ΗΥ215: Λύσεις $3^{ης}$ Σειράς Ασκήσεων

1. $x(t) = \Re\left\{e^{j200\pi t^2}\ \cos(2000\pi t - \frac{\pi}{2})\right\} =$

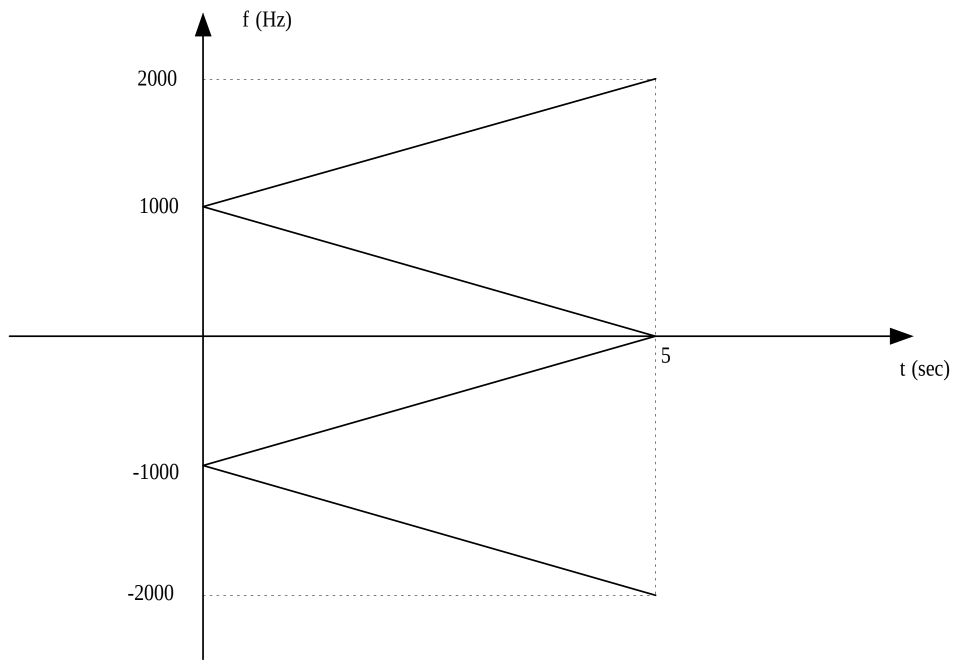
$$= \frac{1}{2}\Re\left\{e^{j200\pi t^2}\ e^{j2000\pi t}\ e^{-j\frac{\pi}{2}}\right\} + \frac{1}{2}\Re\left\{e^{j200\pi t^2}\ e^{-j2000\pi t}\ e^{j\frac{\pi}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\ \cos(200\pi t^2 + 2000\pi t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\ \cos(200\pi t^2 - 2000\pi t + \frac{\pi}{2})$$

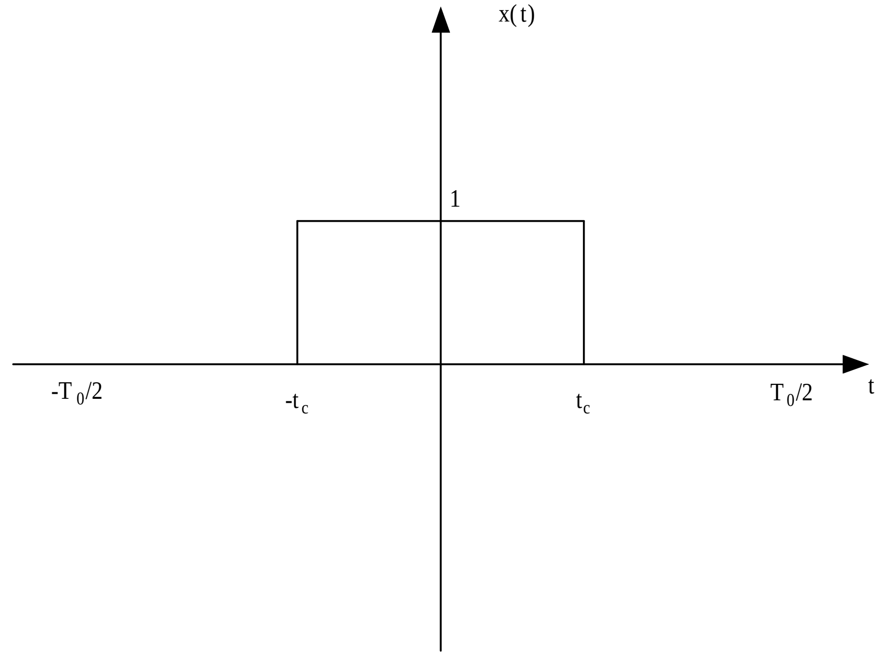
$$\psi_1(t) = 200\pi t^2 + 2000\pi t - \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{2\pi}\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{2\pi}(200\,2\pi t + 1000\,2\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1 = 200t + 1000$$

$$\psi_2(t) = 200\pi t^2 - 2000\pi t + \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_2 = 200t - 1000$$



2.



$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int\limits_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} t\, dt = \frac{1}{T_0} \int\limits_{-t_c}^{t_c} dt = \frac{2t_0}{T_0}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int\limits_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-jk2\pi f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0} \frac{1}{-jk2\pi f_0} \left. e^{-jk2\pi f_0 t} \right|_{-t_c}^{t_c} =$$

$$= \frac{1}{-jk2\pi} \left(e^{-jk2\pi \frac{t_c}{T_0}} - e^{jk2\pi \frac{t_c}{T_0}}\right) = \frac{1}{k\pi} \sin\left(k2\pi \frac{t_c}{T_0}\right)$$

$$\text{Για } t_c = \frac{T_0}{4} \Rightarrow \begin{cases} X_0 = \frac{2}{T_0} \frac{T_0}{4} = \frac{1}{2} \\ X_k = \frac{1}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{Για } t_c = \frac{T_0}{10} \Rightarrow \begin{cases} X_0 = \frac{1}{5} \\ X_k = \frac{1}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{5}\right) \end{cases}$$

Άρα $\boxed{\text{Για } t_c = \frac{T_0}{4}}$ $x(t) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(k2\pi f_0 t\right)$

Σημείωση: $\boxed{A_k = 2X_k}$

Παρατηρούμε ότι τα X_k σε αυτή την περίπτωση μηδενίζονται για $k\frac{\pi}{2} = \pm m\pi \Rightarrow k = \pm 2m, m = 1, 2, ...$

Οι πρώτοι μηδενισμοί εκατέρωθεν της $f = 0$ γίνονται για $k = +2$ και $k = -2$ (για $m = 1$ και $m = -1$ αντίστοιχα).

Από τον όρο $\cos(k2\pi f_0 t)$ προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει στις συχνότητες $-2f_0$ και $2f_0$.

Άρα $\left.\begin{array}{l}\Delta f_1 = 4f_0 \\ f_0 = \frac{1}{T_0}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta f_1 = \frac{4}{T_0}}$

Όμοια για $\boxed{t_c = \frac{T_0}{10}}$. $x(t) = \frac{1}{5} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{5}\right) \cos(k2\pi f_0 t)$

$k\,\frac{\pi}{5} = \pm m\pi \Rightarrow k = \pm 5m \Rightarrow k = \pm 5\,(m=1) \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\Delta f_2 = 10\,f_0\,(-5f_0 : 5f_0) \\ f_0 = \frac{1}{T_0}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta f_2 = \frac{10}{T_0}}$

Αντίστοιχα: $\left.\begin{array}{l}\Delta t_1 = 2t_c \\ t_c = \frac{T_0}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{T_0}{2}$

$\left.\begin{array}{l}\Delta t_2 = 2t_c \\ t_c = \frac{T_0}{10}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{T_0}{5}$

$\left.\begin{array}{l}\Delta t_1\,\Delta f_1 = \frac{T_0}{2}\,\frac{4}{T_0} = 2 \\ \Delta t_2\,\Delta f_2 = \frac{T_0}{5}\,\frac{10}{T_0} = 2\end{array}\right\} \Rightarrow$ Πράγματι $\boxed{\Delta t \Delta f = c}$

Παρατήρηση: Όσο μικραίνει το Δt αυξάνεται το Δf. Δηλαδή ισχύει μια αντιστρόφως ανάλογη σχέση. Αρχή της αβεβαιότητας.

3. (α′) $\sin(27\pi t) = \frac{e^{j27\pi t} - e^{-j27\pi t}}{2j}$

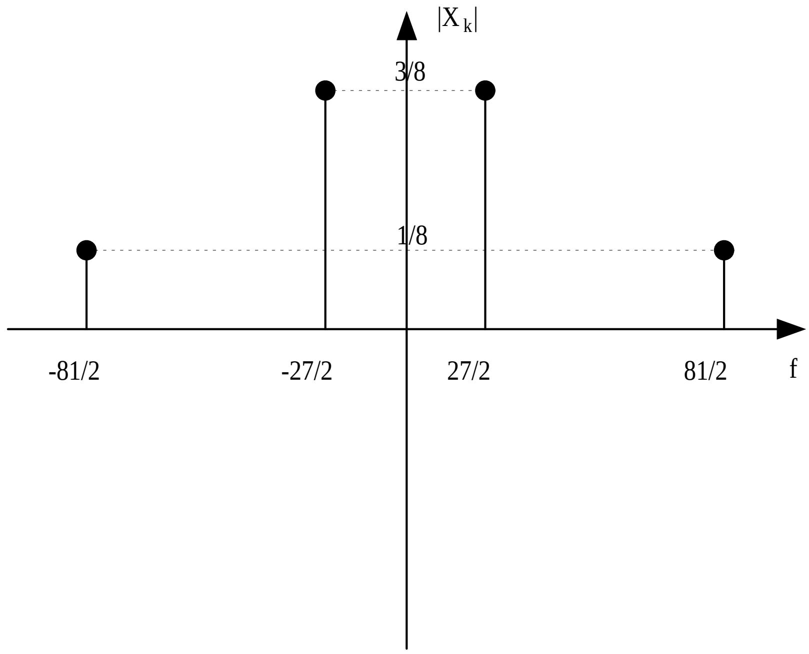
   Άρα $x(t) = \sin^3 27\pi t = \frac{j}{8}\,(3e^{-27j\pi t} - 3e^{27j\pi t} + e^{81j\pi t} - e^{-81j\pi t}) =$

