ΗΥ215: Λύσεις $5^{ης}$ Σειράς Ασκήσεων

1. Εστω το σήμα

$$z(t) = x(t)\, y(t)$$

Δείξτε ότι:

(α′) αν $x(t)$ και $y(t)$ είναι περιττά σήματα τότε το $z(t)$ είναι άρτιο σήμα

(β′) αν $x(t)$ είναι περιττό σήμα και $y(t)$ είναι άρτιο σήμα τότε το $z(t)$ είναι περιττό σήμα

(γ′) αν $x(t)$ είναι άρτιο σήμα και $y(t)$ είναι περιττό σήμα τότε το $z(t)$ είναι περιττό σήμα

(δ′) αν $x(t)$ και $y(t)$ είναι άρτια σήματα τότε το $z(t)$ είναι άρτιο σήμα

Λύση:

(α′) $z(t) = x(t)\, y(t) \Rightarrow z(-t) = x(-t)\, y(-t) = (-x(t))\,(-y(t)) = x(t)\, y(t) \Rightarrow$
$\Rightarrow z(-t) = z(t)$ άρα $z(t)$ άρτιο

(β′) $z(-t) = x(-t)\, y(-t) = -x(t)\, y(t) = -z(t)$ άρα $z(t)$ περιττό

(γ′) $z(-t) = x(-t)\, y(-t) = x(t)\,(-y(t)) = -z(t)$ άρα $z(t)$ περιττό

(δ′) $z(-t) = x(-t)\, y(-t) = x(t)\, y(t) = z(t)$ άρα $z(t)$ άρτιο

2. Δείξτε ότι για ένα οποιοδήποτε πραγματικό σήμα $x(t)$ το πραγματικό μέρος του μετ. Fourier του σήματος, $R(f)$ ισούται με:

$$R(f) = 2\int_0^{\infty} x_e(t)\cos(2\pi f t)dt$$

ενώ το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού, $I(f)$, ισούται με:

$$I(f) = -2\int_0^{\infty} x_o(t)\sin(2\pi f t)dt$$

όπου $x_e(t)$ και $x_o(t)$ είναι το άρτιο και περιττό μέρος αντίστοιχα του σήματος $x(t)$.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι:

$F\{x(t)\} = X(f) = R(f) + j\,I(f),$

όπου $R(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\cos(2\pi f t)\,dt$ και $I(f) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\sin(2\pi f t)\,dt$

Όμως: $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$

Άρα: $R(f) = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_e(t)\,\cos(2\pi f t)\,dt}_{\text{άρτια συνάρτηση ως προς } t} + \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_o(t)\,\cos(2\pi f t)\,dt}_{\text{περιττή συνάρτηση ως προς } t, = 0} =$

$= 2\int\limits_{0}^{\infty} x_e(t)\,\cos(2\pi f t)\,dt$

$I(f) = \underbrace{-\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_o(t)\,\sin(2\pi f t)\,dt}_{\text{άρτια συνάρτηση ως προς } t} + \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_e(t)\,\sin(2\pi f t)\,dt}_{\text{περιττή συνάρτηση ως προς } t, = 0} =$

$= -2\int\limits_{0}^{\infty} x_o(t)\,\sin(2\pi f t)\,dt$

3. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x(t) &= x_e(t) + x_o(t) \\ R(f) &= 2\int_0^\infty x_e(t)\cos(2\pi f t)dt \\ I(f) &= -2\int_0^\infty x_o(t)\sin(2\pi f t)dt \end{aligned}$$

όπου $x_e(t)$ και $x_o(t)$ είναι το άρτιο και περιττό μέρος αντίστοιχα ενός σήματος $x(t)$ δείξτε ότι

$$X(f) = R(f) + jI(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}\,dt$$

Λύση:

$R(f) + j\,I(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_e(t)\,\cos(2\pi f t)\,dt - j\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_o(t)\,\sin(2\pi f t)\,dt =$

$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\cos(2\pi f t)\,dt - \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_o(t)\,\cos(2\pi f t)\,dt}_{\text{περιττή ως προς } t,\ = 0} -$

$$-j \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \sin(2\pi f t)\, dt + j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)\, \sin(2\pi f t)\, dt}_{\text{περιττή ως προς } t, \; = 0} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, (\cos(2\pi f t) - j\, \sin(2\pi f t))\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= X(f)$$

