ΗΥ-215 Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
1η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1
Για τους μιγαδικούς

$$z_1 = 2 - 5j$$
$$z_2 = 8 + 3j$$

βρείτε γεωμετρικά και αλγεβρικά τα αποτελέσματα των πράξεων:

$$z_1 z_2$$
$$z_1 + z_2$$
$$\frac{z_1}{z_2}$$
$$z1 z_1^*$$

όπου $.^*$ σημαίνει συζυγές.

Λύση
Εδώ θα δείξουμε τον αλγεβρικό υπολογισμό του αποτελέσματος.

- Ο υπολογισμός του γινομένου δύο μιγαδικών αριθμών είναι εξαιρετικά απλή πράξη, αρκεί να έχουμε στο μυαλό μας την εξίσωση $j^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2-5j)(8+3j) \\ &= 16 + 6j - 40j - 15j^2 \\ &= 16 - 34j + 15 \\ &= 31 - 34j \end{aligned}$$

- Στην πρόσθεση μιγαδικών, προσθέτουμε το πραγματικό μέρος του z_1 με το πραγματικό μέρος του z_2 και το φανταστικό μέρος του z_1 με το φανταστικό μέρος του z_2:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2-5j) + (8+3j) \\ &= (2+8) + (-5+3)j \\ &= 10 - 2j \end{aligned}$$

- Το πηλίκο

$$\frac{z_1}{z_2}$$

δύο μιγαδικών υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντάς το με το κλάσμα

$$\frac{z_2^*}{z_2^*} = 1$$

Συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2^*}{z_2*} \\
&= \frac{2-5j}{8+3j} \cdot \frac{8-3j}{8-3j} \\
&= \frac{(2-5j)(8-3j)}{(8+3j)(8-3j)} \\
&= \frac{16-6j-40j-15}{64-24j+24j+9} \\
&= \frac{1-46j}{73} \\
&= \frac{1}{73} - \frac{46}{73}j
\end{aligned}$$

- Από γνωστή ιδιότητα, όταν πολλαπλασιάζουμε έναν μιγαδικό αριθμό $a+bj$ με τον συζυγή του $a-bj$ παίρνουμε τον πραγματικό αριθμό a^2+b^2. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
z_1 z_1^* &= 2^2 + 5^2 \\
&= 4 + 25 \\
&= 29
\end{aligned}$$

Άσκηση 2
Λύστε τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
z^5 &= 1 \\
z^2 &= -j \\
z^4 &= -16
\end{aligned}$$

Λύση
Η εξίσωση $z^n = a$, όπου $z,\ a \in \mathbb{C}$, έχει n λύσεις. Αν γράψουμε $a = |a|e^{j\phi} = |a|(\cos\phi + j\sin\phi)$, αυτές δίνονται από την σχέση:

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\phi+2k\pi}{n} + j\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right),\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

Συνεπώς έχουμε:

$$1 = 1e^{j0} = 1(\cos 0 + j\sin 0)$$

$$
\begin{aligned}
&z^5 = 1 \Rightarrow \\
&z_k = \sqrt[5]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{5} + j\sin\frac{0+2k\pi}{5}\right),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \Rightarrow \\
&z_k = \begin{cases}
1\left(\cos\frac{0}{5} + j\sin\frac{0}{5}\right) & = & 1 \\
1\left(\cos\frac{2\pi}{5} + j\sin\frac{2\pi}{5}\right) & = & \cos\frac{2\pi}{5} + j\sin\frac{2\pi}{5} \\
1\left(\cos\frac{4\pi}{5} + j\sin\frac{4\pi}{5}\right) & = & \cos\frac{4\pi}{5} + j\sin\frac{4\pi}{5} \\
1\left(\cos\frac{6\pi}{5} + j\sin\frac{6\pi}{5}\right) & = & \cos\frac{6\pi}{5} + j\sin\frac{6\pi}{5} \\
1\left(\cos\frac{8\pi}{5} + j\sin\frac{8\pi}{5}\right) & = & \cos\frac{8\pi}{5} + j\sin\frac{8\pi}{5}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Ομοίως:

$$
-j = 1e^{j\frac{3\pi}{2}} = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + j\sin\frac{3\pi}{2}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&z^2 = -j \Rightarrow \\
&z_k = \sqrt[2]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{5} + j\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{5}\right),\ k = 0,\ 1 \Rightarrow \\
&z_k = \begin{cases}
1\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}}{2} + j\sin\frac{\frac{3\pi}{2}}{2}\right) & = & \cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4} \\
1\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{2} + j\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{2}\right) & = & \cos\frac{7\pi}{2} + j\sin\frac{7\pi}{2}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Τέλος:

$$
-16 = 16e^{j\pi} = 16\left(\cos\pi + j\sin\pi\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&z^4 = -16 \Rightarrow \\
&z_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + j\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \Rightarrow \\
&z_k = \begin{cases}
2\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4}\right) \\
2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + j\sin\frac{5\pi}{4}\right) \\
2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + j\sin\frac{7\pi}{4}\right)
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Άσκηση 3

