3^η Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 1 Νοεμβρίου

Απορίες:yannis@csd.uoc.gr

Σημείωση: Οι απαντήσεις των ασκήσεων δίνονται ως άσκηση (σε Matlab) στο τέλος.

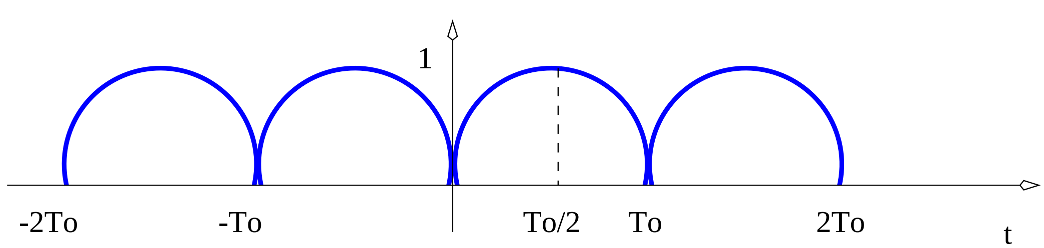
1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\int_0^{2\pi} \sin^{10}(t)\,dt$$
χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval.

2. Δείξτε ότι για πραγματικά σήματα ισχύει:

Αρτιο σήμα	x	Αρτιο σήμα	=	Αρτιο σήμα
Περιττό σήμα	x	Περιττό σήμα	=	Αρτιο σήμα
Αρτιο σήμα	x	Περιττό σήμα	=	Περιττό σήμα

3. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:
$$\text{α.} \ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\omega t)}{\omega}\,d\omega$$
$$\text{β.} \ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\omega t)}{\omega}\,dt \ \ \text{για} \ \begin{array}{lcl} \omega & = & \frac{\pi}{6} \\ \omega & = & 2 \end{array}$$

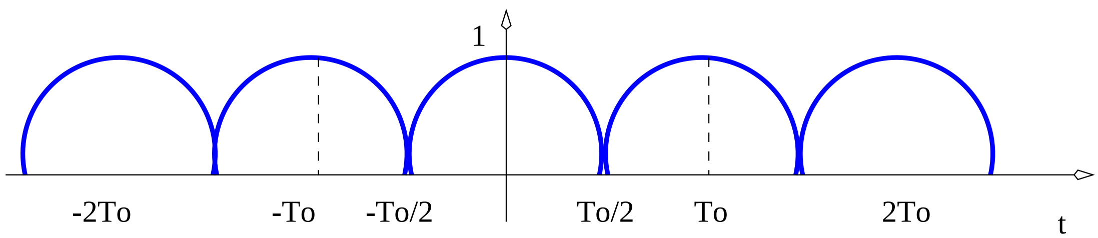
4. Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα με περίοδο T_0:
$$x(t) = sin\frac{\omega_0}{2}t$$
το οποίο φαίνεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα.



5. Στην προηγούμενη άσκηση αναπτύξαμε σε σειρά Fourier το σήμα:
$$x(t) = sin\frac{\omega_0}{2}t$$

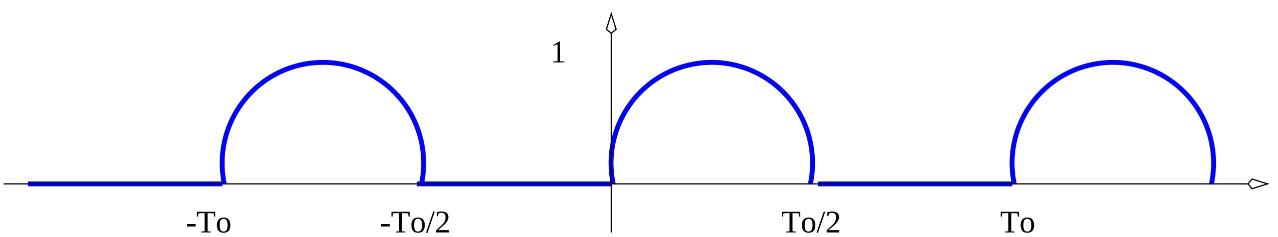
Αν στο ανάπτυγμα αυτό διατηρήσουμε μόνο τους τρείς πρώτους όρους $A_1, A_2, A3$ και το σταθερό όρο A_0 δηλαδή δημιουργήσουμε το σήμα $x_3(t)$, πόσο ποσοστό της ολικής ισχύος του αρχικού σήματος $x(t)$ (υπολογισμένη σε μια περίοδο) θα περιέχεται στο σήμα $x_3(t)$;

6. Χωρίς να κάνετε αναλυτικά τις πράξεις αλλά βασισμένοι στο αποτέλεσμα της άσκησης 4, αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα το οποίο φαίνεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα.



7. Εστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & 0 \le t \le T_0/2 \\ 0 & T_0/2 < t \le T_0 \end{cases}$$



- Αναπτύξτε το σήμα σε σειρά Fourier.
  Υπόδειξη: Διαχωρίστε την περίπτωση $k = 1$ από τις $k \neq 0$, όπου k αναφέρεται στο δείκτη στο άθροισμα του αναπτύγματος Fourier.
- Αν θέλουμε να προσεγγίσουμε το αρχικό σήμα μονάχα με τους όρους: A_0, A_1 και A_2 τι ποσοστό της ισχύος του αρχικού σήματος θα έχουμε διατηρήσει;

8. Σε αυτή την άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε Matlab ώστε να μπορούμε να βρούμε τις απαντήσεις στις ασκήσεις. Βέβαια εσείς ΠΡΕΠΕΙ να λύσετε τις ασκήσεις ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ. Εδώ απλώς μαθαίνουμε πως να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας με το Matlab.

- Ολοκλήρωση.

  Εστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της πρώτης άσκησης δηλαδή να βρούμε την απάντηση σε αυτή την ερώτηση έτσι ώστε να είμαστε σίγουροι (ε! καλά ... και σίγουρες just to be politically correct) ότι η λύση που θα δώσουμε είναι η σωστή.

  Υπενθύμιση: Ολοκλήρωση κατά Riemann:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \delta \to 0 \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\delta_i$$

  Τι λέει το παραπάνω; Σε βήματα είναι:

(α′) Χωρίζουμε το διάστημα $[a\ b]$ σε N μέρη μήκους δ_i το καθένα, και έστω δ να είναι το μεγαλύτερο από αυτά.

(β′) Επιλέγουμε ένα σημείο x_i σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα.

(γ′) Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης $f(x)$ στα σημεία x_i.

(δ′) Τώρα έχουμε N τιμές της $f(x)$ και N μήκοι (αριθμούς δηλαδή) δ_i

(ε′) Πολλαπλασιάζουμε αριθμό προς αριθμό τις N τιμές της $f(x)$ με τα N δ_i και προσθέτουμε το αποτέλεσμα.

Η παραπάνω σχέση λέει ότι για να είναι το ολοκλήρωμα ίσο με αυτό τό άθροισμα που βρήκαμε θα πρέπει να χωρίσουμε με τέτοιο τρόπο το διάστημα $[a\ b]$ ώστε ακόμα και το μεγαλύτερο διάστημα από τα δ_i, δηλαδή το δ, να είναι πολύ μικρό. Ισότητα έχουμε όταν $\lim \delta \to 0$.

Ας θεωρήσουμε εμείς ότι $\delta_i = \delta$ για κάθε i δηλ. χωρίζουμε ομοιόμορφα το διάστημα $[a\ b]$ και ας επιλέξουμε το x_i να είναι η αρχή του κάθε μέρους. Αρκεί να προσέξουμε να πάρουμε δ πολύ μικρό έτσι ώστε να προσεγγίζουμε όσο γίνεται την τιμή του ολοκλήρωματος.

Πολλές πράξεις βέβαια αλλά η ισότητα έχει το κόστος της! :). Ευτυχώς όλες αυτές τις πράξεις τις κάνει το Matlab για μας. Το μόνο κακό είναι ότι τις κάνει γρήγορα και έτσι δεν μπορούμε ούτε ένα καφέ να πιούμε και το αποτέλεσμα έχει υπολογιστεί. Επιλέγω να χωρίσω το διάστημα $[0\ 2\pi]$ σε 6001 σημεία:

```
delta = 2*pi/6000;
```

```
t = 0:delta:2*pi;
```

Επομένως $\delta = 0.00104719755120$

```
oloklhrwma = delta * sum(  sin(t).^10 )
>> oloklhrwma =


    1.5463
```