4. Εστω τα περιοδικά σήματα:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(2\pi f_0 t) \\ y(t) &= (A/2) \cos(2 f_0 t + \pi/4) \end{aligned}$$

   (α′) Υπολογίστε τη συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων

   (β′) Υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος:

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

   Λύση:

   (α′) η περίοδος του πρώτου σήματος είναι $T_1 = \frac{1}{f_0}$, ενώ η περίοδος του δεύτερου σήματος είναι $T_2 = \pi\, T_1 = \frac{\pi}{f_0}$

   Γνωρίζουμε ότι: $\phi_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{\star}\, Y_k\, e^{j2\pi k \frac{1}{T_2}\tau}$
   όμως το πρώτο σήμα έχει μόνο συνιστώσες στις συχνότητες $-f_0$ και f_0,
   ενώ το δεύτερο στις συχνότητες $-\frac{f_0}{\pi}$ και $\frac{f_0}{\pi}$
   Άρα σε διαφορετικές θέσεις και επομένως $\phi_{xy}(\tau) = 0$

   (β′) $z(t) = x(t) + y(t)$ όπου $\boxed{T = \pi\, T_1 = T_2}$

$$\phi_2(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [x(t) + y(t)]\, [x(t+\tau) + y(t+\tau)]\, dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, x(t+\tau)\, dt + \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\, x(t+\tau)\, dt +$$

$$+\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,y(t+\tau)\,dt + \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\,y(t+\tau)\,dt =$$

$$= \phi_x(\tau) + \underbrace{\phi_{yx}(\tau)}_{0} + \underbrace{\phi_{xy}(\tau)}_{0} + \phi_y(\tau) =$$

$$= \phi_x(\tau) + \phi_y(\tau) = \frac{1}{2}\,A^2\,\cos\left(2\pi f_0 \tau\right) + \frac{1}{2}\,\frac{A^2}{4}\,\cos\left(2 f_0 \tau\right)$$

5. Εστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T, το οποίο σε μια περίοδο έχει τη μορφή

$$x(t) = \begin{cases} A & |t| \le t_c \\ 0 & t_c < |t| < T/2 \end{cases}$$

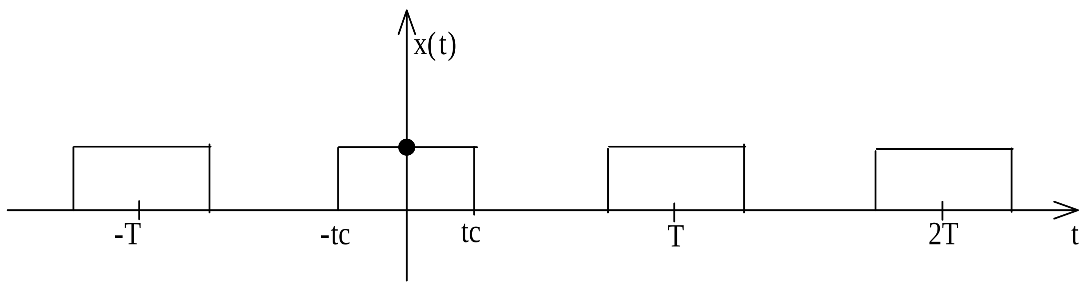
(α′) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του $x(t)$ και να την σχεδιάσετε για $|t| \le 3T/2$ στις περιπτώσεις

$$\begin{aligned} t_c &= T/4 \\ t_c &= 3T/8 \end{aligned}$$

(β′) Σχολιάστε την περίπτωση όπου $t_c = T/2$ παρατηρώντας τη μορφή του σήματος $x(t)$ και της αυτοσυσχέτισής του.

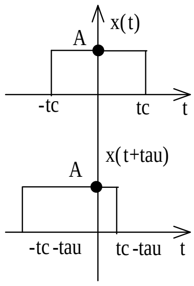
Λύση:

(α′)

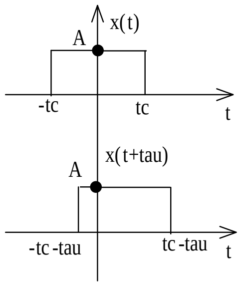


$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

Σε μία περίοδο:



για $\tau > 0$ $\qquad \phi_x(\tau) = \frac{A^2}{T} \int\limits_{-t_c}^{t_c-\tau} dt = \frac{A^2}{T}\,(2t_c - \tau)$

