

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΗΥ 215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Σημειώσεις

Πάνος Τραχανιάς
Αναπληρωτής Καθηγητής

Ηράκλειο, 2001

Σαν Πρόλογος ...

Οι σημειώσεις αυτές αποτελούν μια εισαγωγή σε μαθηματικές έννοιες που είναι απαραίτητες σε μια πληθώρα εφαρμογών της ευρύτερης περιοχής της Επιστήμης των Υπολογιστών και των Επιστημών Μηχανικού. Επίσης, αποτελούν ένα βοήθημα για το μάθημα ΗΥ-215 “Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς” που διδάσκεται στο Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Το μάθημα αυτό εισήχθη για πρώτη φορά ως μάθημα επιλογής το φθινοπωρινό εξάμηνο του 1993, και έκτοτε διδάσκεται κάθε χρονιά στο φθινοπωρινό εξάμηνο. Η συχνότητα διδασκαλίας του προβλέπεται να παραμείνει η ίδια, τουλάχιστον στο εγγύς μέλλον.

Ορμώμενος από τις ανάγκες του ίδιου του μαθήματος, ετοίμασα (παράλληλα με τη διδασκαλία του μαθήματος) μια πρώτη έκδοση των σημειώσεων αυτών το φθινόπωρο του 1993. Όπως ήταν αναμενόμενο, το κείμενο αυτό ήταν ημιτελές, περιείχε λάθη (τόσο εκφραστικά όσο και μαθηματικά) και άφηνε αδιευκρίνιστες ορισμένες έννοιες. Από τότε καταβλήθηκε μεγάλη προσπάθεια ώστε να βελτιωθεί το επίπεδο του κειμένου και να διορθωθούν τα (περισσότερα) λάθη. Στη προσπάθεια αυτή έπαιξε σημαντικό ρόλο η συμβολή πολλών φοιτητών/τριών. Οι εύστοχες υποδείξεις τους οδήγησαν ουσιαστικά στη σταδιακή βελτίωση του παρόντος, μέχρι την τωρινή του μορφή. Επειδή είναι πρακτικά αδύνατο να κατονομάσω όλους εκείνους που με το τρόπο τους βοήθησαν, εκφράζω ένα γενικότερο ευχαριστώ στους φοιτητές/τριες του Τμήματός μας. Πιστεύω το περιεχόμενο αυτών των σημειώσεων να αποτελέσει ένα ενδιαφέρον αντικείμενο μελέτης αλλά και πολύ περισσότερο ένα κίνητρο για την εξερεύνηση καινούργιων περιοχών της επιστήμης.

Πάνος Τραχανιάς
Ηράκλειο, Σεπτέμβριος 2001

Ευχαριστώ θερμά τους μεταπτυχιακούς φοιτητές του τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών που διετέλεσαν βοηθοί στο μάθημα ΗΥ-215 από το 1993 μέχρι το 1995 για τη βοήθεια τους στην εκτύπωση αυτών των σημειώσεων.

Περιεχόμενα

1	Αναπαράσταση Σημάτων	1
1.1	Εισαγωγή	1
1.2	Κατηγορίες (Είδη) Σημάτων	1
1.3	Ενέργεια Σήματος	2
1.4	Μετασχηματισμοί Ανεξάρτητης Μεταβλητής	2
1.4.1	Μετατόπιση στο Χρόνο	2
1.4.2	Αντανάκλαση	3
1.4.3	Πολλαπλασιασμός στο Χρόνο	3
1.5	Στοιχειώδη Σήματα	4
1.5.1	Στοιχειώδη Σήματα Συνεχούς Χρόνου	4
1.5.2	Στοιχειώδη Σήματα Διακριτού Χρόνου	7
1.5.3	Εκθετικό Σήμα	9
1.6	Ορθογώνια Αναπαράσταση Σημάτων	14
2	Συγκερασμός	17
2.1	Συνεχής Χρόνος	17
2.2	Διακριτός Χρόνος	23
2.3	Περιοδικός Συγκερασμός	25
3	Σειρές Fourier Συνεχούς Χρόνου	29
3.1	Αναπαράσταση με σειρά Fourier	29
3.2	Συνθήκες Σύγκλισης	35
4	Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου	39
4.1	Αναπαράσταση Μη-Περιοδικών Σημάτων	39
4.2	Συνθήκες Σύγκλισης	40
4.3	Παραδείγματα	41
4.4	Μετασχηματισμός Fourier Περιοδικών Σημάτων	43
4.5	Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Συνεχούς Χρόνου	47
4.6	Πίνακες Ιδιοτήτων – Βασικών Μετασχηματισμών	55
5	Σειρές Fourier Διακριτού Χρόνου	65
5.1	Εισαγωγή	65
5.2	Αναπαράσταση με σειρά Fourier	67

5.3	Παραδείγματα	68
6	Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου	73
6.1	Αναπαράσταση μη-Περιοδικών Σημάτων	73
6.1.1	Διαφορές μεταξύ Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου	74
6.2	Μετασχηματισμός Fourier Περιοδικών Σημάτων	77
6.3	Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου	78
6.4	Πίνακες Ιδιοτήτων – Βασικών Μετασχηματισμών	82
6.5	Μετασχηματισμός Fourier Μετά από Δειγματοληψία	85
6.6	Δυσίωρος	86
7	Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier	95
7.1	Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (FFT)	97
7.2	FFT σε δύο Διαστάσεις	100
8	Μετασχηματισμός Laplace	103
8.1	Δίπλευρος Μετασχηματισμός Laplace	103
8.2	ROC Μετασχηματισμού Laplace	106
8.3	Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Laplace	111
8.3.1	Δίπλευρος Μετασχηματισμός Laplace με Χρήση του Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Laplace	112
8.4	Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace	115
8.4.1	Θεωρήματα Αρχικής και Τελικής Τιμής	120
8.5	Γεωμετρικός Υπολογισμός του Μετασχηματισμού Fourier	124
8.6	Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace	125
9	Μετασχηματισμός Z	127
9.1	Δίπλευρος Μετασχηματισμός Z	127
9.2	ROC Μετασχηματισμού Z	130
9.3	Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Z	134
9.4	Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z	135
9.4.1	Θεωρήματα Αρχικής και Τελικής Τιμής	139
9.5	Γεωμετρικός Υπολογισμός του Μετασχηματισμού Fourier	141
9.6	Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z	145
9.7	Σχέση Μεταξύ Μετασχηματισμών Z και Laplace	148
9.8	Σχέση Μεταξύ Μετασχηματισμών Z και DFT	149

Κεφάλαιο 1

Αναπαράσταση Σημάτων

1.1 Εισαγωγή

Σήματα είναι οι ανιχνεύσιμες φυσικές ποσότητες ή μεταβλητές, μέσω των οποίων μεταφέρεται πληροφορία (μηνύματα). Μια μεγάλη κατηγορία σημάτων παίζει σημαντικό ρόλο στη περιγραφή φυσικών φαινομένων. Παραδείγματα τέτοιων σημάτων είναι η ανθρώπινη φωνή, η εικόνα της τηλεόρασης, βιοϊατρικά σήματα και εικόνες, ατμοσφαιρική θερμοκρασία, κ.α. Στις περισσότερες περιπτώσεις τα σήματα μετατρέπονται σε ηλεκτρικά σήματα, εφ' όσον τα τελευταία είναι πολύ πιο εύκολο να μετρηθούν και στη συνέχεια να επεξεργασθούν.

Τα σήματα περιostάνονται ως συναρτήσεις μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών. Για παράδειγμα, η φωνή είναι μια συνάρτηση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (χρόνος), ενώ η εικόνα είναι μια συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών (x και y συντεταγμένες). Στο παρόν κείμενο θα εστιάσουμε τη προσοχή μας σε σήματα μιας ανεξάρτητης μεταβλητής, η οποία θα θεωρείται ο χρόνος, αν και μπορεί να είναι οτιδήποτε σε διαφορετικές εφαρμογές.

1.2 Κατηγορίες (Είδη) Σημάτων

Υπάρχουν πολλοί τρόποι ταξινόμησης των σημάτων ανάλογα με το είδος (πεδίο ορισμού) και/ή τη διάσταση της ανεξάρτητης μεταβλητής, το πεδίο τιμών και/ή τη διάσταση του σήματος, τη περιοδικότητα του σήματος, κ.α. Οι πιο συνηθισμένοι τρόποι ταξινόμησης των σημάτων φαίνονται στη συνέχεια:

Συνεχούς Χρόνου
 $x(t)$ για t συνεχές $\in \mathbb{R}$

Διακριτού Χρόνου
 $t = kT_s, k \in \mathbf{Z}, x(kT_s)$

Αναλογικά
Η συνάρτηση $x(t)$ παίρνει
κάθε τιμή στο $\mathbb{R}$

Ψηφιακά
Η συνάρτηση είναι κβαντισμένη

Μονοδιάστατα (1-D)
Φωνή, ECG

Διδιάστατα (2-D)
Εικόνες, X-Ray

Πολυδιάστατα (m-D)
CT

Μονοκαναλικά

Εικόνα

Πολυκαναλικά

Εγχρωμη εικόνα

Δορυφορική εικόνα

Περιοδικά

$$x(t) = x(t + nT)$$

όπου $n = 1, 2, \dots$ Απεριοδικά (Μη-Περιοδικά)

Παράδειγμα περιοδικού σήματος είναι η $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Ορίζουμε σαν θεμελιώδη περίοδο την $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ και παρατηρούμε ότι ένα περιοδικό σήμα είναι επίσης περιοδικό για mT_0 , όπου $m = 1, 2, \dots$

1.3 Ενέργεια Σήματος

Για διάστημα χρόνου $2L$ η ενέργεια του σήματος $x(t)$ θα είναι:

$$E_{2L} = \int_{-L}^L |x(t)|^2 dt \quad (1.1)$$

Αν $t \in (-\infty, +\infty)$ τότε παίρνουμε την ολική ενέργεια του σήματος, δηλαδή:

$$E = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |x(t)|^2 dt \quad (1.2)$$

Η μέση ισχύς ορίζεται ως:

$$P = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |x(t)|^2 dt \right] \quad (1.3)$$

Για περιοδικό σήμα ορίζουμε τη μέση ισχύ σε μία περίοδο:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \quad (1.4)$$

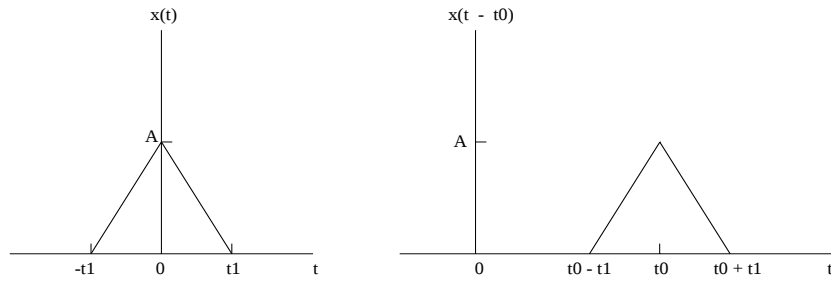
1.4 Μετασχηματισμοί Ανεξάρτητης Μεταβλητής

1.4.1 Μετατόπιση στο Χρόνο

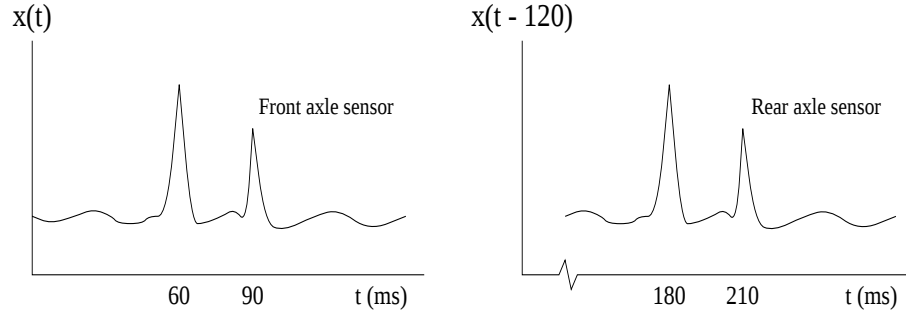
Εστω σήμα $x(t)$. Μια μετατόπιση στον χρόνο (time shift) $x(t) \rightarrow x(t - t_0)$ είναι καθυστέρηση εφόσον $t_0 > 0$ και προήγηση εφόσον $t_0 < 0$ (βλέπε Σχ 1.1).

Παράδειγμα 1.1. Δύο αισθητήρες (sensors) έχουν τοποθετηθεί στον μπροστινό και πίσω άξονα ενός αυτοκινήτου. Τα σήματα που δίνουν οι δύο αισθητήρες είναι αυτά που φαίνονται στο Σχ 1.2. Αν η απόσταση των αξόνων είναι $d = 2m$ να βρεθεί η ταχύτητα του αυτοκινήτου.

Απάντηση: Ξέρουμε ότι $d = ut$ άρα $u = \frac{d}{t} = \frac{2m}{0.12sec} = 16.7 \text{ m/sec}$.



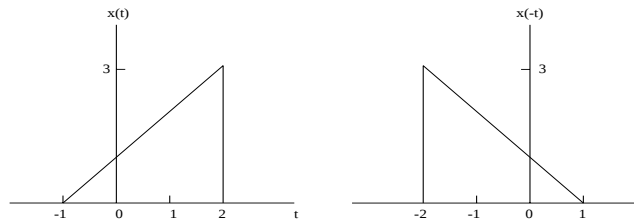
Σχήμα 1.1: Μετατόπιση στο χρόνο.



Σχήμα 1.2: Σήματα των δύο αισθητήρων.

1.4.2 Αντανάκλαση

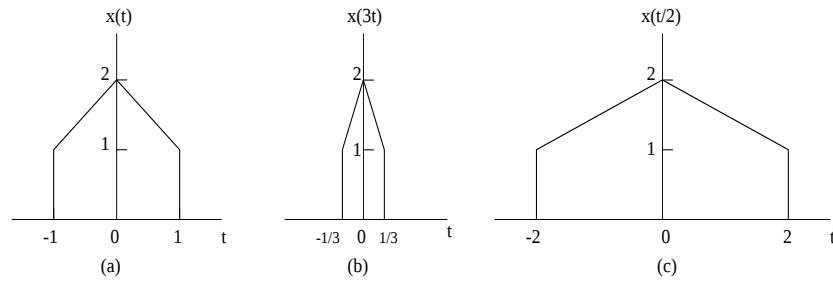
Το σήμα $x(-t)$ παίρνεται από το σήμα $x(t)$ μέσω μιας αντανάκλασης (reflection) γύρω από το $t = 0$ [δηλαδή με την αντιστροφή του $x(t)$]. (βλέπε Σχ 1.3).



Σχήμα 1.3: Αντανάκλαση.

1.4.3 Πολλαπλασιασμός στο Χρόνο

Ο πολλαπλασιασμός στο χρόνο (time-scaling) ορίζεται ως η κλιμάκωση της ανεξάρτητης μεταβλητής κατά ένα παράγοντα α , $x(t) \rightarrow x(\alpha t)$ (βλέπε Σχ 1.4). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη συρρίκνωση ή την επέκταση του σήματος ανάλογα με το αν $\alpha > 1$ ή $\alpha < 1$.



Σχήμα 1.4: Πολλαπλασιασμός στο χρόνο.

1.5 Στοιχειώδη Σήματα

Υπάρχουν πολλά στοιχειώδη σήματα (elementary signals) τα οποία όχι μόνο συναντώνται συχνά στις εφαρμογές, αλλά χρησιμοποιούνται και για την αναπαράσταση άλλων σημάτων. Στην παράγραφο που ακολουθεί θα μελετήσουμε στοιχειώδη σήματα που ορίζονται στο συνεχές χρόνο, ενώ στην επόμενη παράγραφο θα αναφερθούμε σε στοιχειώδη σήματα που ορίζονται στο διακριτό χρόνο. Στη συνέχεια, και λόγω της μεγάλης οπικειότητάς του, μελετούμε το εκθετικό σήμα σε μια ανεξάρτητη παράγραφο. Κατά σύμβαση, στη περίπτωση του συνεχούς χρόνου θα συμβολίζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή με t και θα χρησιμοποιούμε παρενθέσεις (π.χ. $x(t)$), ενώ στη περίπτωση του διακριτού χρόνου θα συμβολίζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή με n και θα χρησιμοποιούμε γωνιακές παρενθέσεις (π.χ. $x[n]$).

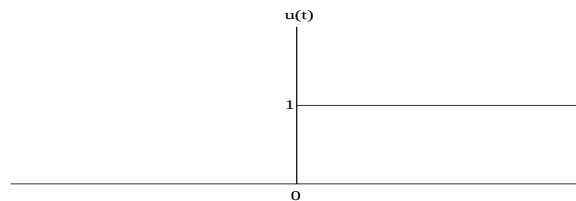
1.5.1 Στοιχειώδη Σήματα Συνεχούς Χρόνου

Συνάρτηση Μοναδιαίου Βήματος

Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος (unit step function) ορίζεται ως:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι ασυνεχές στο $t = 0$. Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος απεικονίζεται στο Σχ 1.5.



Σχήμα 1.5: Συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

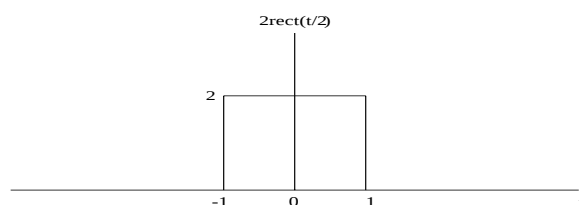
Τετραγωνικός Παλμός

Ο τετραγωνικός παλμός (rectangular pulse) (βλέπε Σχ 1.6) ορίζεται ως:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) = u(t+1) - u(t-1) \quad (1.6)$$

Ο τετραγωνικός παλμός σχετίζεται με τη συνάρτηση μοναδιαίου βήματος σύμφωνα με τη σχέση

$$A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{2a}\right) = A \cdot [u(t+a) - u(t-a)] \quad (1.7)$$



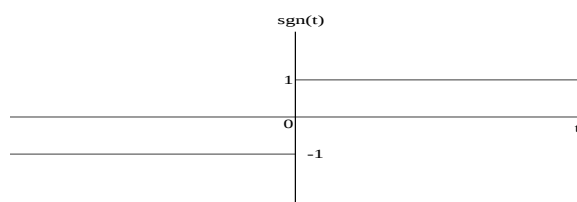
Σχήμα 1.6: Τετραγωνικός παλμός.

Συνάρτηση Προσήμου

Η συνάρτηση προσήμου (sign function) είναι μια δίτιμη συνάρτηση που ορίζεται σε σχέση με τη συνάρτηση μοναδιαίου βήματος

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 + 2u(t) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι ασυνεχές στο $t = 0$. Η συνάρτηση προσήμου απεικονίζεται στο Σχ 1.7.

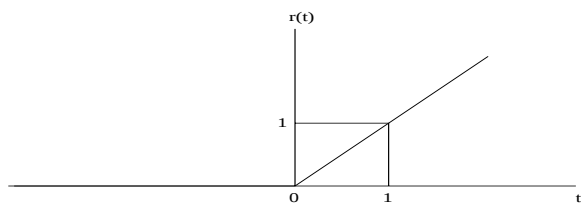


Σχήμα 1.7: Συνάρτηση προσήμου.

Γραμμική Συνάρτηση

Η γραμμική συνάρτηση (ramp function), φαίνεται στο Σχ 1.8 και ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.9)$$



Σχήμα 1.8: Γραμμική συνάρτηση.

Συνάρτηση Δειγματοληψίας

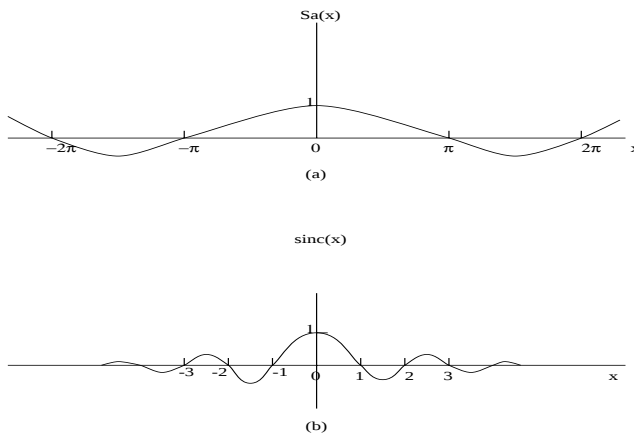
Μια συνάρτηση που εμφανίζεται συχνά σε προβλήματα φασματικής ανάλυσης είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας (sampling function) $Sa(x)$ που ορίζεται ως:

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (1.10)$$

ή χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση sinc

$$Sa(\pi x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \text{sinc } x \quad (1.11)$$

Η γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων δειγματοληψίας και sinc φαίνεται στο Σχ 1.9.

Σχήμα 1.9: (α) Συνάρτηση δειγματοληψίας, (β) συνάρτηση sinc .

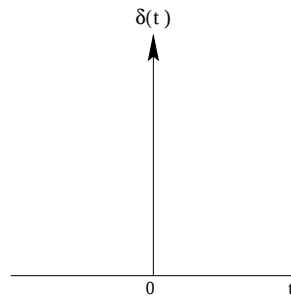
Συνάρτηση δ

Η συνάρτηση δ (dirac delta) ορίζεται να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t)dt = x(0) \text{ , } t_1 < 0 < t_2 \quad (1.12)$$

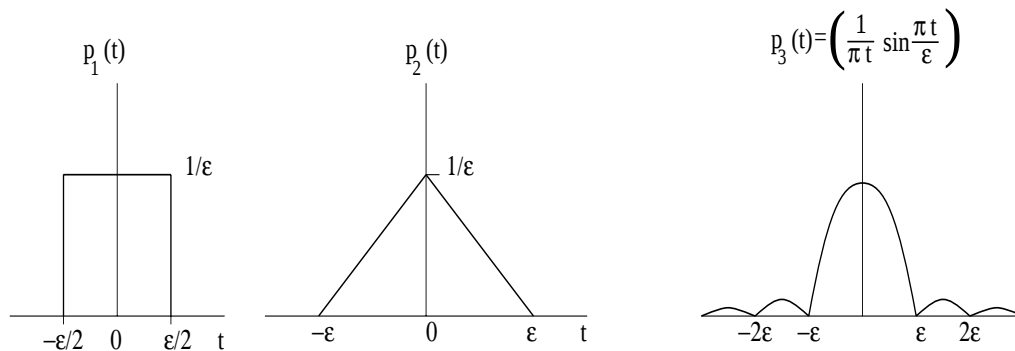
Γραφικά παριστάνεται όπως φαίνεται στο Σχ 1.10.

Επιπλέον, οι παρακάτω ιδιότητες ικανοποιούνται από τη συνάρτηση δ :

Σχήμα 1.10: Συνάρτηση δ .

1. $\delta(0) \rightarrow \infty$
2. $\delta(t) = 0$ όταν $t \neq 0$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$
4. $\delta(t)$: άρτια συνάρτηση ($\delta(t) = \delta(-t)$)

Στη πράξη, η συνάρτηση $\delta(t)$ προσεγγίζεται με μαθηματικά μοντέλα που επιδέχονται εύκολη υλοποίηση (Σχ 1.11).

Σχήμα 1.11: Μαθηματικά μοντέλα της συνάρτησης $\delta(t)$.

1.5.2 Στοιχειώδη Σήματα Διακριτού Χρόνου

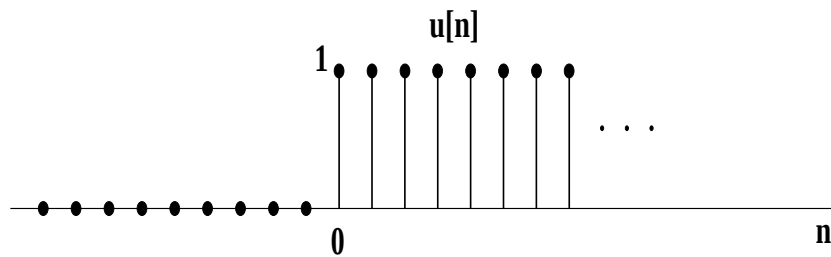
Οι τιμές που παίρνει το n σε αυτή την περίπτωση είναι διακριτές, δηλαδή μέσα από το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbf{Z}$.

Συνάρτηση Μοναδιαίου Βήματος

Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος ορίζεται κατά τρόπο ανάλογο όπως και στη περίπτωση του συνεχούς χρόνου:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Η γραφική της απεικόνιση φαίνεται στο Σχ 1.12.



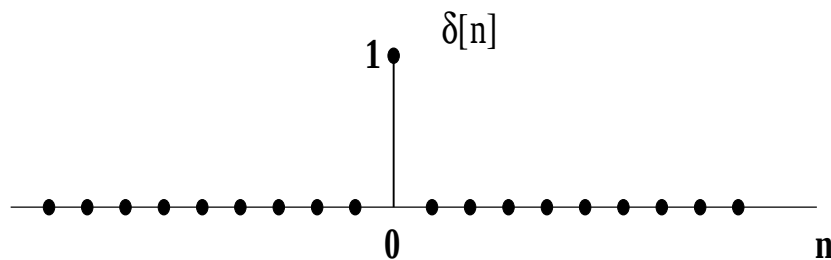
Σχήμα 1.12: Συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

Συνάρτηση δ

Η συνάρτηση δ στη περίπτωση του διακριτού χρόνου ορίζεται ως ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους στο μηδέν:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Η γραφική της απεικόνιση φαίνεται στο Σχ 1.13.



Σχήμα 1.13: Συνάρτηση δ .

Οι παρακάτω ιδιότητες ικανοποιούνται από τη συνάρτηση δ και τη συνάρτηση μοναδιαίου βήματος:

1. $x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$
2. $\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$
3. $u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$
4. $u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n - k]$

1.5.3 Εκθετικό Σήμα

Συνεχής χρόνος

Το εκθετικό σήμα ορίζεται ως:

$$x(t) = Ce^{\alpha t} \quad (1.15)$$

Στη γενική περίπτωση $C, \alpha \in \mathbf{C}$ και $\alpha = r + j\omega_0$, οπότε το $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^{rt+j\omega_0 t} \\ &= Ce^{rt}e^{j\omega_0 t} \\ &= Ce^{rt}(\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) \end{aligned} \quad (1.16)$$

όπου, η τελευταία ιδιότητα προκύπτει από τη σχέση του Euler. Αν $C, \alpha \in \mathbf{R}$ τότε έχουμε ένα πραγματικό εκθετικό σήμα το οποίο απεικονίζεται στο Σχ 1.14. Στη γενική περίπτωση που το $C \in \mathbf{C}$, $C = |C|e^{j\theta}$, και $\alpha = r + j\omega_0$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} Ce^{\alpha t} &= |C|e^{j\theta}e^{(r+j\omega_0)t} \\ &= |C|e^{rt}e^{j(\omega_0 t + \theta)} \\ &= |C|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt}\sin(\omega_0 t + \theta) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Για $r = 0$, το πραγματικό και φανταστικό μέρος του εκθετικού σήματος είναι ημιτονοειδή. Για $r < 0$, παίρνουμε πραγματικό και φανταστικό μέρος ως φθίνον εκθετικό $\times$ ημιτονοειδές, ενώ για $r > 0$, παίρνουμε αύξον εκθετικό $\times$ ημιτονοειδές (βλέπε Σχ 1.14).

Περιοδικότητα: Το καθαρά φανταστικό εκθετικό σήμα $x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$ είναι περιοδικό. Αυτό είναι αρκετά εύκολο να διαπιστωθεί: για να ισχύει πρέπει και αρκεί $e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t}$, το οποίο είναι ισοδύναμο με τη σχέση $e^{j\omega_0 T} = 1$ ή $e^{j\omega_0 T} = 1$.

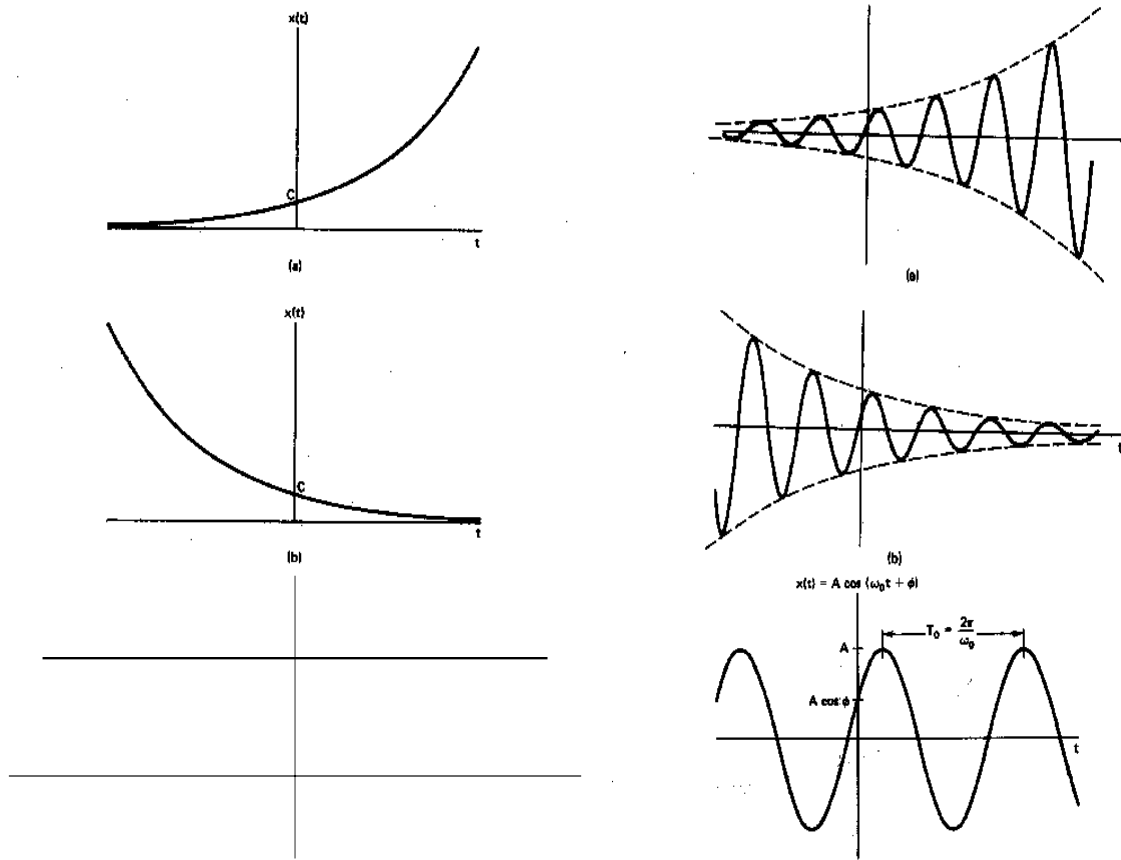
Η τελευταία αυτή σχέση ισχύει εφ' όσον: (α) αν $\omega_0 = 0$ τότε $x(t) = 1$ και άρα το σήμα είναι περιοδικό $\forall T$, (β) αν $\omega_0 \neq 0$ τότε διαλέγουμε ως $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$ και $e^{j\omega_0 T_0} = e^{j2\pi} = 1$.

Διακριτός Χρόνος

Εστω $\alpha \in \mathbf{C}$, το οποίο γράφεται σε πολικές συντεταγμένες ως $\alpha = re^{j\Omega}$. Το εκθετικό σήμα στο διακριτό χρόνο ορίζεται ως (βλέπε Σχ 1.15):

$$\begin{aligned} x[n] &= \alpha^n = r^n e^{j\Omega n}, \quad -\infty < n < +\infty \\ &= r^n \cos \Omega n + jr^n \sin \Omega n \end{aligned} \quad (1.18)$$

Περιοδικότητα: Το καθαρά φανταστικό σήμα $e^{j\Omega_0 n} = \cos \Omega_0 n + j \sin \Omega_0 n$ προέρχεται από δειγματοληψία του συνεχούς $e^{j\Omega t}$ με $T_s = 1$ (περίοδος δειγματοληψίας). Για να είναι αυτό το σήμα περιοδικό με περίοδο $N > 0$, αρκεί $e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n}$, δηλαδή $e^{j\Omega_0 N} = 1$. Η τελευταία αυτή σχέση ισχύει όταν $\Omega_0 N = 2\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$, άρα αρκεί $\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$.



