

# 5<sup>η</sup> Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 5 Δεκεμβρίου

Απορίες: yannis@csd.uoc.gr

1. Εστω το σήμα

$$z(t) = x(t) y(t)$$

Δείξτε ότι:

(α') αν  $x(t)$  και  $y(t)$  είναι περιττά σήματα τότε το  $z(t)$  είναι άρτιο σήμα

(β') αν  $x(t)$  είναι περιττό σήμα και  $y(t)$  είναι άρτιο σήμα τότε το  $z(t)$  είναι περιττό σήμα

(γ') αν  $x(t)$  είναι άρτιο σήμα και  $y(t)$  είναι περιττό σήμα τότε το  $z(t)$  είναι περιττό σήμα

(δ') αν  $x(t)$  και  $y(t)$  είναι άρτια σήματα τότε το  $z(t)$  είναι άρτιο σήμα

2. Δείξτε ότι για ένα οποιοδήποτε πραγματικό σήμα  $x(t)$  το πραγματικό μέρος του μετ. Fourier του σήματος,  $R(f)$  ισούται με:

$$R(f) = 2 \int_0^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft) dt$$

ενώ το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού,  $I(f)$ , ισούται με:

$$I(f) = -2 \int_0^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft) dt$$

όπου  $x_e(t)$  και  $x_o(t)$  είναι το άρτιο και περιττό μέρος αντίστοιχα του σήματος  $x(t)$ .

3. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x(t) &= x_e(t) + x_o(t) \\ R(f) &= 2 \int_0^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft) dt \\ I(f) &= -2 \int_0^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft) dt \end{aligned}$$

όπου  $x_e(t)$  και  $x_o(t)$  είναι το άρτιο και περιττό μέρος αντίστοιχα ενός σήματος  $x(t)$  δείξτε ότι

$$X(f) = R(f) + jI(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

4. Εστω τα περιοδικά σήματα:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(2\pi f_0 t) \\ y(t) &= A/2 \cos(2f_0 t + \pi/4) \end{aligned}$$

(α') Υπολογίστε τη συνάρτηση ετεροσυσχέτισης  $\phi_{xy}(\tau)$  των σημάτων

(β') Υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος:

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

5. Εστω το περιοδικό σήμα  $x(t)$  με περίοδο  $T$ , το οποίο σε μια περίοδο έχει τη μορφή

$$x(t) = \begin{cases} A & |t| \leq t_c \\ 0 & t_c < |t| < T/2 \end{cases}$$

(α') Να υπολογίσετε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του  $x(t)$  και να την σχεδιάσετε για  $|t| \leq 3T/2$  στις περιπτώσεις

$$t_c = T/4$$

$$t_c = 3T/8$$

(β') Σχολιάστε την περίπτωση όπου  $t_c = T/2$  παρατηρώντας τη μορφή του σήματος  $x(t)$  και της αυτοσυσχέτισής του.

6. (α') Να υπολογίσετε τον μετ. Fourier των σημάτων

$$x(t) = e^{-at}\epsilon(t)$$

$$x(2t) = e^{-2at}\epsilon(t)$$

$$x(t/2) = e^{-at/2}\epsilon(t)$$

όπου

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

και  $a > 0$ .

Απ:  $X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$  για το  $x(t)$ .

(β') Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σήματα καθώς και το φάσμα πλάτους και φάσης κάθε μετασχηματισμού Fourier που θα υπολογίσετε.

(γ') Σε ποιες συχνότητες το φάσμα φάσης είναι ίσο με  $\pi/4$  και  $-\pi/4$ ; Ποια είναι η τιμή του φάσματος πλάτους στη μηδενική συχνότητα καθώς και στις παραπάνω συχνότητες σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις;