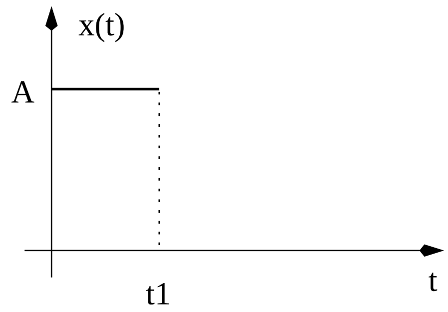
ΗΥ215: 3^{η} Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 23 Νοεμβρίου

Απορίες:yannis@csd.uoc.gr

1. (α′) Να υπολογίσετε τον μετ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα. 1α′ χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετ. Fourier (και όχι κάποια ιδιότητα αυτού).



(β′) Γνωρίζοντας τώρα ότι

$$x(t) = Arect(\frac{t}{T}) \overset{F}{\leftrightarrow} X(f) = ATsinc(Tf)$$

επιβεβαιώστε την απάντησήση σας στο (α) χρησιμοποιώντας ιδότητες του μετ. Fourier.

Λύση:

(α′)

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_0^{t_1} Ae^{-j2\pi f t_1}\mathrm{d}t = \frac{A}{-j2\pi f}(e^{-j2\pi f t_1} - 1) && (1)\\ &= \frac{A}{-j2\pi f}e^{-j\pi f t_1}(e^{-j\pi f t_1} - e^{j\pi f t_1}) = \frac{A}{\pi f}e^{-j\pi f t_1}sin(\pi f t_1) && (2)\\ &= At_1 e^{-j\pi f t_1}sinc(\pi f t_1) && (3) \end{aligned}$$

(β′) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα

$$x(t) = Arect(\frac{t}{T}) \overset{F}{\leftrightarrow} X(f) = ATsinc(Tf)$$

το σήμα μας έχει διάρκεια $T = t_1$ και έχει μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά $t_0 = \frac{t_1}{2}$ Επειδή:

$$\begin{aligned} x(t) &\overset{F}{\leftrightarrow} X(f) \Leftrightarrow x(t-t_0) \overset{F}{\leftrightarrow} X(f)e^{-j2\pi f t_0}\\ X(f) &= At_1 sinc(ft_1)e^{-j2\pi\frac{t_1}{2}}\\ &= At_1 e^{-j\pi f t_1}sinc(ft_1) \end{aligned}$$

2. (α′) Αν το σήμα της προηγούμενης άσκησης θεωρείται περιοδικό με περίοδο $T_0 = 2t_1$, τότε θα μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier. Δείξτε ότι οι συντελεστές Fourier, X_k, του περιοδικού σήματος μπορούν να υπολογιστούν από τον μετ. Fourier, $X(f)$, του μη περιοδικού σήματος από τη σχέση:

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f) \,|_{f=kT_0}$$

Συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε με αυτό που υπάρχει στις σημειώσεις (notes4.pdf, σελ. 10).

(β′) Επιβεβαιώστε με το Matlab ότι η σειρά Fourier που βρήκατε πράγματι αναπαριστά το περιοδικό σήμα (παραδώστε κώδικα σε Matlab, καθώς και σχήματα).

Λύση:

Έχουμε βρει

$$X_k = \begin{cases} \dfrac{-jA}{\pi k} & k \text{ περιττός} \\ 0 & k \text{ άρτιος} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} X(f) = At_1 e^{-j\pi f t_1} sinc(ft_1) \\ t_2 = t_1 \\ f = \frac{k}{T} = \frac{k}{2t_1} \end{array} \right\} \Rightarrow At_1 e^{-j\pi k \frac{1}{2t_1} t_1} sinc(\frac{k}{2t_1} t_1) =$$