Σχήμα 1.14: Εκθετικό σήμα (συνεχής χρόνος).

Συμπέρασμα: Το $e^{j\Omega_0 n}$ δεν είναι περιοδικό $\forall \Omega_0$. Είναι περιοδικό αν το $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ είναι ρητός αριθμός.

π.χ. $\cos(\frac{2\pi}{12}n)$ περιοδικό
 $\cos(\frac{8\pi}{31}n)$ περιοδικό
 $\cos(\frac{n}{6})$ μη περιοδικό

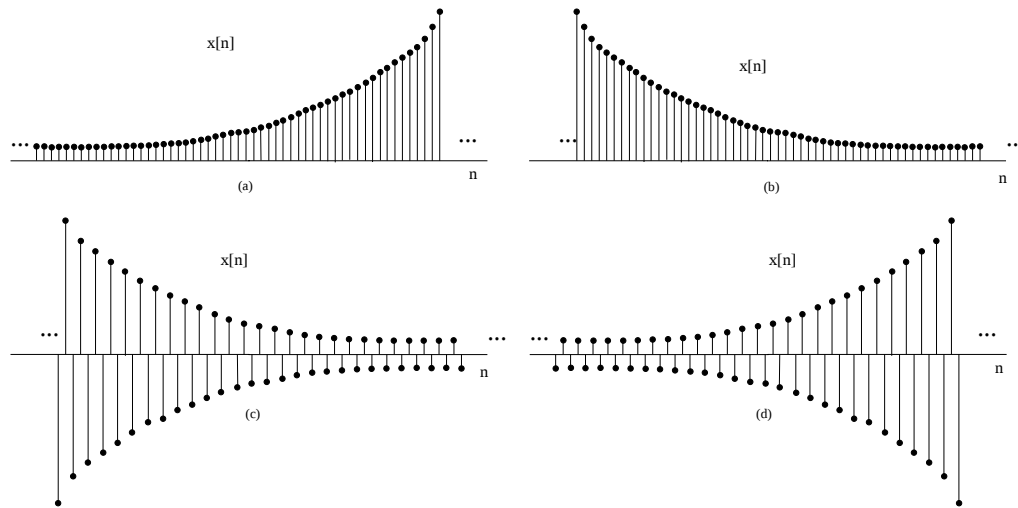
Ορίζουμε τη *βασική συχνότητα* του $e^{j\Omega_0 n}$ να είναι η $\frac{2\pi}{N} = \frac{\Omega_0}{m}$ και *βασική περίοδο* $N = m(\frac{2\pi}{\Omega_0})$.

Βασική Ιδιότητα του $e^{j\Omega_0 n}$: Το εκθετικό στη συχνότητα $(\Omega_0 + 2\pi)$ είναι ακριβώς το ίδιο με το $e^{j\Omega_0 n}$, δηλαδή

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi n} = e^{j\Omega_0 n}$$

Συνεπώς, χρειάζεται μόνο να θεωρούμε το διάστημα $[0, 2\pi]$ όταν θεωρούμε διακριτά εκθετικά σήματα. Από το $0 \rightarrow \pi$ η συχνότητα αυξάνει και από το $\pi \rightarrow 2\pi$ ξαναμειώνεται. Στο 2π είναι ίδια με το 0 (βλέπε και Σχ 1.16).

Οι διαφορές μεταξύ των εκθετικών σημάτων συνεχούς ($e^{j\omega_0 t}$) και διακριτού χρόνου ($e^{j\Omega_0 n}$) συνοψίζονται στο Πίνακα 1.1.



Σχήμα 1.15: Εκθετικό σήμα (διακριτός χρόνος). (a) $a > 1$, (b) $0 < a < 1$, (c) $-1 < a < 0$, (d) $a < -1$.

2-D Εκθετικό Σήμα

Συνεχής Χρόνος: Εστω $x(t_1, t_2)$ διδιάστατο σήμα για το οποίο ισχύει $x(t_1, t_2) = e^{s_1 t_1 + s_2 t_2}$ όπου $s_1 = r_1 + j\omega_1$ και $s_2 = r_2 + j\omega_2$. Ισχύει

$$\begin{aligned} x(t_1, t_2) &= e^{r_1 t_1 + r_2 t_2 + j(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} \\ &= e^{r_1 t_1 + r_2 t_2} (\cos(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2) + j \sin(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Το φανταστικό 2-D εκθετικό $e^{j(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)}$ είναι περιοδικό με περιόδους $\frac{2\pi}{\omega_1}$ και $\frac{2\pi}{\omega_2}$.

Διακριτός Χρόνος: Το εκθετικό σήμα στο διακριτό χρόνο είναι της μορφής

$$x[n_1, n_2] = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \quad (1.20)$$

Το φανταστικό εκθετικό σήμα είναι

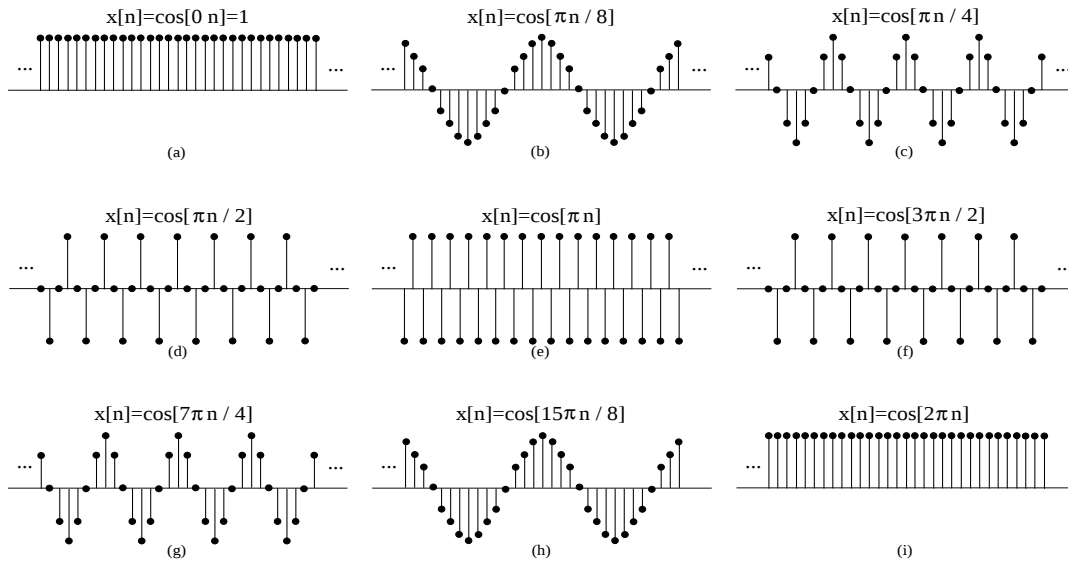
$$x[n_1, n_2] = e^{j\Omega_1 n_1} e^{j\Omega_2 n_2} = e^{j(\Omega_1 n_1 + \Omega_2 n_2)} \quad (1.21)$$

Το τελευταίο είναι περιοδικό αν $\Omega_1 = \frac{2\pi k_1}{N_1}$ και $\Omega_2 = \frac{2\pi k_2}{N_2}$.

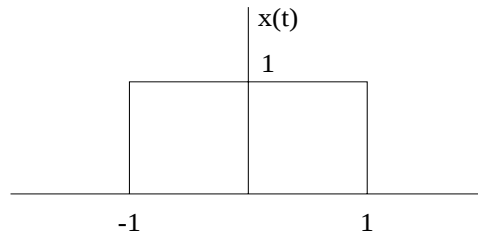
Παράδειγμα 1.2. Εστω $x(t)$ το σήμα που φαίνεται στο Σχ 1.17. Το σήμα μεταφέρεται και υφίσταται παραμόρφωση. Το λαμβανόμενο σήμα είναι το $y(t) = x(t) + 0.5x(t - \frac{T}{2}) + 0.25x(t - T)$, $T \gg 2$.

Το $y(t)$ επεξεργάζεται όπως φαίνεται στο Σχ 1.18. Ζητείται να σχεδιαστούν τα $y(t)$ και $z(t)$.

Απάντηση: Το $y(t)$ φαίνεται στο Σχ 1.19(a) και το $z(t)$ στο Σχ 1.19(b).



Σχήμα 1.16: Ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου για διάφορες συχνότητες.



Σχήμα 1.17: Σήμα $x(t)$.

Παράδειγμα 1.3. Εστω Z_0 μιγαδικός αριθμός με καρτεσιανές συντεταγμένες (x_0, y_0) και πολικές συντεταγμένες (r_0, θ_0) . Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$Z_1 = r_0 e^{-j\theta_0}$$

$$Z_2 = r_0$$

$$Z_3 = r_0 e^{j(\theta_0 + \pi)}$$

$$Z_4 = r_0 e^{j(-\theta_0 + \pi)}$$

$$Z_5 = r_0 e^{j(\theta_0 + 2\pi)}$$

Βρείτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες των $Z_1, \dots, Z_5$. Επίσης, σχεδιάστε τα $Z_1, \dots, Z_5$ για $r_0 = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ και $r_0 = 2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Απάντηση:

$$Z_1 = x_0 - jy_0$$

$$Z_2 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

$$Z_3 = -x_0 - jy_0 = -Z_0$$

$$Z_4 = -x_0 + jy_0$$

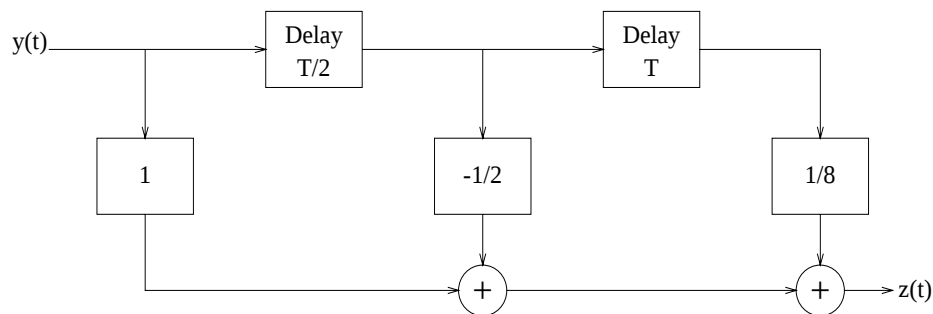
Πίνακας 1.1: Διαφορές μεταξύ των σημάτων $e^{j\omega_0 t}$ και $e^{j\Omega_0 n}$

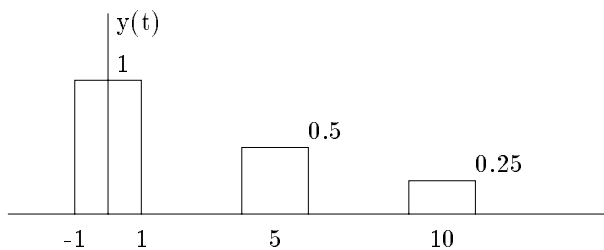
$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\Omega_0 n}$
Distinct signals for distinct values of ω_0	Identical signals for exponentials at frequencies separated by 2π
Periodic for any choice of ω_0	Periodic only if $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ for some integers $N > 0$ and m
Fundamental frequency ω_0	Fundamental frequency $\dagger \frac{\Omega_0}{m}$
Fundamental period $\omega_0 = 0$: undefined $\omega_0 \neq 0$: $\frac{2\pi}{\omega_0}$	Fundamental period $\dagger \Omega_0 = 0$: undefined $\Omega_0 \neq 0$: $m \left(\frac{2\pi}{\Omega_0} \right)$

$\dagger$ These statements assume that m and N do not have any factors in common.

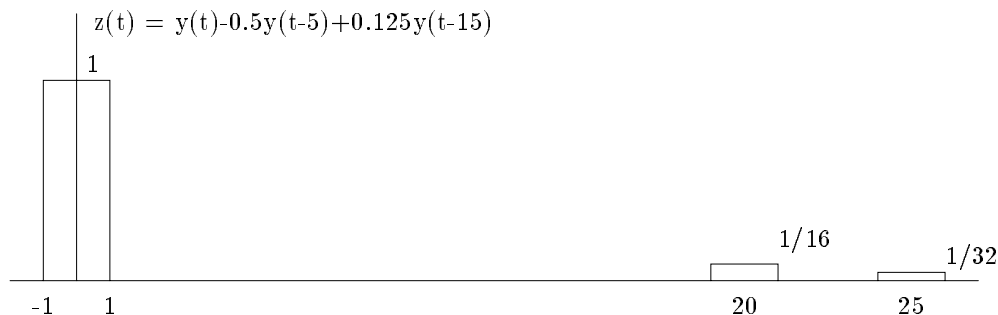
$$Z_5 = x_0 + jy_0 = Z_0$$

Η γραφική παράσταση των $Z_1, \dots, Z_5$ φαίνεται στο Σχ 1.20.

Σχήμα 1.18: Επεξεργασία του σήματος $y(t)$.



(α)



(β)

Σχήμα 1.19: (α) Σήμα $y(t)$, (β) σήμα $z(t)$.

1.6 Ορθογώνια Αναπαράσταση Σημάτων

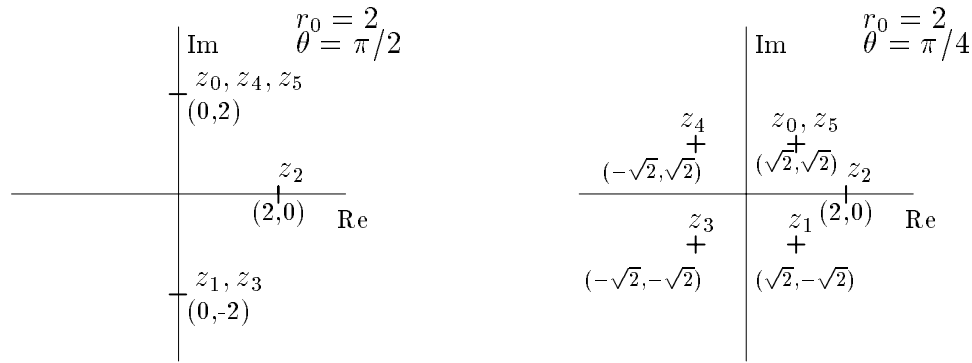
Εστω σήμα $x(t)$ το οποίο παρίσταται σαν σειρά από ορθογώνιες κυματομορφές $\Phi_k(t)$, $a < t < b$. Οι Φ_i , $i \in \mathbf{Z}$ λέγονται *ορθογώνιες κυματομορφές* στο (a, b) αν:

$$\int_a^b \Phi_k(t) \Phi_l^*(t) dt = \begin{cases} E_l, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} = E_l \delta(l - k) \quad (1.22)$$

Αν $E_l = 1$, $\forall l$ τότε οι Φ_i λέγονται *ορθοκανονικές*.

Παράδειγμα 1.4. Εστω οι συναρτήσεις $\Phi_m(t) = \sin mt$, $m = 1, 2, 3, \dots$, $-\pi < t < \pi$. Ισχύει

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_m(t) \Phi_n^*(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)t dt - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)t dt \\ &= \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

Σχήμα 1.20: Γραφική παράσταση των μιγαδικών $Z_1 \dots Z_5$.

Συνεπώς οι $\sin t$, $\sin 2t$, $\sin 3t$, ... αποτελούν ορθογώνιο σύνολο στο $(-\pi, \pi)$ και οι $\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin 3t}{\sqrt{\pi}}$, ... αποτελούν ορθοκανονικό σύνολο στο ίδιο διάστημα.

Παράδειγμα 1.5. Ζητείται να εξεταστεί αν είναι ορθοκανονικό το σύνολο

$$\left\{ \Phi_k(t) = e^{\frac{j2\pi kt}{T}}, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad 0 < t < T \right\}$$

Απάντηση:

$$\begin{aligned} \int_0^T \Phi_l(t) \Phi_k^*(t) dt &= \int_0^T e^{j\frac{2\pi lt}{T}} e^{-j\frac{2\pi kt}{T}} dt \\ &= \begin{cases} T, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

Συνεπώς οι συναρτήσεις $\frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{j2\pi kt}{T}}$ αποτελούν ορθοκανονικό σύνολο στο $(0, T)$. ■

Γενικός Κανόνας: Αν $\Phi_i(t)$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο στο διάστημα $a < t < b$ τότε κάθε σήμα $x(t)$ γράφεται ως

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i \Phi_i(t) \quad (1.23)$$

όπου

$$c_k = \int_a^b x(t) \Phi_k^*(t) dt, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (1.24)$$

Αν το σύνολο $\Phi_i(t)$ είναι ορθογώνιο αλλά όχι ορθοκανονικό τότε

$$c_k = \frac{1}{E_k} \int_a^b x(t) \Phi_k^*(t) dt \quad (1.25)$$

Κεφάλαιο 2

Συγκερασμός

2.1 Συνεχής Χρόνος

Εστω τα σήματα $x(t)$, $h(t)$. Ορίζουμε σαν συγκερασμό (convolution) αυτών των σημάτων, το σήμα $y(t)$ που δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2.1)$$

Το ολοκλήρωμα στη σχέση (2.1) ονομάζεται *ολοκλήρωμα συγκερασμού (convolution integral)* των $x(t)$, $h(t)$. Ο συγκερασμός των σημάτων $x(t)$, $h(t)$ συμβολίζεται ως $y(t) = x(t) \star y(t)$.

Ορισμός: Μία συνάρτηση $x(t)$ λέγεται **απολύτως ολοκληρώσιμη** στο $[a, b]$ αν

$$\int_a^b |x(t)| dt < \infty \quad (2.2)$$

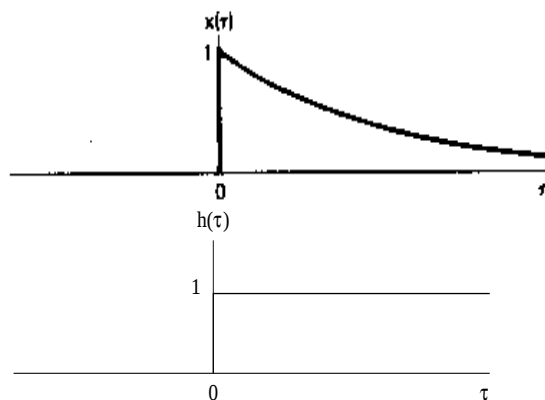
Για να υπάρχει ο συγκερασμός δύο σημάτων $x(t)$, $h(t)$ αρκεί να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες (πιθανώς και να υπάρχει χωρίς να ικανοποιούνται):

1. Τα $x(t)$, $h(t)$ πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $(-\infty , 0]$.
2. Τα $x(t)$, $h(t)$ πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[0 , \infty)$.
3. Κάποια από τις $x(t)$, $h(t)$ ή και οι δύο πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμες στο $(-\infty , +\infty)$

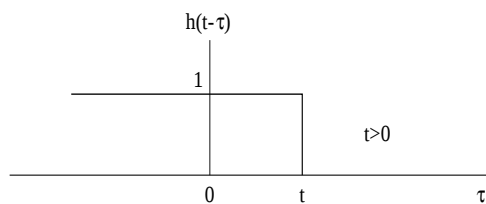
Παράδειγμα 2.1. Τα $\cos \omega t \star \cos \omega t$ και $e^t \star e^{-t}$ δεν υπάρχουν.

Παράδειγμα 2.2. Να βρεθεί ο συγκερασμός των $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, $\alpha > 0$ και $h(t) = u(t)$. Τα δύο σήματα φαίνονται στο Σχ 2.1.

Απάντηση: Για $t < 0$, $x(\tau)h(t - \tau) = 0$. Για $t > 0$, το $h(t - \tau)$ φαίνεται στο Σχ 2.2.



Σχήμα 2.1: Δύο σήματα $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, $\alpha > 0$ και $h(t) = u(t)$.



Σχήμα 2.2: Αντιστροφή του σήματος $h(\tau)$ του προηγούμενου σχήματος.

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-\alpha\tau} & , 0 < \tau < t \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

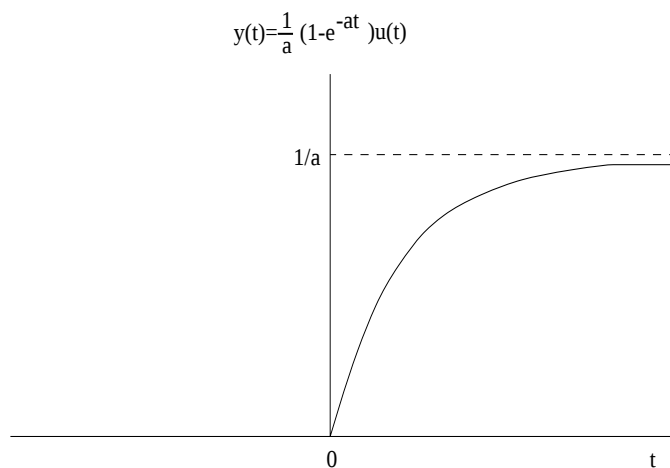
Αρα

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$$

και συνεπώς $y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})u(t)$, $\forall t$. Το αποτέλεσμα του συγκερασμού, $y(t)$, φαίνεται γραφικά στο Σχ 2.3.

Ιδιότητες συγκερασμού

- Αντιμεταθετική (Commutative) : $x(t) \star h(t) = h(t) \star x(t)$
- Προσεταιριστική (Assosiative) : $x(t) \star h_1(t) \star h_2(t) = [x(t) \star h_1(t)] \star h_2(t) = x(t) \star [h_1(t) \star h_2(t)]$
- Επιμεριστική (Distributive) : $x(t) \star [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) \star h_1(t) + x(t) \star h_2(t)$



Σχήμα 2.3: Αποτέλεσμα του συγκερασμού του παραδείγματος 2.2.

Οι ιδιότητες αυτές έχουν σπουδαίες εφαρμογές στα συστήματα όπως φαίνεται στο Σχ 2.4.

Παράδειγμα 2.3. Εστω το σύστημα με κρουστική απόκριση $\delta(t)$. Το σύστημα αυτό είναι το ταυτοτικό σύστημα (η έξοδός του είναι ίδια με την είσοδο):

$$x(t) \star \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \quad (2.3)$$

Εστω το σύστημα με κρουστική απόκριση $u(t)$. Το σύστημα αυτό είναι ο ιδανικός ολοκληρωτής (η έξοδός του είναι το ολοκλήρωμα της εισόδου του):

$$x(t) \star u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

Παράδειγμα 2.4. Εστω ότι η σχέση μεταξύ εισόδου $x(t)$ και εξόδου $y(t)$ ενός συστήματος είναι $y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) s(T - t + \tau) d\tau$, $0 \leq t \leq T$, όπου $s(t)$ γνωστό σήμα διάρκειας T .

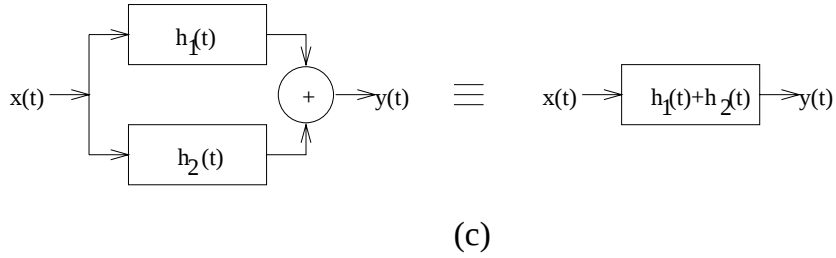
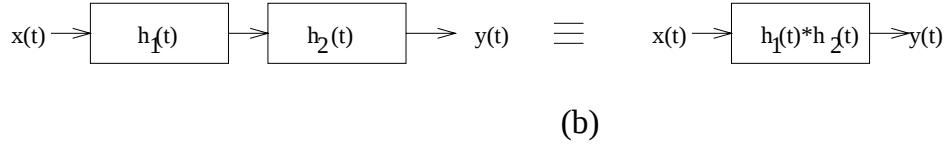
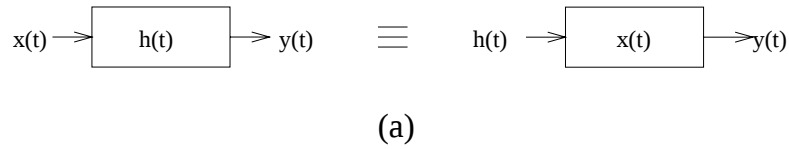
Από τον ορισμό του συγκερασμού έχουμε

$$h(t - \tau) = \begin{cases} s(T - t + \tau) & , 0 < t - \tau < T \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad \text{ή} \\ h(t) = \begin{cases} s(T - t) & , 0 < t < T \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Το σύστημα δηλαδή αποκρίνεται με $s(t)$ ανακλώμενο και μετατοπισμένο κατά T [το σύστημα “ταυριάζει” με το σήμα $s(t)$]. Το σύστημα αυτό ονομάζεται “ταυριαστό φίλτρο” (matched filter).

Γραφική παράσταση του συγκερασμού

Υπάρχει ένας (σχετικά) εύκολος, γραφικός τρόπος να υπολογίσουμε (με κάποια προσέγγιση) το συγκερασμό δύο σημάτων. Κατ’ αυτόν, για δύο συναρτήσεις $x(t)$ και $h(t)$, εργαζόμαστε ως



Σχήμα 2.4: Ιδιότητες του συγκερασμού συνεχούς χρόνου.

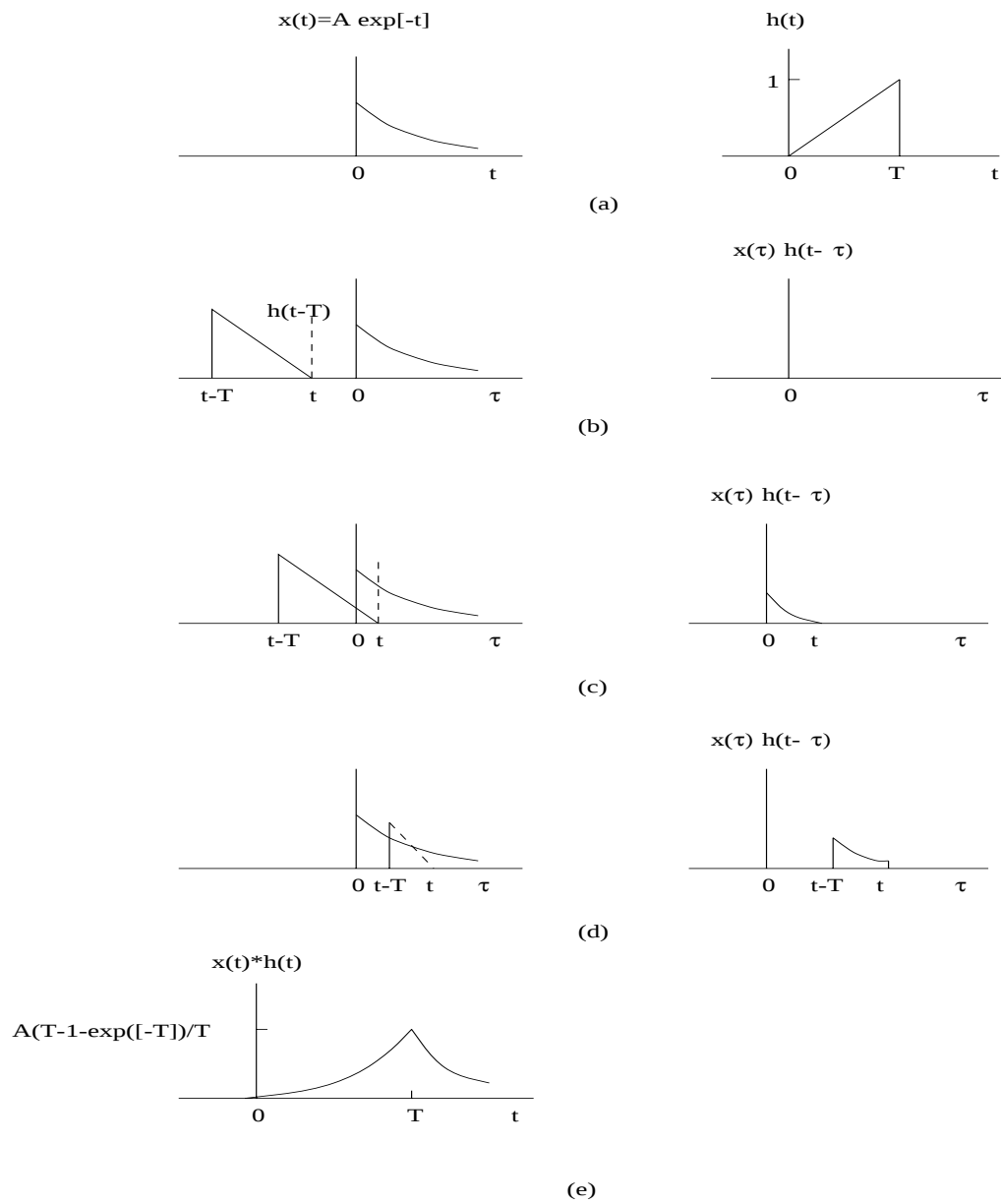
εξής: αντιστρέφουμε τη συνάρτηση $h(t)$ και την ολιοθένουμε στο χρόνο. Σε κάθε σημείο t , η τιμή του συγκερασμού (ολοκληρώματος) καθορίζεται από την επιφάνεια των δύο συναρτήσεων που έχουμε αλληλοκαλύψει.

Παράδειγμα 2.5. Το παράδειγμα αυτό αναφέρεται στα δύο σήματα που απεικονίζονται στο Σχ 2.5, όπου φαίνεται και ο γραφικός υπολογισμός του συγκερασμού των.

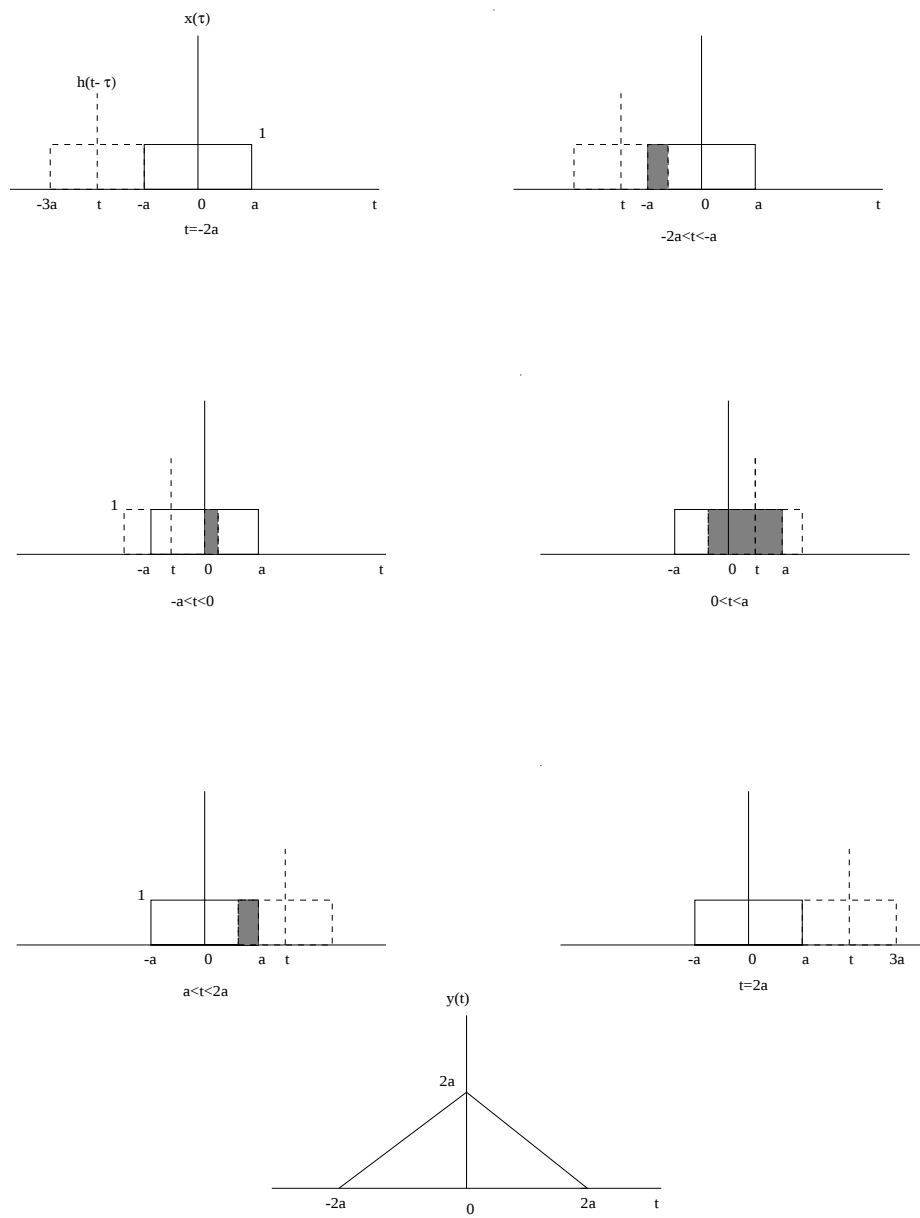
Παράδειγμα 2.6. Το παράδειγμα αυτό αναφέρεται στα δύο σήματα που απεικονίζονται στο Σχ 2.6, όπου φαίνεται και ο γραφικός υπολογισμός του συγκερασμού των.

