2^{η} Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 25 Οκτωβρίου

Απορίες: yannis@csd.uoc.gr

1. Έστω το διαμορφωμένο κατά πλάτος σήμα, $x(t)$:

$$x(t) = \underbrace{\{14 + 8\sin(\pi t - \frac{\pi}{3})\}}_{x_1(t)} \cos(13\pi t)$$

   - Γράψτε το $x(t)$ ως:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + A_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3)$$

     όπου $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$.

     Απ: $A_1 = 4, A_2 = 14, A_3 = 4, \phi_1 = \frac{5\pi}{6}, \phi_2 = 0, \phi_3 = \frac{-5\pi}{6}$

   - Σχεδιάστε το φάσμα του $x_1(t)$ καθώς και του φέροντος σήματος:

$$x_2(t) = \cos(13\pi t)$$

   - Σχεδιάστε το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος $x(t)$

2. Ένα *chirp* σήμα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$x(t) = \Re\{e^{j600\pi t^2} \cos(1600\pi t)\} \;\; 0 \le t \le 5$$

   Υπολογίστε τη στιγμιαία συχνότητα του σήματος και σχεδιάστε το διάγραμμα χρόνου–συχνότητας.

   Απ: $f_i^1(t) = 600t + 800, f_i^2(t) = 600t - 800$

3. Αναπτύξτε σε σειρά $Fourier$ το περιοδικό σήμα $x(t)$ το οποίο σε μια περίοδο, T_0, περιγράφεται ως:

$$x(t) = \frac{A}{T_0} t \quad 0 \le t \le T_0$$

   Απ: $x(t) = \frac{A}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A}{k\pi} \sin(k\omega_0 t)$ Υπενθύμιση: $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}(x - \frac{1}{a})$

4. Ένα περιοδικό σήμα $x(t) = x(t + T_0)$ περιγράφεται σε μια περίοδο $-T_0/2 \le t \le T_0/2$ από την εξίσωση:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < t_c \\ 0 & t_c < |t| \le \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

   όπου $t_c < \frac{T_0}{2}$.

   α. Κάντε το γράφημα του $x(t)$ για $-2T_0 < t < 2T_0$ για την περίπτωση: $t_c = \frac{T_0}{4}$ και $t_c = \frac{T_0}{10}$

   β. Αναπτύξτε το $x(t)$ σε σειρά $Fourier$ στις παραπάνω περιπτώσεις.

   Απ:

$$t_c = \frac{T_0}{4} \quad x(t) = \frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \cos(k\omega_0 t)$$
$$t_c = \frac{T_0}{10} \quad x(t) = \frac{1}{5} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/5)}{k\pi} \cos(k\omega_0 t)$$

γ. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και στις δύο περιπτώσεις του t_c για συχνότητες $-10\omega_0$ έως $10\omega_0$, όπου $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

δ. Και τα δύο φάσματα πλάτους που σχεδιάσατε μηδενί ζονται εκατέρωθεν της μηδενικής συχνότητας π.χ. στις συχνότητες $f_2 = -f_1$ και f_1. Εύρος ζώνης συχνοτήτων Δf ονομάζεται η απόσταση των δύο αυτών συχνοτήτων: $\Delta f = f_1 - f_2 = 2f_1$.

Εκφράσεται το εύρος ζώνης Δf ως συνάρτηση του λόγου $\frac{T_0}{t_c}$. Τι συμβαίνει στο πεδίο του χρόνου όταν ο λόγος $\frac{T_0}{t_c}$ μεγαλώνει και τι συνέπειες έχει στο πεδίο της συχνότητας; Γράψτε τα συμπεράσματά σας και επιβεβαιώστε τα στις δύο περιπτώσεις που αναλύουμε ($t_c = \frac{T_0}{4}$, $t_c = \frac{T_0}{10}$).

5. Έστω το σήμα:

$$x(t) = sin^3(27\pi t)$$

Αναπτύξτε σε σειρά $Fourier$ το σήμα $x(t)$. Ποια είναι η περίοδος του σήματος;

Απ: $x(t) = \dfrac{-1}{4}\sin(81\pi t) + \dfrac{3}{4}\sin(27\pi t), T_0 = \dfrac{2}{27}$

6. Οι παρακάτω εντολές στο $Matlab$ δημιουργούν ένα ημιτονοειδές σήμα, διάρκειας $D = 1200msec$, συχνότητας $f = 200Hz$, μηδενικής φάσης μετατόπισης και μοναδιαίου πλάτους με συχνότητα δειγμα–τοληψίας, $f_s = 11025Hz$

```
fs = 11025;
f=200;
D=1200;
t = 0:1/fs:D/1000;
sig = cos(2*pi*f*t);
```

Αν θέλουμε να ακούσουμε το σήμα:

```
soundsc(sig,fs);
```

Το μήκος σε δείγμα του σήματος που μόλις δημιουργήσαμε είναι:

```
Samples = D*fs/1000
```

Στον παρακάτω πίνακα σας δίνονται στην πρώτη στήλη οι πρώτες 13 νότες σε μορφή αριθμού πλήκτρου πιάνου, και δύο παύσεις (0) του έργου του $Beethoven, FürElise$. Στη δεύτερη στήλη είναι οι διάρκειες κάθε νότας σε $msec$.

```
56  160
55  160
56  160
55  160
56  160
51  160
54  160
52  160
49  320
```

```
0   160
40  160
44  160
49  160
51  320
0   160
```

- Υπολογίστε τη συχνότητα σε Hz κάθε νότας στον παραπάνω πίνακα. Εξαιρούνται οι παύσεις!!!!
- Με συχνότητα δειγματοληψίας $fs = 11025$ συνθέστε όλες τις παραπάνω νότες (με μηδενική φάση μετατόπισης και μοναδιαίο πλάτος). Σημείωση: οι παύσεις δεν είναι παρά ένα μηδενικό διάνυσμα. Σώστε κάθε νότα που συνθέτετε σε μια μεταβλητή. π.χ. την πρώτη νότα στη μεταβλητή $s1$, τη δεύτερη νότα στη μεταβλητή $s2$ κ.λ.π.
- Χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω σήματα που συνθέσατε ($s1, s2, s3$ κ.λ.π.) δημιουργήστε ένα μεγαλύτερο σήμα που να περικλείει όλα τα παραπάνω σήματα. π.χ. στο $Matlab$ όταν θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα σήμα s που να περικλείει τα σήματα $s1, s2, s3$ γράφουμε:

  ```
  s = [s1 s2 s3];
  ```

  Αν το μεγαλύτερο σήμα που δημιουργήσατε το ονομάσατε $music$ τότε με την εντολή

  ```
  soundsc(music,fs);
  ```

  θα ακούσετε τη μουσική που μόλις συνθέσατε.

Κ Α Λ Η   Α Κ Ρ Ο Α Σ Η !!!