   $= -\frac{1}{4}\,\sin(81\pi t) + \frac{3}{4}\,\sin(27\pi t)$

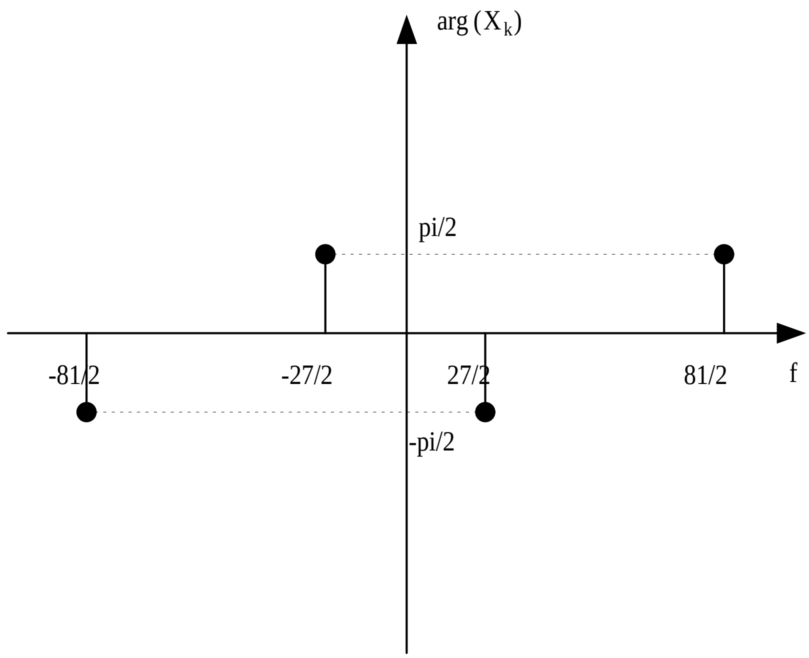
   (β′) Για να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και φάσης είναι πιο απλό να κάνουμε τα $\sin \rightarrow \cos$.

   Έτσι:

   $x(t) = \frac{3}{4}\,\cos\left(27\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\,\cos\left(81\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$



φάσμα πλάτους



φάσμα φάσης

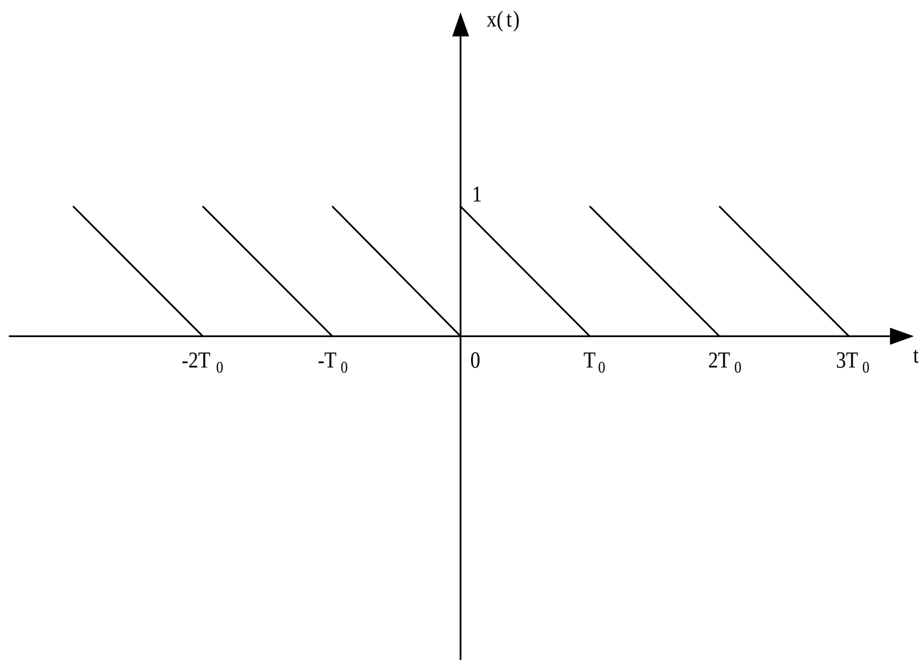
(γ′) $\begin{array}{l} T_1 = \frac{2\pi}{27\pi} = \frac{2}{27} \\ T_2 = \frac{2\pi}{81\pi} = \frac{2}{81} \end{array}$ $T_0 = l_1 T_1 = l_2 T_2 \Rightarrow \frac{l1}{l2} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\boxed{T_1 = T_0 = \frac{2}{27}}$$