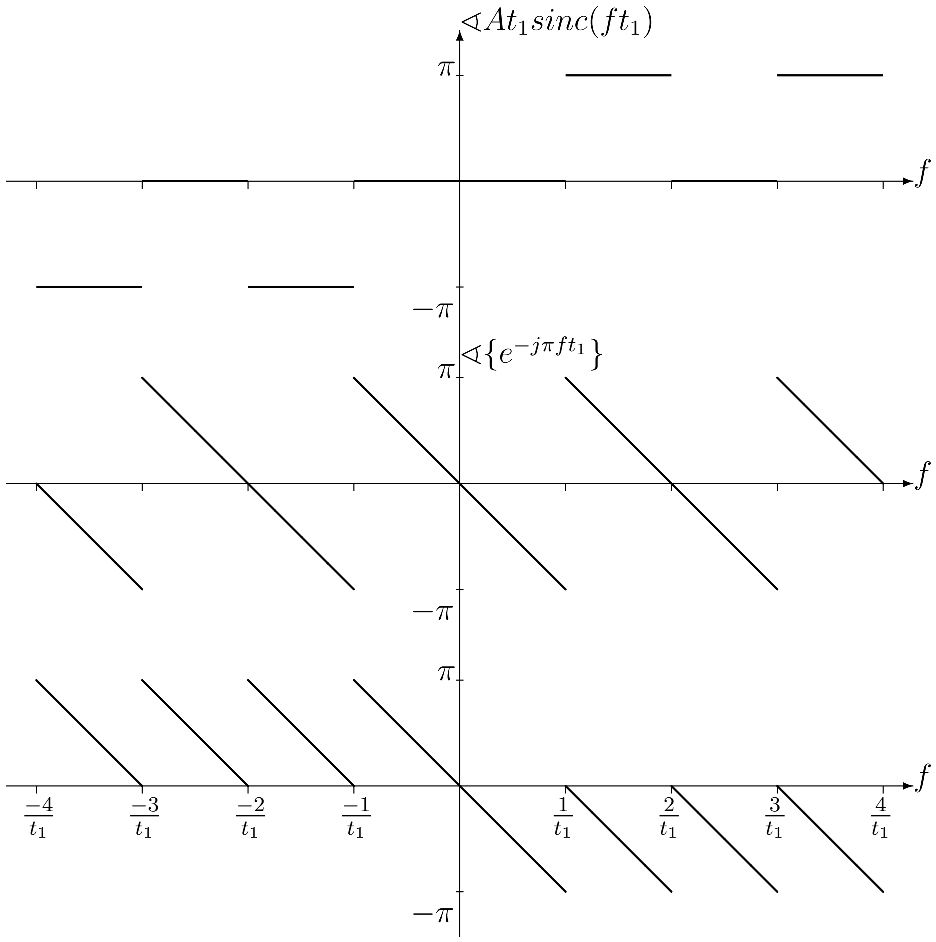
$$\begin{aligned} &= At_1 e^{-j\frac{\pi}{2}k} sinc(\frac{k}{2}) = At_1 \frac{1}{\pi \frac{k}{2}} sin(\frac{\pi}{2}k) e^{-j\frac{\pi}{2}k} \\ &= 2t_1 \frac{A}{\pi k}[-jsin^2(\frac{\pi}{2}k)] = \begin{cases} -j2t_1 \dfrac{A}{\pi k} & k \text{ περιττός} \\ 0 & k \text{ άρτιος} \end{cases} \end{aligned}$$

Πράγματι $X_k = \frac{1}{2t_1} X(kf) = -j\frac{A}{\pi k}$ για k περιττό.

3. Να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους και φάσης του μετ. Fourier του σήματος της πρώτης άσκησης για τις συχνότητες: $|f| \leq 4/t_1$. Σημειώστε ότι το φάσμα φάσης υπολογίζεται *modulo* 2π (από $-\pi$ έως π).

Λύση:

Φάσμα φάσης $\sphericalangle At_1 sinc(ft_1) + \sphericalangle\{e^{-j\pi t_1}\}$



Φάσμα πλάτους:

$$|X(f)| = At_1 |sinc(ft_1)|$$

4. Να υπολογίσετε τον μετ. Fourier του σήματος:

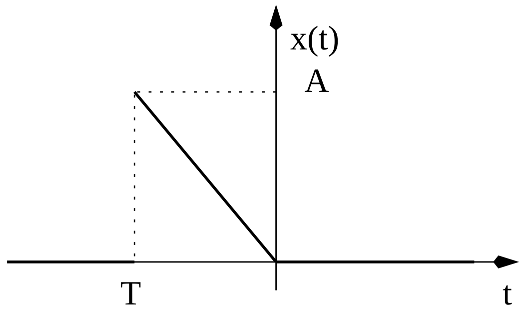
$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{T}t & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού και όχι ιδιότητες αυτού.

Λύση:

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{A}{t}\int_0^T te^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t = \frac{A}{T}\frac{1}{-j2\pi f})te^{-j2\pi ft}\Big|_0^T + \frac{1}{j2\pi f}te^{-j2\pi ft}\Big|_0^T) \\ &= \frac{A}{T}\frac{1}{-j2\pi f}[Te^{-j2\pi fT} + \frac{1}{j2\pi f}(e^{-j2\pi fT} - 1)] = \frac{A}{-j2\pi f}e^{-j\pi fT}[e^{-j\pi fT} + \frac{1}{T\pi f}sin(\pi fT)] \\ &= \frac{A}{j2\pi f}e^{-j\pi fT}[sinc(fT) - e^{-j\pi fT}] \end{aligned}$$

5. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης και ιδιότητες του μετ. Fourier υπολογίστε τον μετ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα. 5.