Παράδειγμα 2.7. Το παράδειγμα αυτό αναφέρεται στα δύο σήματα που απεικονίζονται στο Σχ 2.7, όπου φαίνεται και ο γραφικός υπολογισμός του συγκερασμού των.

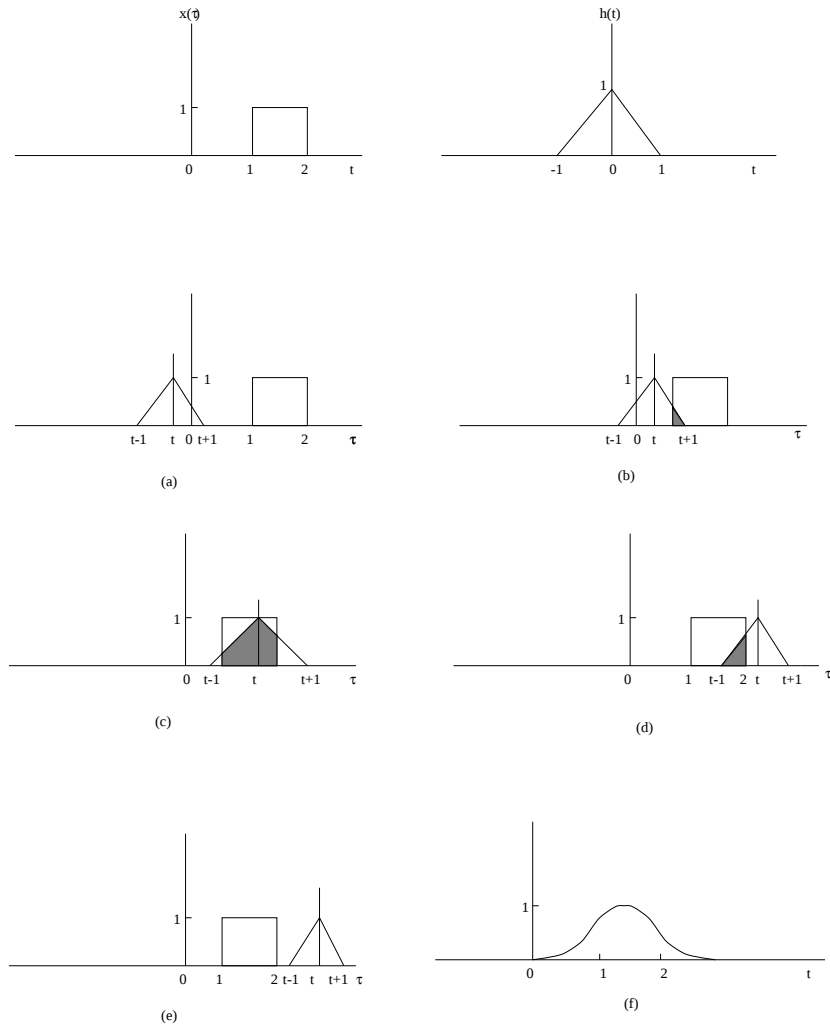
$$y(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \frac{t^2}{2} & , 0 < t < 1 \\ 3t - t^2 - \frac{3}{2} & , 1 < t < 2 \\ \frac{3-t^2}{2} & , 2 < t < 3 \\ 0 & , t > 3 \end{cases}$$



Σχήμα 2.5: Γραφικός υπολογισμός του συγκερασμού (συνεχής χρόνος).



Σχήμα 2.6: (Όπως στο προηγ.)



Σχήμα 2.7: (Όπως στο προηγ.)

2.2 Διακριτός Χρόνος

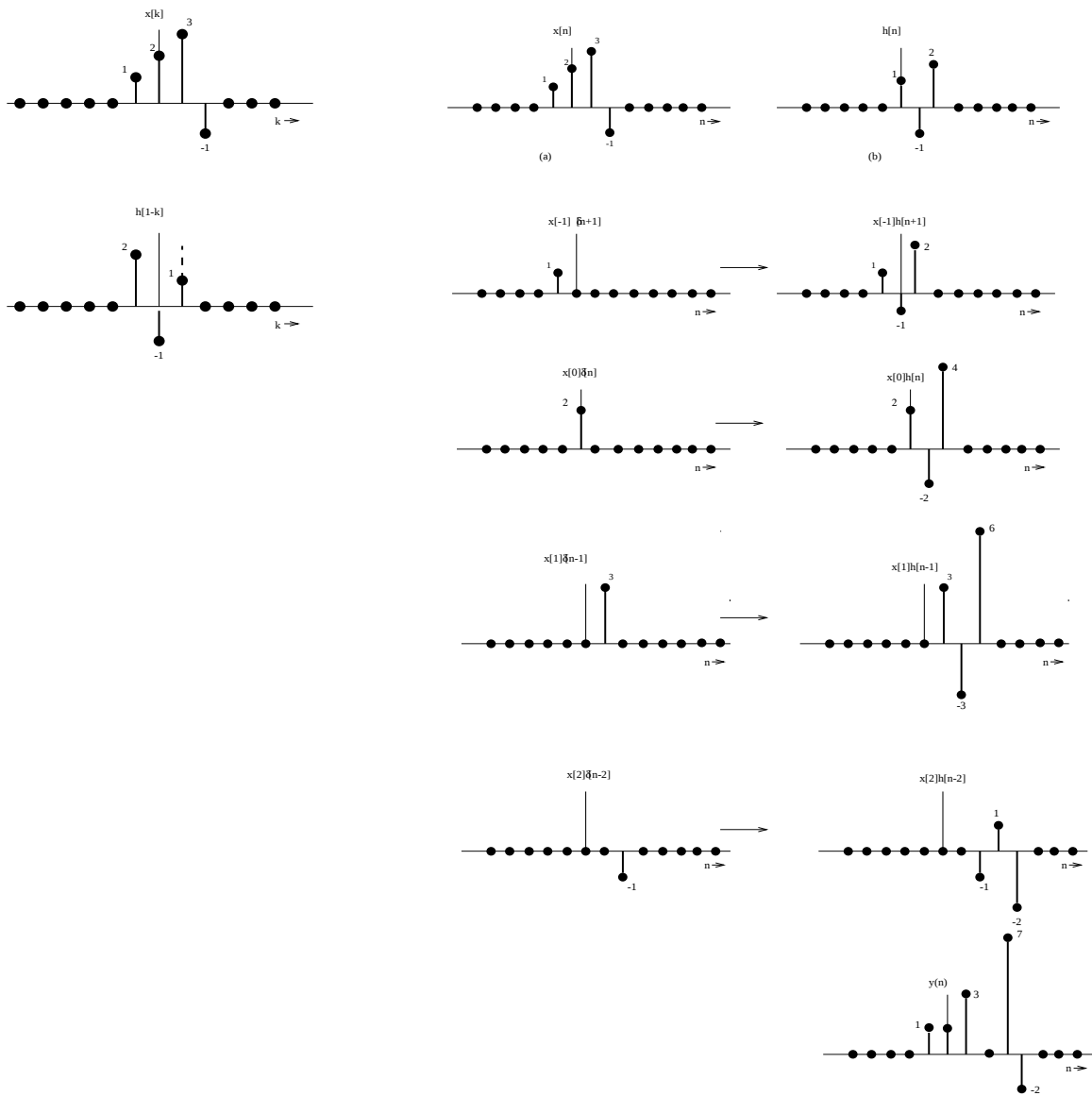
Στη περίπτωση του διακριτού χρόνου το ολοκλήρωμα αντικαθίσταται από άθροισμα (άθροισμα συγκερασμού – convolution sum). Έτσι, ο συγκερασμός δύο σημάτων $x[n]$, $h[n]$ υπολογίζεται ως:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad (2.5)$$

και συμβολίζεται ως

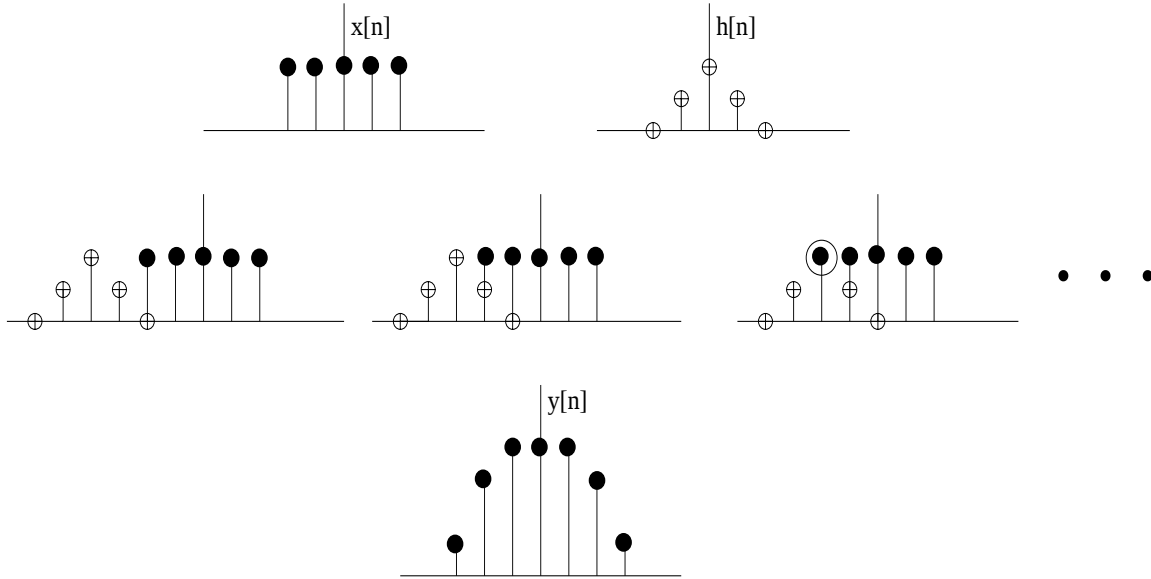
$$y[n] = x[n] \star h[n] \quad (2.6)$$

Ο υπολογισμός με γραφικό τρόπο είναι τελείως ανάλογος με την περίπτωση του συνεχούς χρόνου, όπως απεικονίζεται και στο Σχ 2.8.



Σχήμα 2.8: Γραφικός υπολογισμός του συγκερασμού (διακριτός χρόνος).

Παράδειγμα 2.8. Το παράδειγμα αυτό αναφέρεται στα δύο σήματα $x[n], h[n]$ που απεικονίζονται στο Σχ 2.9, όπου φαίνεται και ο γραφικός υπολογισμός του συγκερασμού των.



Σχήμα 2.9: (Όπως στο προηγ.)

2.3 Περιοδικός Συγκερασμός

Αν $x(t)$ και $h(t)$ είναι περιοδικά σήματα, τότε $x(t) \star h(t)$ δεν συγκλίνει. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε την πράξη του περιοδικού συγκερασμού (periodic convolution)

$$y(t) = \int_0^{T_0} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) \star h(t) \quad (2.7)$$

Ολοκλήρωση σε μια περίοδο: Ισχύει $y_\alpha(t) = y(t)$ όπου $y_\alpha(t) = \int_\alpha^{\alpha+T_0} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$ και η $y(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T_0 .

Παρόμοια ισχύουν και για την περίπτωση διακριτού χρόνου. Για $x[n]$ και $h[n]$ περιοδικά με περίοδο N ισχύει:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[n - k] \quad (2.8)$$

Παράδειγμα 2.9. Εστω $x[n] = \{1, 2, 0, -1\}$ $h[n] = \{1, 3, -1, -2\}$. Ο υπολογισμός του περιοδικού συγκερασμού των $x[n]$ και $h[n]$ φαίνεται στο παρακάτω πίνακα:

n	0	1	2	3
x[n]	1	2	0	-1
x[n-1]	-1	1	2	0
x[n-2]	0	-1	1	2
x[n-3]	2	0	-1	1
h[0]x[n]	1	2	0	-1
h[1]x[n-1]	-3	3	6	0
h[2]x[n-2]	0	1	-1	-2
h[3]x[n-3]	-4	0	2	-2
y[n]	-6	6	7	-5

Παράδειγμα 2.10. Ζητείται να υπολογιστεί ο συγκερασμός $x(t) \star h(t)$ όπου $x(t) = 2e^{-2t}u(t)$ και $h(t) = e^{-t}u(t)$.

Απάντηση:

$$y(t) = x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-2\tau}u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$\text{Για } t < 0, \quad u(t-\tau)u(\tau) = 0$$

$$\text{Για } t > 0, \quad 2e^{-2\tau}u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau) = \begin{cases} 2e^{-2\tau}e^{-(t-\tau)}, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t 2e^{-2\tau}e^{-t}e^{\tau}d\tau \\ &= 2e^{-t} \int_0^t e^{-\tau}d\tau \\ &= -2e^{-t} \left[e^{-\tau} \right]_0^t \\ &= -2e^{-t}(e^{-t} - 1) = 2e^{-t}(1 - e^{-t}), \quad t > 0 \\ \Rightarrow y(t) &= 2e^{-t}(1 - e^{-t})u(t) \quad \forall t \end{aligned}$$

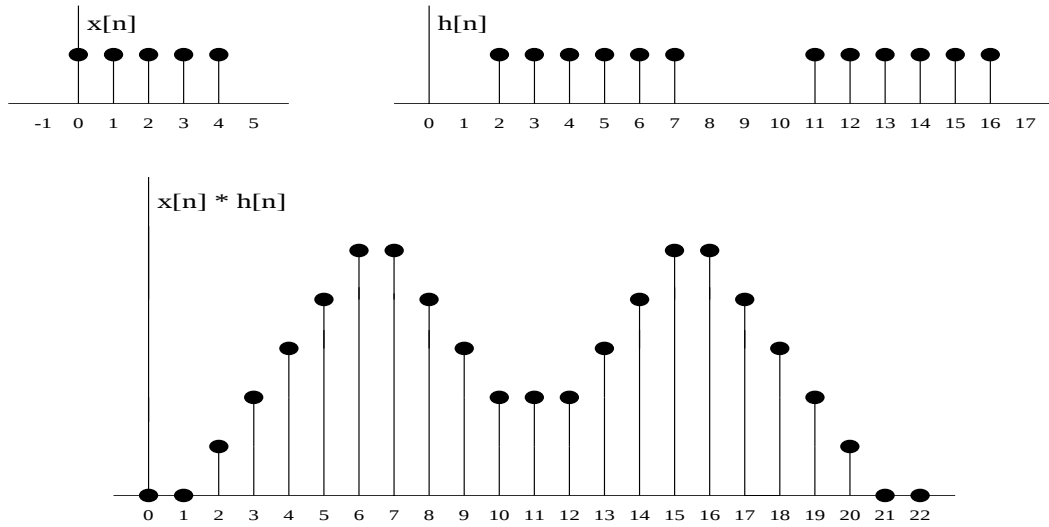
Παράδειγμα 2.11. Ζητείται να υπολογιστεί ο συγκερασμός $x(t) \star h(t)$ όπου $x(t) = te^{-2t}u(t)$ και $h(t) = e^{-t}u(t)$.

Απάντηση: Κάνοντας τον ίδιο συλλογισμό με την προηγούμενη άσκηση και με δεδομένο ότι $\int te^{-t}dt = -(1+t)e^{-t}$ βλέπουμε ότι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau e^{-2\tau}u(\tau)e^{t-\tau}u(t-\tau)d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-t} \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau = e^{-t} \left[-(1+\tau)e^{-\tau} \Big|_0^t \right] \\
&= e^{-t} \left[-(1+t)e^{-t} + (1+0)1 \right] \\
&= e^{-t} \left[1 - (1+t)e^{-t} \right] \quad , \quad t > 0 \\
\Rightarrow y(t) &= e^{-t} \left[1 - (1+t)e^{-t} \right] u(t) \quad , \quad \forall t
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.12. Το παράδειγμα αυτό αναφέρεται στα δύο σήματα $x[n]$, $h[n]$ που απεικονίζονται στο Σχ 2.10, όπου φαίνεται και ο γραφικός υπολογισμός του συγκερασμού των.



Σχήμα 2.10: Γραφικός υπολογισμός του συγκερασμού (διακριτός χρόνος).

Κεφάλαιο 3

Σειρές Fourier Συνεχούς Χρόνου

3.1 Αναπαράσταση με σειρά Fourier

Ξέρουμε ότι κάθε σήμα μπορεί να παρασταθεί σε ένα διάστημα (a, b) σαν σειρά ορθογώνιων συναρτήσεων $\phi_k(t)$. Μια πολύ βολική εκλογή για τις $\phi_k(t)$ είναι οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις που σχετίζονται με την $e^{j\omega_0 t}$ η οποία είναι περιοδική με περίοδο $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Με την παραπάνω συνάρτηση σχετίζουμε την οικογένεια

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.1)$$

Κάθε $\phi_k(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T_0 . Στο σημείο αυτό μπορεί βέβαια κανείς να αναρωτηθεί γιατί διαλέξαμε την οικογένεια των συναρτήσεων $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ για την αναπαράσταση των σημάτων. Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα βρίσκεται στο γεγονός ότι τα γραμμικά, ανεξάρτητα χρόνου (linear time-invariant – LTI) συστήματα αποκρίνονται σε τέτοιες συναρτήσεις χωρίς να τις μεταβάλλουν!

$$e^{st} \xrightarrow{LTI} H(s)e^{st}$$

Σύμφωνα με όσα έχουμε δει περί ορθογώνιας αναπαράστασης, η $x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}$, αν συγκλίνει, είναι περιοδική με περίοδο T_0 . Έτσι, ανάλογα με τις τιμές του k παίρνουμε τους εξής όρους (συντελεστές α_k) του αθροίσματος:

- Ο όρος για $k = 0$: d_c σταθερός όρος
- Οι όροι για $k = \pm 1$: βασική περίοδος T_0 , πρώτοι αρμονικοί
- Οι όροι για $k = \pm 2$: βασική περίοδος $\frac{T_0}{2}$, δευτέροι αρμονικοί
- $\vdots$

Οι όροι για $k = \pm N$: βασική περίοδος $\frac{T_0}{N}$, N-οστοί αρμονικοί

Παράδειγμα 3.1. θεωρούμε το σήμα $x(t) = \sum_{k=-3}^3 \alpha_k e^{jk2\pi t}$, όπου

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = \alpha_{-1} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha_2 = \alpha_{-2} = \frac{1}{2}$$

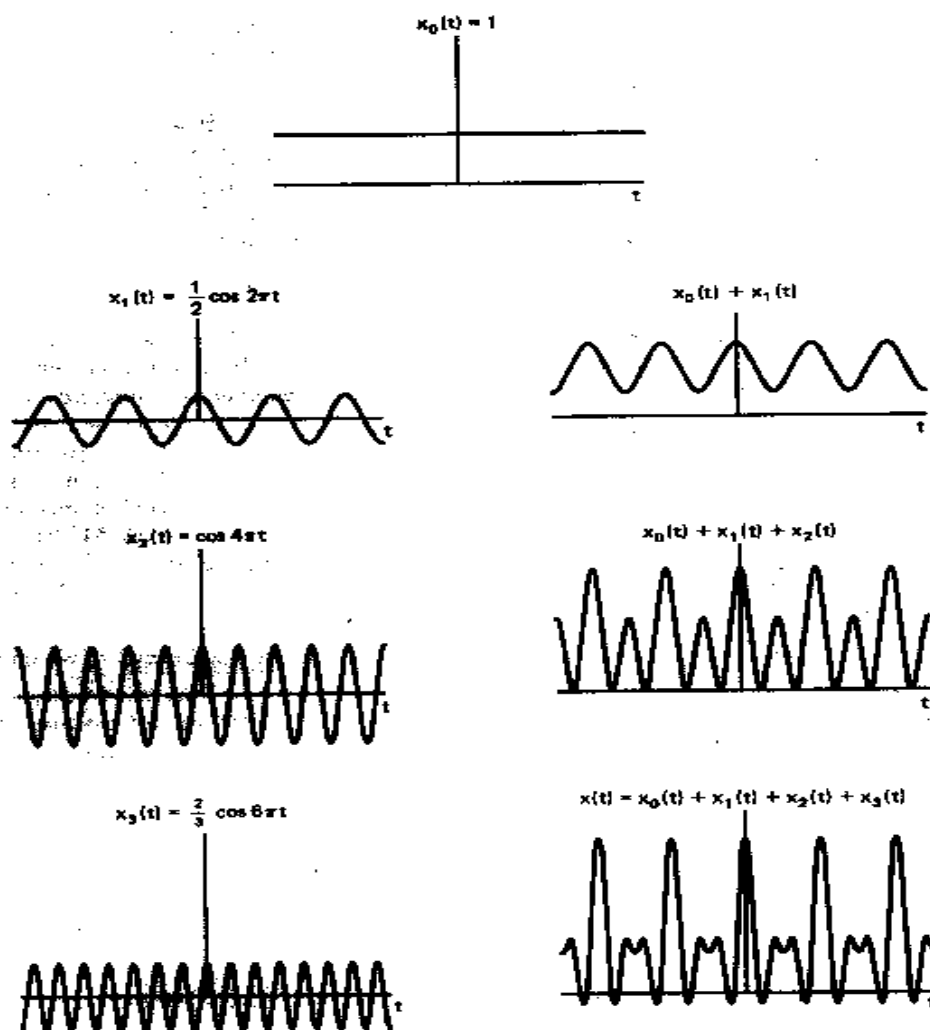
$$\alpha_3 = \alpha_{-3} = \frac{1}{3}$$

Το $x(t)$ μπορεί λοιπόν να παρασταθεί ως σειρά όπως φαίνεται στη συνέχεια

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}((e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t})$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3} \cos 6\pi t$$

Γραφική παράσταση: Το σήμα $x(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η υπέρθεση των “αρμονικών” του, όπως αυτές υπολογίστηκαν παραπάνω. Αυτό φαίνεται σχηματικά στο Σχ 3.1.



Σχήμα 3.1: Κατασκευή του $x(t)$ σαν γραμμικός συνδυασμός των αρμονικών του.

Σειρά Συνημιτόνων. Η προηγούμενη έκφραση του $x(t)$ ως άθροισμα συνημιτόνων είναι μία άλλη, ισοδύναμη αναπαράσταση πραγματικών σημάτων. Εστω $x(t)$ πραγματικό σήμα. Τότε

$$x^*(t) = x(t) \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k^* e^{-jk\omega_0 t} \quad (3.2)$$

Αντικαθιστούμε k με $-k$ και έχουμε:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} \quad (3.3)$$

Εξ' ορισμού

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \alpha_k^* = \alpha_{-k} \quad (3.4)$$

Αναδιατάσσουμε το άθροισμα:

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [\alpha_k e^{jk\omega_0 t} + \alpha_{-k} e^{jk\omega_0 t}] \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [\alpha_k e^{jk\omega_0 t} + \alpha_k^* e^{-jk\omega_0 t}] \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\Re\{\alpha_k e^{jk\omega_0 t}\} \quad (\alpha_k = A_k e^{j\theta_k} \quad (A)) \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\Re\{A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}\} \\ &= \alpha_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \end{aligned}$$

Αν αντί για την (A) χρησιμοποιήσουμε την: $\alpha_k = B_k + jC_k$ τότε

$$x(t) = \alpha_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} [B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)] \quad (3.5)$$

Υπολογισμός των συντελεστών α_k . θεωρώντας ότι το $x(t)$ γράφεται ως σειρά Fourier

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \\ x(t)e^{-jn\omega_0 t} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt &= \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \left[\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right] \\
\text{ισχύει όμως} \quad \int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt &= \begin{cases} T_0 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases} \Rightarrow \\
\int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt &= T_0 \alpha_n \Rightarrow \\
\alpha_n &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ μπορεί να είναι σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους T_0 . Αυτό δηλώνεται με τον συμβολισμό $\int_{T_0}$.

Ολοκληρώνοντας, αν το $x(t)$ γράφεται σαν σειρά Fourier, τότε οι συντελεστές της σειράς δίνονται από την εξίσωση (3.6). Η εξίσωση αναπαράστασης του $x(t)$ καθώς και η εξίσωση που δίνει τους συντελεστές ορίζουν τη σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος:

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}$	εξίσωση σύνθεσης
$\alpha_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$	εξίσωση ανάλυσης

(3.7)

Οι α_k λέγονται συντελεστές της σειράς Fourier ή φασματικοί συντελεστές του $x(t)$ (spectral coefficients). Ειδικότερα, ο α_0 ισούται με $\alpha_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$, είναι δηλαδή η μέση τιμή του $x(t)$ σε μια περίοδο.

Παράδειγμα 3.2. Εστω το σήμα $x(t) = \sin \omega_0 t$. Ζητείται να γραφεί σαν σειρά Fourier.

Απάντηση: Το ημίτονο μπορεί να αναλυθεί σαν άθροισμα εκθετικών συναρτήσεων

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} \Rightarrow$$

οπότε οι συντελεστές της σειράς δίνονται ως

$$\alpha_1 = \frac{1}{2j}, \quad \alpha_{-1} = -\frac{1}{2j}, \quad \alpha_k = 0 \text{ για } k \neq 1, -1$$

Παράδειγμα 3.3. Εστω το σήμα

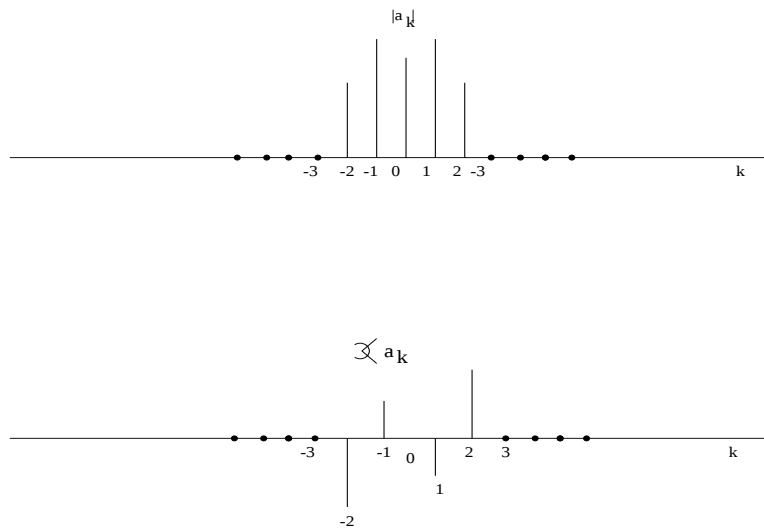
$$x(t) = 1 + \sin \omega_0 t + 2 \cos \omega_0 t + \cos \left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4} \right)$$

Ζητείται να γραφεί σαν σειρά Fourier.

Απάντηση:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 1 + \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] + [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] + \frac{1}{2} [e^{j(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})}] \\
 \Rightarrow x(t) &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right) e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right) e^{-j\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}\right) e^{j2\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}\right) e^{-j2\omega_0 t} \\
 \Rightarrow &\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 1 + \frac{1}{2j} = 1 - \frac{1}{2}j \\ \alpha_{-1} = 1 - \frac{1}{2j} = 1 + \frac{1}{2}j \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + j) \\ \alpha_{-2} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - j) \\ \alpha_k = 0, \quad |k| > 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Βλέπε Σχ 3.2.

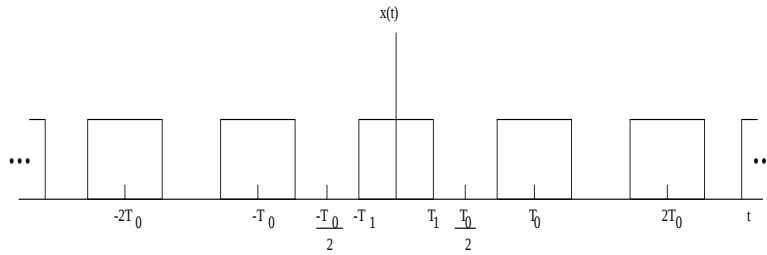


Σχήμα 3.2: Πλάτος και φάση των συντελεστών Fourier του παραδείγματος 3.3.

Παράδειγμα 3.4. Εστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad \text{ορισμός για μια περίοδο } T_0$$

το οποίο φαίνεται και στο Σχ 3.3. Ζητείται να γραφεί σαν σειρά Fourier.

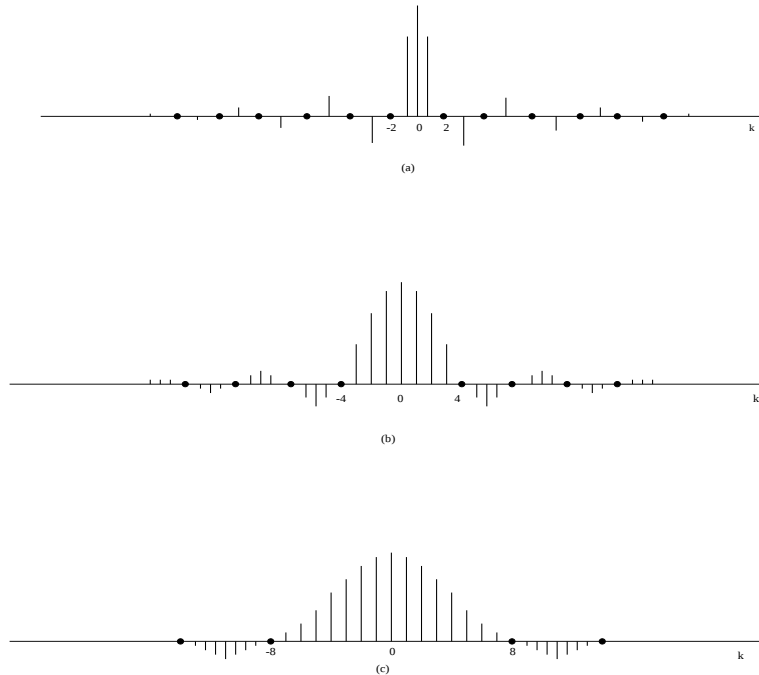


Σχήμα 3.3: Σήμα (ακολουθία από παλμούς) του παραδείγματος 3.4.

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι είναι βολικό να ολοκληρώσουμε στο $\left(-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T_0} \quad (\text{μέση τιμή στο διάστημα } T_0) \\ \alpha_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{2}{k\omega_0 T_0} \left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right] \\ &\Rightarrow \alpha_k = \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_0} = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}, \quad k \neq 0\end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση των α_k για διάφορες τιμές του T_0 φαίνεται στο Σχ 3.4.



Σχήμα 3.4: Οι συντελεστές της σειράς Fourier του παραδείγματος 3.4.

