Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς - ΗΥ215

Λύσεις 1ης σειράς ασκήσεων

Άσκηση 1.
Στη γενική περίπτωση, ισχύει ότι:

$$z = x + jy = re^{j\theta}$$

όπου οι πολικές συντεταγμένες δίνονται από τις σχέσεις:

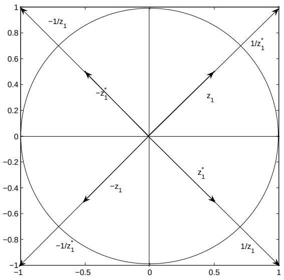
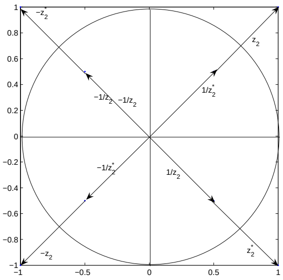
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = arctan(y/x).$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
z^* =& x - jy = re^{-j\theta} \\
\frac{1}{z} =& \frac{1}{r}e^{-j\theta} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{x - jy}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2} \\
\frac{1}{z^*} =& \frac{1}{r}e^{j\theta} = \frac{z}{z^*z} = \frac{x + jy}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + j\frac{y}{x^2 + y^2} \\
-z =& -x - iy = -re^{j\theta} = re^{j(\theta+\pi)} \\
-\frac{1}{z} =& -\frac{1}{r}e^{-j\theta} = \frac{1}{r}e^{j(\pi-\theta)} = -\frac{x}{x^2 + y^2} + j\frac{y}{x^2 + y^2} \\
-z^* =& -x + jy = -re^{-j\theta} = re^{j(\pi-\theta)} \\
-\frac{1}{z^*} =& -\frac{1}{r}e^{j\theta} = \frac{1}{r}e^{j(\pi+\theta)} = -\frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Στα σχήματα (α) και (β) απεικονίζονται οι μιγαδικοί z, $\frac{1}{z}$, z^*, $\frac{1}{z^*}$, $-z$, $-\frac{1}{z}$, $-z^*$, $-\frac{1}{z^*}$, για τις δύο περιπτώσεις: $|z_1| = 0.7071 < 1$ και $|z_2| = 1.4142 > 1$. Ειδικότερα, είναι:

$$\begin{aligned}
z_1 =& 0.5 + 0.5j = 0.7071e^{j\frac{\pi}{4}} \\
\frac{1}{z_1} =& 1 - j = 1.4142e^{-j\frac{\pi}{4}} \\
z_1^* =& 0.5 - 0.5j = 0.707e^{-j\frac{\pi}{4}} \\
\frac{1}{z_1^*} =& 1 + j = 1.4142e^{j\frac{\pi}{4}} \\
-z_1 =& -0.5 - 0.5j = 0.7071e^{j(\frac{\pi}{4}+\pi)} \\
-\frac{1}{z_1} =& -1 + j = 1.4142e^{j(\pi-\frac{\pi}{4})}, \\
-z_1^* =& -0.5 + 0.5j = 0.707e^{j(\pi-\frac{\pi}{4})} \\
-\frac{1}{z_1^*} =& -1 - j = 1.4142e^{j(\frac{\pi}{4}+\pi)}
\end{aligned}$$

(α  (β 

$$
\begin{aligned}
z_2 =& 1+j = 1.4142e^{j\frac{\pi}{4}}\\
\frac{1}{z_2} =& 0.5-0.5 = 0.7071e^{-j\frac{\pi}{4}}\\
z_2^* =& 1-j = 1.4142e^{-j\frac{\pi}{4}}\\
\frac{1}{z_2^*} =& 0.5+0.5j = 0.7071e^{j\frac{\pi}{4}}\\
-z_2 =& -1-j = 1.4142e^{j(\frac{\pi}{4}+\pi)}\\
-\frac{1}{z_2} =& -0.5+0.5j = 0.7071e^{j(\pi-\frac{\pi}{4})}\\
-z_2^* =& -1+j = 1.4142e^{j(\pi-\frac{\pi}{4})}\\
-\frac{1}{z_2^*} =& -0.5-0.5j = 0.7071e^{j(\pi+\frac{\pi}{4})}
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2.
Το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor μίας συνάρτησης $f(x)$ γύρω από το σημείο x_0 είναι:

$$
f(x) = f(x_0)+\partial_x f(x)\big|_{x=x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2!}\partial_x^2 f(x)\big|_{x=x_0}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{1}{k!}\partial_x^k f(x)\big|_{x=x_0}(x-x_0)^k+\ldots
$$

