ΗΥ215: 2^η Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 2 Νοεμβρίου

Απορίες:yannis@csd.uoc.gr

1. Θεωρούμε δύο σήματα $x(t)$ και $y(t)$ από τα οποία το ένα είναι περιττό και το άλλο άρτιο στο διάστημα $[-T/2, T/2]$. Αποδείξτε ότι:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t)z(t)\,dt = 0$$

2. Εστω το σήμα:

$$x(t) = \frac{\sin(2t) + \sin(3t)}{2\sin(t)}$$

   (α′) Ποια είναι η περίοδος του σήματος;

   (β′) Αναπτύξτε το σήμα σε σειρά Fourier.

   (γ′) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης στον κανονικοποιημένο άξονα $2\pi\omega$.

3. Θεωρούμε το περιοδικό σήμα με περίοδο T_0:

$$x(t) = \begin{cases} A & -T_0/4 \le t \le -T_0/8 \\ 2A & |t| < T_0/8 \\ A & T_0/8 \le t < T_0/4 \end{cases}$$

   Να υπολογιστούν οι συντελεστές του αναπτύγματος σε σειρά Fourier του σήματος.

4. Για την εύρεση ενός ορθοκανονικού συνόλου συναρτήσεων $\{\psi_k(t),\ k = 1, 2, \cdots, n\}$, από ένα σύνολο γραμμικών ανεξάρτητων συναρτήσεων $\{v_k(t),\ k = 1, 2, \cdots, n\}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό αλγόριθμο Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} &\text{Αρχικοποίηση:} \quad w_1(t) = v_1(t) \\ &\psi_k(t) = \frac{w_k(t)}{||w_k(t)||} \\ &w_k(t) = v_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} < v_k(t), \psi_i^*(t) > \ \psi_i(t) \end{aligned}$$

   όπου

$$||w_k(t)||^2 = \int_{t_1}^{t_2} |w_k(t)|^2\,dt$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αναδρομικό αλγόριθμο, υπολογίστε για $k = 1, 2, 3$ την ορθοκανονική βάση $\psi_k(t)$ στο διάστημα $[0, \infty)$, που παράγεται από τις γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις:

$$v_k(t) = e^{-kt}$$

Απάντηση:

$$\begin{aligned}
\psi_1(t) &= \sqrt{2}e^{-t} \\
\psi_2(t) &= 6e^{-2t} - 4e^{-t} \\
\psi_3(t) &= \sqrt{6}\,[10e^{-3t} - 12e^{-2t} + 3e^{-t}]
\end{aligned}$$

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < T/2 \\ -1 & T/2 \le t < T \end{cases}$$

Υπολογίστε τους βέλτιστους σύμφωνα με το θεώρημα της καθετότητας συντελεστές $\{a_1, a_2, a_3\}$:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{3} a_k \psi_k(t)$$

όπου $\psi_k(t)$ είναι οι ορθοκανονικές συναρτήσεις που υπολογίσατε στην προηγούμενη άσκηση.

6. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\psi_k(t)$ των προηγουμένων ασκήσεων είναι ορθοκανονικές, δηλ:

$$\begin{aligned}
||\psi_k(t)|| &= 1 \\
< \psi_k(t), \psi_l^*(t) > &= 0 \quad k \neq l
\end{aligned}$$

Δείξτε το παραπάνω για $k = 1, 2, 3$.

7. Δείξτε ότι το σύνολο των συναρτήσεων:

$$w_k(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$$

αποτελεί ένα ορθογώνιο σύνολο συναρτήσεων.

Πως μπορούμε να το μετατρέψουμε σε ορθοκανονικό;

8. Σε αυτή την άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε Matlab ώστε να μπορούμε να ελέγχουμε αν οι απαντήσεις μας στις ασκήσεις είναι σωστές. Σημαντική σημείωση: εσείς ΠΡΕΠΕΙ να λύσετε τις ασκήσεις ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ. Εδώ απλώς μαθαίνουμε πως να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας με το Matlab.

- Ολοκλήρωση.

  Εστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \sin^{10}(t)\, dt$$

  και να ελέγξουμε αν η λύση που έχουμε βρεί είναι η σωστή.

  Υπενθύμιση: Ολοκλήρωση κατά Riemann:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \delta \to 0 \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\delta_i$$

  Τι λέει το παραπάνω; Σε βήματα είναι:

  (α΄) Χωρίζουμε το διάστημα $[a\ b]$ σε N μέρη μήκους δ_i το καθένα, και έστω δ να είναι το μεγαλύτερο από αυτά.

  (β΄) Επιλέγουμε ένα σημείο x_i σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα.

  (γ΄) Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης $f(x)$ στα σημεία x_i.

  (δ΄) Τώρα έχουμε N τιμές της $f(x)$ και N μήκοι (αριθμούς δηλαδή) δ_i

  (ε΄) Πολλαπλασιάζουμε αριθμό προς αριθμό τις N τιμές της $f(x)$ με τα N δ_i και προσθέτουμε το αποτέλεσμα.