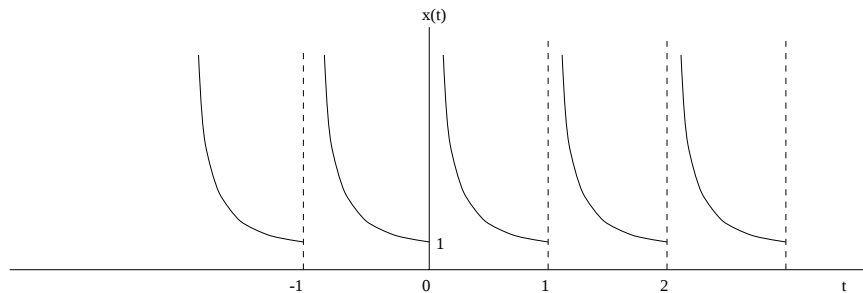
3.2 Συνθήκες Σύγκλισης

Συνθήκες Dirichlet: Το $x(t)$ (που προκύπτει από την σειρά) είναι ίσο με το πραγματικό $x(t)$ εκτός από μεμονωμένες τιμές του t , όπου η άπειρη σειρά συγκλίνει στη “μέση τιμή” της ασυνέχειας, δηλαδή στον μέσο όρο των τιμών από τις δύο πλευρές της ασυνέχειας. Η ίδια η σύγκλιση της σειράς εξασφαλίζεται από τις παρακάτω συνθήκες, οι οποίες διατυπώθηκαν από τον P.L. Dirichlet και φέρουν το όνομά του. Ένα ευτυχές γεγονός είναι ότι οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται από όλα σχεδόν τα σήματα που συναντώνται στη πράξη.

Συνθήκη 1: Το $x(t)$ πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο σε μία περίοδο, δηλαδή πρέπει να ισχύει

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty \quad (3.8)$$

Παράδειγμα περιοδικού σήματος που δεν εκπληρεί τη συνθήκη 1 είναι το $x(t) = \frac{1}{t}$, $0 < t \leq 1$ (Σχ 3.5).



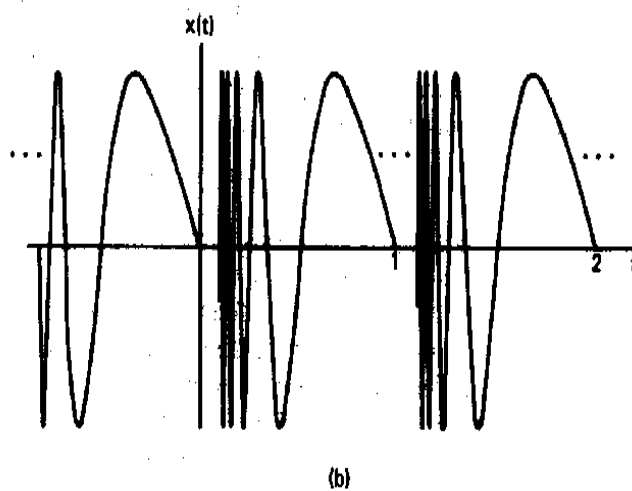
Σχήμα 3.5: Ένα σήμα που δεν εκπληρεί τη συνθήκη 1.

Συνθήκη 2: Σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, η $x(t)$ πρέπει να έχει πεπερασμένο αριθμό μέγιστων και ελάχιστων. Παράδειγμα σήματος που πληρεί τη συνθήκη 1 αλλά όχι τη συνθήκη 2 είναι το $x(t) = \sin(\frac{2\pi}{t})$, $0 < t \leq 1$ (Σχ 3.6).

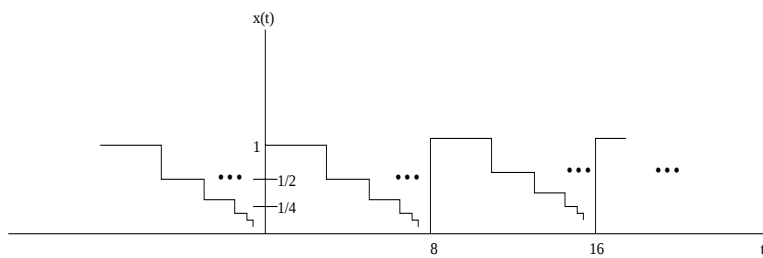
Συνθήκη 3: Σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα πρέπει να υπάρχει πεπερασμένος αριθμός ασυνεχειών. Επιπλέον, κάθε μία από αυτές τις ασυνέχειες πρέπει να είναι πεπερασμένη. Για παράδειγμα, η $x(t)$ του Σχ 3.7 δεν πληρεί την 3.

Σημείωση: Όπως φαίνεται και από τα Σχ 3.5, 3.6, 3.7, οι συναρτήσεις που δεν πληρούν τις συνθήκες 1,2,3 είναι γενικά “παθολογικές” οπότε δεν θα ασχοληθούμε περισσότερο με το θέμα της σύγκλισης. Οι συναρτήσεις που μας ενδιαφέρουν στη πράξη πληρούν τις συνθήκες.

Παράδειγμα 3.5. Φαινόμενο Gibbs. Η αποκορμμένη (truncated) αναπαράσταση με σειρά Fourier ενός ασυνεχούς σήματος $x(t)$ θα παρουσιάζει συνήθως ταλαντώσεις υψηλής συχνότητας κοντά

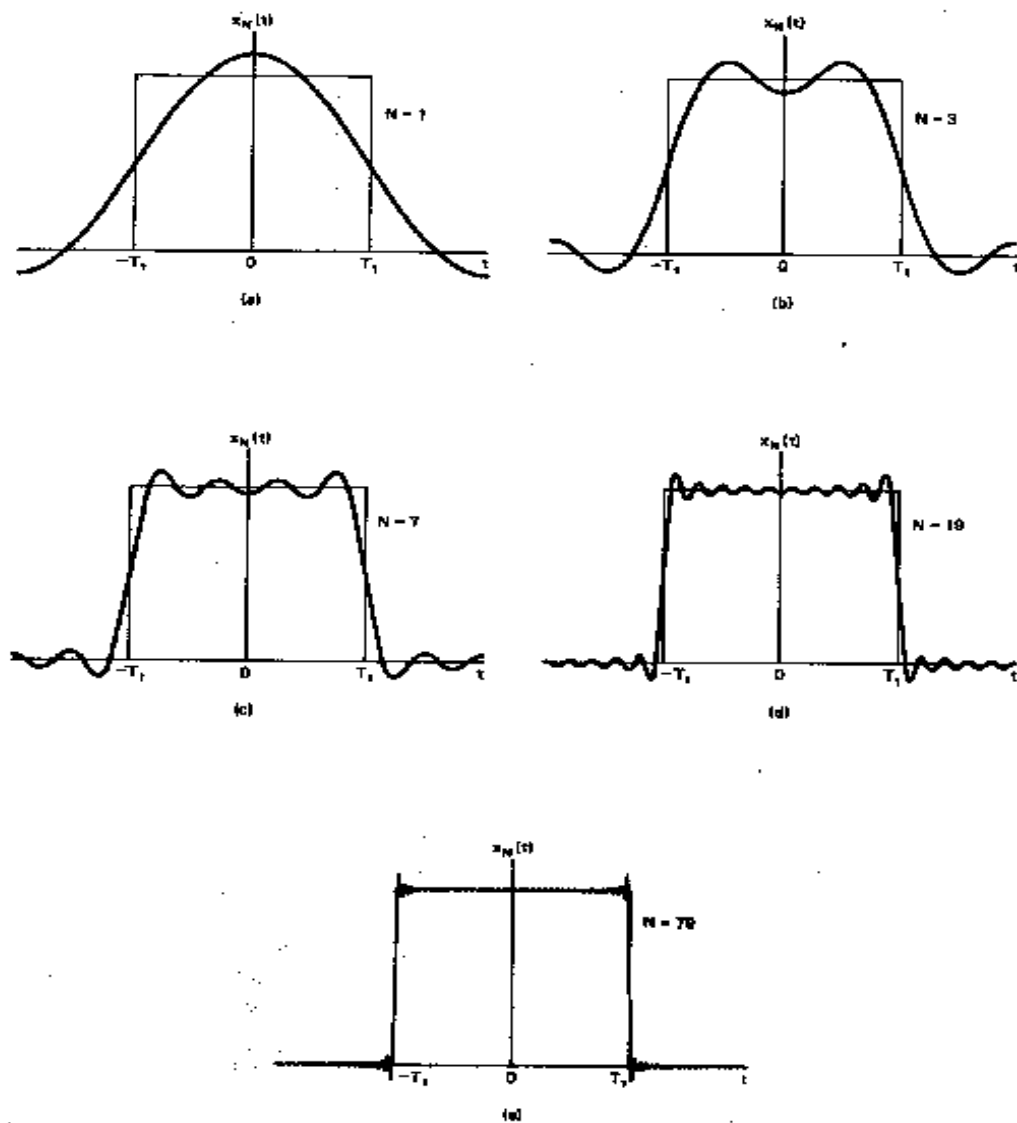


Σχήμα 3.6: Ένα σήμα που πληρεί τη συνθήκη 1 αλλά όχι τη συνθήκη 2.



Σχήμα 3.7: Ένα σήμα που δεν πληρεί τη συνθήκη 3.

στις ασυνέχειες. Γι' αυτό, το N πρέπει να είναι πολύ μεγάλο ώστε η ενέργεια των ασυνεχειών να είναι αμελητέα. Αυτό απεικονίζεται στο Σχ 3.8 για τον τετραγωνικό παλμό.



Σχήμα 3.8: Σύγκλιση της σειράς Fourier για το τετραγωνικό παλμό: παρουσίαση του φαινομένου Gibbs. Στο σχήμα απεικονίζεται η προσέγγιση του σήματος με τη πεπερασμένη σειρά

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \text{ για διάφορες τιμές του } N.$$

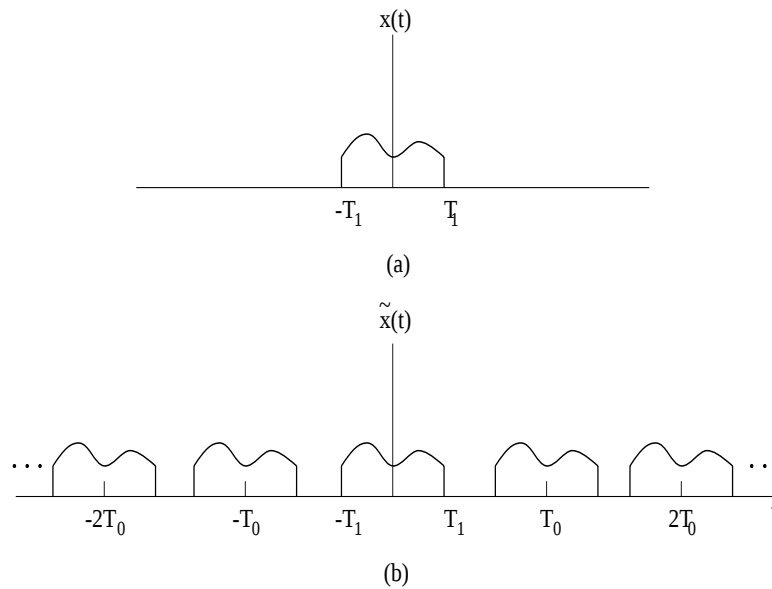
Κεφάλαιο 4

Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου

4.1 Αναπαράσταση Μη-Περιοδικών Σημάτων

Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε την αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων, καταφεύγουμε στο εξής τέχνασμα: θεωρούμε ένα μη-περιοδικό σήμα σαν το όριο ενός περιοδικού όταν η περίοδος $\rightarrow \infty$.

Εστω μη-περιοδικό σήμα $x(t)$ πεπερασμένης διάρκειας, $x(t) = 0$ αν $|t| > T_1$. Από το $x(t)$ μπορούμε να φτιάξουμε ένα περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ όπως φαίνεται στο Σχ 4.1.



Σχήμα 4.1: (α) Μη-περιοδικό σήμα $x(t)$, (β) περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$.

Όταν το T_0 μεγαλώνει το $\tilde{x}(t)$ ταυτίζεται με το $x(t)$ για όλο και μεγαλύτερο διάστημα. Στο όριο $T_0 \rightarrow \infty$, και $\tilde{x}(t) = x(t)$ για κάθε πεπερασμένη τιμή του t . Από την αναπαράσταση σε σειρά

του $\tilde{x}(t)$ έχουμε

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.1)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4.2)$$

Ομως $\tilde{x}(t) = x(t)$ στο $|t| < T_0/2$ και $x(t) = 0$ στο $|t| > T_0/2$ και συνεπώς

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4.3)$$

ορίζοντας $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ παίρνουμε

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) \quad (4.4)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad \left(\frac{2\pi}{T_0} = \omega_0 \right) \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad (4.6)$$

Για $T_0 \rightarrow \infty$, $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$, $\omega_0 \rightarrow 0$ και καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	αντίστροφος μετασχ. Fourier
$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	μετασχ. ή ολοκλήρωμα Fourier

(4.7)

Οι δυο παραπάνω εξισώσεις αποτελούν το **μετασχηματισμό Fourier**. Το $X(\omega)$ λέγεται φάσμα (spectrum) του $x(t)$.

4.2 Συνθήκες Σύγκλισης

Όπως και στη περίπτωση των σειρών Fourier, έτσι και στο μετασχηματισμό Fourier η σύγκλιση εξασφαλίζεται αν ικανοποιούνται κάποιες συνθήκες, οι οποίες και πάλι αναφέρονται ως συνθήκες Dirichlet:

1. $x(t)$ απολύτως ολοκληρώσιμη

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2. Σε κάθε πεπερασμένο διάστημα, η $x(t)$ πρέπει να έχει πεπερασμένο αριθμό ελάχιστων και μέγιστων

3. Σε κάθε πεπερασμένο διάστημα, η $x(t)$ πρέπει να έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών. Κάθε ασυνέχεια πρέπει να είναι πεπερασμένη.

Ισχύει βέβαια και πάλι ότι οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται στη πράξη από όλες τις συναρτήσεις που μας ενδιαφέρουν (μόνο “παθολογικές” συναρτήσεις δεν τις ικανοποιούν).

4.3 Παραδείγματα

Παράδειγμα 4.1. Εστω σήμα $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$. Ζητείται να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$.

Απάντηση:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} \\ \Rightarrow X(\omega) &= \frac{1}{a+j\omega}, \quad a > 0 \end{aligned}$$

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \angle X(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

όπου με $|X(\omega)|$ συμβολίζουμε το μέτρο (magnitude) του $X(\omega)$ και με $\angle X(\omega)$ τη φάση του. (βλέπε Σχ 4.2).

Παράδειγμα 4.2. Εστω $x(t) = \delta(t)$ Τότε,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

δηλαδή η $\delta(t)$ έχει φάσμα που αποτελείται από συνιστώσες σε όλες τις συχνότητες.

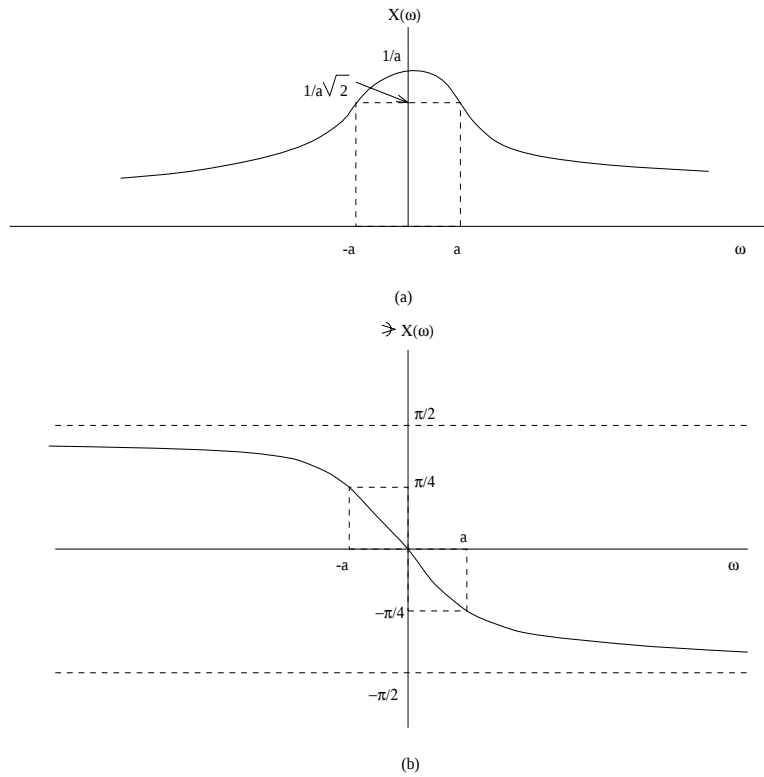
Παράδειγμα 4.3. Ζητείται να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος (τετραγωνικός παλμός)

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } |t| < T_1 \\ 0 & \text{if } |t| > T_1 \end{cases}$$

Απάντηση:

$$X(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

(βλέπε Σχ 4.3).



Σχήμα 4.2: Μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$ (παράδειγμα 4.1).

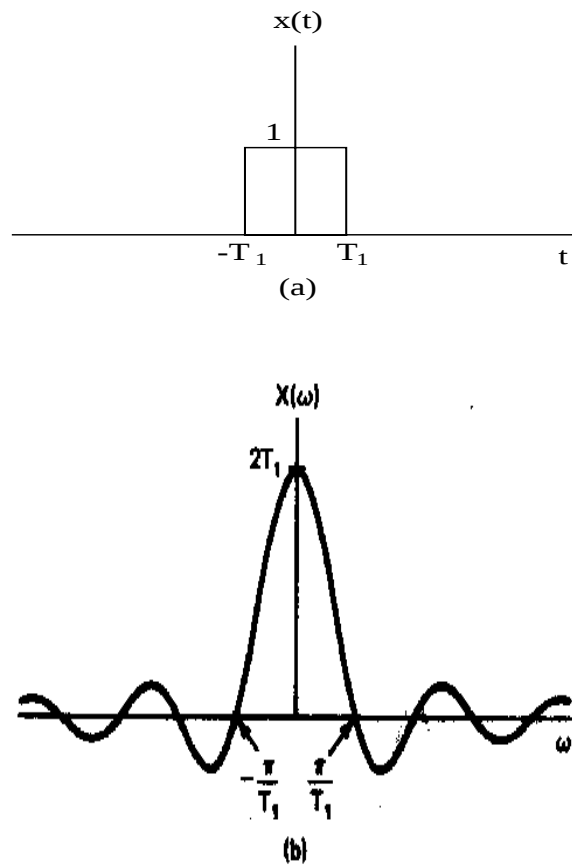
Παράδειγμα 4.4. Εστω

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } |\omega| < W \\ 0 & \text{if } |\omega| > W \end{cases}$$

Τότε (βλέπε Σχ 4.4),

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$$

Σαν ένα τελευταίο σχόλιο σ' αυτό το σημείο, παρατηρούμε ότι μπορούμε να καταλάβουμε καλύτερα τη σχέση ανάμεσα στο χρόνο και στις συχνότητες από το προηγούμενο Σχ 4.4, το οποίο έχουμε ξαναζωγραφίσει για διάφορες τιμές του W στο Σχ 4.5. Από το σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι όσο το W αυξάνει, το $X(\omega)$ γίνεται πιο φαρδύ ενώ ο κύριος λοβός του $x(t)$ στο $t = 0$ γίνεται πιο στενός και πιο ψηλός. Στην πραγματικότητα, στο όριο $W \rightarrow \infty$, $X(\omega) = 1 \quad \forall \omega$, και το $x(t)$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση δέλτα (δ). Η συμπεριφορά αυτή (όπως απεικονίζεται στο Σχ 4.5) είναι ένα παράδειγμα της αντίστροφης σχέσης που υπάρχει μεταξύ χρόνου και συχνοτήτων (μια παρόμοια συμπεριφορά θα μπορούσε να δει κανείς στο Σχ 4.3).



Σχήμα 4.3: Ο τετραγωνικός παλμός και ο μετασχηματισμός Fourier αυτού (παράδειγμα 4.3).

4.4 Μετασχηματισμός Fourier Περιοδικών Σημάτων

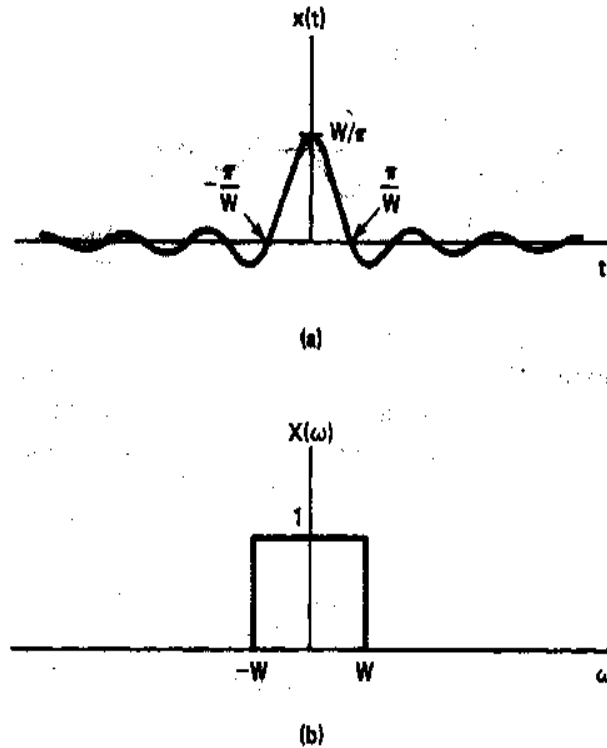
Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να αναπτυχθεί ως σειρά Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.8)$$

Στη περίπτωση αυτή, ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$ (μπορεί να αποδειχθεί ότι) δίνεται ως

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (\text{χωρίς derivation}) \quad (4.9)$$

Παρατηρούμε ότι σ' αυτή τη περίπτωση ο μετασχηματισμός Fourier είναι σειρά από πολύ στενούς παλμούς (impulses).



Σχήμα 4.4: Μετασχηματισμός Fourier (ζευγάρι) του παραδείγματος 4.4.

Παράδειγμα 4.5. Εστω το ημιτονικό σήμα $x(t) = \sin \omega_0 t$. Ξέρουμε ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier του $x(t)$ δίνονται ως

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2j} \\ a_{-1} &= -\frac{1}{2j} \end{aligned}$$

και $a_k = 0$ για $k \neq 1, k \neq -1$. Ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ απεικονίζεται στο Σχ 4.6.

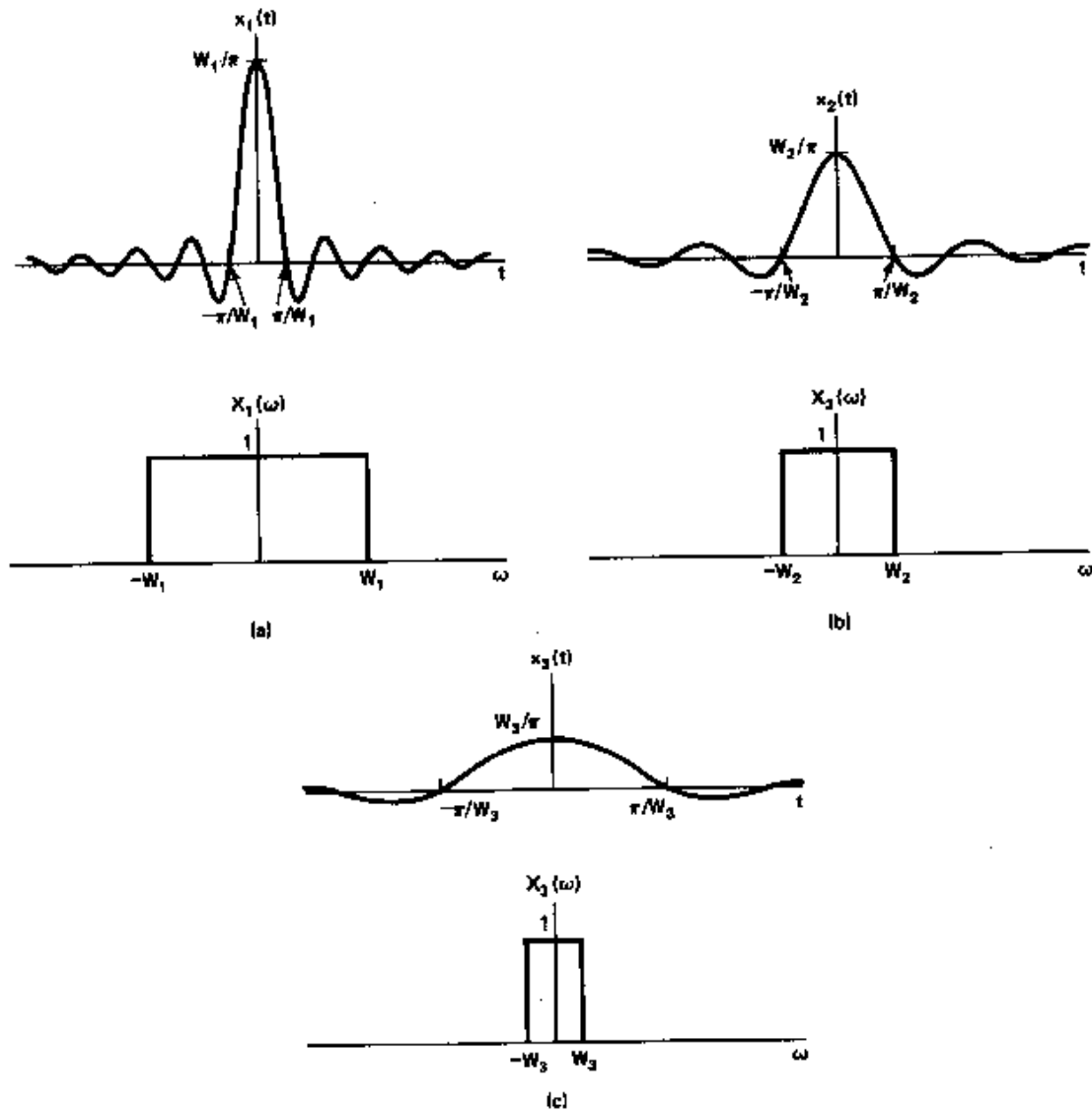
Παράδειγμα 4.6. Εστω το συνημιτονικό σήμα $x(t) = \cos \omega_0 t$. Ξέρουμε ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier του $x(t)$ δίνονται ως

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

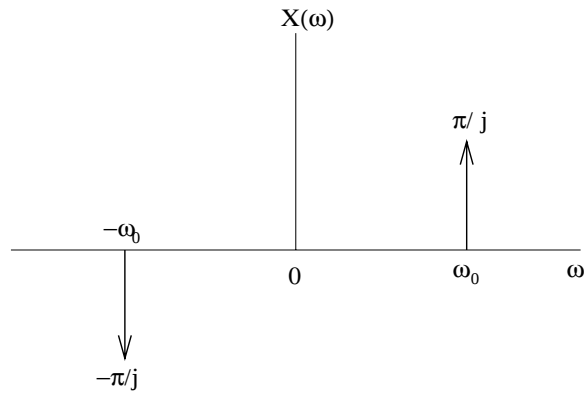
και $a_k = 0$ για $k \neq 1, k \neq -1$. Ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ απεικονίζεται στο Σχ 4.7.

Παράδειγμα 4.7. Εστω το σήμα $x(t)$ που αποτελείται από ένα τρένο από παλμούς

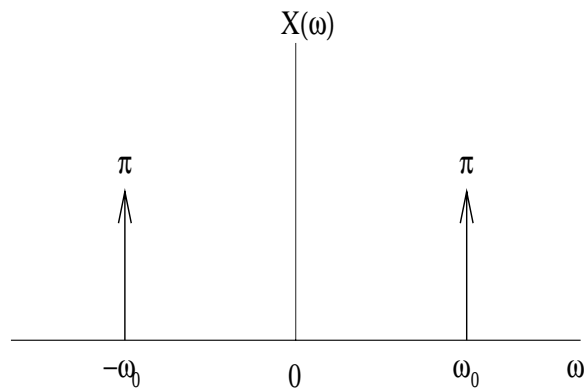
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



Σχήμα 4.5: Μετασχηματισμός Fourier (ζευγάρι) του παραδείγματος 4.4 για διάφορες τιμές του W .



Σχήμα 4.6: Μετασχηματισμός Fourier του $x(t) = \sin \omega_0 t$.



Σχήμα 4.7: Μετασχηματισμός Fourier του $x(t) = \cos \omega_0 t$.

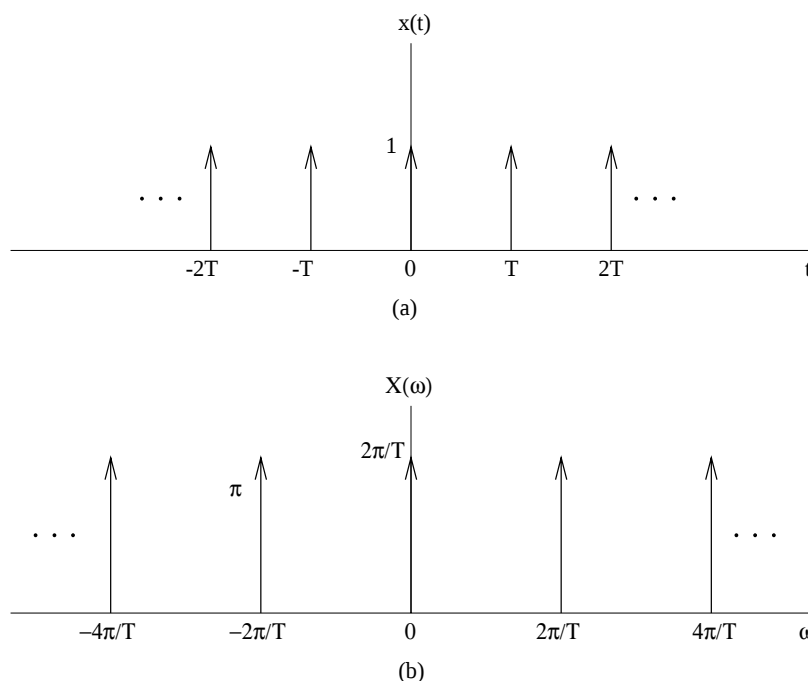
Οι συντελεστές της σειράς Fourier του $x(t)$ δίνονται ως

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

οπότε ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ είναι (βλέπε και Σχ 4.8):

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$$

Παρατηρούμε ότι σ' αυτή τη περίπτωση τόσο το σήμα όσο και ο μετασχηματισμός του είναι η ίδια συνάρτηση (τρένο από παλμούς), με διαφορετικές βέβαια παραμέτρους.



Σχήμα 4.8: Μετασχηματισμός Fourier του τρένου από παλμούς (παράδειγμα 4.7).

4.5 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Συνεχούς Χρόνου

Στη συνέχεια υιοθετούμε το συμβολισμό για το μετασχηματισμό Fourier

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad (4.10)$$

δηλαδή, συμβολίζουμε ένα οποιοδήποτε σήμα με κάποιο “μικρό” λατινικό γράμμα και συμβολίζουμε το μετασχηματισμό του με το αντίστοιχο “κεφαλαίο” γράμμα.

Γραμμικότητα (Linearity):

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aX_1(\omega) + bX_2(\omega) \quad (4.11)$$

Ιδιότητα Συμμετρίας: Αν $x(t)$ είναι πραγματικό (real) σήμα, τότε ισχύει

$$X(-\omega) = X^*(\omega) \quad (4.12)$$

όπου $*$ δηλώνει συζυγή μιγαδικό. Για παράδειγμα, αν

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

θα έχουμε

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$\Rightarrow X(-\omega) = \frac{1}{a - j\omega} = X^*(\omega)$$

Ξέρουμε τώρα ότι κάθε πραγματική συνάρτηση μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα μιας άρτιας (even) και μιας περιττής (odd) συνάρτησης:

$$x(t) \text{ real} \Rightarrow x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (4.13)$$

όπου

$$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} , \mathcal{E}v\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\} , \mathcal{O}d\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

Ισχύουν:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

$$\mathcal{E}v\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Re\{X(\omega)\}$$

$$\mathcal{O}d\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Im\{X(\omega)\}$$

Ολίσθηση στο χρόνο (Time shifting): Η ολίσθηση στο χρόνο αφήνει το πλάτος του μετασχηματισμού Fourier αναλλοίωτο και εισάγει μια ολίσθηση στη φάση η οποία είναι γραμμική συνάρτηση του ω .

