ΗΥ215: Λύσεις $6^{\eta\varsigma}$ Σειράς Ασκήσεων

1. Γνωρίζουμε ότι αν $x(t) \leftrightarrow X(f)$ τότε

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} x(-t-t_0) &\leftrightarrow e^{+j2\pi f t_0} X^*(f) \\ x(-t+t_0) &\leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X^*(f) \end{aligned}$$

Λύση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(-t-t_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\, e^{-j2\pi f(-t'-t_0)}\, dt' = e^{j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\, e^{j2\pi f t'}\, dt' = X^\star(f)\, e^{j2\pi f t_0}$$

Θέτοντας: $\boxed{\begin{array}{ll} t' = -t-t_0 & \Rightarrow dt' = -dt \\ t \to \infty & \Rightarrow t' \to -\infty \\ t \to -\infty & \Rightarrow t' \to +\infty \end{array}}$

Παρομοίως: $\int_{-\infty}^{\infty} x(-t+t_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\, e^{-j2\pi f(-t'+t_0)}\, dt' = X^\star(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$,

Θέτοντας: $\boxed{\begin{array}{ll} t' = -t+t_0 & \Rightarrow dt' = -dt \\ t \to \infty & \Rightarrow t' \to -\infty \\ t \to -\infty & \Rightarrow t' \to +\infty \end{array}}$

2. Δείξτε ότι αν $x(t) \leftrightarrow X(f)$ τότε

$$t^n x(t) \leftrightarrow (\frac{j}{2\pi})^n \frac{d^n X(f)}{df^n}$$

Λύση:

$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \Rightarrow \frac{d^n X(f)}{df^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, (-j2\pi t)^n\, e^{-j2\pi f t}\, dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d^n X(f)}{df^n} = (-j2\pi)^n \int_{-\infty}^{\infty} t^n\, x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} t^n\, x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = (\frac{1}{-j2\pi})^n \frac{d^n X(f)}{df^n} = (\frac{j}{2\pi})^n \frac{d^n X(f)}{df^n}$

3. Να υπολογιστεί ο μετ. Fourier των σημάτων:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-a|t|} \\ x(t) &= \frac{2a}{a^2+4(\pi t)^2} \end{aligned}$$

με $a > 0$.

Λύση:

$x(t) = e^{-\alpha|t|} = e^{\alpha t}\,\epsilon(-t) + e^{-\alpha t}\,\epsilon(t)$

αν $y(t) = e^{-\alpha t}\,\epsilon(t) \Rightarrow Y(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$

τότε $e^{\alpha t}\,\epsilon(-t) = y(-t) \rightarrow Y^\star(f) = \frac{1}{\alpha - j2\pi f}$

Άρα $X(f) = Y(f) + Y^\star(f) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+(2\pi f)^2}$

Λόγω της ιδιότητας της συμμετρίας του μετασχηματισμού Fourier έχουμε ότι:

$X(t) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+(2\pi t)^2} \rightarrow x(-f) = e^{-\alpha|f|}$

Άρα: $\frac{2\alpha}{\alpha^2+(2\pi t)^2} \leftrightarrow e^{-\alpha|f|}$

4. (α′) Δείξτε ότι

$$X(f) = e^{-\pi f^2}$$

είναι λύση της εξίσωσης

$$\frac{dX(f)}{df} + 2\pi f X(f) = 0$$

(β′) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες του μετ. Fourier καθώς και το παραπάνω αποτέλεσμα, δείξτε ότι:

$$e^{-\pi t^2} \leftrightarrow e^{-\pi f^2}$$

Σημείωση: η συνάρτηση $e^{-\pi t^2}$ έχει την ιδιαιτερότητα να διατηρεί τη μορφή της τόσο στο χρόνο όσο και στη συχνότητα. Αξιοσημείωτη πράγματι ιδιαιτερότητα.

(γ′) Σχεδιάστε με τη βοήθεια του Matlab τις συναρτήσεις

$$x(t) = e^{-\pi t^2} \;\; \text{και} \;\; X(f) = e^{-\pi f^2}$$

για $-\pi \leq t \leq \pi$ και $-\pi \leq f \leq \pi$.

