HY-215

Λύσεις 1ης σειράς ασκήσεων

Νοέμβριος 2004

1. Έχουμε ότι:

$$z_1 = 1 + j2 = \sqrt{5}\ e^{atan(2)} = 2.2361\ e^{j1.1072}$$

και

$$z_2 = -2 + j = \sqrt{5}\ e^{atan(-1/2)} = 2.2361\ e^{j2.6779}$$

οπότε

(a) $z_1 z_2 = -4 - j3 = (\sqrt{5})^2\ e^{j(1.1072+2.6779)} = 5\ e^{j3.7851}$

(b) $z_1 + z_2 = -1 + 3j = 3.16\ e^{1.90}$

(c) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} = -j = e^{3\pi/2} = e^{j4.7124}$

(d) $z_1 z_1^* = |z_1|^2 = 5$

(e) $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{5} - j\frac{2}{5} = 0.4472\ e^{-j1.1072}$

(f) $\frac{1}{z_2^*} = -\frac{2}{5} + j\frac{1}{5} = 0.4472\ e^{j2.6774}$

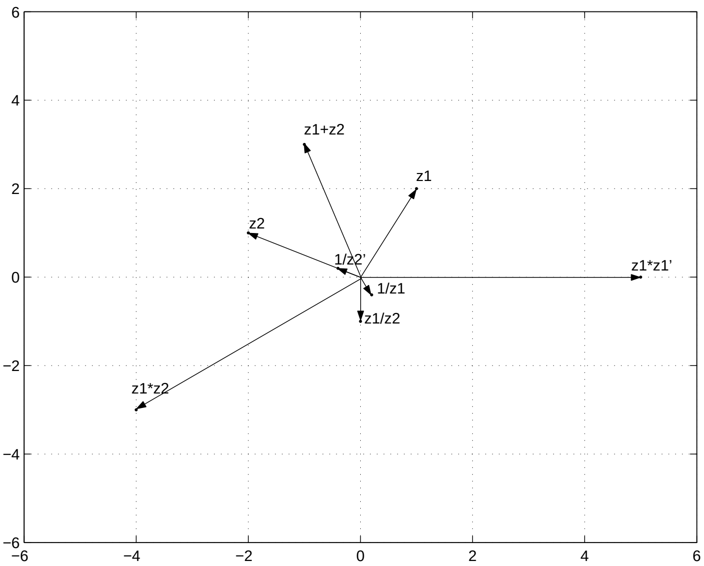

Figure 1: Πάνω στο μιγαδικό επίπεδο

2. $$\begin{aligned} e^{e^j} &= e^{cos(1)+jsin(1)} \\ &= e^{cos(1)}e^{jsin(1)} \\ &= e^{cos(1)}[cos(sin(1)) + jsin(sin(1))] \end{aligned}$$

3. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} cos^4\theta &= \tfrac{1}{2^4}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})^4 \\ &= \tfrac{1}{2^4}(e^{j4\theta} + 4e^{j3\theta}e^{-j\theta} + 6e^{j2\theta}e^{-j2\theta} + 4e^{j\theta}e^{-j3\theta} + e^{-j4\theta}) \\ &= \tfrac{1}{2^4}(6 + 8cos(2\theta) + 2cos(4\theta)) \end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_0^{2\pi} cos^4(\theta)\ d\theta = \frac{1}{2^4}\int_0^{2\pi}(6 + cos(2\theta) + cos(4\theta))\ d\theta = \frac{6}{2^4}2\pi = \frac{3\pi}{4}$$

4. $|z+2| = |z-1|$ σημαίνει ότι ψάχνουμε τα z που ισαπέχουν από τα σημεία $z = -2 + 0j$ και $z = 1 + 0j$. Δηλαδή η μεσοκάθετος στα σημεία αυτά.

Αλγεβρικά:

$$\begin{aligned} |z+2| = |z-1| &\Rightarrow |x + jy + 2| = |x + jy - 1| \\ &\Rightarrow |x + 2 + jy|^2 = |x - 1 + jy|^2 \\ &\Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 \\ &\Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \\ &\Rightarrow 6x = -3 \\ &\Rightarrow x = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

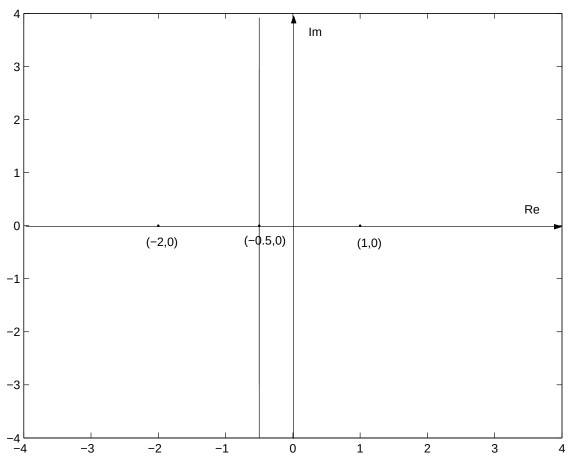

Figure 2: Πάνω στο μιγαδικό επίπεδο

5. $x(t) = \begin{cases} A & -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

$$x(t-1) = \begin{cases} A & -1 \geq t \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$x(t+1) = \begin{cases} A & -3 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

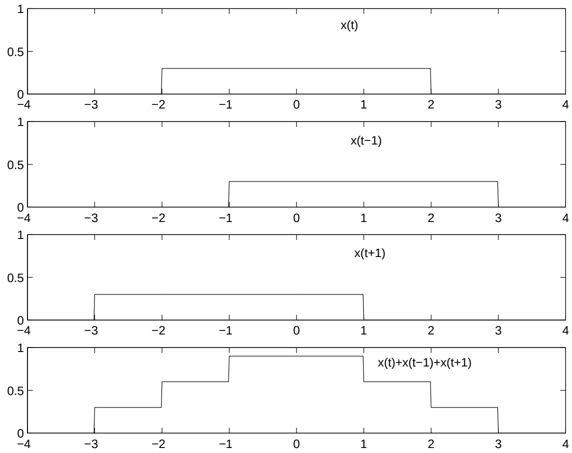

Figure 3: Τα σήματα

6. $$\begin{aligned} x(t) &= A[1 - cos(2\pi ft) + \tfrac{1}{2}sin(4\pi ft)] \\ &= A[1 + cos(2\pi ft + \pi) + \tfrac{1}{2}cos(4\pi ft - \tfrac{\pi)}{2}] \\ &= A + \tfrac{A}{2}e^{j\pi}e^{j2\pi t} + \tfrac{A}{2}e^{-j\pi}e^{-j2\pi t} + \tfrac{A}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j4\pi t} + \tfrac{A}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j4\pi t} \end{aligned}$$

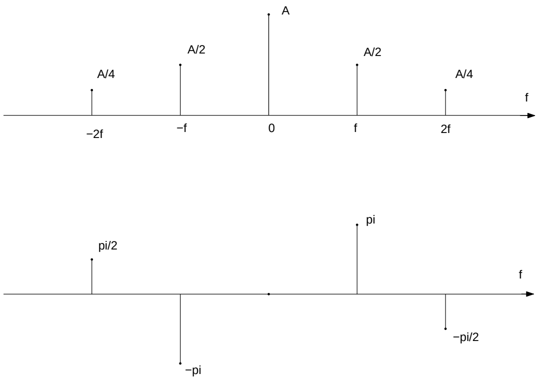

Figure 4: Φάσμα Πλάτους και Φάσης

7. $x(t) = 2 + sin(\pi t - \frac{\pi}{3})$
$= 2 + cos(\pi t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2})$
$= 2 + \frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi}{6}}e^{j\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi}{6}}e^{-j\pi t}$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)cos(12\pi t) \\ &= 2cos(12\pi t) + cos(\pi t - \frac{5\pi}{6})cos(12\pi t) \\ &= 2\frac{e^{j12\pi t}+e^{-j12\pi t}}{2} + \frac{(e^{-j\frac{5\pi}{6}}e^{j\pi t}+e^{j\frac{5\pi}{6}}e^{-j\pi t})}{2}\frac{(e^{j12\pi t}+e^{-j12\pi t})}{2} \\ &= e^{j12\pi t} + e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{5\pi}{6}}e^{13j\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{5\pi}{6}}e^{-11j\pi t} + \frac{1}{4}e^{j\frac{5\pi}{6}}e^{11j\pi t} + \frac{1}{4}e^{j\frac{5\pi}{6}}e^{-13j\pi t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(t) &= y(t)cos(12\pi t) \\ &= x(t)cos^2(12\pi t) \\ &= \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)cos(24\pi t) \\ &= \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{4}x(t)e^{j24\pi t} + \frac{1}{4}x(t)e^{-j24\pi t} \end{aligned}$$

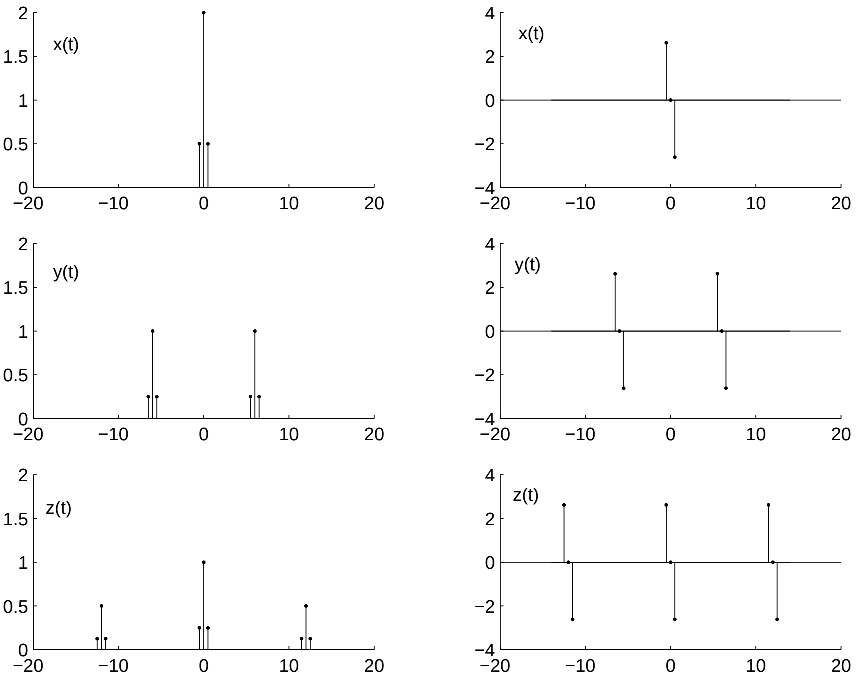

Figure 5: 1η Στήλη: Φάσματα Πλάτους, 2η Στήλη: Φάσματα Φάσης

Μπορούμε να ανακτήσουμε το $x(t)$ από το $z(t)$ αν πολλαπλασιάσουμε το $z(t)$ με 2 και μηδενίσουμε όλες τις υψηλές συχνότητες.