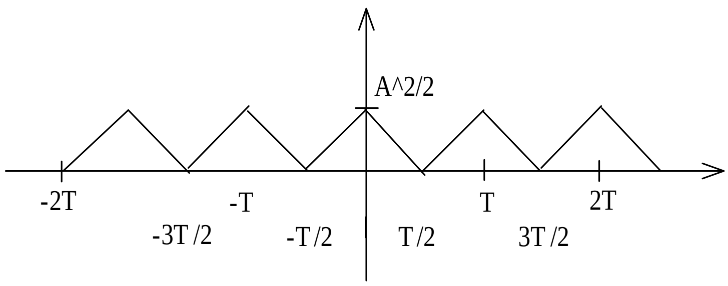


για $\tau < 0$ $\qquad \phi_x(\tau) = \frac{A^2}{T} \int\limits_{-t_c-\tau}^{t_c} dt = \frac{A^2}{T}\,(2t_c + \tau)$

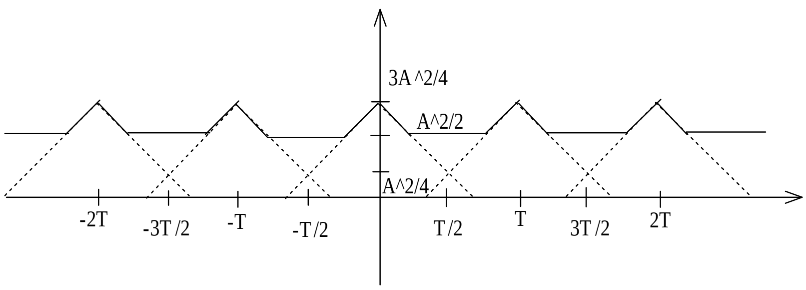
Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε το $\phi_x(\tau)$ ως:

$\phi_x(\tau) = \frac{A^2}{T}\, 2t_c\,(1 - \frac{|\tau|}{2t_c})$

για $t_c = \frac{T}{4}$ $\qquad \phi_x(\tau) = \frac{A^2}{2}(1 - \frac{|\tau|}{\frac{T}{2}})$

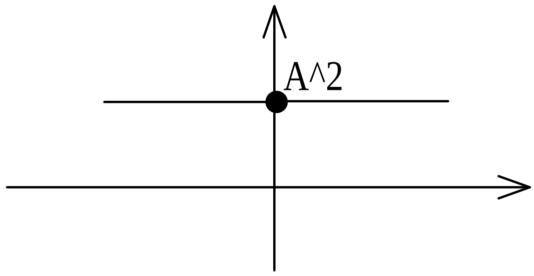


για $t_c = \frac{3T}{8}$ $\qquad \phi_x(\tau) = \frac{3}{4}\,A^2\,(1 - \frac{|\tau|}{3\frac{t}{4}})$



$\phi_x(\frac{T}{2}) = \frac{3}{4}\,A^2\,(1 - \frac{\frac{T}{2}}{\frac{3T}{4}}) = \frac{A^2}{4}$

(β′) για $t_c = \frac{T}{2}$ $\qquad \phi_x(\tau) = A^2$



λογικό, γιατί $x(t) = A \Rightarrow \phi_x(\tau) = \frac{A^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = \frac{A^2}{T}\,T = A^2$

<u>Σημείωση:</u> Για πραγματικά σήματα ισχύος, όπως το $x(t) = A$ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ορίζεται ως: $\phi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$. Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στην περίπτωσή μας έχουμε: $\phi_x(\tau) = A^2$

6. (α′) Να υπολογίσετε τον μετ. Fourier των σημάτων

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-at}\epsilon(t) \\ x(2t) &= e^{-2at}\epsilon(t) \\ x(t/2) &= e^{-at/2}\epsilon(t) \end{aligned}$$

όπου

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

και $a > 0$.

Απ: $X(f) = \dfrac{1}{a + j2\pi f}$ για το $x(t)$.

(β′) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σήματα καθώς και το φάσμα πλάτους και φάσης κάθε μετασχηματισμού Fourier που θα υπολογίσετε.

