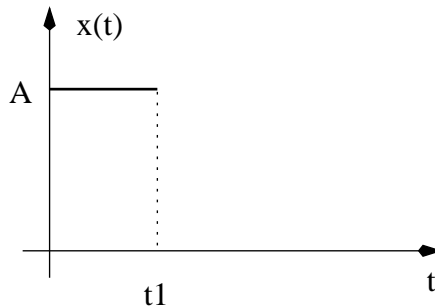


ΗΥ215: 3^η Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 23 Νοεμβρίου

Απορίες: yannis@csd.uoc.gr

1. (α') Να υπολογίσετε τον μετ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα. 1α' χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετ. Fourier (και όχι κάποια ιδιότητα αυτού).



(β') Γνωρίζοντας τώρα ότι

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{F} X(f) = AT \operatorname{sinc}(Tf)$$

επιβεβαιώστε την απάντησή σας στο (α) χρησιμοποιώντας ιδιότητες του μετ. Fourier.

2. (α') Αν το σήμα της προηγούμενης άσκησης θεωρείται περιοδικό με περίοδο $T_0 = 2t_1$, τότε θα μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier. Δείξτε ότι οι συντελεστές Fourier, X_k , του περιοδικού σήματος μπορούν να υπολογιστούν από τον μετ. Fourier, $X(f)$, του μη περιοδικού σήματος από τη σχέση:

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f) \Big|_{f=kT_0}$$

Συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε με αυτό που υπάρχει στις σημειώσεις (notes4.pdf, σελ. 10).

(β') Επιβεβαιώστε με το Matlab ότι η σειρά Fourier που βρήκατε πράγματι αναπαριστά το περιοδικό σήμα (παραδώστε κώδικα σε Matlab, καθώς και σχήματα).

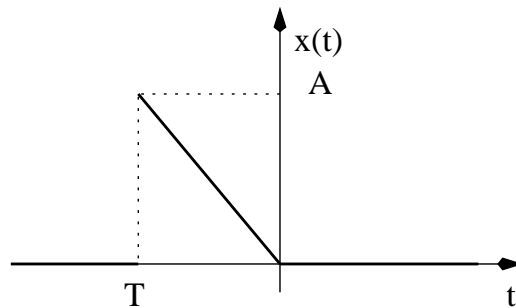
3. Να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους και φάσης του μετ. Fourier του σήματος της πρώτης άσκησης για τις συχνότητες: $|f| \leq 4/t_1$. Σημειώστε ότι το φάσμα φάσης υπολογίζεται *modulo* 2π (από $-\pi$ έως π).

4. Να υπολογίσετε τον μετ. Fourier του σήματος:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{T}t & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού και όχι ιδιότητες αυτού.

5. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης και ιδιότητες του μετ. Fourier υπολογίστε τον μετ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα. 5.



6. Να υπολογιστεί ο μετ. Fourier του σήματος που προκύπτει από την πρόσθεση των σημάτων των δύο παραπάνω ασκήσεων. Αν $x_f(T) = \text{sinc}(fT)$, δείξτε ότι ο μετ. Fourier έχει τη μορφή:

$$X(f) = AT [x_f(2T) - x_f^2(T)]$$

7. Να σχεδιάσετε το φάσμα φάσης του μετ. Fourier της προηγούμενης άσκησης για $|f| \leq 2/T$. Σημειώστε ότι το φάσμα φάσης υπολογίζεται *modulo* 2π (από $-\pi$ έως π).

Με τη βοήθεια του Matlab σχεδιάστε για τις ίδιες συχνότητες το φάσμα πλάτους της παραπάνω συνάρτησης, $X(f)$.

8. Σχεδιάστε το σήμα που έχει μετ. Fourier:

$$X(f) = AT \text{sinc}^2(fT)$$

Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα των προηγούμενων ασκήσεων.

9. Παρακάτω σας δίδεται ο κώδικας σε Matlab για τον υπολογισμό του μετ. Fourier ενός σήματος καθώς και ο υπολογισμός του αντίστροφου μετ. Fourier. Τα ολοκληρώματα που χρειάζονται να υπολογιστούν προσεγγίζονται με τη μέθοδο Riemann. Χρησιμοποιούμε ως παράδειγμα το σήμα

$$x(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Σχολιάστε τον κώδικα όπου σας ζητηθεί και βέβαια να τον χρησιμοποιήσετε. Απαντήστε ιδιαίτερα τα μέρη όπου εμφανίζεται η λέξη ELEGXOS.

Είναι πολύ χρήσιμος για τον έλεγχο των απαντήσεων στις ασκήσεις σας αλλά και στον έλεγχο του υπολογισμού Fourier με το Matlab.

Σημείωση: Το Matlab έχει δική του συνάρτηση για τον υπολογισμό του μετ. Fourier και του αντιστρόφου: fft, ifft αντίστοιχα. Παρόλα αυτά, ο παρακάτω κώδικας σας δίνει πλήρη και εύκολο έλεγχο.

```
% xronos ...
dt = 1/100;           % deigmatolhpsia aksona xronou
A = 2;               % platos shmatos
T = 1;              % diarkeia se sec tou palmou
D = 2*T;            % diarkeia se sec tou shmatos
t = -D/2:dt:D/2;    % xronos
x = A*rectpuls(t,T); % shma
plot(t,x)           % plot!! mmm...

% syxnothta ....
df = 1/(30*T);      % deigmatolhpsia aksona syxnothtas
f = -3*pi:df:3*pi;  % syxnothta

%%%%%%%%%%%%
% SXOLIASTE ton parakatv pinaka
% pinakas analysys: met. Fourier.
M = exp(-j*(2*pi*t'*f));

%%%%%%%%%%%%
% SXOLIASTE ton parakatv pinaka
% pinakas synthesis: ant. met. Fourier.
Minv = exp(j*(2*pi*f'*t));
```

```

% upologismos met.Fourier (kata Riemann)
X = dt*x*M; % prosoxh ... einai migadikos

% plot fasma platos (magnitude) kai fasma fashs (phase)
subplot(211);plot(f,abs(X),'.');ylabel('magnitude');
subplot(212);plot(f,angle(X),'.');ylabel('phase');
xlabel('Frequency in Hz');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% ELEGXOS: Einai svsto to megisto tou fasmatos platos?
%   Ginetai o mhdenismos ekei pou preimenete?
%   Sumfvneite me to fasma fashs? Poia diafora yparxei
%       se sxesh me auta pou ma0ate sth 0ewria?

% thewrhtiko apotelesma
Xth = A*T*sinc(f*T);

% Sugkrish
subplot(211);plot(f,abs(X));ylabel('magnitude');
hold on;plot(f,abs(Xth),'g');
legend('Riemann','Theory');hold off;
subplot(212);plot(f,angle(X));ylabel('phase');
hold on;plot(f,angle(Xth),'g');
legend('Riemann','Theory');hold off;
xlabel('Frequency in Hz');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% ELEGXOS: Fainetai na yparxei diafora sto fasma fashs. Yparxei pragmati
%   auth h diafora 'h oi faseis praktika einai idies?

```

```
% antistrofos met. Fourier - kratame to real meros. To imag einai
% para polu mikro kai ofeiletai se arithmitika sfalmata
xx = real(df*X*Minv);

% sugkrish:
clf;
plot(t,x);hold on;plot(t,xx,'g');hold off
```