ΗΥ215: 4^{η} Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 28 Νοεμβρίου

Απορίες:yannis@csd.uoc.gr

1. Από το θεώρημα Parseval γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, y^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, Y_k^*$$

όπου X_k και Y_k είναι οι συντελεστές αναπτύγματος σε σειρά Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$, αντίστοιχα. Δείξτε ότι στην περίπτωση που τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$ είναι πραγματικά και έχουν μέση τιμή μηδέν, τότε:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, y^*(t)dt = 2\sum_{k=1}^{\infty} \Re\{X_k\, Y_k^*\}$$

2. Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα:

$$x(t) = \frac{1}{4}t^2 \qquad 0 \leq t < 2\pi$$

το οποίο το θεωρούμε περιοδικό με περίοδο $T = 2\pi$.

Χρησιμοποιώντας Matlab σχεδιάστε τα σήματα:

$$\begin{aligned} x_{10}(t) &= \sum_{k=-10}^{10} X_k e^{jk\omega_0 t} \\ x_{20}(t) &= \sum_{k=-20}^{20} X_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

για $|t| \leq 2T$.

Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος σε μια περίοδο και υπολογίστε το ποσοστό της ενέργειας που κατανέμεται στις πρώτες 10 και 20 συχνότητες του σήματος (δηλ: από $-10\omega_0$ έως $10\omega_0$ και από $-20\omega_0$ έως $20\omega_0$). Τέλος υπολογίστε τα αθροίσματα:

$$\sum_{|k|>10} |X_k|^2$$

$$\sum_{|k|>20} |X_k|^2$$

δηλ. το μέσω τετραγωνικό σφάλμα χρησιμοποιώντας τις πρώτες 10 και 20 συχνότητες του σήματος, αντίστοιχα.

3. Δείξτε ότι στο χώρο Hilbert $L^2(t_1, t_2)$, η ευκλείδια απόσταση μεταξύ δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ δίδεται από τη σχέση:

$$d^2(x, y) = \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - y(t)|^2 dt = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\Re < x, y^* >$$

όπου $||\cdot||$ δηλώνει νόρμα 2 και

$$< x, y^* >= \int_{t_1}^{t_2} x(t) y^*(t) dt$$

Σχολιάστε τις περιπτώσεις όπου $x(t)$ είναι κάθετο στο $y(t)$ καθώς και την περίπτωση που το $x(t)$ είναι παράλληλο πρός το $y(t)$.

4. Θεωρούμε τα σήματα:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega_0 t) \\ y(t) &= A\cos(\omega_0 (t - \tau)) \end{aligned}$$

Υπολογίστε την ευκλείδια απόσταση:

$$d^2(x, y) = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t) - y(t)|^2 dt$$

όπου $T = 2\pi/\omega_0$.

Χρησιμοποιώντας Matlab σχεδιάστε την παραπάνω απόσταση για $-T/2 \leq \tau \leq T/2$.

5. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις:

$$\psi_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\psi_2(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T/2 \\ -1 & T/2 \leq t < T \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\psi_3(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t < T/4 \\ 1 & T/4 \leq t < 3T/4 \\ -1 & 3T/4 \leq t < T \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

είναι κάθετες μεταξύ τους στο χώρο $L^2(0, T)$. Σχεδιάστε τις στο χρόνο (για να έχετε και μια εικόνα των συναρτήσεων αυτών).

6. Θεωρούμε το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Θέλουμε να το γράψουμε σαν γραμμικό συνδυασμό 3 εκθετικών συναρτήσεων:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \psi_k(t)$$

όπου

$$\psi_k(t) = e^{-kt} \quad k = 1, 2, 3$$

που αποτελούν τη βάση ενός χώρου με $0 \leq t < \infty$. Υπολογίστε τους συντελεστές α_k του παραπάνω αναπτύγματος, έτσι ώστε η προσέγγιση να είναι βέλτιστη. Με τη βοήθεια του Matlab σχεδιάστε τα σήματα $x(t)$ και $\hat{x}(t)$ για $0 \leq t \leq 3$.