(γ′) Σε ποιες συχνότητες το φάσμα φάσης είναι ίσο με $\pi/4$ και $-\pi/4$; Ποια είναι η τιμή του φάσματος πλάτους στη μηδενική συχνότητα καθώς και στις παραπάνω συχνότητες σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις;

Λύση:

(α′) $X(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int\limits_{0}^{\infty} e^{(-\alpha - j2\pi f)t}\, dt =$

$= \frac{1}{-\alpha - j2\pi f}\ e^{(-\alpha - j2\pi f)t}\Big|_0^{\infty} \stackrel{\star}{=} \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$

$\star$<u>Σημείωση:</u> $e^{(-\alpha - j2\pi f)t}$ όταν $t \to \infty \Rightarrow \lim_{t\to\infty} (e^{-\alpha t}\, e^{-j2\pi f t}) = 0\,\gamma = 0$

, όπου $\gamma = \lim_{t\to\infty} e^{-j2\pi f t}$ κάποια τιμή με $|\gamma| < \infty$

Από την ιδιότητα $x(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|}\, X(\frac{f}{\alpha})$ έχουμε:

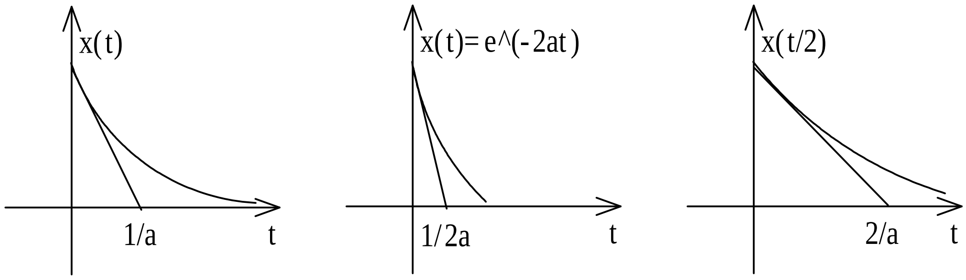
$X(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\, \frac{1}{\alpha + j\pi f} = X_1(f)$ και $X(\frac{t}{2}) \leftrightarrow 2\, \frac{1}{\alpha + j4\pi f} = X_2(f)$

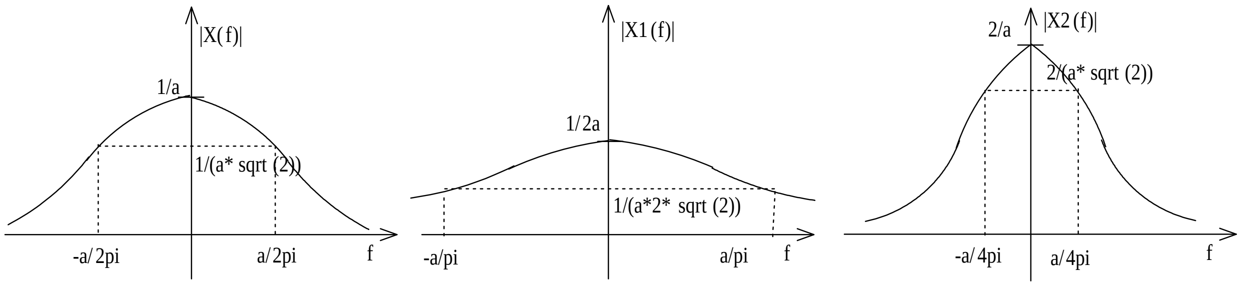
$$X(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \Rightarrow \begin{cases} |X(f)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\,\pi^2\, f^2}} \Rightarrow \begin{cases} f = 0 \Rightarrow |X(f)| = \frac{1}{\alpha} \\ f = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow |X(f)| = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} \end{cases} \\ \theta_x(f) = -\arctan(\frac{2\pi f}{\alpha}) \Rightarrow \begin{cases} f = 0 \Rightarrow \theta_x(f) = 0 \\ f = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow \theta_x(f) = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