Λύση:

(α′) $X(f) = e^{-\pi f^2} \Rightarrow \frac{dX(f)}{df} = -2\pi f\, e^{-\pi f^2}$
άρα $-2\pi f\, e^{-\pi f^2} + 2\pi f\, e^{-\pi f^2} = 0$.
Επομένως πράγματι η $X(f) = e^{-\pi f^2}$ είναι λύση της εξίσωσης:
$\frac{dX(f)}{df} + 2\pi f\, X(f) = 0$

(β′) Ξέρουμε ότι $\frac{d^n X(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n\, X(f) \Rightarrow -2\pi t\, e^{-\pi t^2} \leftrightarrow j2\pi f\, X(f)$

Όμως $t\, e^{-\pi t^2} \leftrightarrow \frac{j}{2\pi}\, \frac{dX(f)}{df} \Rightarrow -2\pi t\, e^{-\pi t^2} \leftrightarrow -j\, \frac{dX(f)}{df}$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι: $\frac{dX(f)}{df} = -2\pi f\, X(f) \Rightarrow \frac{dX(f)}{df} + 2\pi f\, X(f) = 0$

Σύμφωνα με το (α) ερώτημα $X(f) = e^{-\pi f^2}$

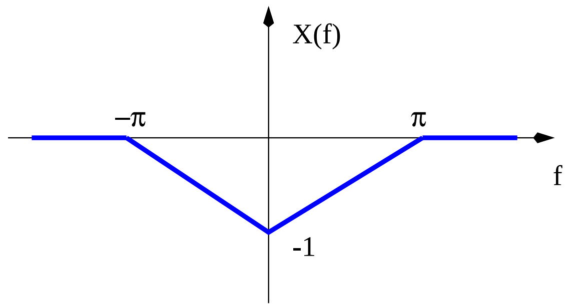
5. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετ. Fourier του φάσματος που φαίνεται στο Σχήμα 1

Σημ: Κάντε χρήση των αποτελεσμάτων της άσκησης 2.

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε παραγώγους απλά στο χώρο της συχνότητας και θα κάνουμε χρήση της σχέσης:

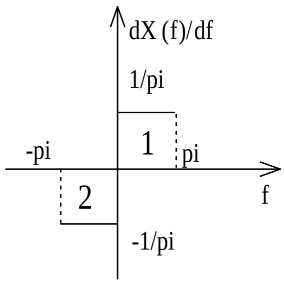
$$t^n\, x(t) \leftrightarrow \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n X(f)}{df^n}$$



Σχήμα 1: Φάσμα συχνοτήτων άσκησης 5.

$$X(f) = \begin{cases} \frac{|f|}{\pi} - 1 & , -pi \le f \le pi \\ 0 & , otherwise \end{cases} \Rightarrow \frac{dX(f)}{df} = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} & , f < 0 \\ \frac{1}{\pi} & , f > 0 \end{cases}$$

Όμως:



$$\left.\begin{array}{l} 1 : \stackrel{F^{-1}}{\longrightarrow} \operatorname{sinc}(\pi t)\, e^{j 2\pi \frac{\pi}{2} t} \\ 2 : \stackrel{F^{-1}}{\longrightarrow} -\operatorname{sinc}(\pi t)\, e^{j 2\pi \frac{\pi}{2} t} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 2 \rightarrow \operatorname{sinc}(\pi t)\, 2j\, \sin(\pi^2 t)$$

και $\frac{j}{2\pi} \frac{dX(f)}{df} \stackrel{F^{-1}}{\longrightarrow} t\, x(t) \Rightarrow -\frac{1}{\pi} \operatorname{sinc}(\pi t)\, \sin(\pi^2 t) = t\, x(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = -\operatorname{sinc}(\pi t) \frac{\sin(\pi^2 t)}{\pi t} \Rightarrow x(t) = -\pi \operatorname{sinc}^2(\pi t)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει και από την ιδιότητα της συμμετρίας στον μετασχηματισμό Fourier.

6. Θεωρούμε το σήμα

$$x(t) = e^{-at}\epsilon(t) \quad a > 0$$

(α′) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, $\phi_x(\tau)$, του σήματος.

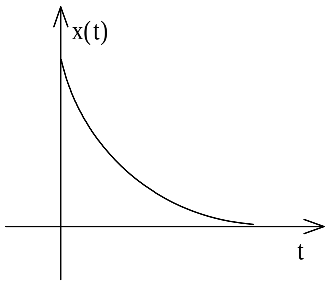
(β′) Να υπολογίσετε τον μετ. Fourier, $\Phi_x(f)$, της $\phi_x(\tau)$.

(γ′) Να επιβεβαιώσετε ότι

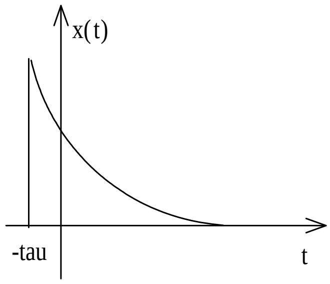
$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

όπου $X(f)$ ο μετ. Fourier του σήματος $x(t)$.