Γνωρίζοντας ότι

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots
\end{aligned}
$$

δείξτε την σχέση Euler:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

Λύση

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{jx} &= 1 + jx + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \cdots + \frac{(jx)^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - j\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + j^n\frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + jx + j^2\frac{x^2}{2!} + j^3\frac{x^3}{3!} + j^4\frac{x^4}{4!} + \cdots + j^n\frac{x^n}{n!} + \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

Επίσης έχουμε:

$$\begin{aligned} \cos x + j \sin x = 1 &- \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ &+ jx - j\frac{x^3}{3!} + j\frac{x^5}{5!} - j\frac{x^7}{7!} + \cdots + (j)^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \\ &= 1 + j^2\frac{x^2}{2!} + j^4\frac{x^4}{4!} + j^6\frac{x^6}{6!} + \cdots + j^2n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ &+ jx + j^3\frac{x^3}{3!} + j^5\frac{x^5}{5!} + j^7\frac{x^7}{7!} + \cdots + (j)^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

Αναδιατάσοντας τους όρους στην εξίσωση (2) παρατηρούμε ότι τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων (1) και (2) ταυτίζονται. Συνεπώς και τα πρώτα μέλη είναι ίσα και άρα:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

Άσκηση 4

Έστω $\{z_i\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο μιγαδικών αριθμών. Δείξτε ότι:

$$\prod_i z_i = \prod_i |z_i| \left[\cos\left(\sum_i \theta_i\right) + j \sin\left(\sum_i \theta_i\right)\right]$$

όπου

$$z_i = |z_i| e^{j\theta_i}$$

Λύση
Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\prod_i z_i &= \prod_i \left(|z_i| e^{j\theta_i}\right) \\
&= \prod_i \left(|z_i|\right) e^{j\sum_i \theta_i} \text{ και από τη σχέση του Euler} \\
&= \prod_i |z_i| \left[\cos\left(\sum_i \theta_i\right) + j\sin\left(\sum_i \theta_i\right)\right]
\end{aligned}
$$

Άσκηση 5
Χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler γράψτε το $\cos(3\theta)$ ως συνάρτηση του $\sin(\theta)$ και $\cos(\theta)$.

Λύση
Από την αντίστροφη σχέση του Euler έχουμε ότι

$$\cos(3\theta) = \frac{e^{j3\theta} + e^{-j3\theta}}{2}$$

Παρατηρώντας ότι $e^{j3\theta} = \left(e^{j\theta}\right)^3$ η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$
\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \frac{\left[e^{j\theta}\right]^3 + \left[e^{-j\theta}\right]^3}{2} \\
&= \frac{[cos(\theta) + j\sin(\theta)]^3 + [cos(\theta) - j\sin(\theta)]^3}{2}
\end{aligned}
$$

Έχουμε:

$$[cos(\theta) + j\sin(\theta)]^3 = \cos^3(\theta) + 3j\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - j\sin^3(\theta)$$

και

$$[\cos(\theta) - j\sin(\theta)]^3 = \cos^3(\theta) - 3j\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + j\sin^3(\theta)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στο ότι

$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin(\theta)$$

Άσκηση 5
Την εκφώνηση ΔΕΝ την γράφω... :-)

Λύση

Οι βασικές εντολές για την δημιουργία 3Δ γραφημάτων, δηλαδή γραφημάτων πραγματικών συναρτήσεων 2 μεταβλητών είναι οι `meshgrid` και `mesh`. Η πρώτη δημιουργεί κατά κάποιο τρόπο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, ενώ η δεύτερη κάνει την πραγματική δουλειά της σχεδίασης στην εικόνα. Η συνάρτηση `meshgrid` παίρνει σαν ορίσματα δύο διανύσματα τα οποία εκφράζουν το εύρος και την ανάλυση στους δύο άξονες. Για παράδειγμα αν θέλαμε στον x άξονα να έχουμε τιμές στο διάστημα $[-3, 3]$, με ανάλυση 0.1 θα γράφαμε:

```
x = [-3:0.1:3];
```

Με την εντολή

```
[X,Y] = meshgrid([-3:0.1:3],[-3:0.1:3]);
```

δημιουργούμε δύο πίνακες οι οποίοι περιλαμβάνουν τις τιμές για την x και την y συνιστώσα αντίστοιχα πάνω σε ένα (τετράγωνο) πλέγμα, με ανάλυση 0.1.

