

5^η Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 23 Νοεμβρίου

Απορίες: yannis@csd.uoc.gr

1. Εστω $x(t)$ και $y(t)$ δύο μιγαδικά σήματα και

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

η συνάστηση ετεροσυσχέτισής τους. Εστω $X(f)$ και $Y(f)$ ο μετασχηματισμός Fourier των δύο αυτών σημάτων. Δείξτε ότι

- $\phi_{yx}(\tau) \leftrightarrow Y^*(f)X(f)$
- $\phi_{xy}^*(-\tau) = \phi_{yx}(\tau)$
- $\phi_{yx}^*(-\tau) = \phi_{xy}(\tau)$

2. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Schwartz :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$$

δείξτε ότι:

- η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης έχει μέγιστο για $\tau = 0$.
- η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης έχει μέγιστο για $\tau = 0$.

3. Για ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ αποδείξτε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι άρτια συνάρτηση.

4. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των ασκήσεων 2 και 3 γράψτε τα σχόλια σας για τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός πραγματικού σήματος. Που έχει μέγιστο; Έχει συμμετρία; Είναι πραγματικό ή μιγαδικό σήμα; Σχεδιάστε ένα παράδειγμα συνάρτησης αυτοσυσχέτισης πραγματικού σήματος. Για το σκοπό αυτό δεν είναι ανάγκη να γνωρίζεται το αρχικό σήμα. Απλά αυτοσχεδιάστε.

5. Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων:

$$x(t) = e^{-at}\epsilon(t)$$

$$y(t) = e^{-2at}\epsilon(t)$$

όπου

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Σχεδιάστε τα αρχικά σήματα καθώς και τις μετακινήσεις των σημάτων για αρνητική και θετική μετακίνηση.

$$\text{Απ: } x(t) \star y(t) = 1/a(e^{-at} - e^{-2at})\epsilon(t)$$

Σημείωση:

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς τα δύο σήματα δεν ορίζονται για $t = 0$. Πως θα πρέπει να επιλεγεί η τιμή της συνάρτησης $\epsilon(t)$ για $t = 0$ ώστε να μπορούμε να γράψουμε ότι το αποτέλεσμα που βρήκαμε ισχύει για κάθε t ;

6. Αποδείξτε ότι για τα σήματα:

$$x(t) = e^{-at}\epsilon(t)$$

$$y(t) = e^{-2at}\epsilon(t)$$

ισχύει:

$$\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$$

όπου $\Phi_{xy}(f)$ η συνάρτηση διαφασματικής πυκνότητας της ενέργειας και $a > 0$.

7. Εστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 5 & t = -2 \\ 2 & t = -1 \\ 2 & t = 1 \\ 5 & t = 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Σχεδιάστε το $x(t)$
- Γράψτε το $x(t)$ ως γραμμικό συνδυασμό της συνάρτησης Dirac
- Υπολογίστε το Μ.Φ. του $x(t)$

Απ:

$$x(t) = 5\delta(t+2) + 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) + 5\delta(t-2)$$

$$X(f) = 20 \cos^2(2\pi f) + 4 \cos(2\pi f) - 10$$