Λύσεις 2ης Σειράς Ασκήσεων
ΗΥ-215
25 Οκτωβρίου 2005

1.

2. Η ιδέα της γεωμετρικής αναπαράστασης σημάτων είναι να αναπαραστήσουμε ενα σήμα $x(t)$ σαν γραμμικό συνδιασμό απο n ορθοκανονικών σημάτων. Δηλαδή, δεδομένου ενος συνόλου σημάτων $s_1(t), s_2(t) \ldots s_n(t)$ έχουμε:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j(t)$$

οπου οι συντελεστές a_j ορίζονται ως:

$$a_j = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi_j(t)dt, \quad j = 1, 2 \ldots n$$

Οι συναρτήσεις βάσης ειναι ορθοκανονικές, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(t)\phi_j(t)dt = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

Τώρα, μπορούμε να πούμε οτι το $x(t)$ μπορεί να καθοριστεί πλήρως απο το διάνυσμα των συντελεστών του

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Το $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ενα σημείο στο n-διάστατο Ευκλείδιο χώρο και λέγετε διάνυσμα του σήματος.

3. (α′)

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos(k\omega t)\cos(l\omega t)dt &= \\ \frac{1}{2}\int_0^T \cos((k-l)\omega t) + \cos((k+l)\omega t)dt &= \\ \frac{1}{2}\int_0^T \cos((k-l)\omega t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T \cos((k+l)\omega t)dt &= \\ \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^T 1dt + \frac{1}{2}\int_0^T \cos(2k\omega t)dt = \frac{T}{2} & , k = l \\ 0 & , k \neq l \end{cases} \end{aligned}$$

(β′)

$$\int_0^T e^{j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega}\left[e^{j\omega t}\right]_0^T = \frac{1}{j\omega}(e^{j\omega T} - e^{j0}) = 0$$

(γ′)

$$\begin{aligned} < \psi_k(t), \psi_l(t) > &= \\ \int_0^T e^{jk\omega t}(e^{jl\omega t})^* dt &= \\ \int_0^T e^{jk\omega t}e^{-jl\omega t}dt &= \\ \int_0^T e^{j(k-l)\omega t}dt &= 0 \end{aligned}$$

Για $k = l$

$$\int_0^T e^{j0} dt = \int_0^T 1 dt = T$$

(δ′) Ναι (Βλέπε ερώτημα 2)

4. (α′)

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{1}{3}T$$

(β′)

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{4.5\omega} = \frac{2}{9}T$$

(γ′)

$$x_3(t) = \cos(3\omega t)\cos(4.5\omega t) = 1/2[\cos(7.5\omega t) + \cos(1.5\omega t)] =$$

Η περίοδος ειναι το ΕΚΠ των δυο περιόδων, δηλαδή

$$T_3 = \frac{2}{3}T$$