

ΗΥ215: 1^η Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 14 Οκτωβρίου

Απορίες: yannis@csd.uoc.gr

1. Για τους μιγαδικούς

$$z_1 = 1 + j2$$

$$z_2 = -2 + j$$

βρείτε γεωμετρικά και αλγεβρικά τα αποτελέσματα των πράξεων:

$$z_1 z_2$$

$$z_1 + z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2}$$

$$z_2$$

$$z_1 z_1^*$$

$$\frac{1}{z_1}$$

$$\frac{1}{z_2}$$

$$\frac{1}{z_2^*}$$

όπου * σημαίνει συζυγές.

2. Γράψτε στη μορφή $x + jy$ τον μιγαδικό αριθμό

$$e^{ej}$$

3. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Euler δείξτε ότι:

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{4}\pi$$

4. Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία στην εξίσωση:

$$|z + 2| = |z - 1|$$

όπου z είναι μιγαδικός αριθμός, και λύστε την εξίσωση αλγεβρικά. Ήδη από την γεωμετρική ερμηνεία θα πρέπει να γνωρίζεται τη λύση της εξίσωσης.

5. Εστω το σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} A & |t| \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Σχεδιάστε τα σήματα $x(t)$, $x(t - 1)$ και $x(t + 1)$ καθώς και το σήμα $x(t) + x(t - 1) + x(t + 1)$.

6. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος:

$$x(t) = A \left\{ 1 - \cos(2\pi ft) + \frac{1}{2} \sin(4\pi ft) \right\}$$

7. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης των σημάτων:

$$x(t) = 2 + \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y(t) = x(t) \cos(12\pi t)$$

$$z(t) = y(t) \cos(12\pi t)$$

Μπορούμε να ανακτήσουμε το σήμα $x(t)$ από το $z(t)$ αν θα είχαμε τη δυνατότητα να ενισχύσουμε ή να μηδενίσουμε κάποιες συχνότητες; Δώστε αναλυτικά την απάντησή σας.

Χρησιμοποιώντας Matlab σχεδιάστε ως προς το χρόνο τα παραπάνω σήματα. Θεωρήστε ότι

```
t=-10:0.01:10;
```

8. Εστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = x^4 - 1$$

για τιμές της μεταβλητής x από -3 έως $+3$ χρησιμοποιώντας Matlab. Επειδή υπάρχουν άπειρες τιμές μέσα σε αυτό το εύρος τιμών, θα πρέπει να επιλέξουμε μερικές από αυτές. Εστω ότι η πρώτη είναι η $x_1 = -3$ και μετά με βήμα 0.1 επιλέγουμε τη δεύτερη, δηλ. $x_2 = -2.9$ κ.λ.π. μέχρι να φτάσουμε στην τελική τιμή $x = 3$. Χρησιμοποιώντας την εντολή `plot` μπορούμε να σχεδιάσουμε την συνάρτηση $f(x)$ ως προς τις τιμές (που επιλέξαμε) της μεταβλητής x . Στο Matlab οι εντολές που πρέπει να πληκτρολογήσουμε είναι:

```
x=-3:0.1:3;
```

```
f = x.^2-1;
```

```
plot(x,f);
```

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να σχεδιάσουμε και συναρτήσεις μιγαδικές. Π.χ.

$$f(z) = z^4 - 1$$

Μονάχα τώρα θα πρέπει να επιλέξουμε να σχεδιάσουμε το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος. Δεν μπορούμε να δούμε και τα δύο ταυτόχρονα. Στην περίπτωση μας θα ήταν καλό να συγκρίνουμε το πραγματικό μέρος της μιγαδικής εξίσωσης με αυτό που σχεδιάσαμε παραπάνω για τη συνάρτηση $f(x)$. Χρησιμοποιώντας τις εντολές

help (e.g., help mesh)

meshgrid

mesh

real

view

plot

προσπαθήστε να απεικονήσετε στον 3-διάστατο χώρο το πραγματικό μέρος της $f(z)$ χρησιμοποιώντας την εντολή mesh. Θεωρήστε ένα εύρος τιμών για τον φανταστικό άξονα παρόμοιο με αυτό του πραγματικού άξονα:

$-3j:0.1j:3j$

Σχολιάστε τα σχήματα που έχετε απεικονίσει για την $f(x)$ και $f(z)$.