ΗΥ215: 4^η Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 3 Δεκεμβρίου

Απορίες:yannis@csd.uoc.gr

1. Εστω το σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} 5 & t = -2 \\ 2 & t = -1 \\ 1 & t = 2 \end{cases}$$

(α΄) Να γράψετε το $x(t)$ ως συνάρτηση κατανομών δέλτα.

(β΄) Να υπολογίσετε τον μετ. Fourier του σήματος.

(γ΄) Προσθέσετε ένα σήμα στο $x(t)$ ώστε το τελικό σήμα να έχει πραγματικό μετ. Fourier και υπολογίστε τον.

Λύση:

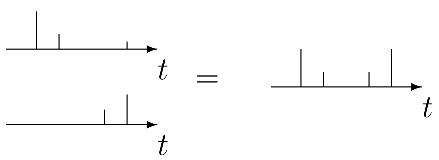
(α΄)

$$x(t) = 5\delta(t+2) + 2\delta(t+1) + d(t-2)$$

(β΄)

$$X(f) = 5e^{j2\pi f2} + 2e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f2} = 5e^{j4\pi f} + 2e^{j2\pi f} + e^{-j4\pi f}$$

(γ΄)



2. Εστω το φάσμα:

$$X(f) = \begin{cases} 6e^{-j\pi/3} & f = 5\ Hz \\ 2 & f = -3\ Hz \\ 6e^{j\pi/3} & f = -5\ Hz \end{cases}$$

(α΄) Να γράψετε το $X(f)$ ως συνάρτηση κατανομών δέλτα.

(β′) Να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετ. Fourier.

(γ′) Προσθέσετε την ελάχιστη ποσότητα στο $X(f)$ ώστε ο αντίστροφος μετ. Fourier να αντιστοιχεί σε πραγματικό σήμα. Υπολογίστε το σήμα αυτό.

Λύση:

(α′) $X(f) = 6e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(f-s) + 2\delta(f+3) + 6e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(f+5)$

(β′) $x(t) = 6e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j2\pi 5t} + 2e^{-j2\pi 3t} + 6e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j2\pi 5t}$

(γ′) Μια συνιστώσα στη συχνότητα $f = 3hz$ με πλάτος 2 και μηδενική φάση.

$$\begin{aligned} X(f) &= 6e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta(f-5) + 2\delta(f-3) + 2\delta(f+3) + 6e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(f+5) \\ x(t) &= 6e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j2\pi 5t} + 2e^{j2\pi 5t} + 2e^{-j2\pi 3t} + 6e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j2\pi 5t} \\ &= 12cos(2\pi 5t - \frac{\pi}{3}) + 4cos(2\pi 3t) \end{aligned}$$

3. Αποδείξτε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την συνέλιξη:

$$\begin{aligned} x(t) \star y(t) &= y(t) \star x(t) \\ \frac{d}{dt}\{x(t) \star y(t)\} &= x(t) \star \frac{d}{dt}\{y(t)\} \end{aligned}$$

Λύση

$$\begin{aligned} x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau \overset{t'=t-\tau \Rightarrow \mathrm{dt}=-\mathrm{d}\tau}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t')y(t')\mathrm{d}t' \\ &= y(t) * x(t) \end{aligned}$$

4. (α′) Δείξτε ότι:

$$x(t) = e^{-t}\epsilon(t) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{1+j2\pi f} = X(f)$$

και ότι:

$$\begin{aligned} |X(f)| &= \frac{1}{|1+j2\pi f|} \\ \text{φάση: } \theta_x(f) &= -\tan^{-1}(2\pi f) \end{aligned}$$

(β′) Σε ποιες συχνότητες η τιμή του φάσματος πλάτους είναι η μισή της μέγιστης τιμής του;

Λύση

(α′)

$$\begin{aligned}
X(f) &= \int_0^\infty e^{-t}e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(1+j2\pi f)t}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{1+j2\pi f}e^{-at}\,|_0^\infty = -\frac{1}{1+j2\pi f}(-1) = \frac{1}{1+j2\pi f}. \\
Z(f) &= 1+j2\pi f = |Z(f)|e^{j\sphericalangle Z(f)}, \sphericalangle Z(f) = tan^{-1}(2\pi f) \\
X(f) &= \frac{1}{Z(f)} = \frac{Z^*(f)}{|Z(f)|^2} \Rightarrow |X(f)| = \frac{|Z(f)|}{|Z(f)|^2} = \frac{1}{|Z(f)|} \\
&= \frac{1}{|1+j2\pi f|}
\end{aligned}$$

Διαφορετικά:

$$X(f) = \frac{1}{Z(f)e^{j\sphericalangle Z(f)}} = \frac{e^{-j\sphericalangle Z(f)}}{|Z(f)|}$$

