

## 2η σειρά ασκήσεων

Στυλιανού Ιωάννης

13 Οκτωβρίου 2005

Η παράδοση των ασκήσεων είναι για την Παρασκευή 14 Οκτώβριου. Οι ασκήσεις θα παραδώθουν στους βοηθούς στην Γ021(Υπόγειο λευκών κτιρίων, τρίτη πόρτα δεξιά).

1. Γράψτε μία έκθεση(όχι παραπάνω από μία σελίδα) πάνω στους υπερμυγαδικούς αριθμούς (hypercomplex) και να αναφερете την βιβλιογραφία στην οποία ανατρέξατε.
2. Ως γνωστόν, κάθε σημείο στον  $n$ -διάστατο Ευκλείδειο χώρο( $\mathbb{R}^n$ ) μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός  $n$  βασικών διανυσμάτων. Τυπικό παραδειγμα είναι

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n,$$

όπου  $\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$  (δηλαδή, παντού μηδέν εκτός από την  $i$ -οστή συντεταγμένη όπου παίρνει την τιμή ένα). Το σύνολο των διανυσμάτων  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  λέγεται βάση του  $\mathbb{R}^n$  γιατί τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το χώρο (που σημαίνει ότι **κάθε** σημείο του  $\mathbb{R}^n$  μπορεί να αναπαρασταθεί με **μοναδικό** τρόπο). Ανατρέξτε στο κεφάλαιο 2 των σημειώσεων Γραμμικής Άλγεβρας του Ακρίβη που προστέθηκαν στη σελίδα του μαθήματος, κάτω από το link της Βιβλιογραφίας.

Σε αυτήν την άσκηση μελετήστε την αναλογία αυτών των εννοιών στις συναρτήσεις. Δηλαδή, θεωρήστε τις συναρτήσεις σημεία ενός (συναρτησιακού) χώρου που γεννιέται/παραγεται από άλλες συναρτήσεις/σημεία. Τυπικό παράδειγμα, τα αναπτύγματα σε σειρές Taylor. Μεταξύ άλλων,

ανατρέξτε και στο κεφάλαιο 8 των σημειώσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω. Επίσης, να γίνει αναφορά και των άλλων βιβλιογραφικών πηγών που χρησιμοποιήσατε.

3. (α) Υπολογίστε το  $\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(l\omega t) dt$  για  $k = l$  και  $k \neq l$ .  
( $T = 2\pi/\omega$ , περίοδος)
- (β) Υπολογίστε το  $\int_0^T e^{j\omega t} dt$ , όπου  $T = 2\pi/\omega$  η περίοδος.
- (γ) Αν  $\psi_k(t) = e^{jk\omega t}$ , αποδείξτε ότι  $\langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = \begin{cases} T & , k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$
- (δ) Πιστεύετε ότι η οικογένεια συναρτήσεων του ερωτήματος (γ) μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως βάση ενός χώρου συναρτήσεων; Γιατί;
4. Γνωρίζοντας ότι η περίοδος του σήματος  $x(t) = \cos(\omega t)$  είναι  $T = 2\pi/\omega$  υπολογίστε τις περιόδους των
- (α)  $x_1(t) = \cos(3\omega t)$
- (β)  $x_2(t) = \cos(4.5\omega t)$
- (γ)  $x_3(t) = x_1(t) * x_2(t)$