  Η παραπάνω σχέση λέει ότι για να είναι το ολοκλήρωμα ίσο με αυτό τό άθροισμα που βρήκαμε θα πρέπει να χωρίσουμε με τέτοιο τρόπο το διάστημα $[a\ b]$ ώστε ακόμα και το μεγαλύτερο διάστημα από τα δ_i, δηλαδή το δ, να είναι πολύ μικρό. Ισότητα έχουμε όταν $\lim \delta \to 0$.

  Ας θεωρήσουμε εμείς ότι $\delta_i = \delta$ για κάθε i δηλ. χωρίζουμε ομοιόμορφα το διάστημα $[a\ b]$ και ας επιλέξουμε το x_i να είναι η αρχή του κάθε μέρους. Αρκεί να προσέξουμε να πάρουμε δ πολύ μικρό έτσι ώστε να προσεγγίζουμε όσο γίνεται την τιμή του ολοκλήρωματος.

  Επιλέγω να χωρίσω το διάστημα $[0\ 2\pi]$ σε 6001 σημεία:

```
delta = 2*pi/6000;
t = 0:delta:2*pi;
```

  Επομένως $\delta = 0.00104719755120$

```
oloklhrwma = delta * sum(  sin(t).^10 )
```

```
>> oloklhrwma =

    1.5463
```

- Σειρά Fourier

  Στο μάθημα έχουμε δείξει ότι η ανάπτυξη σε σειρά Fourier του σήματος:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < T_0/2 \\ -1 & T_0/2 \le t < T_0 \end{cases}$$

είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left[(2k+1)\omega_0 t\right] \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\,\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\,\omega_0 t) + \cdots\right) \end{aligned}$$

Το παρακάτω πρόγραμμα σε Matlab υπολογίζει μια προσέγγιση του σήματος $x(t)$ χρησιμοποποιώντας τη σειρά Fourier με 10 όρους. Αναλύστε το πρόγραμμα γραμμή προς γραμμή. Για απορίες στείλτε email στη λίστα. Στην προσπάθειά σας να καταλάβετε, συμβουλή μου είναι να δουλεύετε παραδείγματα με μικρά διανύσματα (π.χ. 4 διαστάσεων και όχι των 100000).

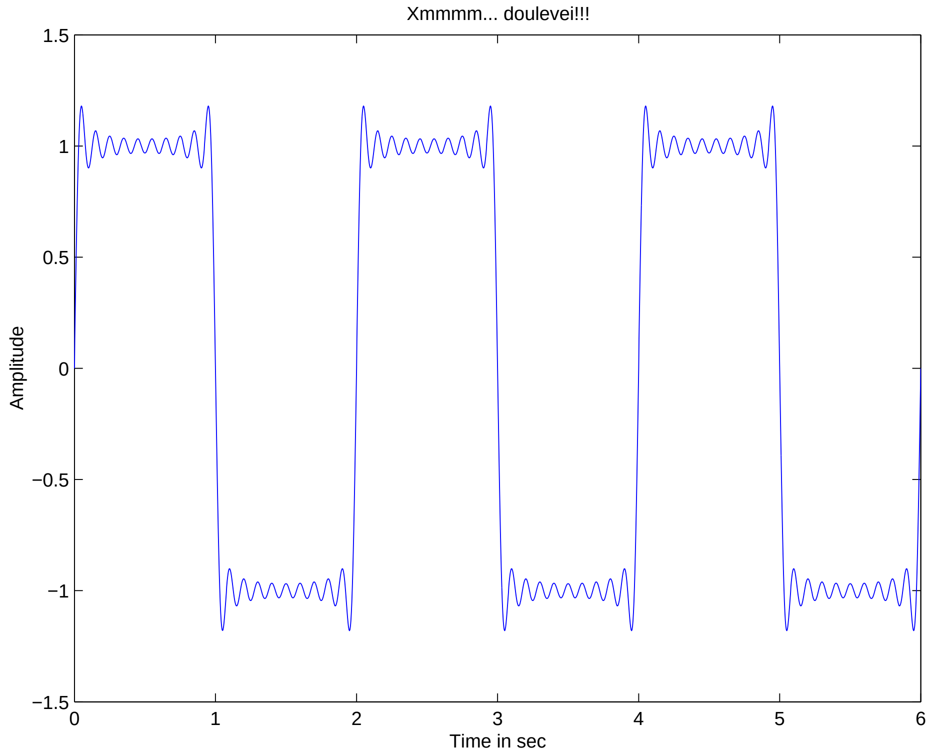
```
To =2;          % posh einai h periodo (se sec)? epilegw mia pou na mou aresei. p.x
d = To/600;     % posa shmeia ana periodo thelw na exw?
D = 3;          % poses periodous thelw na dw?

N = 10;         % posous orous sth seira Fourier tha xrhsimopoihsw?
Ao = 0;         % o prwtos oros einai mhden
k = 0:N-1;
Ak = 4/pi * 1./(2*k+1);  % oi 10 oroi Fourier

t = 0:d:D*To; % xronos t
w0 = 2*pi/To; % kuklikh suxnothta

x = Ao + Ak*sin( ((2*k'+1)*w0) * t);
plot(t,x);
```

```
xlabel('Time in sec');
ylabel('Amplitude');
title('Xmmmm... doulevei!!!');
```



Καλό κυνήγι απαντήσεων