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(\omega) \quad (4.14)$$

Παραγωγή/Ολοκλήρωση: Η παραγωγή στο χρόνο αντικαθίσταται με πολλαπλασιασμό στις συχνότητες

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(\omega) \quad (4.15)$$

Αντίστοιχα, η ολοκλήρωση στο χρόνο εισάγει διαίρεση στις συχνότητες καθώς και ένα όρο (παλμός) που αντιστοιχεί στη dc (μέση) τιμή που μπορεί να προκύψει από την ολοκλήρωση

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega) \quad (4.16)$$

Πολλαπλασιασμός στο χρόνο/συχνότητα: Ο πολλαπλασιασμός στο χρόνο έχει ως αποτέλεσμα τον πολλαπλασιασμό στη συχνότητα με ένα αντίστροφο παράγοντα (και αντίστροφα)

$$x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (4.17)$$

Δυστομός: Συγκρίνοντας τον ευθύ με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier παρατηρούμε ότι υπάρχει μια μεγάλη συμμετρία μεταξύ τους. Η συμμετρία αυτή έχει ως αποτέλεσμα μια ιδιότητα που λέγεται *δυστομός* (duality). Την ιδιότητα αυτή μπορούμε να τη δούμε αν θεωρήσουμε μια σχέση μεταξύ δύο συναρτήσεων f, g ως

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{-j uv} dv \quad (4.18)$$

Θέτοντας $u = \omega$, $v = t$ παίρνουμε

$$f(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} \quad (4.19)$$

Αντίστοιχα, θέτοντας $u = t$, $v = \omega$ παίρνουμε

$$g(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{f(t)\} \quad (4.20)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι στη γενική περίπτωση ισχύει ότι

$$\text{αν: } g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} f(\omega) \quad \text{τότε: } f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi g(-\omega) \quad (4.21)$$

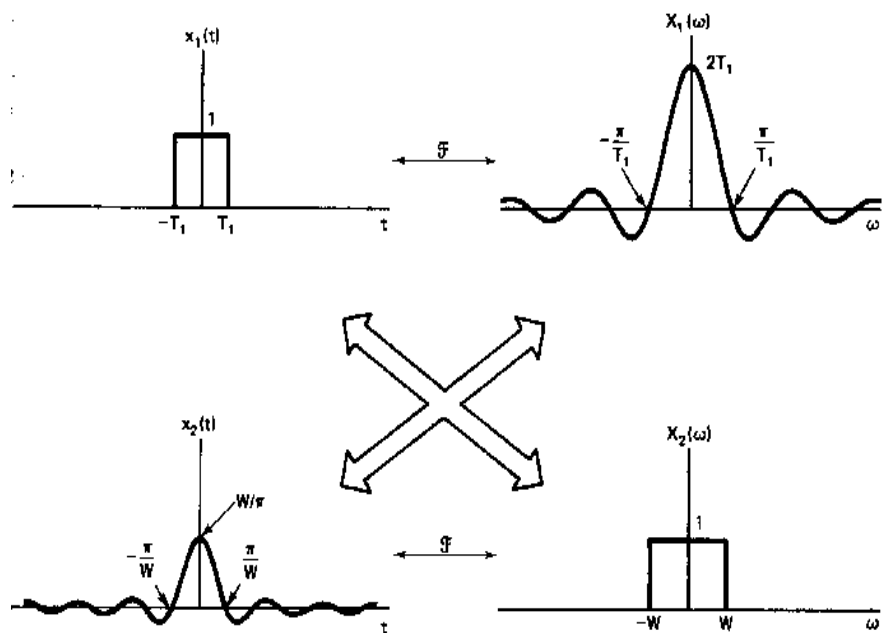
Παράδειγμα 4.8. Αναφερόμενοι στα σήματα που παρουσιάστηκαν στα Σχ 4.3, 4.4, μπορούμε να επιδείξουμε την ιδιότητα της συμμετρίας όπως φαίνεται στο Σχ 4.9).

Σχέση Parseval: Η σχέση Parseval δίνει την ολική ενέργεια ενός σήματος ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (4.22)$$

Πρακτικά, η σχέση αυτή δίνει τη δυνατότητα να υπολογίζουμε την ολική ενέργεια είτε στο χρόνο είτε στις συχνότητες. Στη περίπτωση περιοδικών σημάτων, η σχέση Parseval συνδέει την ενέργεια σε μια περίοδο με τους συντελεστές της σειράς Fourier

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \quad a_k : \text{ Fourier series coefficients} \quad (4.23)$$



Σχήμα 4.9: Ιδιότητα δυϊσμού του μετασχηματισμού Fourier.

Ιδιότητα Συγκερασμού: Μια πολύ βασική ιδιότητα σε σχέση με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier σε LTI συστήματα είναι η ιδιότητα του συγκερασμού (convolution property). Η ιδιότητα αυτή αντικαθιστά το συγκερασμό στο χρόνο με πολλαπλασιασμό στις συχνότητες:

$$y(t) = h(t) \star x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \quad (4.24)$$

Παράδειγμα 4.9.

$$x(t) \rightarrow \boxed{H_1(\omega)} \rightarrow \boxed{H_2(\omega)} \rightarrow y(t)$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{H_1(\omega)H_2(\omega)} \rightarrow y(t)$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{H_2(\omega)} \rightarrow \boxed{H_1(\omega)} \rightarrow y(t)$$

Τα παραπάνω είναι ισοδύναμα συστήματα.

Παράδειγμα 4.10. Εστω $x(t) = u(t)$, $h(t) = e^{-at}u(t)$. Ζητείται να υπολογιστεί το $y(t) = x(t) \star h(t)$.

Απάντηση:

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) &= \mathcal{F}\{u(t)\} \dot{\mathcal{F}}\{e^{-at}u(t)\} \\
 &= \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \left[\frac{1}{a + j\omega} \right] = \frac{\pi}{a}\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega(a + j\omega)} \\
 &= \frac{1}{a} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] - \frac{1}{a} \frac{1}{a + j\omega} \\
 \Rightarrow y(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\} = \frac{1}{a}u(t) - \frac{1}{a}e^{-at}u(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.11. Ο μετασχηματισμός Fourier του τριγωνικού σήματος μπορεί να βρεθεί θεωρώντας το τριγωνικό σήμα ως συγκεκρισμένο δύο τετραγωνικών σημάτων.

$$\Delta(t/\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \text{rect}(t/\tau) \star \frac{1}{\sqrt{\tau}} \text{rect}(t/\tau)$$

$$\mathcal{F}\{\Delta(t/\tau)\} = \left(\mathcal{F}\left\{ \frac{1}{\sqrt{\tau}} \text{rect}(t/\tau) \right\} \right)^2 = \tau \left(\text{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \right)^2$$

Ιδιότητα Διαμόρφωσης: Η ιδιότητα διαμόρφωσης (modulation property) συσχετίζει το πολλαπλασιασμό (διαμόρφωση) στο χρόνο με το συγκεκρισμένο στις συχνότητες (αντίστροφα από την ιδιότητα συγκεκρισμού):

$$r(t) = s(t)p(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} R(\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(\omega) \star P(\omega)] \quad (4.25)$$

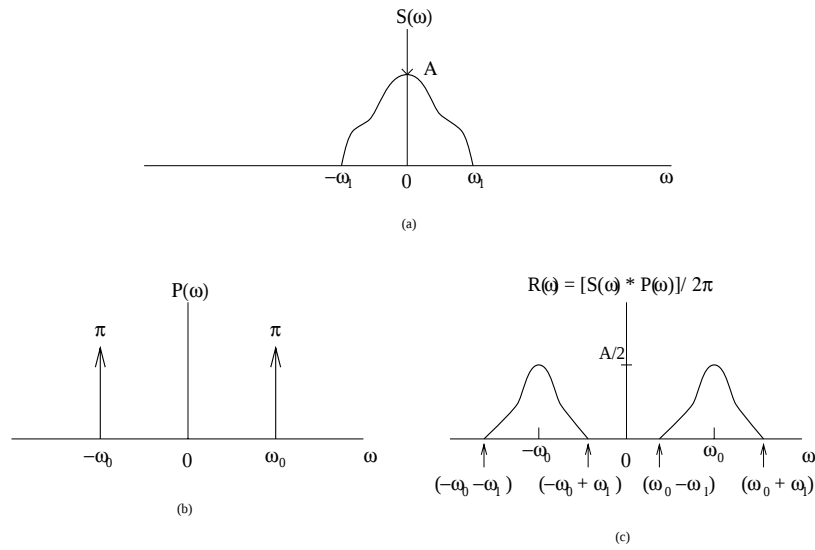
Παράδειγμα 4.12. Το φάσμα $S(\omega)$ ενός σήματος $s(t)$ είναι όπως φαίνεται στο Σχ 4.10a. Εστω ένα άλλο σήμα $p(t) = \cos \omega_0 t$, $P(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$ (βλέπε Σχ 4.10b). Πολλαπλασιάζοντας το $s(t)$ με το $p(t)$ παίρνουμε το φάσμα

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} S(\omega) \star P(\omega) = \frac{1}{2} S((\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} S((\omega + \omega_0))$$

το οποίο φαίνεται στο Σχ 4.10c. Ξανα-πολλαπλασιάζοντας με το $p(t)$, παίρνουμε το $g(t) = r(t)p(t)$ με φάσμα $G(\omega)$ που φαίνεται στο Σχ 4.11.

Παράδειγμα 4.13. Εστω σήμα $s(t)$ με φάσμα $S(\omega)$ και $p(t)$ περιοδικό τρένο παλμών

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \\
 P(\omega) &= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)
 \end{aligned}$$



Σχήμα 4.10: Εφαρμογή της ιδιότητας διαμόρφωσης.

Εστω

$$r(t) = s(t)p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t - kT)$$

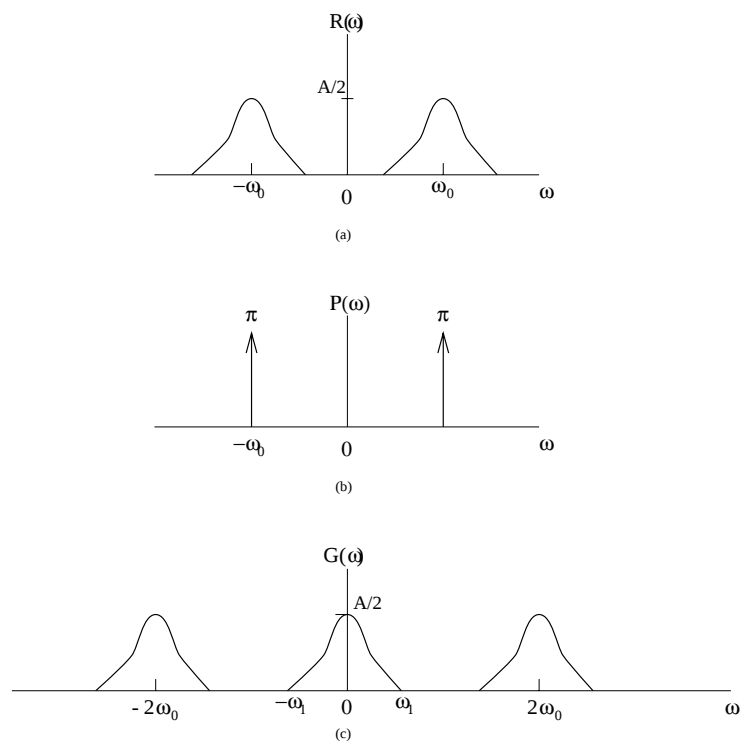
Για ένα τυχαίο $s(t)$, το $r(t)$ φαίνεται στο Σχ 4.12.

Το φάσμα $R(\omega)$ του $r(t)$ δίνεται ως

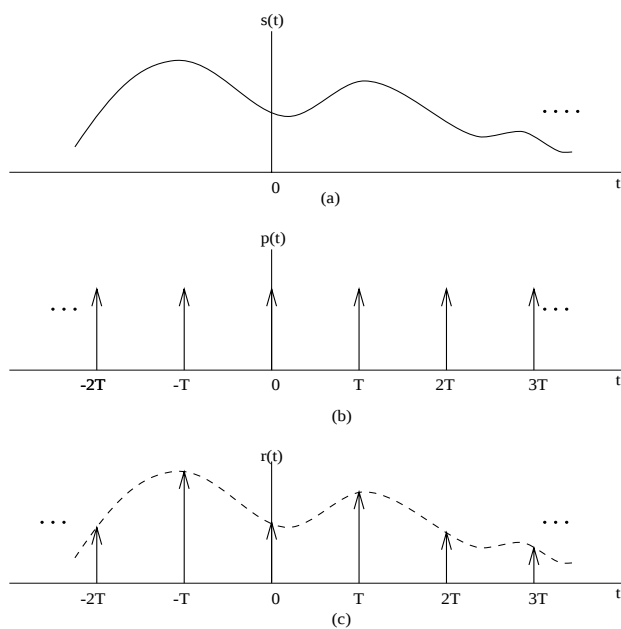
$$\begin{aligned} R(\omega) &= \frac{1}{2\pi} [S(\omega) \star P(\omega)] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(\omega) \star \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

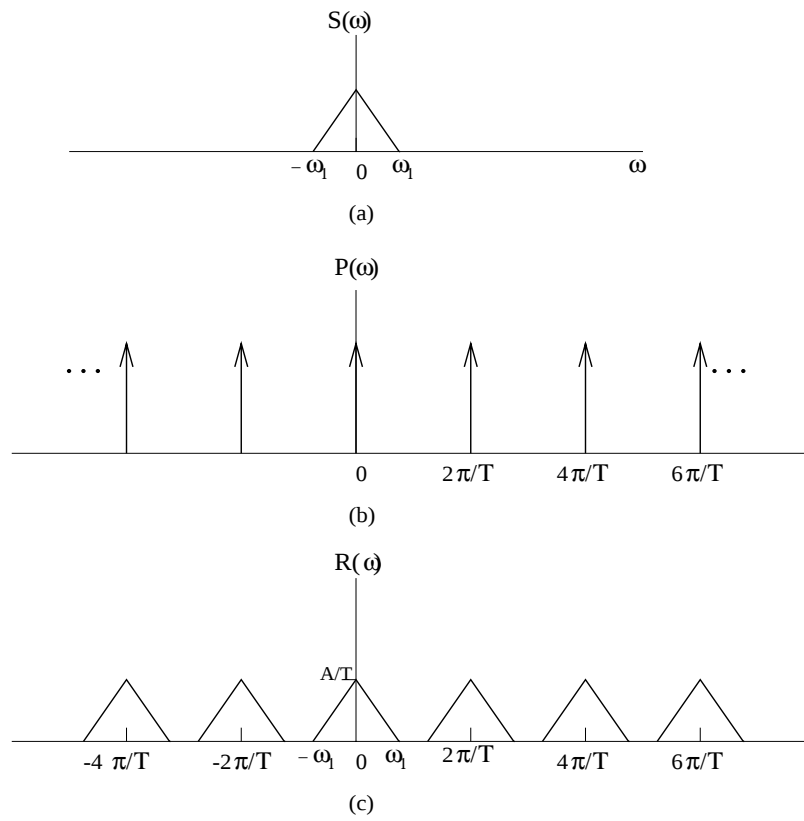
$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (4.27)$$

Το αποτέλεσμα στις συχνότητες είναι η επανάληψη του $S(\omega)$ σε διαστήματα $\frac{2\pi}{T}$ (Σχ 4.13).



Σχήμα 4.11: Φάσματα των σημάτων του παραδείγματος 4.12.

Σχήμα 4.12: Γινόμενο του σήματος $s(t)$ με ένα περιοδικό τρένο παλμών.



Σχήμα 4.13: Το αποτέλεσμα στις συχνότητες από το πολλαπλασιασμό ενός σήματος με ένα περιοδικό τρένο παλμών.

4.6 Πίνακες Ιδιοτήτων – Βασικών Μετασχηματισμών

Πίνακας 4.1: Ιδιότητες των Σειρών Fourier Συνεχούς Χρόνου

Periodic signal	Fourier series coefficients
$\left. \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\}$ periodic with period T_0	a_k b_k
$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk(2\pi/T_0)t_0}$
$e^{jM(2\pi/T_0)t}x(t)$	a_{k-M}
$x^*(t)$	a_{-k}^*
$x(-t)$	a_{-k}
$x(at), a > 0$ (periodic with period $\frac{T_0}{a}$)	a_k
$\int_{T_0} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$T_0 a_k b_k$
$x(t)y(t)$	$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} a_t b_{k-t}$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk \frac{2\pi}{T_0} a_k$
$\int_{-\infty}^t x(t)dt$ (finite-valued and periodic only if $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk(2\pi/T_0)} \right) a_k$
$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \Re\{a_k\} = \Re\{a_{-k}\} \\ \Im\{a_k\} = -\Im\{a_{-k}\} \\ a_k = a_{-k} \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$\Re\{a_k\}$
$x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$j\Im\{a_k\}$
Parseval's Relation for Periodic Signals	
$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k ^2$	

Πίνακας 4.2: Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier Συνεχούς Χρόνου

Aperiodic signal	Fourier transform
$x(t)$	$X(\omega)$
$y(t)$	$Y(\omega)$
$ax(t) + by(t)$	$aX(\omega) + bY(\omega)$
$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
$e^{j\omega t_0} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X(\frac{\omega}{a})$
$x(t) * y(t)$	$X(\omega)Y(\omega)$
$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(\omega)$
$\int_{-\infty}^t x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
$tx(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
$x(t) \quad \text{real}$	$\begin{cases} X(\omega) = X^*(-\omega) \\ \Re\{X(\omega)\} = \Re\{X(-\omega)\} \\ \Im\{X(\omega)\} = -\Im\{X(-\omega)\} \\ X(\omega) = X(-\omega) \\ \angle X(\omega) = \angle -X(-\omega) \end{cases}$
$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$	$[x(t) \text{ real}] \quad \Re\{X(\omega)\}$
$x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$	$[x(t) \text{ real}] \quad j \Im\{X(\omega)\}$
Duality	
$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-j\omega v} dv$	
$g(t) \xleftrightarrow{F} f(\omega)$	
$f(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi g(-\omega)$	
Parseval's relation for Aperiodic Signals	
$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$	

Πίνακας 4.3: Βασικά Ζεύγη Μετασχηματισμών και Σειρών Fourier

Signal	Fourier transform	Fourier series coefficients (if periodic)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0, \text{ otherwise}$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0, \text{ otherwise}$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0, \text{ otherwise}$
$x(t) = 1$	$2\pi \delta(\omega)$	$a_0 = 1, a_k = 0, k \neq 0$ $\left(\begin{array}{l} \text{has this Fourier series} \\ \text{representation for any} \\ \text{choice of } T_0 > 0 \end{array} \right)$
Periodic square wave $x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & T_1 < t \leq \frac{T_0}{2} \end{cases}$ and $x(t+T_0)=x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \text{sinc} \left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi} \right) = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$	$a_k = \frac{1}{T} \text{ for all } k$
$x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$	$2T_1 \text{sinc}(\frac{\omega T_1}{\pi}) = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$	-
$\frac{W}{\pi} \text{sinc}(\frac{Wt}{\pi}) = \frac{\sin Wt}{\pi t}$	$x(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < W \\ 0, & \omega > W \end{cases}$	-
$\delta(t)$	1	-
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$	-
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	-
$e^{-at} u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	-
$t e^{-at} u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	-
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-jat} u(t),$ $\Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	-

Παράδειγμα 4.14. Οι συντελεστές Fourier για ένα περιοδικό σήμα (περίοδος T) είναι

$$c_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ (1 + e^{-\frac{jn\pi}{3}} - 2e^{-jn\pi}), & n \neq 0 \end{cases}$$

Είναι πραγματικό το σήμα; Από τη μορφή των συντελεστών c_n να βρεθεί το $x(t)$.

Απάντηση: Το σήμα είναι πραγματικό γιατί

$$c_{-n} = 1 + e^{jn\pi/3} - 2e^{jn\pi} = c_n^*$$

Οι c_n δίνονται από τη σχέση

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega t} dt$$

Ξέροντας τους c_n μπορούμε να “εξάγουμε” το $x(t)$ που “θα έδινε” αυτούς τους c_n . Εφόσον

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jn\omega t} \delta(t - t_1) dt = e^{-jn\omega t_1}$$

ξέρουμε ότι το $x(t)$ θα έχει δ συναρτήσεις

$$x(t) = \delta(t) + \delta\left(t - \frac{T}{6}\right) - 2\delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

Παράδειγμα 4.15. Εστω τα δύο σήματα που φαίνονται στο Σχ 4.14. Ποιά σχέση “συνδέει” τους συντελεστές Fourier των δύο αυτών σημάτων;

Απάντηση: Συμβολίζοντας τα δύο σήματα ως $x_a(t)$ και $x_b(t)$, παρατηρούμε ότι αυτά συνδέονται με τη σχέση

$$x_b(t) = 1 + x_a\left(2\left[t - \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

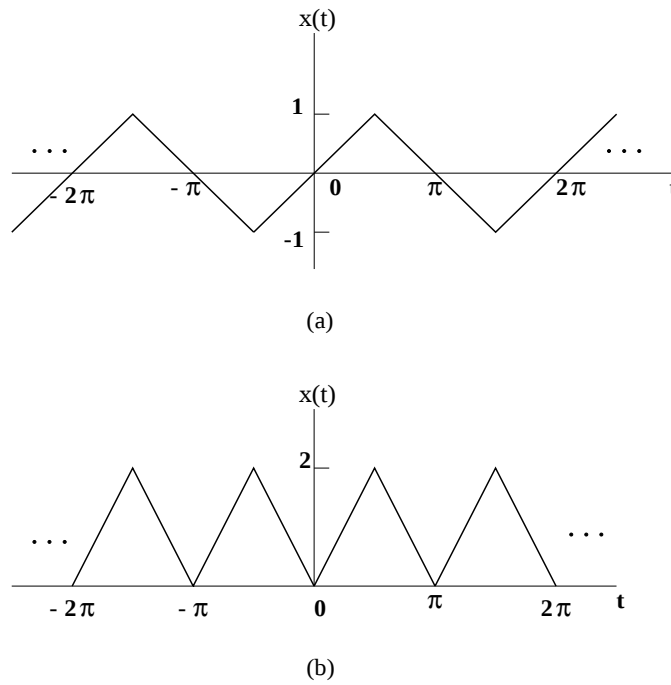
οπότε, βάσει των γνωστών ιδιοτήτων

$$x(t - t_0) \leftrightarrow a_k e^{-jk\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)t_0}$$

$$x(at), a > 0 \leftrightarrow a_k$$

παίρνουμε για τους συντελεστές

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_0^b &= 1 + a_0^a e^0 = 1 + a_0^a \\ \Rightarrow a_n^b &= a_n^a e^{-jn\pi/2} \end{aligned}$$



Σχήμα 4.14: Δύο “πριονωτά” σήματα.

Παράδειγμα 4.16. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x(t) = \operatorname{sinc} \frac{\omega_0 t}{2\pi} = S_a \frac{\omega_0 t}{2}$$

Απάντηση:

$$\mathcal{F} \left\{ S_a \frac{\omega_0 t}{2} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_a \frac{\omega_0 t}{2} e^{-j\omega t} dt$$

Το παραπάνω όμως ολοκλήρωμα είναι πολύ δύσκολο να υπολογισθεί. Γνωρίζουμε όμως για το μετασχηματισμό Fourier του τετραγωνικού παλμού ότι

$$\operatorname{rect}(t/\tau) \leftrightarrow \tau \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2\pi} \right) = \tau S_a \frac{\omega \tau}{2}$$

Βάσει της ιδιότητας δυϊσμού

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\ \Rightarrow X(t) &\leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \end{aligned}$$

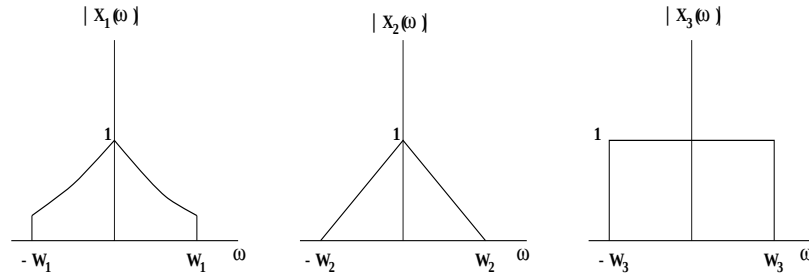
παίρνουμε

$$\mathcal{F} \left\{ S_a \frac{\omega_0 t}{2} \right\} = \frac{2\pi}{\omega_0} \operatorname{rect}(-\omega/\omega_0) = \frac{2\pi}{\omega_0} \operatorname{rect}(\omega/\omega_0) \quad (\text{άρτιο σήμα})$$

Σημείωση: Το $X(\omega)$ είναι 0 έξω από το διάστημα $(-\omega_0/2, \omega_0/2)$. Δηλαδή, το σήμα είναι περιορισμένο στις συχνότητες (band-limited), αλλά δεν είναι περιορισμένο στο χρόνο (time-limited).

Αυτό είναι απόρροια ενός γενικότερου κανόνα βάσει του οποίου ένα σήμα περιορισμένο στο χρόνο δεν είναι ποτέ περιορισμένο στις συχνότητες, ενώ ένα σήμα περιορισμένο στις συχνότητες δεν είναι ποτέ περιορισμένο στο χρόνο.

Παράδειγμα 4.17. Στο παράδειγμα αυτό θα μελετήσουμε τη τεχνική πολυπλεξίας με διαίρεση στις συχνότητες (Frequency Division Multiplexing – FDM). Εστω τα σήματα $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ με φάσματα $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $X_3(\omega)$ όπως φαίνονται στο Σχ 4.15.



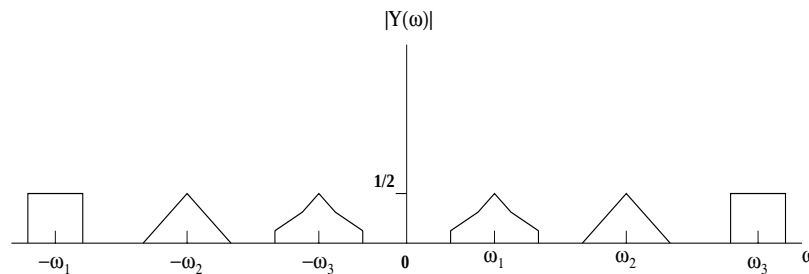
Σχήμα 4.15: Πλάτη των φασμάτων τριών σημάτων $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

Εστω τώρα ότι πολλαπλασιάζουμε τα σήματα με συνημίτονα και αθροίζουμε οπότε παίρνουμε ένα σήμα $y(t)$ (το οποίο και μεταδίδουμε)

$$y(t) = x_1(t) \cos \omega_1 t + x_2(t) \cos \omega_2 t + x_3(t) \cos \omega_3 t$$

Το φάσμα του $y(t)$ είναι (βλέπε και Σχ 4.16)

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2}[X_1(\omega - \omega_1) + X_1(\omega + \omega_1)] + \frac{1}{2}[X_2(\omega - \omega_2) + X_2(\omega + \omega_2)] + \\ &+ \frac{1}{2}[X_3(\omega - \omega_3) + X_3(\omega + \omega_3)] \end{aligned}$$



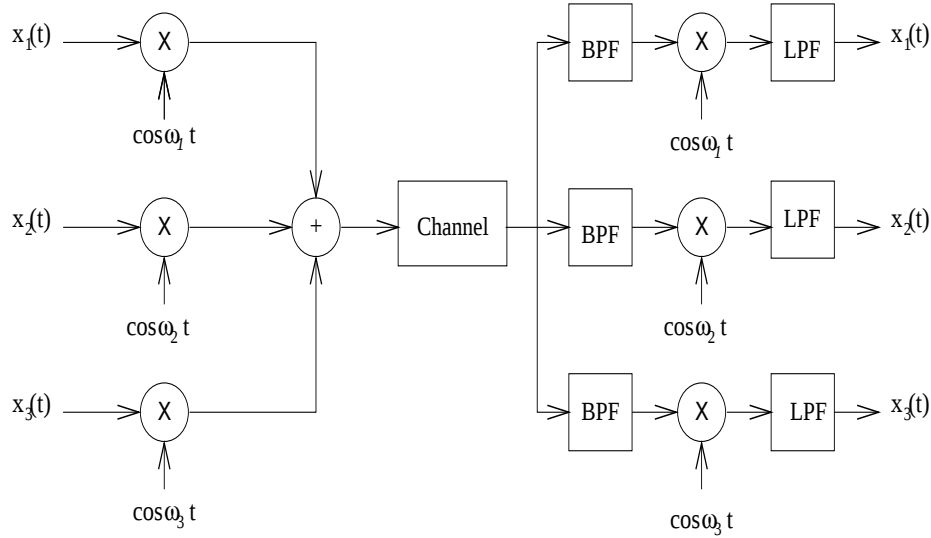
Σχήμα 4.16: Πλάτος του φάσματος του σήματος $y(t)$.

Παρατηρούμε ότι τα επιμέρους φάσματα των σημάτων δεν επικαλύπτονται (και άρα μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε) αν:

$$\omega_1 + W_1 < \omega_2 - W_2$$

$$\omega_2 + W_2 < \omega_3 - W_3$$

Σε περίπτωση αμφιβολίας για το αν τα επιμέρους φάσματα επικαλύπτονται ή όχι, καλό είναι να περνάμε τα σήματα από ένα φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων πριν τη διαμόρφωση. Στο δέκτη χρησιμοποιούμε ζωνοπερατά (bandpass) φίλτρα για να ανακατασκευάσουμε τα σήματα. Ένα σύστημα FDM θα είναι λοιπόν όπως στο Σχ 4.17.



Σχήμα 4.17: Σύστημα πολυπλεξίας με διαίρεση στις συχνότητες (FDM).

Παράδειγμα 4.18. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των σημάτων $x(-t)$, $x_e(t)$, $x_o(t)$, $x^*(t)$, $\Re\{x(t)\}$, $\Im\{x(t)\}$ σε σχέση με το $X(\omega)$, το μετασχηματισμό του $x(t)$.

Απάντηση:

$$x(-t) \longleftrightarrow X(-\omega)$$

$$x_e(t) = (x(t) + x(-t))/2 \longleftrightarrow (X(\omega) + X(-\omega))/2$$

$$x_o(t) = (x(t) - x(-t))/2 \longleftrightarrow (X(\omega) - X(-\omega))/2$$

$$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-\omega)$$

$$\Re\{x(t)\} = (x(t) + x^*(t))/2 \longleftrightarrow (X(\omega) + X^*(-\omega))/2$$

$$\Im\{x(t)\} = (x(t) - x^*(t))/2j \longleftrightarrow (X(\omega) - X^*(-\omega))/2j$$

Παράδειγμα 4.19. Να δειχθεί ότι το $X(\omega)$ μπορεί να γραφεί ως

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-j)^n m_n \frac{\omega^n}{n!} \quad , \quad m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n x(t) dt$$

Απάντηση:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[-j\omega t]^n}{n!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-j)^n m_n \frac{\omega^n}{n!} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.20. Να δειχθεί ότι το

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

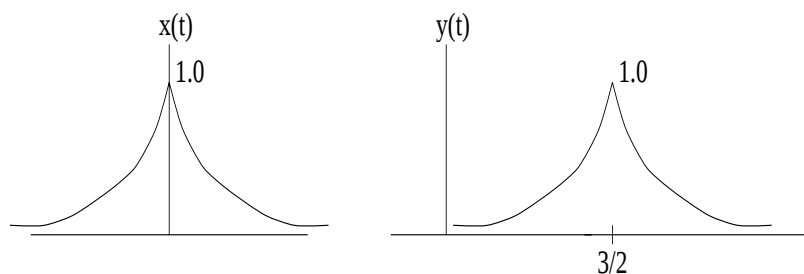
“συμπεριφέρεται” σαν μοναδιαίος παλμός.

Απάντηση:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \right] g(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(-\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) d\omega = g(0) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.21. Εστω τα σήματα $x(t) = e^{-2|t|}$ και $y(t) = x(2t - 3)$. Να σχεδιαστούν τα $x(t)$, $y(t)$ και να βρεθούν οι μετασχηματισμοί Fourier αυτών.

