

ΗΥ215: 3^η Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 14 Νοεμβρίου, Γ205

Απορίες: yannis@csd.uoc.gr

1. Σχεδιάστε το διάγραμμα χρόνου συχνότητας για το chirp σήμα:

$$x(t) = \Re\{e^{j200\pi t^2} \sin(2000\pi t)\}$$

όπου \Re σημαίνει πραγματικό μέρος, για $0 \leq t \leq 5$ sec για θετικές και για αρνητικές συχνότητες.

2. Θεωρούμε το περιοδικό σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq t_c \\ 0 & t_c \leq |t| \leq T_0/2 \end{cases}$$

όπου T_0 είναι η περίοδος του σήματος και $t_c < T_0/2$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε $t_c = T_0/4$ ενώ στη δεύτερη θεωρούμε $t_c = T_0/10$.

- (α') Για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις σχεδιάστε το σήμα $x(t)$ για $-2T_0 \leq t \leq 2T_0$.
- (β') Για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις αναπτύξτε το $x(t)$ σε σειρά Fourier.
- (γ') Για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης για $-10 \cdot 2\pi f_0 \leq f \leq 10 \cdot 2\pi f_0$ όπου $f_0 = 1/T_0$.
- (δ') Ορίζουμε ως εύρος ζώνης χρόνου, Δt , το χρονικό διάστημα που περιέχει την περισσότερη ενέργεια του σήματος σε μια περίοδο. Για την άσκηση αυτή είναι φανερό ότι $\Delta t = 2t_c$. Ομοια ορίζουμε εύρος ζώνης συχνοτήτων, Δf , την απόσταση σε Hz των δύο πρώτων μηδενισμών του φάσματος πλάτους εκατέρωθεν της $f = 0$. Υπολογίστε σε κάθε μια από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις το εύρος ζώνης χρόνου και συχνότητας. Δείξτε ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι:

$$\Delta t \Delta f = c$$

όπου c μια σταθερά. Η παραπάνω σχέση είναι ανάλογη με την αρχή της αβεβαιότητας στην Κβαντομηχανική. Υπολογίστε τη σταθερά c και σχολιάστε την παραπάνω σχέση.

3. Εστω

$$x(t) = \sin^3(27\pi t)$$

- (α') Αναπτύξτε το $x(t)$ σε σειρά Fourier
- (β') Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος
- (γ') Βρείτε την περίοδο του σήματος
- (δ') Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{T_0} \sin^6(27\pi t) dt$$

οπου T_0 είναι η περίοδος του σήματος που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

4. Εστω το σήμα

$$x(t) = -\frac{t}{T_0} + 1 \quad 0 \leq t < T_0$$

- (α') Σχεδιάστε το σήμα για $|t| \leq 3T_0$.
- (β') Αναπτύξτε το σήμα σε σειρά Fourier
Απ. $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(k\omega_0 t)$.
- (γ') Σας δίνεται ο κώδικας Matlab που ελέγχει αν το παραπάνω αποτέλεσμα πράγματι προσεγγίζει το αρχικό σήμα $x(t)$. Προσπαθήστε να καταλάβετε τον κώδικα 'τρέχοντάς τον'.

```

To=2;           % periodos se seconds
d = To/600;    % posa shmeia ana periodo thelw na exw?
D = 3;        % poses periodous thelw na dw?
N=16;         % posous orous sth seira Fourier tha xrhsimopoihs?
t = 0:d:D*To; % xronos t
w0 = 2*pi/To; % kuklikh suxnothta
k=1:N;
A = 1./k;
x=1/2+1/pi*A*sin(k'*w0*t);
plot(t,x);
xlabel('time (sec)'); ylabel('Amplitude');

```

5. Frequency Modulation, FM

Μια κατηγορία σημάτων όπου η συχνότητα αλλάζει με το χρόνο είναι τα chirp σήματα:

$$x(t) = A \cos(\psi(t))$$

όπου η φάση $\psi(t)$ είναι μια απλή συνάρτηση δευτέρου βαθμού ως προς το t . Μια πιο πολύπλοκη φάση μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην διαμόρφωση κατά συχνότητα (Frequency Modulation, FM):

$$\psi(t) = 2\pi f_c t + I(t) \cos(2\pi f_m t + \phi_m) + \phi_c$$

όπου χρησιμοποιώντας ένα μεταβλητό πλάτος ως προς το χρόνο, έχουμε το σήμα

$$x(t) = A(t) \cos(\psi(t))$$

Η διαμόρφωση σε συχνότητα έχει πολλές εφαρμογές στις τηλεπικοινωνίες και στη σύνθεση ηλεκτρονικής μουσικής με synthesizers.

(α') Υπολογίστε τη στιγμιαία συχνότητα του $x(t)$ όταν

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

όπου I_0 μια σταθερά.

(β') Θεωρώντας επίσης

$$A(t) = A_0 e^{-t/\tau}$$

με $A_0 = 1$, και με τις υπόλοιπες τιμές να είναι $I_0 = 10$, $f_c = 110$ Hz, $f_m = 220$ Hz $\phi_m = \phi_c = -\pi/2$ και $\tau = 2$ sec. μπορείτε να συνθέσετε ένα πολύ φυσικό ήχο καμπάνας.

Γράψτε ένα κώδικα σε Matlab που να συνθέτει το σήμα $x(t)$ με τα στοιχεία που σας δίνονται, χρησιμοποιώντας ως συχνότητα δειγματοληψίας $fs = 11025$ Hz και συνολικής διάρκειας $T = 6$ sec. Στη σελίδα του μαθήματος σας δίνεται το σήμα που θα πρέπει να συνθέσετε ως `kampana1.wav`. Συγκρίνετε το σήμα που εσείς συνθέσατε με αυτό που είναι στη σελίδα.

Προσπαθήστε να παράγεται και ένα δεύτερο ήχο καμπάνας με διαφορετικούς παραμέτρους, π.χ. $I_0 = 3$, $f_c = 250$ Hz, $f_m = 350$ Hz, $\tau = 1$ και όλοι οι άλλοι παράμετροι παραμένουν ίδιοι.

Σε κάθε περίπτωση σχεδιάστε με τη βοήθεια του Matlab τη στιγμιαία συχνότητα του σήματος ως προς το χρόνο.