Λύση:

$$x(-t) \xrightarrow{F} X(-f) \Rightarrow F\{x(-t)\} = \frac{A}{-j2\pi f} e^{j\pi fT}[sinc(fT) - e^{j\pi fT}]$$

6. Να υπολογιστεί ο μετ. Fourier του σήματος που προκύπτει από την πρόσθεση των σημάτων των δύο παραπάνω ασκήσεων. Αν $x_f(T) = sinc(fT)$, δείξτε ότι ο μετ. Fourier έχει τη μορφή:

$$X(f) = AT\left[x_f(2T) - x_f^2(T)\right]$$

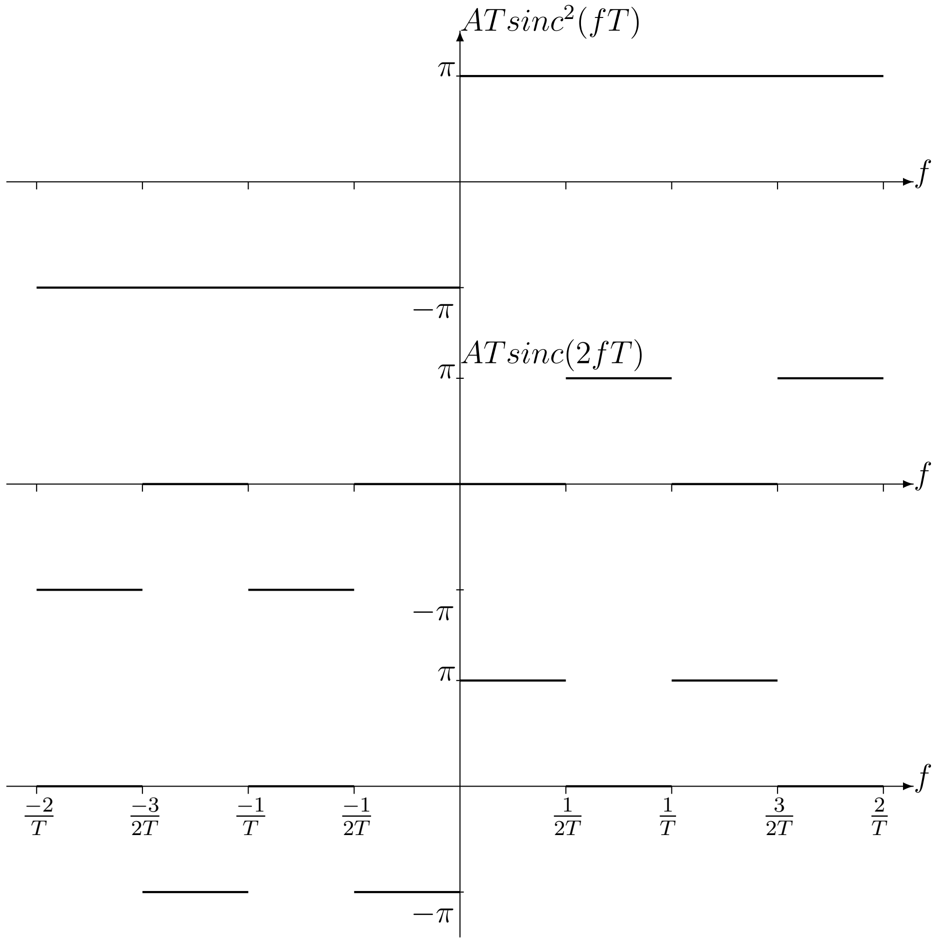
Λύση:

$$\begin{aligned} & - \frac{A}{j2\pi f} sinc(fT)[e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}] + \frac{A}{j2\pi f} sinc(fT)[e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT}] = \\ = & - ATsinc^2(fT) + 2ATsinc(2fT) \end{aligned}$$

7. Να σχεδιάσετε το φάσμα φάσης του μετ. Fourier της προηγούμενης άσκησης για $|f| \leq 2/T$. Σημειώστε ότι το φάσμα φάσης υπολογίζεται *modulo* 2π (από $-\pi$ έως π).

   Με τη βοήθεια του Matlab σχεδιάστε για τις ίδιες συχνότητες το φάσμα πλάτους της παραπάνω συνάρτησης, $X(f)$.

   Λύση



8. Σχεδιάστε το σήμα που έχει μετ. Fourier:

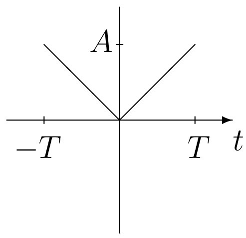
$$X(f) = ATsinc^2(fT)$$

Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα των προηγούμενων ασκήσεων.