(δ′) Από το θεώρημα Parseval:

$$\frac{1}{T_0}\int\limits_0^{T_0} x^2(t)\,dt = A_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \Rightarrow \int\limits_0^{T_0} \sin^6(27\pi t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}+\frac{1}{16}\right)\frac{2}{27} = \frac{5}{8}\,\frac{1}{27} = \frac{5}{216}$$

4.



$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int\limits_0^{T_0}\left(-\frac{t}{T_0}+1\right)dt = \frac{1}{T_0}\left(-\frac{1}{T_0}\int\limits_0^{T_0} t\,dt + \int\limits_0^{T_0} dt\right) = \frac{1}{T_0}\left(-\frac{1}{T_0}\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^{T_0} + t\big|_0^{T_0}\right) = \frac{1}{T_0}\left(-\frac{T_0}{2}+T_0\right) = \frac{1}{2}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}(ax-1)}{a^2}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\left[\underbrace{-\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} t e^{-jk\omega_0 t} dt}_{a} + \underbrace{\int_0^{T_0} e^{-jk\omega_0 t} dt}_{b}\right]$$

Το ολοκλήρωμα της $e^{-jk\omega_0 t}$ σε μία περίοδο ισούται με 0, αφού $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$. Συνεπώς το b στην παραπάνω εξίσωση είναι ίσο με το 0.

Για το a έχουμε:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} te^{-jk\omega_0 t}dt &= -\frac{1}{T_0}\left(\frac{e^{-jk\omega_0 t}(-jk\omega_0 t-1)}{(-jk\omega_0)^2}\bigg|_0^{T_0}\right) \\
&= -\frac{1}{T_0}\left(\frac{e^{-jk2\pi f_0 T_0}(-j2\pi f_0 T_0-1)}{-4k^2\pi^2 f_0^2} - \frac{-1}{-4k^2\pi^2 f_0^2}\right) \\
&= -\frac{1}{T_0}\left(\frac{e^{-j2k\pi}(-j2k\pi-1)}{-4k^2\pi^2 f_0^2} - \frac{1}{4k^2\pi^2 f_0^2}\right) \\
&= -\frac{1}{T_0}\left(\frac{j2k\pi+1}{4k^2\pi^2 f_0^2} - \frac{1}{4k^2\pi^2 f_0^2}\right) \\
&= -\frac{1}{T_0}\left(\frac{j2k\pi}{4k^2\pi^2 f_0^2} + \frac{1}{4k^2\pi^2 f_0^2} - \frac{1}{4k^2\pi^2 f_0^2}\right) \\
&= -\frac{1}{T_0}\frac{j2k\pi}{4k^2\pi^2 f_0^2} \\
&= -\frac{j}{2k\pi f_0}
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας τα a και b στην αρχική εξίσωση έχουμε:

$$
\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\left(\underbrace{-\frac{j}{2k\pi f_0}}_{a} + \underbrace{0}_{b}\right) \\
&= -\frac{j}{2k\pi f_0 T_0} = -\frac{j}{2k\pi}
\end{aligned}
$$

$A_k = 2\,X_k = \frac{1}{k\pi}\,e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $A_0 = X_0$

$x(t) = \frac{1}{2} + \Re\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\,e^{-j\frac{\pi}{2}}\,e^{jk\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,\sin\left(k\omega_0 t\right)$

5. $f_i = \frac{1}{2\pi}\,d\psi(t) = f_c - I_0\,e^{\frac{-t}{t}}\,f_m\,\sin\left(2\pi f_m t + \phi_m\right) - \frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{t}{t}}\,\frac{I_0}{t}\,\cos\left(2\pi f_m t + \phi_m\right)$

   Κώδικας Matlab:

```
Td = 6;

f_s = 11025;

t = 0:1/f_s:Td;

tau = 2;

I0 = 10;
```

```
A = 1*exp(-t/tau);
I = I0*exp(-t/tau);
Phim = -pi2;
Phic = -pi2;
f_m = 220;
f_c = 110;
x = A.*cos(2*pi*f_c*t + I.*cos(2*pi*f_m*t + Phim) + Phic);
soundsc(x, f_s);
```