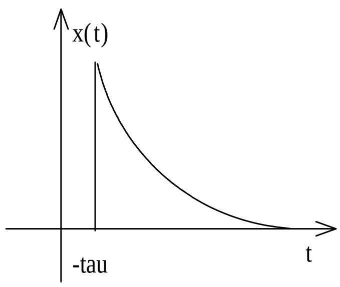
Λύση:



$X(f) = \frac{1}{\alpha+j2\pi f} \Rightarrow |X(f)|^2 = \frac{1}{\alpha^2+(2\pi f)^2}$



$\tau > 0$ $\quad \phi_x(\tau) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha t}\, e^{-\alpha(t+\tau)}\, dt = e^{-\alpha\tau}\, \frac{1}{-2\alpha}\; e^{-\alpha t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2\alpha}\, e^{-\alpha\tau}$



$\tau < 0$ $\quad \phi_x(\tau) = \int\limits_{-\tau}^\infty e^{-\alpha t}\, e^{-\alpha(t+\tau)}\, dt = e^{-\alpha\tau}\, \frac{1}{-2\alpha}\; e^{-2\alpha t}\Big|_{-\tau}^\infty = \frac{1}{2\alpha}\, e^{\alpha\tau}$

Δηλαδή: $\phi_x(\tau) = \frac{1}{2\alpha}\left[e^{-\alpha\tau}\,\epsilon(\tau) + e^{\alpha\tau}\,\epsilon(-\tau)\right] \Rightarrow$

$\Phi_x(f) = \frac{1}{2\alpha}\left[X(f) + X^\star(f)\right] = \frac{1}{\alpha^2+(2\pi f)^2} = |X(f)|^2$

7. Παρακάτω σας δίδεται ο κώδικας σε Matlab για τον υπολογισμό του μετ. Fourier ενός σήματος καθώς και ο υπολογισμός του αντίστροφου μετ. Fourier. Τα ολοκληρώματα που χρειάζονται να υπολογιστούν, προσεγγίζονται με τη μέθοδο Riemann και χρησιμοποιούμε ως παράδειγμα το σήμα

$$x(t) = e^{-at}\epsilon(t) \quad a > 0$$

Σχολιάστε τον κώδικα όπου σας ζητηθεί και βέβαια να τον χρησιμοποιήσετε. Είναι πολύ χρήσιμος για τον έλεγχο των απαντήσεων στις ασκήσεις σας αλλά και στον έλεγχο του υπολογισμού Fourier με το Matlab.

Σημείωση: Το Matlab έχει δική του συνάρτηση για τον υπολογισμό του μετ. Fourier και του αντιστρόφου: fft, ifft αντίστοιχα. Παρόλα αυτά, ο παραπάτω κώδικας σας δίνει πλήρη και εύκολο έλεγχο.

```
% xronos ...
dt = 1/100;  % deigmatolhpsia aksona xronou
a = 0.2;     % stathera a tou shmatos
D = 4*1/a;   % diarkeia se sec toy shmatos
t = 0:dt:D;  % xronos
x = exp(-a*t); % shma
plot(t,x)      % plot!! mmm...

% syxnothta ....
df = 1/D;      % deigmatolhpsia aksona syxnothtas
f = -pi:df:pi; % syxnothta

% pinakas analyshs: met. Fourier. SXOLIASTE
M = exp(-j*(2*pi*t'*f));

% pinakas synthesis: ant. met. Fouier. SXOLIASTE
```

```
Minv = exp(j*(2*pi*f'*t));

% upologismos met.Fourier (kata Riemann)
X = dt*x*M;   % prosoxh ... einai migadikos

% plot fasma platos (magnitude) kai fasma fashs (phase)
subplot(211);plot(f,abs(X));ylabel('magnitude');
subplot(212);plot(f,angle(X));ylabel('phase');
xlabel('Frequency in Hz');

% thewrhtiko apotelesma
Xth = 1./(a+ j*2 *pi*f);

% Sugkrish
subplot(211);plot(f,abs(X));ylabel('magnitude');
hold on;plot(f,abs(Xth),'g');
legend('Riemann','Theory');hold off;
subplot(212);plot(f,angle(X));ylabel('phase');
hold on;plot(f,angle(Xth),'g');
legend('Riemann','Theory');hold off;
xlabel('Frequency in Hz');

% antistrofos met. Fourier - kratame to real meros. To imag einai
% para polu mikro kai ofeiletai se arithmitika sfalmata
xx = real(df*X*Minv);

% sugkrish:
clf;
plot(t,x);hold on;plot(t,xx,'g');hold off
```