άρα

$$|X(f)| = \frac{1}{|Z(f)|} = \frac{1}{|1+j2\pi|f}, \sphericalangle X(f) = -tan^{(-1)}(2\pi f)$$

(β′) $|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2 f^2}}$ είναι άρτια συνάρτηση $f = \pm\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$, $\frac{1}{sqrt1+4\pi^2\frac{3}{4\pi^2}} = \frac{1}{2}$

5. Δείξτε ότι το σήμα:

$$x(t) = e^{-t}\epsilon(t)$$

είναι σήμα ενέργειας και επιβεβαιώστε ότι ισχύει το θεώρημα Parseval.

Υπόδειξη:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a})$$

Λύση

$$\begin{aligned}
E_x &= \int_0^\infty e^{-2t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}. \\
|X(f)|^2 &= \frac{1}{1+4\pi^2 f^2} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f}{1+4\pi^2 f^2} &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\frac{1}{2\pi^2}+f^2} = \frac{1}{4\pi^2}2\pi tan^{-1}(2\pi f)\,\Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{4\pi^2}2\pi(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})) = \frac{1}{4\pi^2}2\pi\pi = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

6. Για το σήμα:

$$x(t) = e^{-t}\epsilon(t)$$

επιβεβαιώστε ότι ισχύει:

$$F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} \overset{F}{\leftrightarrow} j2\pi f X(f)$$

Λύση

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= -e^{-t}\epsilon(t) + e^{-t}\delta t \\
&= -e^{-t}\epsilon(t) + \delta(t) \\
F\Big\{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\Big\} &= -\frac{1}{1+j2\pi f} + 1 = \frac{-1+2+j2\pi f}{=}\frac{j\pi f}{1+j2\pi f}. \\
X(f) &= \frac{1}{1+j2\pi f} \Rightarrow j2\pi f X(f) = F\Big\{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\Big\}
\end{aligned}$$

7. <u>Ανάλυση Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος</u>

Τοποθετώντας ηλεκτρόδια σε διάφορες περιοχές της κεφαλής ανιχνεύουμε ηλεκτρικές δραστηριότητες (διαφορές δυναμικού) οι οποίες πιστεύετε ότι αποτελούν μια έκφραση της εγκεφαλικής δραστηριότητας. Τέτοιες καταγραφές έχουν γίνει τόσο κατά το στάδιο του ύπνου όσο και κατά τη διάρκεια κάποιας δραστηριότητας (π.χ. όταν προσπαθείτε να λύσετε ασκήσεις στο ΗΥ215). Από κάθε ηλεκτρόδιο (σε συνδυασμό με ένα ηλεκτρόδιο αναφοράς) συλλέγουμε μια χρονοσειρά όπου παρατηρούμε μεταβολές δυναμικών.

Ενα σημαντικό πρόβλημα είναι οι ανίχνευση των συχνοτήτων που υπάρχουν σε αυτές τις καταγραφές. Σε ορισμένες συχνότητες έχουμε αντιστοιχήσει κάποιους (όπως λεγονται) ρυθμούς. Π.χ. στην περιοχή των 10 Hz έχουμε τον ρυθμό άλφα.

Σας δίνουμε δύο τέτοιες καταγραφές διάρκειας 1 sec η κάθε μία. Η καταγραφή των δεδομένων αυτών γίνεται με ρυθμό ένα δείγμα κάθε 0.01 sec. Ζητάμε να βρούμε αν σε αυτά τα σήματα (καταγραφές) υπάρχει ρυθμός άλφα, ελέγχοντας την κατανομή της ενέργειας των σημάτων αυτών στις συχνότητες από $f = 3\,Hz$ έως $f = 20\,Hz$.

Σύμφωνα με αυτά τα δεδομένα ο χρόνος στο Matlab θα είναι:

```
dt = 0.01;
t=0:dt:1;
```

ενώ η συχνότητα:

```
f=3:20;
```

Τα δύο σήματα μπορείτε να τα 'διαβάσετε' από το περιβάλλον Matlab χρησιμοποιώντας την εντολή load:

```
load EEG.mat
```

Τώρα θα πρέπει να έχετε δύο μεταβλητές, x_1 και x_2 τις οποίες μπορείτε να δείτε με την εντολή whos και να τις σχεδιάσετε με την εντολή plot. Π.χ.

```
subplot(211);plot(t,x1);
subplot(212);plot(t,x2);
```

Χρησιμοποώντας τον μετ. Fourier προσπαθήστε να ανιχνεύσετε αν υπάρχει ρυθμός άλφα στις δύο αυτές καταγραφές.