Απάντηση: Τα $x(t)$ και $y(t)$ φαίνονται στο Σχ 4.18. Οι μετασχηματισμοί των σημάτων δίνονται ως:



Σχήμα 4.18: Σήματα $x(t)$ και $y(t)$ του παραδείγματος 4.21.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^0 e^{2t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-2t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2 - j\omega} + \frac{1}{2 + j\omega} = \frac{4}{4 + \omega^2} \end{aligned}$$

Γενικά ισχύει: $x(t) = e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$

$$y(t) = x(2t - 3) = x(2(t - \frac{3}{2})) \longleftrightarrow \frac{1}{2} X\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\frac{\omega}{2}\frac{3}{2}} =$$

$$\frac{1}{2} \frac{4}{4 + (\frac{\omega}{2})^2} e^{-j\frac{3}{4}\omega} = \frac{1}{2} \frac{4}{\frac{16}{4} + \frac{\omega^2}{4}} e^{-j\frac{3}{4}\omega} = \frac{8}{16 + \omega^2} e^{-j\frac{3}{4}\omega}$$

Κεφάλαιο 5

Σειρές Fourier Διακριτού Χρόνου

5.1 Εισαγωγή

Ανάλογα με την περίπτωση συνεχούς χρόνου, αναζητούμε να παραστήσουμε το περιοδικό σήμα $x[n]$ ($x[n] = x[n + N]$) σαν άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων. Το $e^{jk(2\pi/N)n}$ είναι περιοδικό με περίοδο N . Η οικογένεια όλων των φανταστικών εκθετικών συναρτήσεων με περίοδο N δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (5.1)$$

Ξέρουμε ότι υπάρχουν N μόνο τέτοια διαφορετικά σήματα.

$$\Phi_0[n] = \Phi_N[n], \quad \Phi_1[n] = \Phi_{N+1}[n], \dots,$$

$$\Phi_k[n] = \Phi_{k+rN}[n]$$

Αναζητούμε αναπαράσταση της μορφής

$$x[n] = \sum_k a_k \Phi_k[n] = \sum_k a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.2)$$

Πιο συγκεκριμένα, το k πρέπει να κυμαίνεται μέσα σε μια περίοδο

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \Phi_k[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.3)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_k . Για το σκοπό αυτό θα δείξουμε πρώτα ότι:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (5.4)$$

Το άθροισμα αυτό είναι της μορφής

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n, \quad a = e^{jk(2\pi/N)}$$

το οποίο υπολογίζεται ως

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N, & a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a}, & a \neq 1 \end{cases} \quad (5.5)$$

Ξέρουμε ότι $e^{jk(2\pi/N)} = 1$ μόνο όταν το k είναι πολλαπλάσιο του N , $k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$, άρα

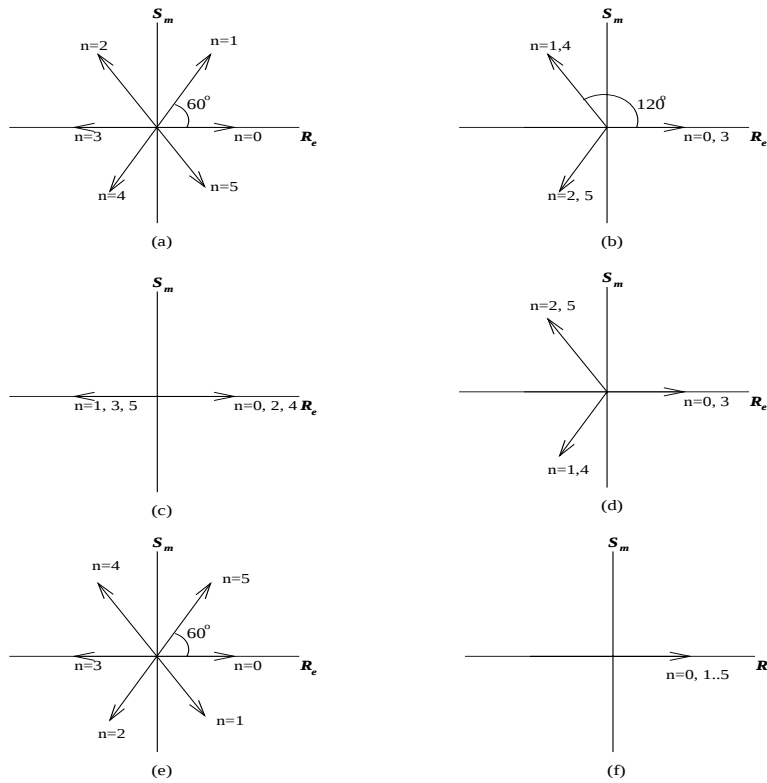
$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{1-e^{jk(2\pi/N)N}}{1-e^{jk(2\pi/N)}}, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (5.6)$$

Ομως $(e^{jk(2\pi/N)N} = e^{jk2\pi} = 1)$ και άρα

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{, διαφορετικά} \end{cases} \quad (5.7)$$

Ο. Ε. Δ.

Το παραπάνω αποτέλεσμα φαίνεται γραφικά στο Σχ 5.1.



Σχήμα 5.1: Η μιγαδική εκθετική ακολουθία $\Phi_k[n] = e^{jk(2\pi/6)n}$ σε μια περίοδο ($n = 0, 1, \dots, 5$) για διαφορετικές τιμές του k : (a) $k = 1$, (b) $k = 2$, (c) $k = 3$, (d) $k = 4$, (e) $k = 5$, (f) $k = 6$.

5.2 Αναπαράσταση με σειρά Fourier

Θεωρούμε την παράσταση του $x[n]$ ως σειρά

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.8)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί $e^{-jr(2\pi/N)n}$ και αθροίζουμε N όρους

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j(k-r)(2\pi/N)n} =$$

(αλλάζοντας τη σειρά των αθροισμάτων)

$$\sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} = N a_r \quad (5.9)$$

αφού $\sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} = 0$ εκτός αν $k - r = mN$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Άρα

$$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} \quad (5.10)$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	εξίσωση σύνθεσης
$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$	εξίσωση ανάλυσης

(5.11)

Τα a_k λέγονται *φασματικοί συντελεστές* (spectral coefficients).

Αν πάρουμε τώρα το $k = 0 \dots N - 1$ έχουμε

$$x[n] = a_0 \Phi_0[n] + a_1 \Phi_1[n] + \dots + a_{N-1} \Phi_{N-1}[n]$$

για $k = 1, \dots, N$

$$x[n] = a_1 \Phi_1[n] + a_2 \Phi_2[n] + \dots + a_N \Phi_N[n]$$

Ξέρουμε ότι $\Phi_N = \Phi_0 \Rightarrow a_0 = a_N$. Με παρόμοιο συλλογισμό καταλήγουμε στο ότι $a_k = a_{k+N} \forall k$. Η ακολουθία a_k ορίζεται για όλα τα k αλλά είναι **περιοδική** και παίρνει διαφορετικές τιμές μόνο για N συνεχόμενες τιμές του k .

5.3 Παραδείγματα

Παράδειγμα 5.1. Να βρεθούν οι φασματικοί συντελεστές του $x[n] = \sin \Omega_0 n$

Απάντηση: Θεωρούμε τις περιπτώσεις $\frac{2\pi}{\Omega_0} = \begin{cases} \text{ακέραιος} = N & (1) \\ \text{ρητός} & (2) \\ \text{άρρητος} & (3) \end{cases}$

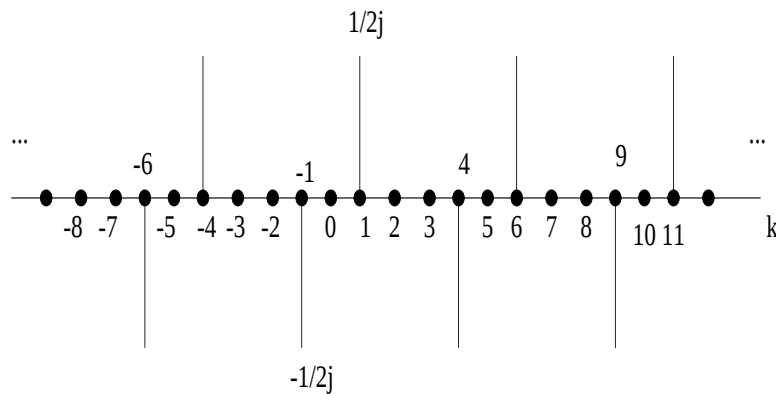
(1) $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi/N)n}$$

άρα

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

για $N = 5$ οι συντελεστές φαίνονται στο Σχ 5.2.



Σχήμα 5.2: Φασματικοί συντελεστές του $x[n] = \sin(2\pi/5)n$.

(2) $\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$

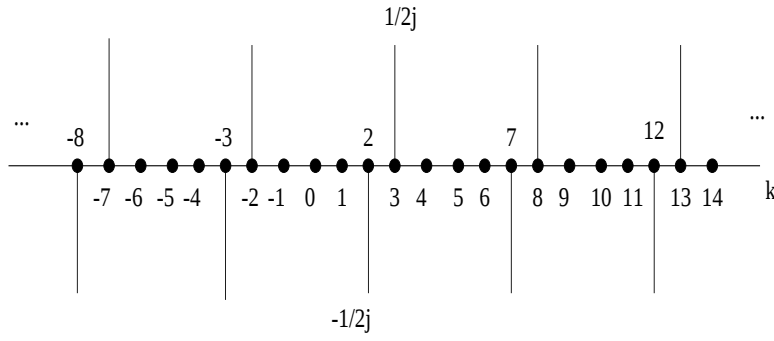
$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jm(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-jm(2\pi/N)n}$$

άρα

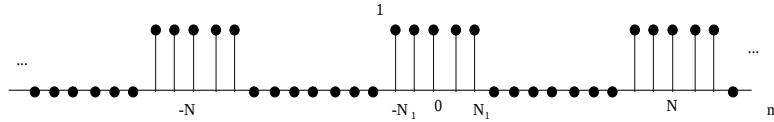
$$a_m = \frac{1}{2j}, \quad a_{-m} = -\frac{1}{2j}$$

για $m = 3, N = 5$ οι συντελεστές φαίνονται στο Σχ 5.3.

Παράδειγμα 5.2. Εστω ο περιοδικός τετραγωνικός παλμός διακριτού χρόνου που φαίνεται στο Σχ 5.4. Ζητείται να βρεθεί το ανάπτυγμά του σε σειρά Fourier.



Σχήμα 5.3: Φασματικοί συντελεστές του $x[n] = \sin 3(2\pi/5)n$.



Σχήμα 5.4: Περιοδικός τετραγωνικός παλμός διακριτού χρόνου.

Απάντηση:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n}$$

κάνουμε την αντικατάσταση μεταβλητής $m = n + N_1$ οπότε

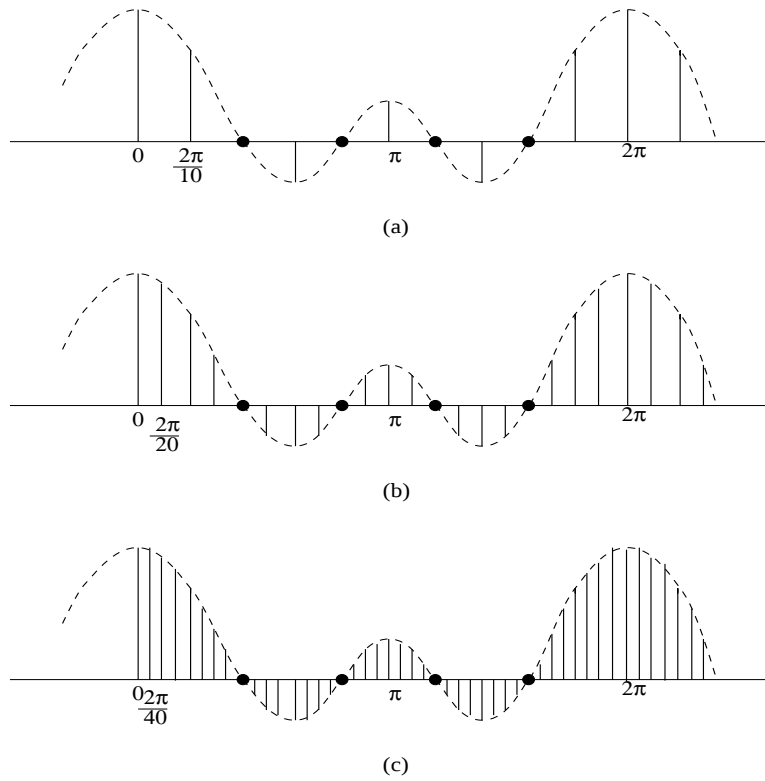
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Το $\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m}$ είναι άθροισμα των $2N_1 + 1$ πρώτων όρων γεωμετρικής σειράς, άρα

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \left(\frac{1 - e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk(2\pi/2N)} \left[e^{jk2\pi(N_1+\frac{1}{2})/N} - e^{-jk2\pi(N_1+\frac{1}{2})/N} \right]}{e^{-jk(2\pi/2N)} \left[e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)} \right]} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\sin[2\pi k(N_1+\frac{1}{2})/N]}{\sin(2\pi k/2N)}, & k \neq 0, \pm N \pm 2N, \dots \\ \frac{2N_1+1}{N}, & k = 0, \pm N \pm 2N, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$Na_k = \left. \frac{\sin[(2N_1+1)\Omega/2]}{\sin(\Omega/2)} \right|_{\Omega=2\pi k/N}$$



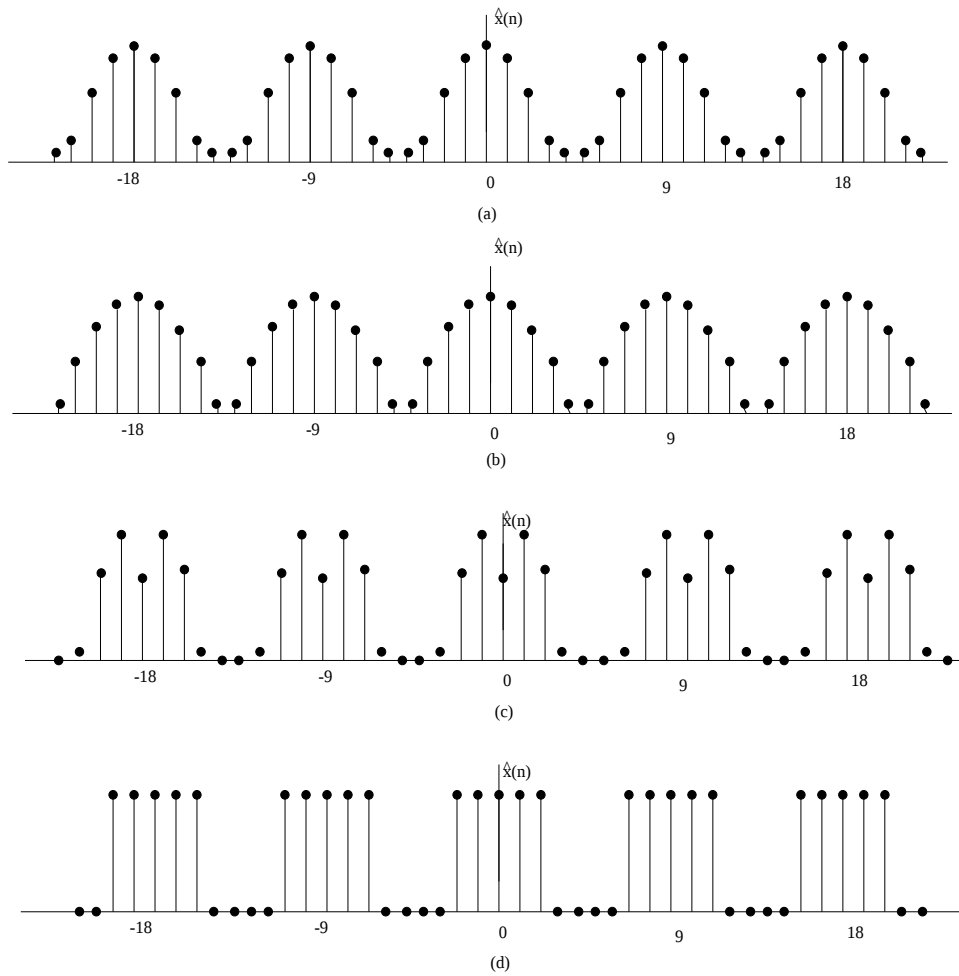
Σχήμα 5.5: Φασματικοί συντελεστές του περιοδικού τετραγωνικού παλμού του παραδείγματος 5.2. Στο σχήμα φαίνεται το $N a_k$ για $2N_1 + 1 = 5$ και (α) $N = 10$, (β) $N = 20$, (γ) $N = 40$.

(βλέπε Σχ 5.5).

Σημείωση: Η μερική ανακατασκευή (partial reconstruction) του τετραγωνικού παλμού δίνεται ως

$$\hat{x}[n] = \sum_{n=-M}^M a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

Στο Σχ 5.6 φαίνεται η μερική ανακατασκευή του τετραγωνικού παλμού χρησιμοποιώντας όλο και περισσότερους συντελεστές. Στη περίπτωση αυτή, το άθροισμα δεν είναι άπειρο και συνεπώς δεν υπάρχει κάτι αντίστοιχο του φαινομένου Gibbs (μπορούμε να έχουμε “πλήρη” ανακατασκευή του σήματος).



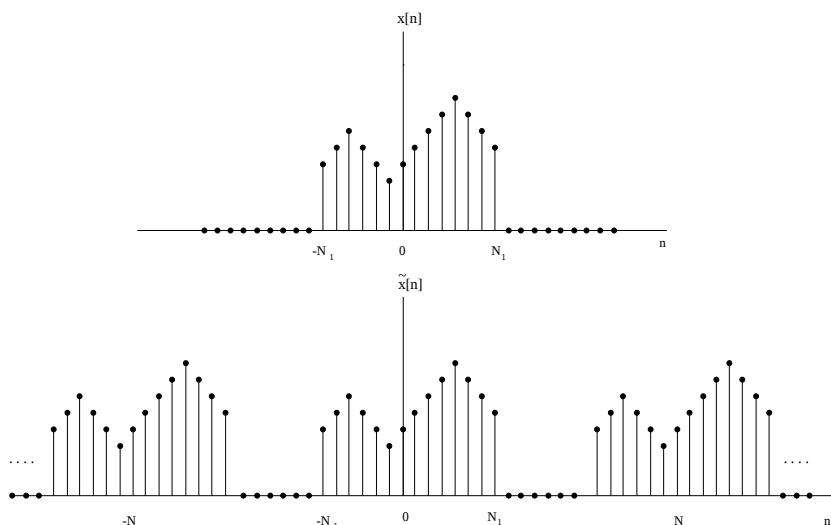
Σχήμα 5.6: Μερική ανακατασκευή του τετραγωνικού παλμού με $N = 9$ και $2N_1 + 1 = 5$. (α) $M = 1$, (β) $M = 2$, (γ) $M = 3$, (δ) $M = 4$.

Κεφάλαιο 6

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

6.1 Αναπαράσταση μη-Περιοδικών Σημάτων

Ακολουθούμε παρόμοιους συλλογισμούς όπως και στην περίπτωση σημάτων συνεχούς χρόνου. Εστω λοιπόν σήμα $x[n]$ πεπερασμένης χρονικής διάρκειας και σήμα $\tilde{x}[n]$, περιοδικό, που κατασκευάζεται από το $x[n]$ όπως φαίνεται στο Σχ 6.1.



Σχήμα 6.1: (α) Σήμα $x[n]$ πεπερασμένης χρονικής διάρκειας, (β) περιοδικό σήμα $\tilde{x}[n]$ κατασκευασμένο ώστε να είναι ίσο με το $x[n]$ σε μια περίοδο.

Εφ' όσον το $\tilde{x}[n]$ είναι περιοδικό μπορεί να γραφεί ως σειρά Fourier

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (6.1)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (6.2)$$

Στο διάστημα $[-N_1, N_1]$ το $\tilde{x}[n]$ μπορεί να αντικατασταθεί από το $x[n]$, οπότε

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (6.3)$$

Ορίζοντας το φάκελο (envelope) $X(\Omega)$ του Na_k σαν

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (6.4)$$

έχουμε ότι

$$a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0), \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (6.5)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις συνεπάγεται ότι

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0 \quad (6.6)$$

όταν $N \rightarrow \infty$ το $\tilde{x}[n]$ ισούται με το $x[n]$ για όλο και περισσότερες (πεπερασμένες) τιμές του n και $\Omega_0 \rightarrow 0$. Έτσι στο όριο το άθροισμα τείνει σε ολοκλήρωμα

$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$	εξίσωση σύνθεσης
$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$	εξίσωση ανάλυσης

(6.7)

Οι παραπάνω τύποι αποτελούν το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου. Το $X(\Omega)$ λέγεται φάσμα (spectrum) του $x[n]$.

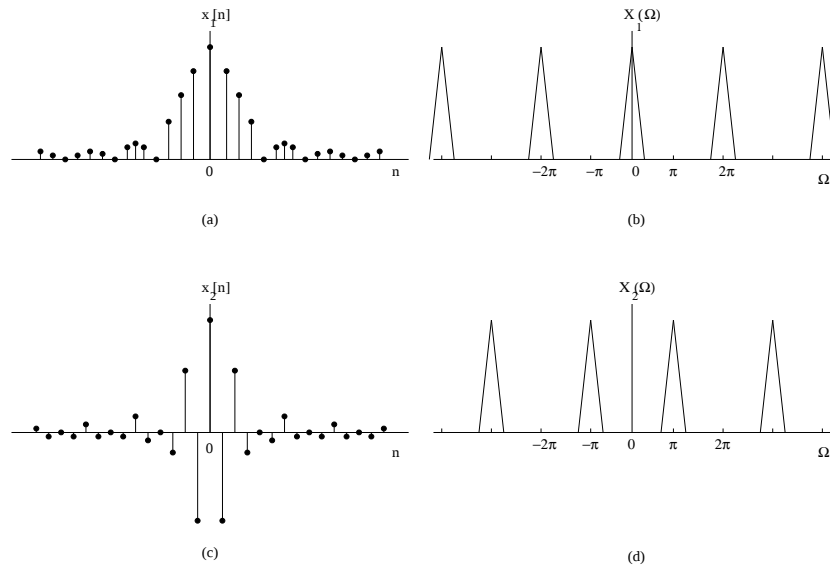
Αν και φτάσαμε στις παραπάνω εξισώσεις θεωρώντας $x[n]$ για πεπερασμένο n , αυτές ισχύουν για μια πολύ μεγάλη κλάση σημάτων μη-πεπερασμένων στο χρόνο (όλα τα σήματα που μας ενδιαφέρουν πρακτικά).

6.1.1 Διαφορές μεταξύ Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

Οι μετασχηματισμοί Fourier συνεχούς και διακριτού χρόνου έχουν πολλές ομοιότητες μεταξύ τους. Υπάρχουν όμως και δύο σημαντικές διαφορές:

- Το $X(\Omega)$ είναι περιοδικό ενώ το $X(\omega)$ δεν είναι.
- Το ολοκλήρωμα του αντίστροφου μετασχηματισμού είναι σε πεπερασμένο διάστημα $\left(\int_{2\pi}\right)$ στη περίπτωση του διακριτού χρόνου, ενώ είναι σε άπειρο διάστημα $\left(\int_{-\infty}^{\infty}\right)$ στη περίπτωση του συνεχούς χρόνου.

Επίσης, όπως έχουμε δει, στη περίπτωση του διακριτού χρόνου το π δείχνει υψηλές συχνότητες. Αυτό φαίνεται στο Σχ 6.2.



Σχήμα 6.2: (α) Σήμα διακριτού χρόνου με (β) μετασχηματισμό Fourier γύρω από το $\Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \dots$, (γ) σήμα διακριτού χρόνου με (δ) μετασχηματισμό Fourier γύρω από το $\Omega = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$

Παράδειγμα 6.1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$.

Απάντηση: Το $X(\Omega)$ (μέτρο και φάση) φαίνονται στο Σχ 6.3 για $a > 0$ και $a < 0$, και δίνεται ως

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

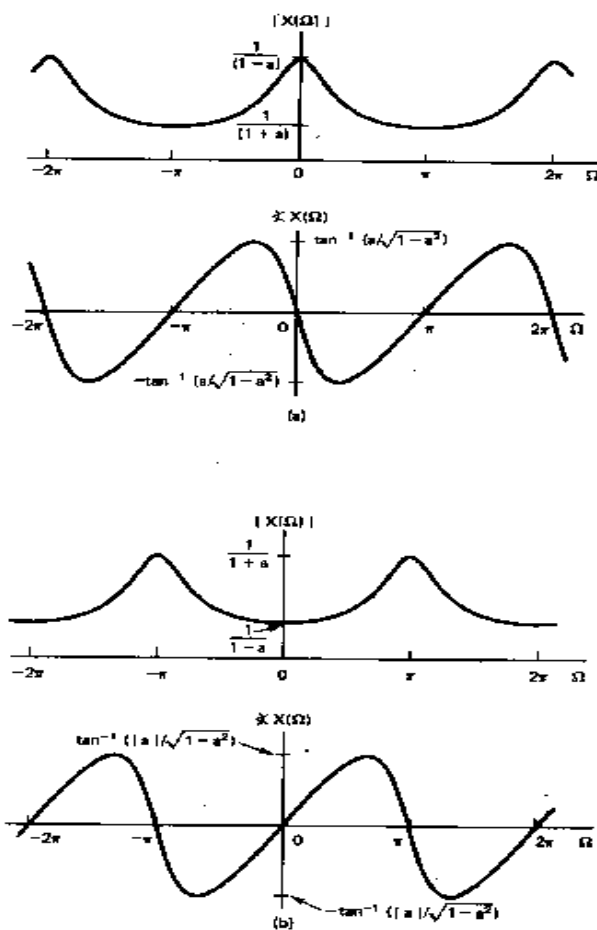
Παράδειγμα 6.2. Εστω

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

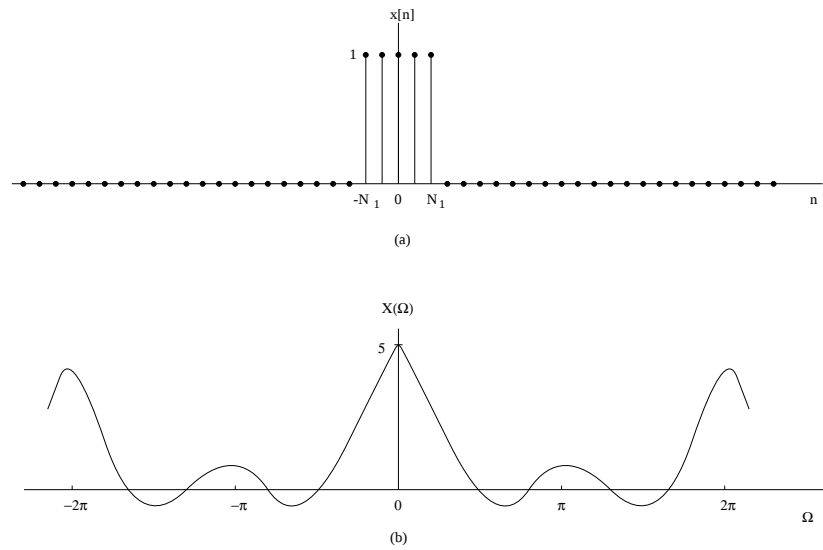
Ο μετασχηματισμός Fourier του $x[n]$ δίνεται ως (βλέπε Σχ 6.4).

$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} = \frac{\sin \Omega(N_1 + \frac{1}{2})}{\sin(\Omega/2)}$$

Εφ' όσον το διάστημα ολοκλήρωσης είναι *πεπερασμένο* για το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου, δεν υπάρχουν προβλήματα σύγκλισης σ' αυτή την περίπτωση. Αν λοιπόν προσεγγίσουμε



Σχήμα 6.3: Μέτρο και φάση του μετασχηματισμού Fourier του παραδείγματος 6.1. (α) $a > 0$, (β) $a < 0$.



Σχήμα 6.4: Σήμα και μετασχηματισμός Fourier του παραδείγματος 6.2.

τη $x[n]$ με ολοκλήρωμα στο διάστημα $|\Omega| \leq W$

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

τότε $\hat{x}[n] = x[n]$ για $W = \pi$. Συνεπώς δεν υπάρχει κάτι αντίστοιχο με το φαινόμενο Gibbs. Αυτό φαίνεται και στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.3. Για $x[n] = \delta[n]$ παίρνουμε $X(\Omega) = 1$. Αν υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό στο διάστημα $|\Omega| \leq W$, το $\hat{x}[n]$ έχει τη μορφή φθίνοντος ημιτόνου

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$

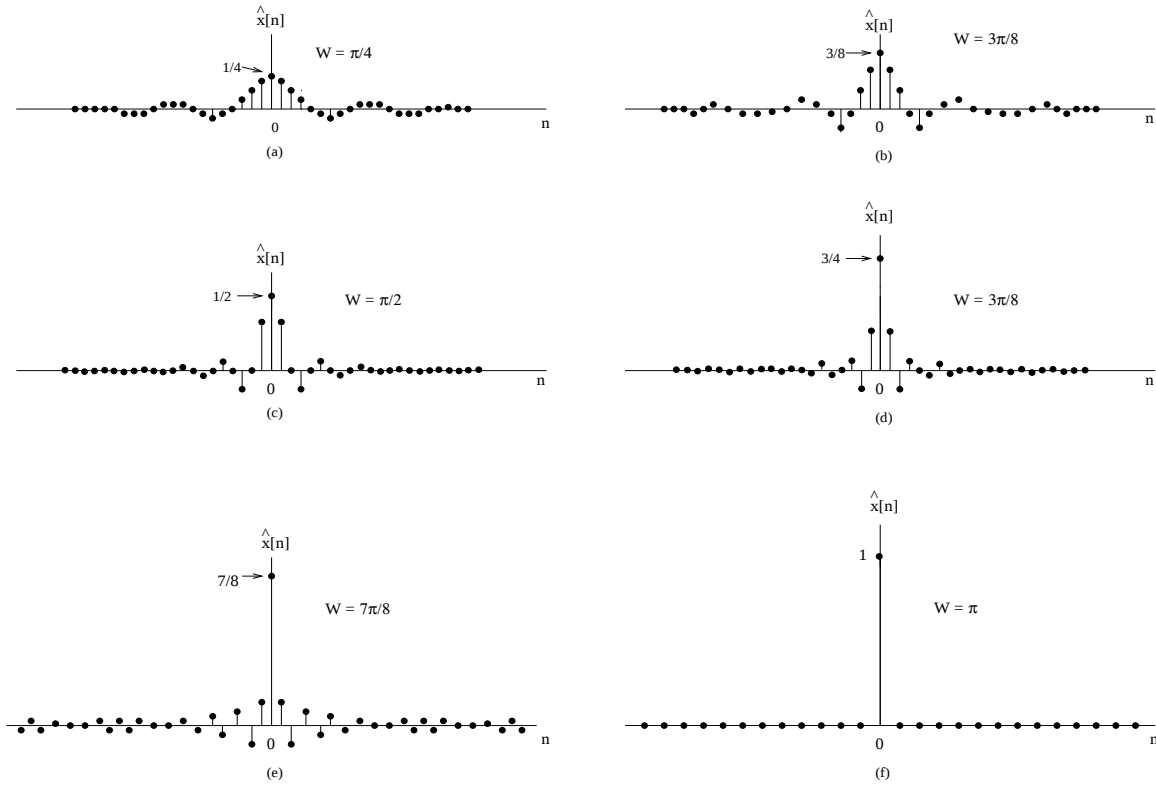
Αυτό φαίνεται στο Σχ 6.5. Καθώς το W μεγαλώνει (σε αντιδιαστολή με την περίπτωση συνεχούς χρόνου) το πλάτος των ταλαντώσεων μειώνεται σχετικά με την ταλάντωση του $\hat{x}[0]$. Τελικά, για $W = \pi$ οι ταλαντώσεις εξαφανίζονται και $\hat{x}[0] = 1$.

6.2 Μετασχηματισμός Fourier Περιοδικών Σημάτων

Αν το $x[n]$ είναι περιοδικό τότε μπορεί να γραφεί σαν σειρά Fourier

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (6.8)$$

Επίσης, στη περίπτωση αυτή ο μετασχηματισμός Fourier του $x[n]$ δίνεται σαν ένα άπειρο άθροισμα από παλμούς δ :



Σχήμα 6.5: Διαδοχικές προσεγγίσεις του μοναδιαίου παλμού.