Μπορούμε να θεωρήσουμε το πλέγμα που δημιουργεί η παραπάνω εντολή σαν μία προσέγγιση του μιγαδικού επιπέδου για την τετράγωνη περιοχή που ορίζεται από τους μιγαδικούς αριθμούς $\{-3-3j,\ 3-3j,\ -3+3j,\ 3+3j\}$. Το ρόλο του πραγματικού μέρους παίζει ο πίνακας X ενώ το ρόλο του φανταστικού μέρους παίζει ο πίνακας Y. Συγκεκριμένα μπορούμε να γράψουμε κάθε μιγαδικό αριθμό σε αυτή την περιοχή (και φυσικά ανάλογα με την ανάλυση που έχουμε επιλέξει) ως:

```
comp = X + i*Y;
```

Για την παραπάνω εντολή έχουμε να σημειώσουμε δύο πράγματα:

- Οι πίνακες X και Y πρέπει να έχουν το ίδιο μέγεθος. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να επιλέξουμε τους άξονες, όχι μόνο να έχουν τα ίδια όρια, αλλά και την ίδια ανάλυση.

- Η μεταβλητή i παίζει το ρόλο της φανταστικής μονάδας στο Matlab, αρκεί να μην της έχουμε αναθέσει κάποια τιμή.

Αφού έχουμε κατασκευάσει τους μιγαδικούς αριθμούς στην περιοχή που μας ενδιαφέρει, για να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης $f(z) = z^2 - 1$, πολύ απλά πληκτρολογούμε:

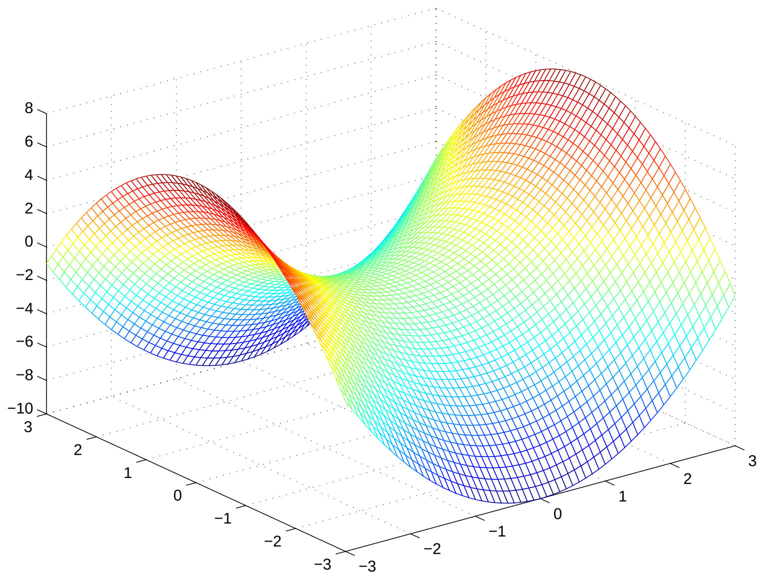
```
func = comp.^2 - 1;
```

Η f είναι μία συνάρτηση $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Στο Matlab, αλλά και γενικότερα, δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε τέτοιου είδους συναρτήσεις. Το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να σχεδιάσουμε συναρτήσεις στον 3Δ χώρο δηλαδή $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ή $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$. Για να πάρουμε λοιπόν μία ιδέα για το πως συμπεριφέρεται η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ πρέπει να σχεδιάσουμε ξεχωριστά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της. Αυτό άλλωστε ζητάει και η εκφώνηση της άσκησης και συγκεκριμένα να σχεδιάσουμε το πραγματικό της μέρος. Στο Matlab για να πάρουμε το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού χρησιμοποιούμε την συνάρτηση `real`.

Έτσι πληκτρολογώντας την εντολή

```
mesh(X,Y,real(func));
```

παίρνουμε το αποτέλεσμα που φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Το πραγματικό μέρος της $f(z) = z^2 - 1$