- Σειρά Fourier

  Στο μάθημα έχουμε δείξει ότι η ανάπτυξη σε σειρά Fourier του σήματος:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_0/2 \\ -1 & T_0/2 \leq t < T_0 \end{cases}$$

είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left[(2k+1)\omega_0 t\right] \\ &= \frac{4}{\pi}(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\,\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\,\omega_0 t) + \cdots) \end{aligned}$$

Το παρακάτω πρόγραμμα σε Matlab υπολογίζει μια προσέγγιση του σήματος $x(t)$ χρησιμοποποιώντας τη σειρά Fourier με 10 όρους. Αναλύστε το πρόγραμμα γραμμή προς γραμμή. Για απορίες στείλτε email στη λίστα. Στην προσπάθειά σας να καταλάβετε, συμβουλή μου είναι να δουλεύετε παραδείγματα με μικρά διανύσματα (π.χ. 4 διαστάσεων και όχι των 100000).

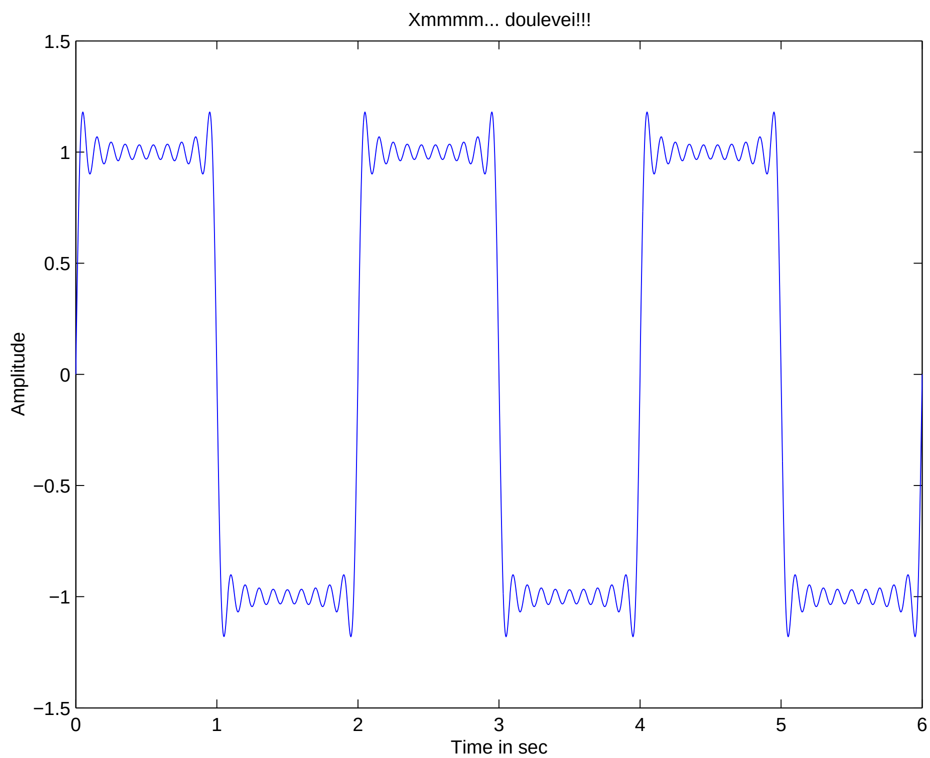
```
To =2;          % posh einai h periodo (se sec)? epilegw mia pou na mou aresei. p.x
d = To/600;     % posa shmeia ana periodo thelw na exw?
D = 3;          % poses periodous thelw na dw?


N = 10;         % posous orous sth seira Fourier tha xrhsimopoihsw?
Ao = 0;         % o prwtos oros einai mhden
k = 0:N-1;
Ak = 4/pi * 1./(2*k+1);  % oi 10 oroi Fourier


t = 0:d:D*To; % xronos t
```

```
w0 = 2*pi/To; % kuklikh suxnothta

x = Ao + Ak*sin( ((2*k'+1)*w0) * t);
plot(t,x);
xlabel('Time in sec');
ylabel('Amplitude');
title('Xmmmm... doulevei!!!');
```



Καλό κυνήγι απαντήσεων