

ΗΥ215: 1^η Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 23 Οκτωβρίου

Απορίες: yannis@csd.uoc.gr

1. Για τους μιγαδικούς

$$z_1 = 2 - j5$$

$$z_2 = 8 + j3$$

βρείτε γεωμετρικά και αλγεβρικά τα αποτελέσματα των πράξεων:

$$z_1 z_2$$

$$z_1 + z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2}$$

$$z_2$$

$$z_1 z_1^*$$

όπου $*$ σημαίνει συζυγές.

2. Λύστε τις εξισώσεις:

$$z^5 = 1$$

$$z^2 = -j$$

$$z^4 = -16$$

όπου z δηλώνει μιγαδικό αριθμό.

3. Γνωρίζοντας ότι:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \end{aligned}$$

δείξτε τη σχέση του Euler:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

4. Εστω $\{z_i\}$, ένα πεπαρασμένο σύνολο μιγαδικών αριθμών. Δείξτε ότι

$$\prod_i z_i = \prod_i |z_i| [\cos(\sum_i \theta_i) + j \sin(\sum_i \theta_i)]$$

όπου

$$z_i = |z_i| e^{j\theta_i}$$

5. Χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler γράψτε το $\cos(3\theta)$ ως συνάρτηση του $\sin(\theta)$ και $\cos(\theta)$.
6. Εστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 1$$

για τιμές της μεταβλητής x από -3 έως $+3$ χρησιμοποιώντας Matlab. Επειδή υπάρχουν άπειρες τιμές μέσα σε αυτό το εύρος τιμών, θα πρέπει να επιλέξουμε μερικές από αυτές. Εστω ότι η πρώτη είναι η $x_1 = -3$ και μετά με βήμα 0.1 επιλέγουμε τη δεύτερη, δηλ. $x_2 = -2.9$ κ.λ.π. μέχρι να φτάσουμε στην τελική τιμή $x = 3$. Χρησιμοποιώντας την εντολή `plot` μπορούμε να σχεδιάσουμε την συνάρτηση $f(x)$ ως προς τις τιμές (που επιλέξαμε) της μεταβλητής x . Στο Matlab οι εντολές που πρέπει να πληκτρολογήσουμε είναι:

```
x=-3:0.1:3;  
f = x.^2-1;  
plot(x,f);
```

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να σχεδιάσουμε και συναρτήσεις μιγαδικές. Π.χ.

$$f(z) = z^2 - 1$$

Μονάχα τώρα θα πρέπει να επιλέξουμε να σχεδιάσουμε το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος. Δεν μπορούμε να δούμε και τα δύο ταυτόχρονα. Στην περίπτωση μας θα ήταν καλό να συγκρίνουμε το πραγματικό μέρος της μιγαδικής εξίσωσης με αυτό που σχεδιάσαμε παραπάνω για τη συνάρτηση $f(x)$. Χρησιμοποιώντας τις εντολές

```
help (e.g., help mesh)  
meshgrid  
mesh  
real  
view  
plot
```

προσπαθήστε να απεικονήσετε στον 3-διάστατο χώρο το πραγματικό μέρος της $f(z)$ χρησιμοποιώντας την εντολή `mesh`. Σχολιάστε τα σχήματα που έχετε απεικονίσει για την $f(x)$ και $f(z)$.