Λύσεις 3ης σειρά ασκήσεων

Στυλιανού Ιωάννης

27 Οκτωβρίου 2005

1. Δεδομένου ότι $\int_0^T cos(\omega t)dt = \int_0^T sin(\omega t)dt = 0$ και $\omega = \frac{2\pi}{T}$ έχουμε:

   (α)

$$\begin{aligned}\int_0^T cos(\omega t + \phi)dt &= \int_0^T cos(\omega t)cos(\phi)dt - \int_0^T sin(\omega t)sin(\phi)dt \\ &= cos(\phi)\int_0^T cos(\omega t)dt - sin(\phi)\int_0^T sin(\omega t)dt \\ &= cos(\phi)0 - sin(\phi)0 \\ &= 0\end{aligned}$$

   Το αποτέλεσμα γενικεύεται στο $\int_0^T cos(k\omega t + \phi)dt = 0$ με $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

   (β) Από τριγωνομετρία γνωρίζουμαι ότι $cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}(cos(a+b) + cos(a-b))$. Οπότε

$$\begin{aligned}\int_0^T cos(k\omega t + \phi)cos(l\omega t + \psi)dt &= \frac{1}{2}\int_0^T cos((k+l)\omega t + \phi + \psi) + cos((k-l)\omega t + \phi - \psi)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T cos((k+l)\omega t + \phi + \psi)dt + \frac{1}{2}\int_0^T cos((k-l)\omega t + \phi - \psi)dt\end{aligned}$$

   Αν $k = l$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^T cos(k\omega t + \phi)cos(l\omega t + \psi)dt &= \frac{1}{2}\int_0^T cos((k+l)\omega t + \phi + \psi)dt + \frac{1}{2}\int_0^T cos(\phi - \psi)dt \\ &= \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}\int_0^T cos(\phi - \psi)dt \\ &= \frac{T}{2}cos(\phi - \psi)\end{aligned}$$

   Αν $k = -l$ αντίστοιχα έχουμε

$$\int_0^T cos(k\omega t + \phi)cos(l\omega t + \psi)dt = \frac{T}{2}cos(\phi + \psi)$$

   Αν $k \neq l$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^T cos(k\omega t + \phi)cos(l\omega t + \psi)dt &= \frac{1}{2}\int_0^T cos((k+l)\omega t + \phi + \psi)dt + \frac{1}{2}\int_0^T cos((k-l)\omega t + \phi - \psi)dt \\ &= \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}0 \\ &= 0\end{aligned}$$

   Παρατηρείστε ότι και στις τρεις υποπεριπτώσεις στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε το (γενικευμένο) αποτέλεσμα τις 1(α).

(γ) Με το ίδιο σκεπτικό

$$\int_0^T e^{j(k\omega t)+\phi}e^{-j(l\omega t+\psi)}dt = \int_0^T e^{j((k-l)\omega t+\phi-\psi)}dt$$

Αν $k = l$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{j(k\omega t)+\phi}e^{-j(l\omega t+\psi)}dt &= \int_0^T e^{j(\phi-\psi)}dt \\ &= Te^{j(\phi-\psi)}\end{aligned}$$

Αν $k \neq l$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{j(k\omega t)+\phi}e^{-j(l\omega t+\psi)}dt &= \frac{1}{j(k-l)\omega}\int_0^T (e^{j((k-l)\omega t+\phi-\psi)})'dt \\ &= \frac{1}{j(k-l)\omega}(e^{j((k-l)\omega T+\phi-\psi)} - e^{j((k-l)\omega 0+\phi-\psi)}) \\ &= \frac{1}{j(k-l)\omega}(e^{j(2\pi(k-l)+\phi-\psi)} - e^{j(\phi-\psi)}) \\ &= \frac{1}{j(k-l)\omega}(e^{j(\phi-\psi)} - e^{j(\phi-\psi)}) \\ &= 0\end{aligned}$$

2. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^T cos(\omega t)sin(\omega t)dt &= \int_0^T cos(\omega t)cos(\frac{\pi}{2}-\omega t)dt \\ &= cos(0+\frac{\pi}{2}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε το 1(β) με $k = 1$, $l = -1$, $\phi = 0$ και $\psi = \frac{\pi}{2}$.

3. Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} < x(t), e^{jk\omega t} > &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T (\sum_{l=-\infty}^{\infty}(a_l e^{jl\omega t}))\ e^{-jk\omega t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{l=-\infty}^{\infty}(a_l e^{jl\omega t}e^{-jk\omega t})dt \\ &= \frac{1}{T}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(a_l \int_0^T e^{jl\omega t}e^{-jk\omega t}dt)\end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^T e^{jl\omega t}e^{-jk\omega t}dt$ ισουται με T όταν $k = l$ και 0 διαφορετικα, όπως αποδείξαμε στην 1(γ). Άρα

$$\frac{1}{T} < x(t), e^{jk\omega t} >= \frac{1}{T}a_k T + \frac{1}{T}\sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq k}}^{\infty} a_l 0 = a_k$$

4. Υπολογίζουμε ξεχωριστά τα a_0 και a_k.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T_0} < x(t), e^{j0\omega_0 t} > \\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \\
&= \int_0^{T_0/4} Adt + \int_{T_0/4}^{3T_0/4} -Adt + \int_{T_0/4}^{T_0} Adt \\
&= A(T_0/4 - 0) - A(3T_0/4 - T_0/4) + A(T_0 - 3T_0/4) \\
&= AT_0/2 - AT_0/2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{T_0} < x(t), e^{jk\omega_0 t} > \\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}(\int_0^{T_0/4} Ae^{-jk\omega_0 t}dt + \int_{T_0/4}^{3T_0/4} (-A)e^{-jk\omega_0 t}dt) + \int_{3T_0/4}^{T_0} Ae^{-jk\omega_0 t}dt) \\
&= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0}\int_0^{T_0/4} (e^{-jk\omega_0 t})'dt + \frac{-A}{-jk\omega_0 T_0}\int_{T_0/4}^{3T_0/4} (e^{-jk\omega_0 t})'dt + \frac{A}{-jk\omega_0 T_0}\int_{3T_0/4}^{T_0} (e^{-jk\omega_0 t})'dt \\
&= \frac{A}{-jk2\pi}(e^{-jk\omega_0 T_0/4} - e^{-jk\omega_0 0}) + \frac{A}{jk2\pi}(e^{-jk\omega_0 3T_0/4} - e^{-jk\omega_0 T_0/4}) + \frac{A}{-jk2\pi}(e^{-jk\omega_0 T_0} - e^{-jk\omega_0 3T_0/4}) \\
&= \frac{A}{-jk2\pi}(e^{-jk2\pi/4} - e^0) + \frac{A}{jk2\pi}(e^{-jk2\pi 3/4} - e^{-jk2\pi/4}) + \frac{A}{-jk2\pi}(e^{-jk2\pi} - e^{-jk2\pi 3/4}) \\
&= \frac{A}{-jk2\pi}((-j)^k - 1) + \frac{A}{jk2\pi}(j^k - (-j)^k) + \frac{A}{-jk2\pi}(1 - j^k) \\
&= \frac{A}{jk\pi}(j^k - (-j)^k) \\
&= \{ \begin{array}{ll} 0 & ,\quad k \quad \alpha\rho\tau\iota o\varsigma \\ 2A\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k\pi} & ,\quad k \quad \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o\varsigma \end{array}
\end{aligned}$$