ
x[t]
t
Amplitude spectrum
|X(f)|
f: frequency (1/T)
Phase spectrum
< X(f) in radians
f: frequency (1/T)

1(α)


A rectangular pulse of width tau/2
x[t]
t
Amplitude spectrum
|X(f)|
f: frequency (1/T)
Phase spectrum
< X(f) in radians
f: frequency (1/T)

1(β)


A rectangular pulse of width 2τ
x[t]
t
Amplitude spectrum
|X(f)|
f: frequency (1/T)
Phase spectrum
< X(f) in radians
f: frequency (1/T)

1(γ)

τον εκθετικό παράγοντα ο οποίος δεν περιλαμβάνει τη μεταβλητή ολοκλήρωσης t :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(e^{-\alpha t^2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha t^2 - ift]dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\sqrt{\alpha}t + \frac{if}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \left(\frac{if}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2\right]dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{f^2}{4\alpha}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\sqrt{\alpha}t + \frac{if}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2\right]dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{f^2}{4\alpha}\right) I,
\end{aligned}$$

όπου

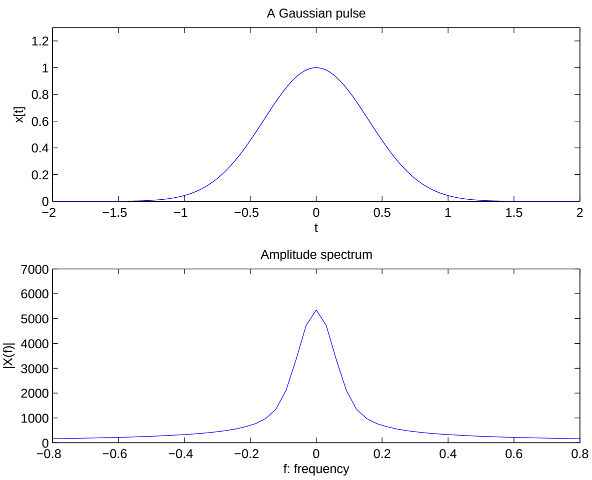
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\sqrt{\alpha}t + \frac{if}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2\right]dt.$$

Θεωρούμε μια νέα μεταβλητή $\upsilon = \sqrt{\alpha}t + \frac{if}{2\sqrt{\alpha}}$. Θα ισχύει ότι : $dt = d\upsilon/\sqrt{\alpha}$, οπότε:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\upsilon^2} d\upsilon = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

και από την πρώτη σχέση θα έχουμε:

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha t^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{f^2}{4\alpha}\right) \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \exp^{-f^2/4\alpha}.$$



Ο μετ. Fourier ενός παλμού Gauss είναι λοιπόν επίσης παλμός Gauss, οπότε θα είναι πραγματικό σήμα, και θετικό για όλες τις τιμές της f. Έτσι το φάσμα της φάσης του θα είναι μηδέν $\forall f$:

$$R(f) > 0, \quad I(f) = 0 \quad \forall f \Rightarrow \theta_x(f) = 0 \quad \forall f$$

Το φάσμα πλάτους είναι :

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \exp^{-f^2/4\alpha}$$

και φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Άσκηση 4.

Τα πραγματικά μέρη των $\alpha_k = |\alpha_k|.e^{j\phi_k}$ θα είναι $Re\{\alpha_k\} = |\alpha_k|.\cos(\phi_k)$. Το άρτιο μέρος του πραγματικού περιοδικού σήματος $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}$, θα είναι :

$$\begin{aligned}
x_e(t) &= \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k.e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k.e^{-jk\omega_0 t}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k.\cos(k\omega_0 t)\right] = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k.\cos(k\omega_0 t)
\end{aligned}$$

Επειδή το $x_e(t)$ είναι επίσης πραγματικό σήμα, θα ισχύει :

$$\begin{aligned}
x_e(t) &= Re\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k.\cos(k\omega_0 t)\right\} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|.\cos(\phi_k).\cos(k\omega_0 t)
\end{aligned}$$

Πράγματι λοιπόν οι συντελεστές του αναπτύγματος του άρτιου μέρους του σήματος είναι ίσοι με τα πραγματικά μέρη των α_k.