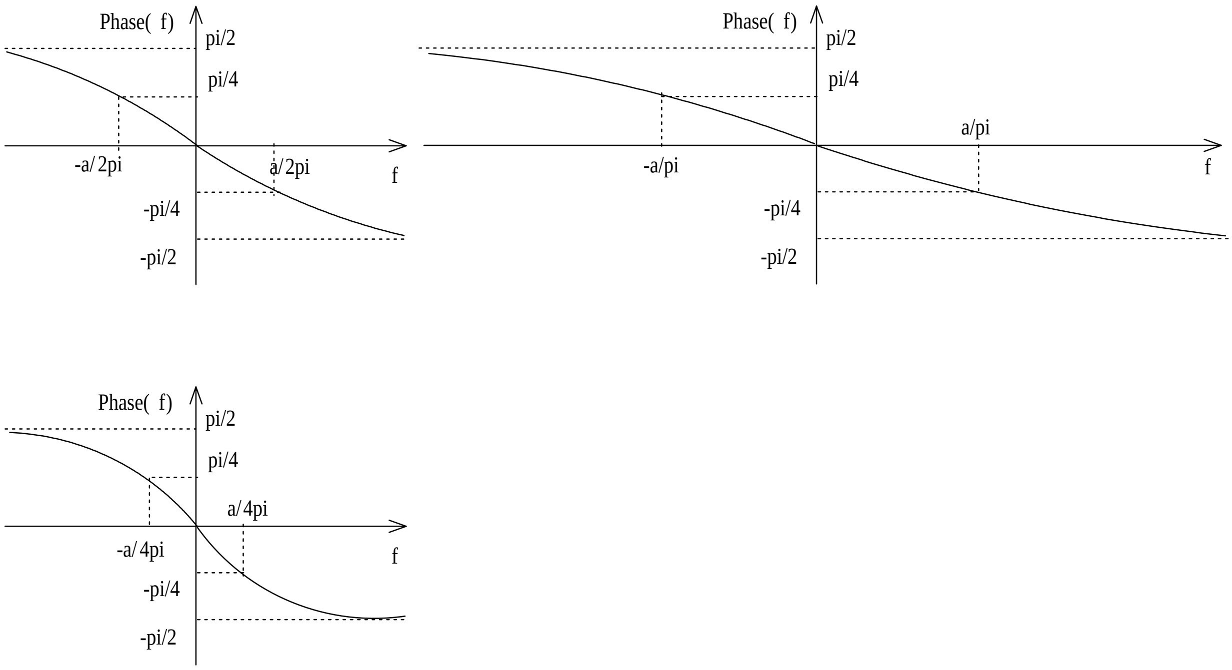
$$X_1(f) = \frac{1}{2}\, \frac{1}{\alpha + j\pi f} \Rightarrow \begin{cases} |X_1(f)| = \frac{1}{2}\, \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \pi^2\, f^2}} \Rightarrow \begin{cases} f = 0 \to |X_1(f)| = \frac{1}{2}\, \frac{1}{\alpha} \\ f = \frac{\alpha}{\pi} \to |X_1(f)| = \frac{1}{2}\, \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} \end{cases} \\ \theta_{x_1}(f) = -\arctan(\frac{\pi f}{\alpha}) \Rightarrow \begin{cases} f = 0 \to \theta_{x_1}(f) = 0 \\ f = \frac{\alpha}{\pi} \to \theta_{x_1}(f) = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

$$X_2(f) = \frac{2}{\alpha + j4\pi f} \Rightarrow \begin{cases} |X_2(f)| = 2\, \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 16\,\pi^2\, f^2}} \Rightarrow \begin{cases} f = 0 \to |X_2(f)| = \frac{2}{\alpha} \\ f = \frac{\alpha}{4\pi} \to |X_2(f)| = \frac{2}{\alpha\sqrt{2}} \end{cases} \\ \theta_{x_2}(f) = -\arctan(\frac{4\pi f}{\alpha}) \Rightarrow \begin{cases} f = 0 \to \theta_{x_2}(f) = 0 \\ f = \frac{\alpha}{4\pi} \to \theta_{x_2}(f) = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

(β′)


x(t)
1/a
t
x(t)= e^(-2at)
1/2a
t
x(t/2)
2/a
t


|X(f)|
1/a
1/(a* sqrt (2))
-a/2pi
a/2pi
f
|X1(f)|
1/2a
1/(a*2* sqrt (2))
-a/pi
a/pi
f
2/a
|X2(f)|
2/(a* sqrt (2))
-a/4pi
a/4pi
f


Phase(f)
pi/2
pi/4
-a/2pi
a/2pi
f
-pi/4
-pi/2
Phase(f)
pi/2
pi/4
a/pi
-a/pi
f
-pi/4
-pi/2
Phase(f)
pi/2
pi/4
a/4pi
-a/4pi
f
-pi/4
-pi/2