Λύση:

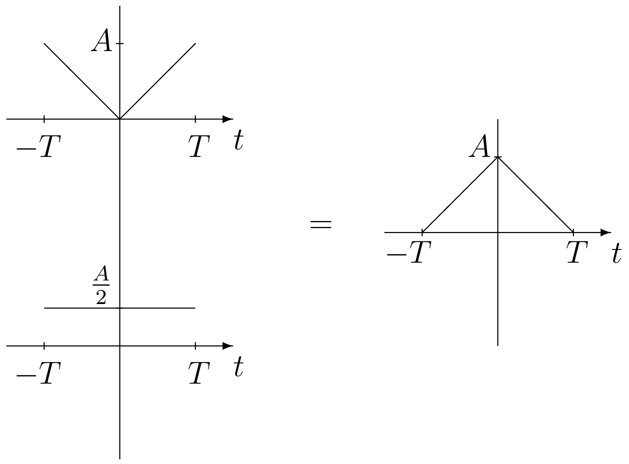
Γνωρίζουμε ότι

$$Arect(\frac{t}{T}) \overset{F}{\leftrightarrow} ATsinc(fT)$$



$$\overset{F}{\leftrightarrow} -ATsinc^2(fT) + 2ATsinc(f2T))$$

Άρα αρκεί να αφαιρέσουμε από το $\frac{A}{2}rect(\frac{t}{2T}$ το παραπάνω σήμα)



9. Παρακάτω σας δίδεται ο κώδικας σε Matlab για τον υπολογισμό του μετ. Fourier ενός σήματος καθώς και ο υπολογισμός του αντίστροφου μετ. Fourier. Τα ολοκληρώματα που χρειάζονται να υπολογιστούν προσεγγίζονται με τη μέθοδο Riemann. Χρησιμοποιούμε ως παράδειγμα το σήμα

$$x(t) = Arect(\frac{t}{T})$$

Σχολιάστε τον κώδικα όπου σας ζητηθεί και βέβαια να τον χρησιμοποιήσετε. Απαντήστε ιδιαίτερα τα μέρη όπου εμφανίζεται η λέξη ELEGXOS.
Είναι πολύ χρήσιμος για τον έλεγχο των απαντήσεων στις ασκήσεις σας αλλά και στον έλεγχο του υπολογισμού Fourier με το Matlab.
Σημείωση: Το Matlab έχει δική του συνάρτηση για τον υπολογισμό του μετ. Fourier και του αντιστρόφου: fft, ifft αντίστοιχα. Παρόλα αυτά, ο παρακάτω κώδικας σας δίνει πλήρη και εύκολο έλεγχο.

```
% xronos ...
dt = 1/100;              % deigmatolhpsia aksona xronou
A = 2;                   % platos shmatos
T = 1;                   % diarkeia se sec tou palmou
D = 2*T;                 % diarkeia se sec tou shmatos
t = -D/2:dt:D/2;         % xronos
x = A*rectpuls(t,T);     % shma
plot(t,x)                % plot!! mmm...
```

```
% syxnothta ....
df = 1/(30*T);          % deigmatolhpsia aksona syxnothtas
f = -3*pi:df:3*pi;      % syxnothta

%%%%%%%%%%%%
% SXOLIASTE ton parakatv pinaka
% pinakas analyshs: met. Fourier.
M = exp(-j*(2*pi*t'*f));

%%%%%%%%%%%%
% SXOLIASTE ton parakatv pinaka
% pinakas synthesis: ant. met. Fourier.
Minv = exp(j*(2*pi*f'*t));

% upologismos met.Fourier (kata Riemann)
X = dt*x*M;   % prosoxh ... einai migadikos

% plot fasma platos (magnitude) kai fasma fashs (phase)
subplot(211);plot(f,abs(X),'.');ylabel('magnitude');
subplot(212);plot(f,angle(X),'.');ylabel('phase');
xlabel('Frequency in Hz');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ELEGXOS: Einai svsto to megisto tou fasmatos platovs?
%    Ginetai o mhdenismos ekei pou preimenete?
%    Sumfvneite me to fasma fashs? Poia diafora yparxei
%          se sxesh me auta pou ma0ate sth 0ewria?

% thewrhtiko apotelesma
Xth = A*T*sinc(f*T);
```

```
% Sugkrish
subplot(211);plot(f,abs(X));ylabel('magnitude');
hold on;plot(f,abs(Xth),'g');
legend('Riemann','Theory');hold off;
subplot(212);plot(f,angle(X));ylabel('phase');
hold on;plot(f,angle(Xth),'g');
legend('Riemann','Theory');hold off;
xlabel('Frequency in Hz');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ELEGXOS: Fainetai na yparxei diafora sto fasma fashs. Yparxei pragmati
%    auth h diafora 'h oi faseis praktika einai idies?


% antistrofos met. Fourier - kratame to real meros. To imag einai
% para polu mikro kai ofeiletai se arithmitika sfalmata
xx = real(df*X*Minv);

% sugkrish:
clf;
plot(t,x);hold on;plot(t,xx,'g');hold off
```