Τα αναπτύγματα σε σειρά Taylor των συναρτήσεων e^{jx}, $\cos x$, $\sin x$, γύρω από το σημείο $x_0 = 0$, θα είναι:

$$
\begin{aligned}
e^{jx} =& 1+jx+\frac{(jx)^2}{2!}+\frac{(jx)^3}{3!}+\frac{(jx)^4}{4!}+\ldots+\frac{(jx)^k}{k!}+\ldots\\
=& 1+jx-\frac{x^2}{2!}-j\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+j^k\frac{x^k}{k!}+\ldots\\
=& 1+jx-\frac{x^2}{2!}-j\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+j^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots && (1)\\
\cos x =& 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots && (2)\\
\sin x =& x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots && (3)
\end{aligned}
$$

Οπότε θα είναι:

$$\begin{aligned}\cos x + j\sin x =& 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \\ & + jx - j\frac{x^3}{3!} + j\frac{x^5}{5!} - j\frac{x^7}{7!} + \ldots + j(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Επειδή ισχύει ότι:

$$j(-1)^{n-1} = j(j^2)^{n-1} = j.j^{2n-2} = j^{2n-1}$$

τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων (1) και (4) είναι ίσα, άρα και τα πρώτα θα είναι ίσα. Θα ισχύει επομένως η σχέση Euler:

$$e^{jx} = \cos x + j\sin x$$

Άσκηση 3.

Οι ρίζες του πολυωνύμου $f(z) = z^4 + 1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $z^4 = -1$, όπου $z \in C$. Γενικά, η εξίσωση $z^n = \alpha$ όπου $z, \alpha \in C$, έχει n λύσεις. Αν θέσουμε όπου $\alpha = |\alpha|\exp^{j\phi} = |\alpha|(\cos\phi + j\sin\phi)$, οι λύσεις αυτές θα δίνονται από την σχέση:

$$z_k = \sqrt[n]{|\alpha|}(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Συνεπώς για την εξίσωση $z^4 = -1$, έχουμε:

$$\alpha = -1 = 1\exp^{j\pi} = 1(\cos\pi + j\sin\pi)$$

και οι λύσεις της εξίσωσης θα είναι:

$$\begin{aligned} z_k =& \sqrt[4]{1}(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + j\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}), \qquad k = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \\ z_k =& \begin{cases} \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}, & k = 0, \\ \cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4}, & k = 1, \\ \cos\frac{5\pi}{4} + j\sin\frac{5\pi}{4}, & k = 2, \\ \cos\frac{7\pi}{4} + j\sin\frac{7\pi}{4}, & k = 3 \end{cases} \Rightarrow \\ z_k =& \begin{cases} \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}, & k = 0, \\ -\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}, & k = 1, \\ -\cos\frac{\pi}{4} - j\sin\frac{\pi}{4}, & k = 2, \\ \cos\frac{\pi}{4} - j\sin\frac{\pi}{4}, & k = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

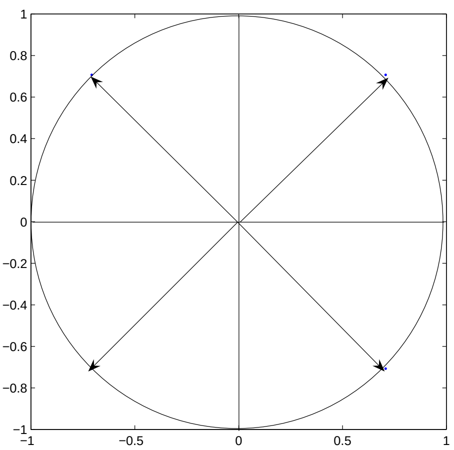
Στη Matlab η εντολή roots(c) δίνει τις ρίζες του πολυωνύμου το οποίο έχει συντελεστές τα στοιχεία του διανύσματος c. Αν το c έχει $n + 1$ στοιχεία, το πολυώνυμο θα είναι: $c(1) * x^n + \ldots + c(n) * x + c(n+1)$. Οπότε για να πάρω τις ρίζες του πολυωνύμου $f(z) = z^4 + 1$, αρκεί να χρησιμοποιήσω την εντολή roots(c), όπου $c = [1, 0, 0, 0, 1]$. Η λύση που δίνει η Matlab είναι:

$$\begin{aligned} ans = &-0.7071 + 0.7071i \\ &-0.7071 - 0.7071i \\ &\ \ 0.7071 + 0.7071i \\ &\ \ 0.7071 - 0.7071i \end{aligned}$$

η οποία - με μια αναδιάταξη - συμπίπτει με αυτή που δίνει η παραπάνω μέθοδος, αφού ισχύει ότι:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$$

όπου η τετραγωνική ρίζα του 2 έχει υπολογιστεί με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων, με τη συνάρτηση sqrt της Matlab.



Χρησιμοποιώντας τέλος την εντολή plot(ans,'.'), μπορώ να σχεδιάσω σαν σημεία στο επίπεδο των μιγαδικών τις 4 ρίζες του πολυωνύμου $f(z) = z^4 + 1$, οι οποίες είναι τα 4 μιγαδικά στοιχεία του διανύσματος ans.