ΗΥ215: 2^η Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 1 Νοεμβρίου

Απορίες:yannis@csd.uoc.gr

1. Θεωρήστε το περιοδικό σήμα

$$x(t) = A\cos(2\pi f t)$$

με περίοδο $T = 1/f$.

(α′) Δείξτε ότι η μετατόπιση του σήματος κατά $0 \leq \tau < T$ ισοδυναμεί με αρχική μετατόπιση φάσης $0 \leq \phi < 2\pi$

(β′) Ποιά θα πρέπει να είναι τα όρια του τ για να έχουμε $-\pi \leq \phi < \pi$

2. Σχεδιάστε στο χώρο των συχνοτήτων και στο μιγαδικό επίπεδο τα σήματα:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A\sin(2\pi f\ t + \phi) \\ x_2(t) &= -A\cos(2\pi f\ t + \phi) \end{aligned}$$

όταν $\phi = \pi/4$. Σημείωση: Χρησιμοποιήστε τη σχέση του Euler και να θυμάστε ότι το πλάτος ενός μιγαδικού αριθμού είναι πάντα θετικός αριθμός. Επίσης η φάση που θα προκύψει να είναι μεταξύ των ορίων $-\pi \leq \phi < \pi$

3. Εστω το σήμα

$$x(t) = A\cos(2\pi f t)$$

Βρείτε ένα σήμα $\hat{x}(t)$ έτσι ώστε το σήμα

$$\overline{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

να έχει μόνο πλάτος στις θετικές συχνότητες. Θα μπορούσε ένα πραγματικό σήμα να έχει το ίδιο φάσμα πλάτους με το σήμα $\overline{x}(t)$; Εξηγήστε αναλυτικά αλλά ταυτόχρονα και συνοπτικά την απάντησή σας. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης των σημάτων: $x(t)$ και $\overline{x}(t)$.

4. Στην προηγούμενη άσκηση προσπαθήσαμε να μηδενίσουμε τις αρνητικές συχνότητες ενός σήματος $x(t)$ προσθέτωντας στο αρχικό σήμα ένα δεύτερο σήμα $\hat{x}(t)$. Μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε σήμα $x(t)$, το σήμα $\hat{x}(t)$ δίδεται από τη σχέση

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται και μετασχηματισμός Hilbert του σήματος $x(t)$.

Χρησιμοποιώντας το σήμα της προηγούμενης άσκησης

$$x(t) = A\cos(2\pi f t)$$

επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα που βρήκατε χρησιμοποιώντας όμως τώρα τον μετ. Hilbert του σήματος $x(t)$.

5. Εστω το περιοδικό με περίοδο T σήμα:

$$x(t) = A\sin(2\pi f t)$$

Δείξτε ότι οι τιμές των παρακάτω ολοκληρωμάτων παραμένουν αμετάβλητες όταν το σήμα $x(t)$ μετατοπίζεται κατά τ:

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t)dt &= \int_0^T x(t-\tau)dt \\ \int_0^T |x(t)|dt &= \int_0^T |x(t-\tau)|dt \end{aligned}$$

6. Διαμόρφωση και αποδιαμόφωση κατά πλάτος (Amplitude Modulation - AM).

Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους των σημάτων:

$$\begin{aligned} x(t) &= 8 + 3\sin\left(\pi t - \tfrac{\pi}{4}\right) \quad \text{Αρχικό σήμα} \\ y(t) &= x(t)\cos(10\pi t) \quad \text{Διαμόρφωση κατά πλάτος} \\ z(t) &= y(t)\cos(10\pi t) \quad \text{Αποδιαμόρφωση κατά πλάτος} \end{aligned}$$

Αν θέλατε να ανακτήσετε το σήμα $x(t)$ από το $z(t)$ ποιες συχνότητες του $z(t)$ θα μηδενίζατε και ποιες θα ενισχύατε και πόσο;

Χρησιμοποιώντας Matlab σχεδιάστε ως προς το χρόνο τα παραπάνω σήματα. Θεωρήστε ότι

```
t=-10:0.01:10;
```