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad \begin{array}{l} \text{μετασχηματισμός Fourier} \\ \text{περιοδικών σημάτων} \end{array} \quad (6.9)$$

Παράδειγμα 6.4. Εστω

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN], \quad a_k = \frac{1}{N}$$

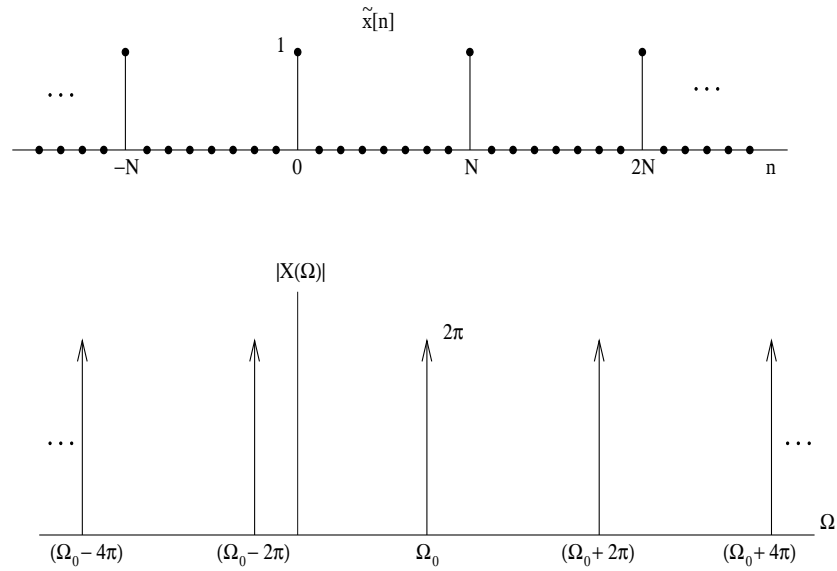
Τότε

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

(βλέπε Σχ 6.6).

6.3 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Αντίστοιχα με τη περίπτωση του συνεχούς χρόνου, υιοθετούμε το συμβολισμό $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$.



Σχήμα 6.6: Σήμα και μετασχηματισμός Fourier του παραδείγματος 6.4.

Περιοδικότητα: Το $X(\Omega)$ είναι πάντα περιοδικό με περίοδο 2π .

Γραμμικότητα:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega) \quad (6.10)$$

Ιδιότητα συμμετρίας: Για $x[n]$ πραγματικό ισχύουν

$$X(\Omega) = X^*(-\Omega) \quad (6.11)$$

$$\mathcal{E}v\{x[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Re\{X(\Omega)\} \quad (6.12)$$

$$\mathcal{O}d\{x[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Im\{X(\Omega)\} \quad (6.13)$$

Ολίσθηση στο χρόνο/συχνότητα:

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) \quad (6.14)$$

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega - \Omega_0) \quad (6.15)$$

Διαφορά/Αθροισή:

$$x[n] - x[n - 1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (1 - e^{-j\Omega})X(\Omega) \quad (6.16)$$

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) \quad (6.17)$$

Πολλαπλασιασμός στο χρόνο/συχνότητα:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{αν } n \text{ πολλαπλάσιο του } k \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(k\Omega) \quad (6.18)$$

Διαφόριση στη συχνότητα:

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \quad (6.19)$$

Σχέση Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (6.20)$$

Ιδιότητα συγκερασμού: Αν $y[n] = x[n] * h[n]$, τότε

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \quad (6.21)$$

Πολλαπλασιαστική ιδιότητα: Αν $y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$, τότε

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)X_2(\Omega - \theta)d\theta \quad (6.22)$$

Παράδειγμα 6.5. Εστω $h[n] = \delta[n - n_0]$. Για τυχαίο $x[n]$ να βρεθεί το $y[n] = x[n] * h[n]$.

Απάντηση: Το $H(\Omega)$ δίνεται ως

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n_0}$$

Αρα

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) \\ \Rightarrow y[n] &= x[n - n_0] \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.6. Εστω $h[n] = a^n u[n]$ και $x[n] = b^n u[n]$. Να βρεθεί το $y[n] = x[n] * h[n]$.

Απάντηση: Τα $H(\Omega)$ και $X(\Omega)$ δίνονται ως

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \\ X(\Omega) &= \frac{1}{1 - be^{-j\Omega}} \end{aligned}$$

οπότε

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})(1 - be^{-j\Omega})}$$

με ανάλυση σε απλά κλάσματα (partial fraction expansion) η τελευταία σχέση γράφεται ως

$$Y(\Omega) = \frac{A}{1 - ae^{-j\Omega}} + \frac{B}{1 - be^{-j\Omega}}$$

όπου

$$A = \frac{a}{a - b} \quad \text{και} \quad B = -\frac{b}{a - b}$$

άρα

$$y[n] = \frac{a}{a - b} a^n u[n] - \frac{b}{a - b} b^n u[n] \quad , \quad a \neq b$$

6.4 Πίνακες Ιδιοτήτων – Βασικών Μετασχηματισμών

Πίνακας 6.1: Ιδιότητες των Σειρών Fourier Διακριτού Χρόνου

Periodic signal	Fourier series coefficients
$x[n]$ } periodic with	α_k } periodic with
$y[n]$ } period N	b_k } period N
$Ax[n] + By[n]$	$A\alpha_k + Bb_k$
$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
$e^{jM(2\pi/N)n}x[n]$	a_{k-M}
$x^*[n]$	a_{-k}^*
$x[-n]$	a_{-k}
$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & \text{if } n \text{ is a multiple of } m \\ 0 & \text{if } n \text{ is not a multiple of } m \end{cases}$ (periodic with period mN)	$\frac{1}{m}a_k \left(\begin{array}{l} \text{viewed as periodic} \\ \text{with period } mN \end{array} \right)$
$\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]y[n-r]$	$N a_k b_k$
$x[n]y[n]$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$
$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\begin{array}{l} \text{finite-valued and periodic} \\ \text{only if } a_0 = 0 \end{array} \right)$	$\left(\frac{1}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right) a_k$
$x[n]$ real	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \Re\{a_k\} = \Re\{a_{-k}\} \\ \Im\{a_k\} = -\Im\{a_{-k}\} \\ a_k = a_{-k} \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
$x_e[n] = \mathcal{E}u\{x[n]\}$ [$x[n]$ real]	$\Re\{a_k\}$
$x_o[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\}$ [$x[n]$ real]	$j\Im\{a_k\}$

Parseval's Relation for Periodic Signals

$$\frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Πίνακας 6.2: Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Aperiodic signal	Fourier transform
$x[n]$	$X(\Omega)$ } periodic with
$y[n]$	$Y(\Omega)$ } period 2π
$ax[n] + by[n]$	$\alpha X(\Omega) + bY(\Omega)$
$x[n - n_o]$	$e^{-j\Omega n_o} X(\Omega)$
$e^{j\Omega_o n} x[n]$	$X(\Omega - \Omega_o)$
$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
$x[-n]$	$X(-\Omega)$
$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n \text{ is a multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } k \end{cases}$	$X(k\Omega)$
$x[n] \star y[n]$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\theta)Y(\Omega - \theta)d\theta$
$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega)$
$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
$nx[n]$	$j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
$x[n] \text{ real}$	$\begin{cases} X(\Omega) = X^*(-\Omega) \\ \Re\{X(\Omega)\} = \Re\{X(-\Omega)\} \\ \Im\{X(\Omega)\} = -\Im\{X(-\Omega)\} \\ X(\Omega) = X(-\Omega) \\ \angle X(\Omega) = -\angle X(-\Omega) \end{cases}$
$x_e[n] = \mathcal{E}u\{x[n]\} [x[n] \text{ real}]$	$\Re\{X(\Omega)\}$
$x_o[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\} [x[n] \text{ real}]$	$j\Im\{X(\Omega)\}$

Parseval's Relation for Aperiodic Signals

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Πίνακας 6.3: Βασικοί Μετασχηματισμοί – Σειρές Fourier Διακριτού Χρόνου

Signal	Fourier transform	Fourier series coefficients (if periodic)
$\sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\Omega_0 N}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l)$	(a) $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ the signal is aperiodic
$\cos \Omega_0 N$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ the signal is aperiodic
$\sin \Omega_0 N$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\Omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \dots \\ -\frac{1}{2j}, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ the signal is aperiodic
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Periodic square wave $x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & N_1 < n \leq \frac{N}{2} \end{cases}$ and $x[n+N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{\sin[(2\pi k/N)(N_1 + \frac{1}{2})]}{N \sin[2\pi k/2N]}, k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n - kN)$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}$ for all k
$a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$	–
$x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & n > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin[\Omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\Omega/2)}$	–
$\frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$x(\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \Omega \leq W \\ 0, & W < \Omega \leq \pi \end{cases}$ $x(\Omega)$ periodic with period 2π	–
$\delta[n]$	1	–
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\Omega - 2\pi k)$	–
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$	–
$(n+1)a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^2}$	–
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^r}$	–

6.5 Μετασχηματισμός Fourier Μετά από Δειγματοληψία

Όπως είναι γνωστό, μπορούμε να πάρουμε ένα σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ με τη δειγματοληψία (sampling) ενός συνεχούς $x(t)$:

$$x[n] = x_a(nT) \quad (6.23)$$

Σε υβριδικές (hybrid) εφαρμογές είναι προτιμότερο να μη θεωρούμε το σήμα μετά τη δειγματοληψία ως σήμα διακριτού χρόνου. Σ' αυτή τη περίπτωση το συμβολίζουμε ως $x_s(t)$. Από τις εξισώσεις μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου έχουμε

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6.24)$$

και

$$x[n] = x_a(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(\omega) e^{j\omega nT} d\omega \quad (6.25)$$

Το $x[n]$ μπορεί όμως να γραφεί και σύμφωνα με το μετασχηματισμό διακριτού χρόνου

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (6.26)$$

Θέλουμε να βρούμε τώρα τη σχέση που συνδέει τους δύο μετασχηματισμούς 6.25, και 6.26. Διαιρούμε τη περιοχή $-\infty < \omega < +\infty$ σε διαστήματα μήκους $2\pi/T$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \int_{(2r-1)\pi/T}^{(2r+1)\pi/T} X_a(\omega) e^{j\omega nT} d\omega \quad (6.27)$$

αντικαθιστούμε το ω με $\omega + 2\pi r/T$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_a\left(\omega + \frac{2\pi}{T}r\right) e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}r\right)nT} d\omega \quad (6.28)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[\sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_a\left(\omega + \frac{2\pi}{T}r\right) \right] e^{j\omega nT} d\omega \quad (6.29)$$

αντικαθιστούμε στη συνέχεια το ω με Ω/T

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_a\left(\frac{\Omega}{T} + \frac{2\pi}{T}r\right) \right] e^{j\Omega n} d\Omega \quad (6.30)$$

Συγκρίνοντας τη παραπάνω εξίσωση (6.30) με την (6.26) παίρνουμε

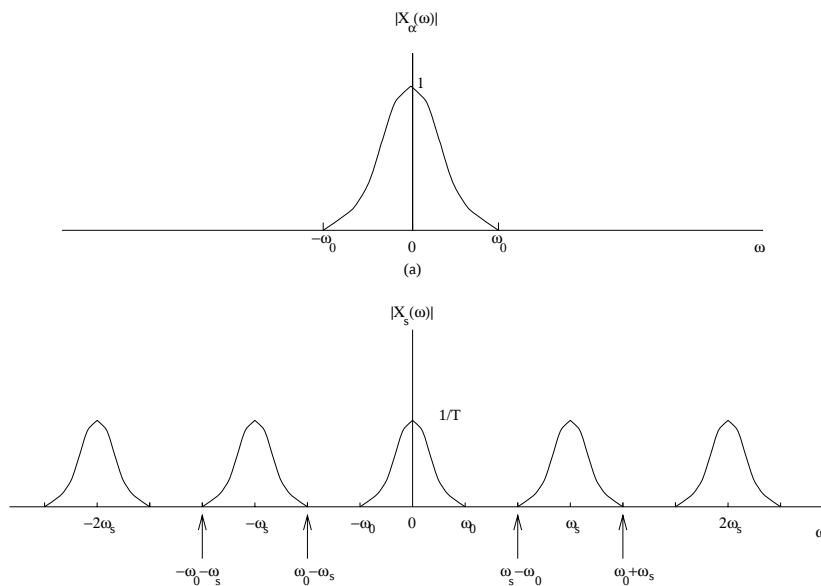
$$X(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_a\left(\frac{\Omega}{T} + \frac{2\pi}{T}r\right) \quad (6.31)$$

$$X_s(\omega) = X(\Omega)|_{\Omega=\omega T} \quad (6.32)$$

όπου η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $\omega_s = 2\pi/T$. Άρα

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_a(\omega + r\omega_s) \quad (6.33)$$

Από την παραπάνω εξίσωση (6.33) βλέπουμε ότι στο χώρο των συχνοτήτων η δειγματοληψία του σήματος έχει ως αποτέλεσμα την περιοδική επανάληψη του φάσματος. Αυτό φαίνεται στο Σχ 6.7 (Συγκρίνατε με πολλαπλασιασμό με τρένο δ).



Σχήμα 6.7: Φάσμα σήματος μετά από δειγματοληψία.

6.6 Δυϊσμός

Εχουμε ήδη δει το δυϊσμό που υπάρχει ανάμεσα στην εξίσωση ανάλυσης και σύνθεσης του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου. Στη περίπτωση διακριτού χρόνου δεν υπάρχει τέτοιος δυϊσμός. Εντούτοις, υπάρχει δυϊσμός στις εξισώσεις αναπτύγματος σε σειρά διακριτού χρόνου καθώς και μεταξύ του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου και της σειράς Fourier συνεχούς χρόνου.

Σειρές Fourier διακριτού χρόνου. Εστω f, g περιοδικές με περίοδο N και έστω η σχέση που τις συνδέει

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{r=\langle N \rangle} g[r] e^{-jr(2\pi/N)m} \quad (6.34)$$

Θέτοντας $m = k$, $r = n$ παίρνουμε

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} g[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (6.35)$$

Η παραπάνω εξίσωση δείχνει ότι οι $f[k]$ είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier του $g[n]$, δηλαδή

$$g[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} f[k] \quad (6.36)$$

Αν βάλουμε $m = n$, $r = -k$, τότε

$$f[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} g[-k] e^{jk(2\pi/N)n} \quad (6.37)$$

Η τελευταία εξίσωση δείχνει ότι οι $\frac{1}{N}g[-k]$ είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier του $f[n]$, δηλαδή

$$f[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{N}g[-k] \quad (6.38)$$

Συμπερασματικά, μιας και οι συντελεστές α_k ενός περιοδικού σήματος $x[n]$ είναι και αυτοί μια περιοδική ακολουθία, μπορούμε να τους επεκτείνουμε σε σειρά Fourier. Οι καινούργιοι συντελεστές (των α_k) είναι η τιμές $\frac{1}{N}x[-n]$.

Παράδειγμα 6.7. Ζητείται να βρεθούν οι συντελεστές του σήματος

$$x[n] = \frac{1}{N} \frac{\sin \left[(2\pi n/N) \left(N_1 + \frac{1}{2} \right) \right]}{\sin (2\pi n/2N)}$$

Τα $x[n]$ είναι οι συντελεστές του περιοδικού τετραγωνικού παλμού διακριτού χρόνου. Αρα, οι συντελεστές του $x[n]$ θα είναι $1/N$ φορές ο περιοδικός τετραγωνικός παλμός αντεστραμμένος στο n (το τελευταίο δεν αλλάζει τίποτα γιατί ο περιοδικός τετραγωνικός παλμός είναι άρτιο σήμα).

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου και Σειρές Fourier Συνεχούς Χρόνου. Θυμίζουμε κατ' αρχήν τις εξισώσεις που ισχύουν για το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου και για τις σειρές Fourier συνεχούς χρόνου:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (6.39)$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (6.40)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \quad (6.41)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (6.42)$$

$$(6.43)$$

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f(u)$ και $g[m]$, όπου $f(u)$ συνεχής και περιοδική με περίοδο 2π , $g[m]$ διακριτή, και έστω ότι συνδέονται με τη σχέση

$$f(u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g[m]e^{-jum} \quad (6.44)$$

Θέτοντας $u = \Omega$, $m = n$, βλέπουμε ότι η $f(\Omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της $g[n]$. Άρα

$$g[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} f(\Omega) \quad (6.45)$$

και συνεπώς

$$g[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(u) e^{jum} du \quad (6.46)$$

Θέτοντας $u = t$, $m = -k$, και επειδή η $f(t)$ είναι περιοδική με $T_0 = 2\pi$, $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 1$, οι $g[-k]$ είναι οι συντελεστές Fourier της $f(t)$. Άρα

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} g[-k] \quad (6.47)$$

Δηλαδή, έστω $x[n]$ με μετασχηματισμό Fourier $X(\Omega)$. Η $X(\Omega)$ είναι περιοδική οπότε μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά με $\omega_0 = 1$. Οι συντελεστές του $X(\Omega)$ θα είναι το αρχικό σήμα αντεστραμμένο στο n .

Στο παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συνοπτικά οι σειρές και μετασχηματισμοί Fourier στο συνεχή και διακριτό χρόνο.

Πίνακας 6.4: Ανακεφαλαίωση των Εκφράσεων Μετασχηματισμών και Σειρών Fourier

Continuous-time		Discrete-time	
Time domain	Frequency domain	Time domain	Frequency domain
Fourier Series $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ continuous time periodic in time	$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t}$ discrete frequency aperiodic in frequency	$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ discrete time periodic in time	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$ discrete frequency periodic in frequency
Fourier Transform $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ continuous time aperiodic in time	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ continuous frequency aperiodic in frequency	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$ discrete time aperiodic in time	$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ continuous frequency periodic in frequency

Παράδειγμα 6.8. Εστω σήμα $x(t)$ περιοδικό με περίοδο 2π . Οι συντελεστές Fourier του $x(t)$ δίνονται ως

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, & |k| \leq N_1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Οι α_k αποτελούν τον τετραγωνικό παλμό διακριτού χρόνου με μετασχηματισμό Fourier

$$X(\Omega) = \frac{\sin \Omega \left(N_1 + \frac{1}{2} \right)}{\sin (\Omega/2)}$$

Αρα, το $x(t)$ δίνεται ως

$$x(t) = \frac{\sin \left(N_1 + \frac{1}{2} \right) t}{\sin (t/2)}$$

Επίσης, έστω $X(\Omega)$ που ορίζεται στη περίοδο $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ ως

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq W \\ 0, & W < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

Αυτός είναι ο περιοδικός τετραγωνικός παλμός με συντελεστές

$$\alpha_k = \frac{\sin kW}{k\pi}$$

Συνεπώς, το σήμα $x[n]$ δίνεται ως

$$x[n] = \frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{Wn}{\pi} \right)$$

Παράδειγμα 6.9. (α) Εστω $x[n]$ περιοδικό με περίοδο N και συντελεστές σειράς Fourier a_k . Να βρεθούν οι συντελεστές b_k του $y[n]$ σαν συνάρτηση των a_k στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $y[n] = (-1)^n x[n]$. Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις, ανάλογα με το αν το N είναι άρτιο ή περιττό:

$$N \begin{cases} \text{άρτιο} : & y[n] \text{ περιοδικό με περίοδο } N \\ \text{περιττό} : & y[n] \text{ περιοδικό με περίοδο } 2N \end{cases}$$

N άρτιο:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} (-1)^n x[n] e^{-\frac{jk2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{j\pi n} e^{-\frac{jk2\pi}{N}n} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j(k-\frac{N}{2})\frac{2\pi}{N}n} = a_{(k-\frac{N}{2})}$$

N περιττό:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{2N-1} (-1)^n x[n] e^{-jk\frac{\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{2N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(\frac{k-N}{2})\frac{2\pi}{N}n} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n] e^{-j(\frac{k-N}{2})\frac{2\pi}{N}n} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[a_{(\frac{k-N}{2})} + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m+N] e^{-j(\frac{k-N}{2})\frac{2\pi}{N}(m+N)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[a_{(\frac{k-N}{2})} + e^{-j(k-N)\pi} a_{(\frac{k-N}{2})} \right] \end{aligned}$$

Αφού ο N είναι περιττός, το $(k-N)$ θα είναι περιττό για k άρτιο, ενώ θα είναι άρτιο για k περιττό. Συνεπώς

$$b_k = \begin{cases} a_{(\frac{k-N}{2})}, & k \text{ περιττό} \\ 0, & k \text{ άρτιο} \end{cases}$$

(β)

$$y[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ άρτιο} \\ 0, & n \text{ περιττό} \end{cases}$$

Το $y[n]$ μπορεί να γραφεί σ' αυτή τη περίπτωση ως

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$$

Αρα οι συντελεστές b_k δίνονται ως

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}a_{(k-\frac{N}{2})}, & N \text{ άρτιο} \\ \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}a_{(\frac{k-N}{2})}, & N \text{ περιττό, } k \text{ περιττό} \\ \frac{1}{2}a_k, & N \text{ περιττό, } k \text{ άρτιο} \end{cases}$$

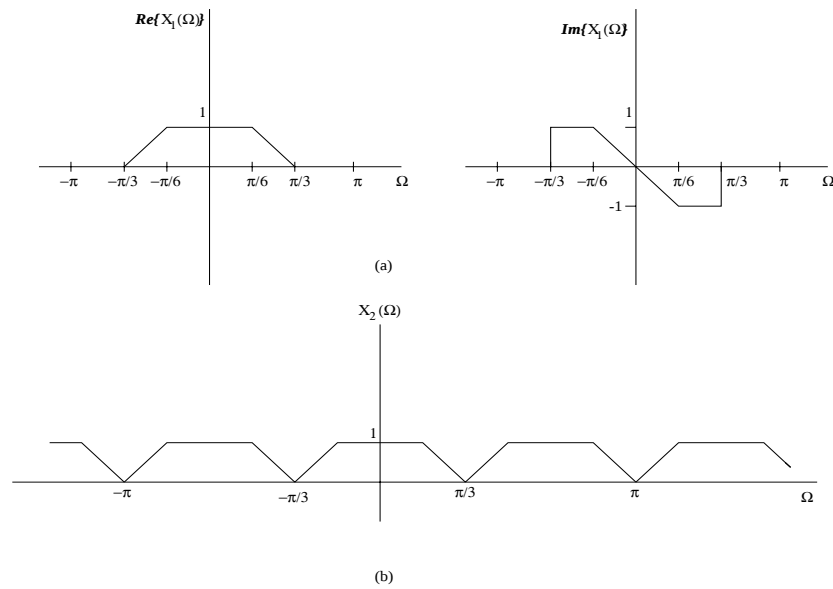
(γ)

$$y[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ περιττό} \\ 0, & n \text{ άρτιο} \end{cases}$$

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{2}a_k - \frac{1}{2}a_{(k-\frac{N}{2})}, & N \text{ άρτιο} \\ \frac{1}{2}a_k - \frac{1}{2}a_{(\frac{k-N}{2})}, & N \text{ περιττό, } k \text{ περιττό} \\ \frac{1}{2}a_k, & N \text{ περιττό, } k \text{ άρτιο} \end{cases}$$

Παράδειγμα 6.10. Εστω σήμα $x_1[n]$ του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier $X_1(\Omega)$ είναι όπως φαίνεται στο Σχ 6.8a. Θεωρούμε σήμα $x_2[n]$ με μετασχηματισμό Fourier $X_2(\Omega)$ όπως φαίνεται στο Σχ 6.8b. Να εκφρασθεί το $x_2[n]$ σε σχέση με το $x_1[n]$.



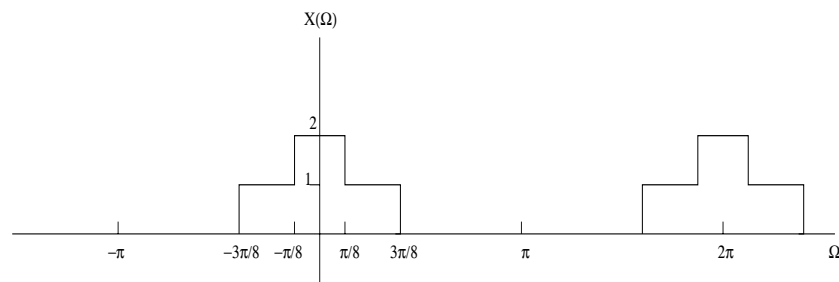
Σχήμα 6.8: Μετασχηματισμοί Fourier δύο σημάτων $x_1[n], x_2[n]$.

Απάντηση:

$$X_2(\Omega) = \Re e [X_1(\Omega)] + \Re e \left[X_1 \left(\Omega - \frac{2\pi}{3} \right) \right] + \Re e \left[X_1 \left(\Omega + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$\Rightarrow x_2[n] = \mathcal{E}v \{x_1[n]\} \left[1 + e^{j2\pi n/3} + e^{-j2\pi n/3} \right]$$

Παράδειγμα 6.11. Εστω σήμα $x[n]$ του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier $X(\Omega)$ είναι όπως φαίνεται στο Σχ 6.9. Να βρεθεί το $x[n]$.



Σχήμα 6.9: Μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος $x[n]$.

Απάντηση: Ο μετασχηματισμός Fourier $X(\Omega)$ μπορεί να εκφρασθεί σαν άθροισμα δύο περιοδικών τετραγωνικών παλμών. Συνεπώς

$$x[n] = \frac{\sin(3\pi n/8)}{\pi n} + \frac{\sin(\pi n/8)}{\pi n}$$

Κεφάλαιο 7

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Πραγματικά περιοδικά σήματα εμφανίζονται πολύ σπάνια σε πρακτικές εφαρμογές. Μη-περιοδικά σήματα, σε κάποιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα, εμφανίζονται πολύ πιο συχνά στη πράξη. Όπως έχουμε ήδη δει, ένα τέτοιο σήμα $x[n]$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\Omega)$ που είναι συνεχής συνάρτηση στη μεταβλητή Ω . Το γεγονός αυτό κάνει δύσκολη την επεξεργασία με υπολογιστή τέτοιων σημάτων στο χώρο των συχνοτήτων. Είναι λοιπόν επιθυμητό να πάρουμε μια “διακριτή” έκφραση του μετασχηματισμού Fourier. Αυτό επιτυγχάνεται με το *διακριτό μετασχηματισμό Fourier* (discrete Fourier transform – DFT). Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος $x[n]$, N σημείων ($0 \leq n \leq N-1$), είναι μια ακολουθία $\tilde{X}[k]$, N σημείων στις συχνότητες, και δίνεται από το ζευγάρι εξισώσεων

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N-1 && \text{εξίσωση σύνθεσης} \\ x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk(2\pi/N)n} && \text{εξίσωση ανάλυσης} \end{aligned} \tag{7.1}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να καταλήξουμε εύκολα θεωρώντας μια περιοδική επέκταση $\tilde{x}[n]$ του $x[n]$. Δηλαδή, το $\tilde{x}[n]$ είναι περιοδικό με περίοδο N και μέσα σε κάθε περίοδο ισούται με το $x[n]$. Αναπτύσσοντας το $\tilde{x}[n]$ σε σειρά Fourier παίρνουμε για τους συντελεστές a_k

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \tag{7.2}$$

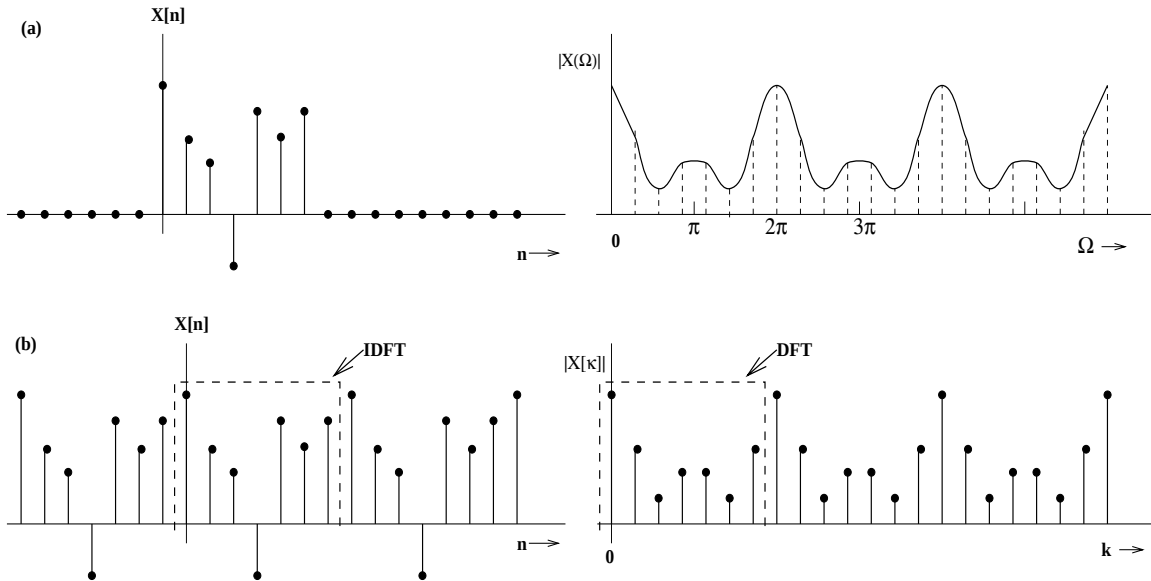
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \tag{7.3}$$

Στην τελευταία εξίσωση καταλήγουμε αφού το $\tilde{x}[n]$ είναι ίσο με το $x[n]$ μέσα σε μια περίοδο. Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές Fourier του $\tilde{x}[n]$, πολλαπλασιασμένοι επί N^1 , είναι ο DFT του

¹Σημειώνεται ότι υπάρχουν διάφοροι ορισμοί του DFT στη βιβλιογραφία που διαφέρουν μεταξύ τους στο παράγοντα $\frac{1}{N}$ και ακόμη στο πρόσημο του εκθέτη. Παρόλα αυτά δεν υπάρχουν ουσιαστικές διαφορές μεταξύ αυτών των ορισμών.

$x[n]$. Ένα πολύ βασικό χαρακτηριστικό του DFT είναι ότι μετασχηματίζει ένα σήμα N σημείων στο χρόνο σε ακριβώς N τιμές στις συχνότητες. Έτσι, το σήμα μπορεί ισοδύναμα να παρασταθεί από τις τιμές του για $0 \leq n \leq N-1$ είτε από τις N τιμές του DFT. Αυτό είναι απόρροια του θεωρήματος δειγματοληψίας στις συχνότητες, σύμφωνα με το οποίο ένα σήμα περιορισμένης χρονικής διάρκειας T_0 secs μπορεί να παρασταθεί με δείγματα στις συχνότητες που απέχουν μεταξύ τους το πολύ $1/T_0$ Hz. Εφ' όσον το σήμα αποτελείται από N σημεία, $T_0 = NT$, όπου T η απόσταση μεταξύ δύο δειγμάτων. Έτσι, το φάσμα μπορεί να παρασταθεί με δείγματα σε απόσταση $1/NT$ Hz ή $2\pi/NT$ rads/sec. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\Omega = \omega T$ παρατηρούμε ότι τα διαστήματα στο Ω είναι $2\pi/N$. Εφ' όσον το φάσμα είναι περιοδικό στο Ω , αρκεί να θεωρήσουμε τα δείγματα σε μια περίοδο, και συνεπώς παρατηρούμε ότι χρειάζονται N δείγματα στις συχνότητες για να παραστήσουμε το φάσμα. Ο DFT υλοποιεί ακριβώς αυτό, κάνοντας την οικονομικότερη δυνατή δειγματοληψία του $X(\Omega)$. Η δειγματοληψία αυτή φαίνεται σχηματικά στο Σχ 7.1.

Το Σχ 7.1a δείχνει ένα σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ και το φάσμα του $X(\Omega)$. Η περιοδική επανάληψη του σήματος $\tilde{x}[n]$ μαζί με τους συντελεστές της σειράς Fourier a_k φαίνεται στο Σχ 7.1b. Όπως φαίνεται στο σχήμα, μία περίοδος των a_k είναι ο DFT του $x[n]$, ενώ ο αντίστροφος DFT (IDFT) ανακατασκευάζει μία περίοδο του $\tilde{x}[n]$, δηλαδή το $x[n]$.



Σχήμα 7.1: Σχέση μεταξύ ενός σήματος (περιορισμένου στο χρόνο) διακριτού χρόνου, του μετασχηματισμού Fourier, του DFT και του IDFT.

Ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό του DFT είναι η ύπαρξη γρήγορων αλγόριθμων για τον υπολογισμό του. Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι γνωστοί με την ονομασία “Γρήγοροι Μετασχηματισμοί Fourier” (Fast Fourier Transforms – FFT).

7.1 Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (FFT)

Πρέπει κατ'αρχήν να σημειωθεί ότι δεν υπάρχει κάτι που να λέγεται “ο αλγόριθμος FFT”. Αντίθετα, υπάρχει μια οικογένεια αλγόριθμων για γρήγορη υλοποίηση του DFT. Οι περισσότεροι από αυτούς τους αλγόριθμους ανήκουν σε μια από τις δύο κατηγορίες:

- Αποδεκάτιση στο χρόνο (Decimation In Time – DIT)
- Αποδεκάτιση στη συχνότητα (Decimation In Frequency – DIF)

Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με DIT αλγόριθμους.

Ο DFT “φαίνεται” να είναι πολυπλοκότητας $O(N^2)$ μιας και υλοποιεί την εξίσωση

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad (7.4)$$

όπου

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \quad (7.5)$$

Το άνωμα $x[n]$ πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα $W_N(k, n)$ του οποίου το (k, n) στοιχείο είναι ο W_N στη kn δύναμη. Αυτός ο πολλαπλασιασμός πίνακα απαιτεί N^2 πολλαπλασιασμούς (συν κάποιες άλλες πράξεις) άρα έχουμε πολυπλοκότητα $O(N^2)$. Θα δούμε όμως ένα τρόπο υπολογισμού του DFT σε $O(N \log_2 N)$!! [Η διαφορά μεταξύ $(N \log_2 N)$ και N^2 είναι τεράστια. Για $N = 10^6$ δίνει μια διαφορά 30sec και 2 εβδομάδων CPU χρόνο σε μια τυπική μηχανή].

Η ελάττωση στην πολυπλοκότητα οφείλεται στην παρατήρηση ότι ο DFT μήκους N μπορεί να υπολογιστεί σαν το άθροισμα δύο DFTs, κάθε ένας μήκους $N/2$. Ο ένας σχηματίζεται από τα άρτια σημεία του αρχικού N και ο άλλος από τα περιττά.

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_N^{(2n+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] (W_N^2)^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] (W_N^2)^{kn} \end{aligned} \quad (7.6)$$

όπου

$$W_N^2 = e^{(-j2\pi/N)2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2} \quad (7.7)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_{N/2}^{kn} \\ &= X^e[k] + W_N^k X^o[k] \end{aligned} \quad (7.8)$$

Ετσι έχουμε εκφράσει τον αρχικό DFT N σημείων σαν άθροισμα δύο $N/2$ σημείων DFTs, $X^e[k]$ και $X^o[k]$. Ο $X^e[k]$ είναι ο μετασχηματισμός των άρτιων σημείων και ο $X^o[k]$ ο μετασχηματισμός των περιττών σημείων. Αυτό μπορεί να επαναληφθεί αναδρομικά: Κάθε $N/2$ μετασχηματισμός υπολογίζεται ως άθροισμα δύο $N/4$ μετασχηματισμών κ.ο.κ. Για παράδειγμα, $X^{ee}[k], X^{eo}[k]$ είναι οι DFTs των σημείων που είναι αντίστοιχα άρτια-άρτια και άρτια-περιττά.

Αν $N = 2^\lambda$ τότε

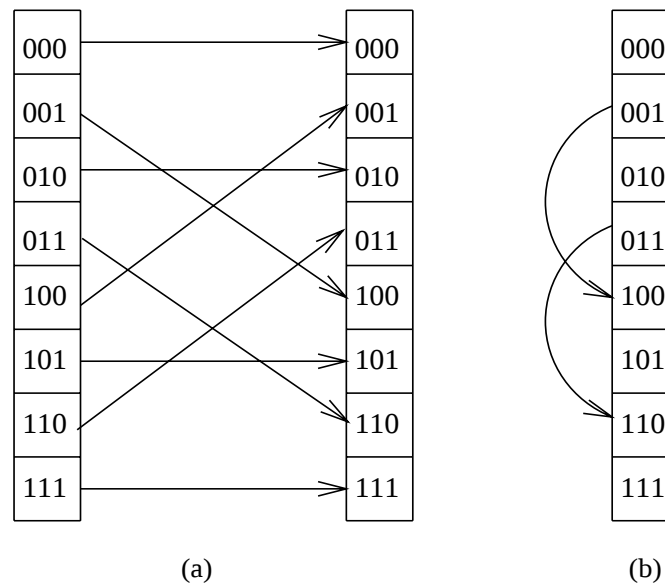
$$X^{eoe\cdots ee}[k] = x[n] \text{ για κάποιο } n$$

Το κόλπο είναι να βρούμε ποια τιμή του n αντιστοιχεί σε ποιο συνδυασμό e και o . Αυτό γίνεται με μια μέθοδο που λέγεται “αντιστροφή-bit” (bit reversal).

Αλγόριθμος bit-reversal

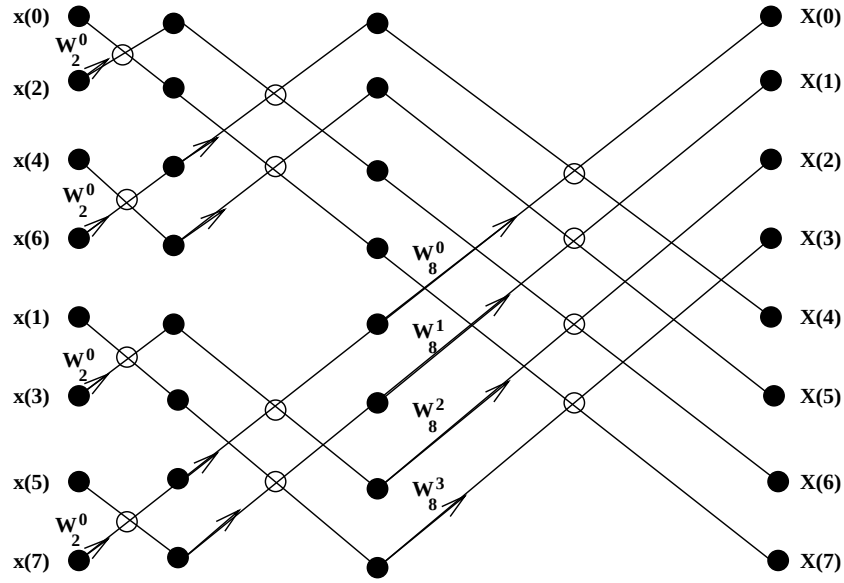
1. Αντέστρεψε τα e και o
2. Βάλε όπου $e = 0$ και όπου $o = 1$
3. ο δυαδικός που προκύπτει είναι ο n

Αυτό φαίνεται στο Σχ 7.2 για ένα πίνακα μήκους 8.



Σχήμα 7.2: Αναδιάταξη ενός πίνακα μήκους 8 με αντιστροφή-bit (α) με τη χρήση ενός δεύτερου πίνακα, (β) επί τόπου (in place).

Οπότε, ο FFT έχει δύο κύρια κομμάτια. Στο πρώτο γίνεται η αντιστροφή bit και στο δεύτερο υπάρχει ένα loop που γίνεται $\log_2 N$ φορές και υπολογίζονται στη σειρά μετασχηματισμοί 2, 4, 8, $\dots$, N . Η δομή του δεύτερου κομματιού για ένα σήμα μήκους $N = 8$ φαίνεται στο Σχ 7.3.



Σχήμα 7.3: Δομή του DIT FFT μήκους 8.

Στα Σχ 7.4,7.5 φαίνεται σχηματικά πως ο FFT μήκους 8 υπολογίζεται ως δύο DFT μήκους 4 και στη συνέχεια ο καθένας ως δύο DFT μήκους 2.

Στο Σχ 7.6 δίνεται μια υλοποίηση σε $\mathbf{C}$ του παραπάνω αλγόριθμου.

Παράδειγμα 7.1. Στο παράδειγμα αυτό θα μελετήσουμε τον DIT FFT σε σήμα $x[n]$ μήκους 8.

$$\begin{aligned}
 \tilde{X} &= \tilde{X}^e + W_8^k \tilde{X}^o \\
 &= \tilde{X}^{ee} + W_8^{2k} \tilde{X}^{eo} + W_8^k (\tilde{X}^{oe} + W_8^{2k} \tilde{X}^{oo}) \\
 &= \tilde{X}^{eee} + W_8^{4k} \tilde{X}^{e eo} + W_8^{2k} (\tilde{X}^{e oe} + W_8^{4k} \tilde{X}^{e oo}) + \\
 &\quad + W_8^k [\tilde{X}^{o ee} + W_8^{4k} \tilde{X}^{o eo} + W_8^{2k} (\tilde{X}^{o oe} + W_8^{4k} \tilde{X}^{o oo})] \Rightarrow
 \end{aligned}$$

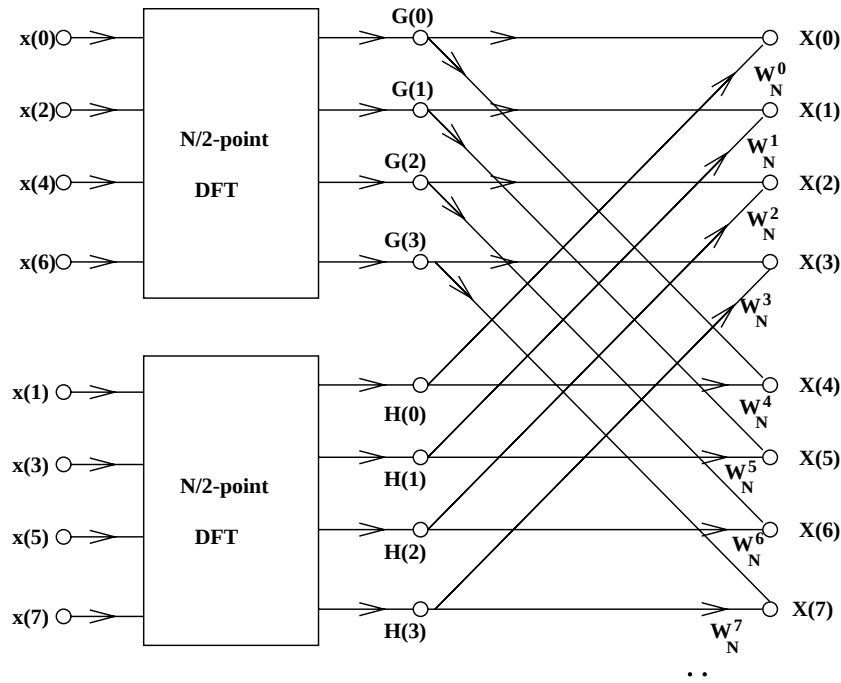
$$\begin{aligned}
 \tilde{X}[k] &= x[0] + W_8^{4k} x[4] + W_8^{2k} (x[2] + W_8^{4k} x[6]) + \\
 &\quad + W_8^k [x[1] + W_8^{4k} x[5] + W_8^{2k} (x[3] + W_8^{4k} x[7])]
 \end{aligned}$$

όπου

$$W_8^k = e^{-\frac{j2\pi}{8}k}$$

$$W_8^{2k} = e^{-\frac{j2\pi}{8}2k} = e^{-\frac{j2\pi}{8/2}k} = e^{-\frac{j2\pi}{4}k} = W_4^k$$

$$W_8^{4k} = e^{-\frac{j2\pi}{8}4k} = e^{-\frac{j2\pi}{8/4}k} = e^{-\frac{j2\pi}{2}k} = W_2^k$$



Σχήμα 7.4: Υπολογισμός του FFT μήκους 8 ως δύο DFT μήκους 4 ο καθένας.

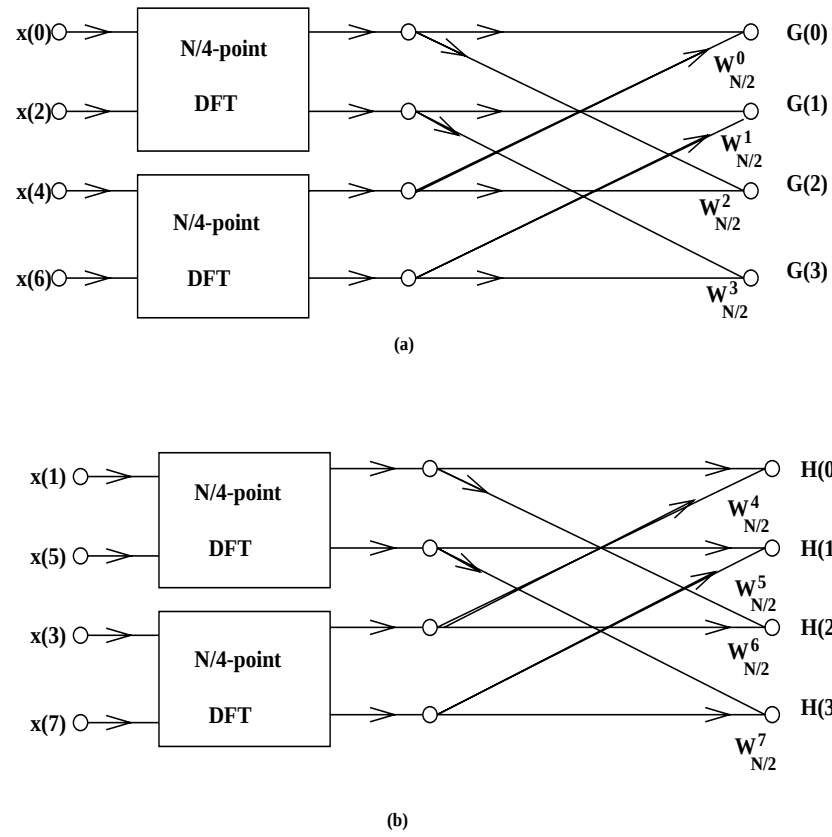
7.2 FFT σε δύο Διαστάσεις

Σε δύο διαστάσεις, ο DFT ορίζεται ως

$$H(n_1, n_2) = \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} e^{-2\pi j k_2 n_2 / N_2} e^{-2\pi j k_1 n_1 / N_1} h(k_1, k_2) \quad (7.9)$$

Παρατηρούμε ότι οι δείκτες k_2 μπορούν να βγουν έξω από το άθροισμα ως προς k_1 ή αντίθετα, οπότε ο 2-διάστατος DFT μπορεί να υπολογιστεί παίρνοντας μονοδιάστατους FFT τον ένα μετά τον άλλο σε κάθε δείκτη:

$$\begin{aligned} H(n_1, n_2) &= FFT - on - index - 1 (FFT - on - index - 2[h(k_1, k_2)]) \\ &= FFT - on - index - 2 (FFT - on - index - 1[h(k_1, k_2)]) \end{aligned}$$



Σχήμα 7.5: Υπολογισμός του FFT μήκους 4 ως δύο DFT μήκους 2 ο καθένας.

```

fft(data, nn, isign)
double data[];
unsigned long nn;
int isign;

{
    unsigned long n,mmax,m,j,istep,i;
    double wtemp,wr,wpr,wpi,wi,theta;
    double tempr,tempi;

    n=nn << 1;
    j=1;
    for (i=1; i<n; i+=2) {
        if (j > i) {
            SWAP (data[j-1],data[i-1]);
            SWAP (data[j],data[i]);
        }
        m=n >> 1;
        while (m >= 2 && j > m) {
            j -= m;
            m >>= 1;
        }
        j += m;
    }
    /* Here begins the Danielson-Lanczos section of the routine. */
    mmax = 2;
    while (n > mmax) {
        istep = mmax << 1;
        theta = isign*(6.28318530717959/mmax);
        wtemp = sin(0.5*theta);
        wpr = -2.0*wtemp*wtemp;
        wpi = sin(theta);
        wr = 1.0;
        wi = 0.0;
        for (m=1; m<mmax; m+=2) {
            for (i=m; i<n; i+=istep) {
                j=i+mmax;
                tempr=wr*data[j-1]-wi*data[j];
                tempi=wr*data[j]+wi*data[j-1];
                data[j-1]=data[i-1]-tempr;
                data[j]=data[i]-tempi;
                data[i-1] += tempr;
                data[i] += tempi;
            }
            wr=(wtemp=wr)*wpr-wi*wpi+wr;
            wi=wi*wpr+wtemp*wpi+wi;
        }
        mmax=istep;
    }
}

```

Σχήμα 7.6: Υλοποίηση σε C του DIT FFT.

Κεφάλαιο 8

Μετασχηματισμός Laplace

Η ανάλυση Fourier είναι πολύ χρήσιμη για μελέτη σημάτων και LTI συστημάτων. Υπάρχουν όμως σήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier, όπως για παράδειγμα τα

$$\begin{aligned} e^{at}u(t), \quad a > 0, \quad -\infty < t < +\infty \\ e^{-at}, \quad -\infty < t < +\infty \\ tu(t) \end{aligned}$$

Η δυσκολία αυτή ξεπερνιέται με την επέκταση του μετασχηματισμού Fourier έτσι ώστε να εκφράζουμε το $x(t)$ σαν άθροισμα e^{st} , $s = \sigma + j\omega$ (ισοδύναμο με το να πολλαπλασιάζουμε το σήμα με ένα εκθετικό παράγοντα “σύγκλισης”), αντί να πολλαπλασιάζουμε με $e^{j\omega t}$. Για παράδειγμα το

$$e^{-\sigma t}e^{at}u(t)$$

ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet για $\sigma > a$ και θα πρέπει να έχει ένα “γενικευμένο” μετασχηματισμό Fourier (ο οποίος φέρει το όνομα “μετασχηματισμός Laplace”).

8.1 Δίπλευρος Μετασχηματισμός Laplace

Ο δίπλευρος μετασχηματισμός Laplace (bilateral Laplace transform) ορίζεται ως

$$\boxed{X_B(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt} \quad (8.1)$$

όπου $s = \sigma + j\omega$. Αν $\sigma = 0, s = j\omega$ και συνεπώς ο μετασχηματισμός Laplace ταυτίζεται με το μετασχηματισμό Fourier. Για $\sigma \neq 0$ ο μετασχηματισμός Laplace είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)e^{-\sigma t}$. Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιούμε για το δίπλευρο μετασχηματισμό Laplace ενός σήματος $x(t)$ είναι ο $\mathcal{L}_B\{x(t)\}$. Επίσης, η αντιστοιχία ενός σήματος και του μετασχηματισμού του θα εκφράζεται με το γνωστό συμβολισμό

$$x(t) \leftrightarrow X_B(s)$$

Παράδειγμα 8.1. Ζητείται να βρεθεί ο διπλευρος μετασχηματισμός Laplace του $x(t) = e^{-at}u(t)$.

Απάντηση:

$$X_B(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}u(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a}$$

Εχουμε ήδη δει ότι ο διπλευρος μετασχηματισμός Laplace του $x(t) = e^{-at}u(t)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $e^{-at}e^{-\sigma t}u(t)$. Ο τελευταίος υπάρχει αν $\sigma > -a$. Συνεπώς, ο $X_B(s)$ υπάρχει μόνο για $\Re\{s\} > -a$. Για $a = 0$, $x(t) = u(t)$ και $X_B(s) = \frac{1}{s}$, $\Re\{s\} > 0$. ■

Στη γενική περίπτωση ο διπλευρος μετασχηματισμός Laplace συγκλίνει για κάποιες τιμές του $\Re\{s\}$. Οι τιμές αυτές ορίζουν μια “περιοχή σύγκλισης” (Region Of Convergence) ROC. Στην περίπτωση που

$$X_B(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (8.2)$$

ο $X_B(s)$ δεν συγκλίνει στις ρίζες του $D(s)$ και συνεπώς οι πόλοι του $X_B(s)$ αποκλείονται από το ROC.

Παράδειγμα 8.2. Εστω

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

Τότε

$$\begin{aligned} X_B(s) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s+a)t}u(-t)dt = \int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t}dt \\ &= \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

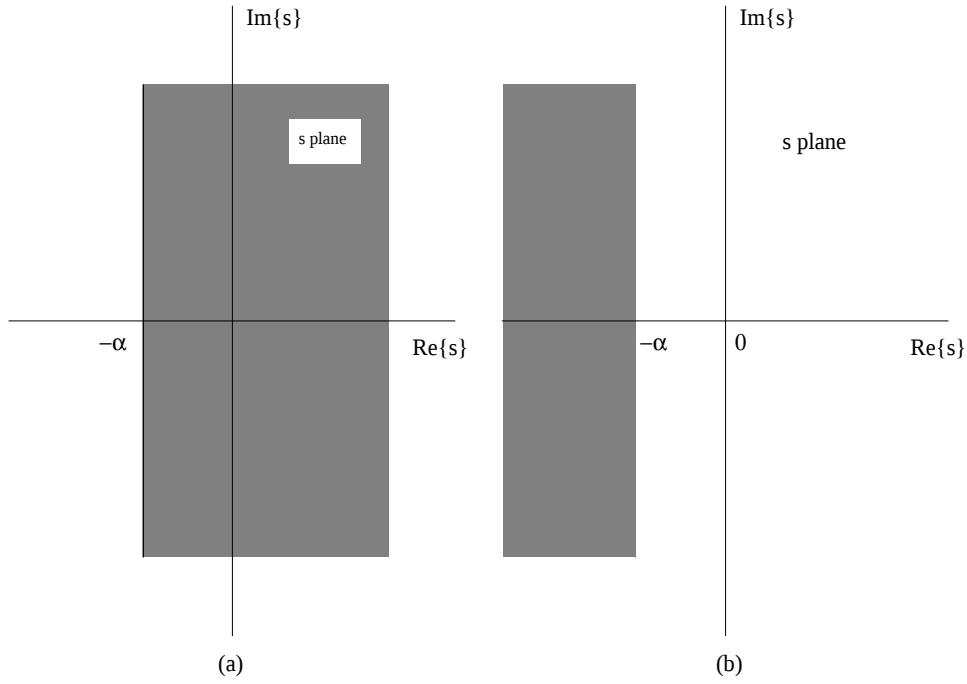
Για να υπολογίσουμε το ROC παρατηρούμε ότι πρέπει $\Re\{s+a\} < 0$ ή $\Re\{s\} < -a$. ■

Τα δύο προηγούμενα παραδείγματα δείχνουν ίδια αναλυτική έκφραση του $X_B(s)$ (για δύο διαφορετικά σήματα) αλλά διαφορετικά ROCs. Αρα για να καθοριστεί πλήρως ο διπλευρος μετασχηματισμός Laplace απαιτείται η αναλυτική του έκφραση και το ROC.

Το ROC είναι πάντα μια περιοχή στο φανταστικό χώρο s . Ο τρόπος παράστασής του που ακολουθείται είναι με τη γραμμοσκίαση της αντίστοιχης περιοχής όπως απεικονίζεται στο Σχ 8.1.

Παράδειγμα 8.3. Εστω σήμα $x(t)$ που δίνεται ως άθροισμα 2 εκθετικών συναρτήσεων

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) + 4e^t u(-t)$$



Σχήμα 8.1: Παράσταση του ROC για το διπλευρο μετασχηματισμό Laplace.

Ο διπλευρος μετασχηματισμός Laplace του $x(t)$ δίνεται ως

$$X_B(s) = \int_0^{+\infty} 3e^{-(s+2)t} dt + \int_{-\infty}^0 4e^{-(s-1)t} dt$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει για $\Re\{s\} > -2$ και το δεύτερο για $\Re\{s\} < 1$. Οπότε

$$X_B(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{4}{s-1} = \frac{-s-11}{(s+2)(s-1)}, \quad -2 < \Re\{s\} < 1$$

■

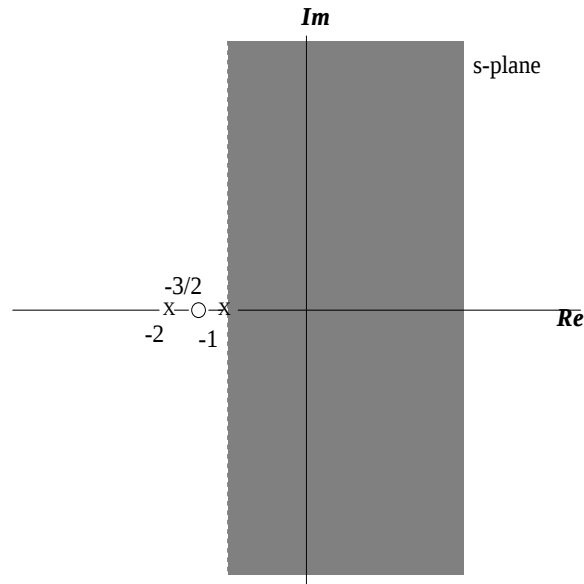
Για $X_B(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ είναι βολικό να χαρακτηρίζουμε το $X_B(s)$ με τις τιμές του s στις οποίες μηδενίζεται (θα τις ονομάζουμε “μηδέν”), τις τιμές του s στις οποίες μηδενίζεται ο παρονομαστής (θα τις ονομάζουμε “πόλους”), καθώς και το ROC. Αυτό λέγεται *pole-zero plot*. Το pole-zero plot μαζί με το ROC χαρακτηρίζει τελείως το $X_B(s)$ εκτός από ένα συντελεστή κλίμακας.

Παράδειγμα 8.4. Στο παράδειγμα αυτό μελετούμε ένα απλό σήμα για να παρουσιάσουμε το pole-zero plot.

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \leftrightarrow X_B(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -1$$

$$\Rightarrow X_B(s) = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}, \quad \Re\{s\} > -1$$

Το pole-zero plot φαίνεται στο Σχ 8.2.



Σχήμα 8.2: Pole-zero plot για το παράδειγμα 8.4. “Ο” υποδηλώνουν τα μηδέν ενώ “X” υποδηλώνουν τους πόλους. Η γραμμοσκιασμένη περιοχή υποδηλώνει το ROC.

Παράδειγμα 8.5. (Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα).

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t) \leftrightarrow X_B(s) = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-2}, \quad \Re\{s\} > 2$$

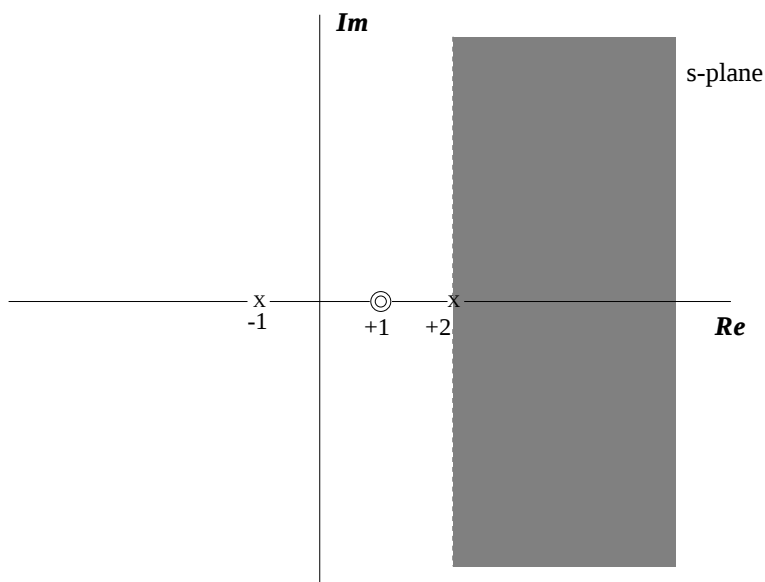
$$\Rightarrow X_B(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \quad \Re\{s\} > 2$$

Το pole-zero plot φαίνεται στο Σχ 8.3.

8.2 ROC Μετασχηματισμού Laplace

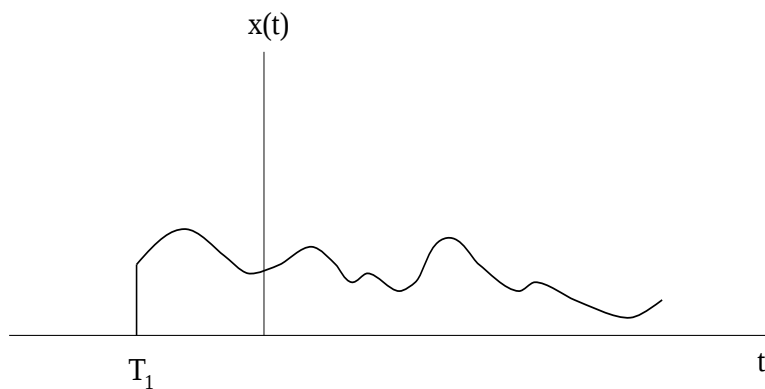
Το ROC δεν μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε περιοχή στον s-χώρο, αλλά υπακούει σε ορισμένες ιδιότητες οι οποίες συνοψίζονται σ’ αυτή τη παράγραφο:

1. Το ROC αποτελείται από “ζώνες” παράλληλες στον $j\omega$ άξονα στον s-χώρο. (Το ROC αποτελείται από εκείνες τις τιμές που ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)e^{-\sigma t}$ συγκλίνει και άρα εξαρτάται μόνο από το πραγματικό μέλος του s).
2. Για $X_B(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, το ROC δεν περιέχει πόλους.



Σχήμα 8.3: Pole-zero plot για το παράδειγμα 8.5.

3. Αν $x(t)$ πεπερασμένο στο χρόνο και το ROC περιέχει τουλάχιστο 1 τιμή, τότε το ROC θα είναι όλος ο s -χώρος.
4. Αν $x(t)$ δεξιόπλευρο (right-sided) και $\Re\{s\} = \sigma_0 \in ROC \Rightarrow$ όλα τα $s : \Re\{s\} > \sigma_0$ ανήκουν στο ROC.
Στο Σχ 8.4 φαίνεται ένα δεξιόπλευρο σήμα. Σε αναφορά με αυτό το σήμα έχουμε



Σχήμα 8.4: Ένα δεξιόπλευρο σήμα.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (8.3)$$

$$\Rightarrow \int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (8.4)$$

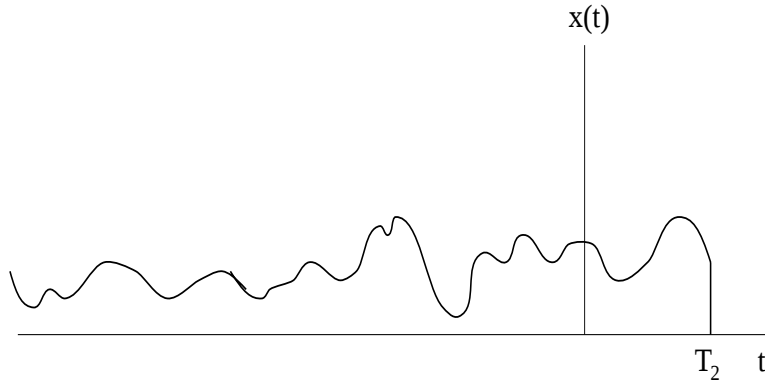
Για $\sigma_1 > \sigma_0$

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt &= \int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt \\ &\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt \leq \infty \end{aligned} \quad (8.5)$$

αφού το $e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1}$ είναι σταθερό και το $\int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$

Αυτό που μας λένε διαισθητικά οι παραπάνω εξισώσεις είναι ότι αφού το $e^{-\sigma_1 t}$ φθίνει πιο γρήγορα από το $e^{-\sigma_0 t}$ και το ολοκλήρωμα με το $e^{-\sigma_0 t}$ συγκλίνει, άρα και το ολοκλήρωμα με το $e^{-\sigma_1 t}$ θα συγκλίνει.

5. Αν $x(t)$ αριστερόπλευρο (left-sided) (βλέπε Σχ 8.5) και $\Re\{s\} = \sigma_0 \in ROC \Rightarrow$ όλα τα $s : \Re\{s\} < \sigma_0$ ανήκουν στο ROC (Η απόδειξη είναι παρόμοια με πριν).



Σχήμα 8.5: Ένα αριστερόπλευρο σήμα.

6. Αν $x(t)$ διπλευρο (two-sided) και $\Re\{s\} = \sigma_0 \in ROC$ τότε το ROC είναι μια ζώνη στον s -χώρο που περιέχει τη γραμμή $\Re\{s\} = \sigma_0$ (βλέπε Σχ 8.6).

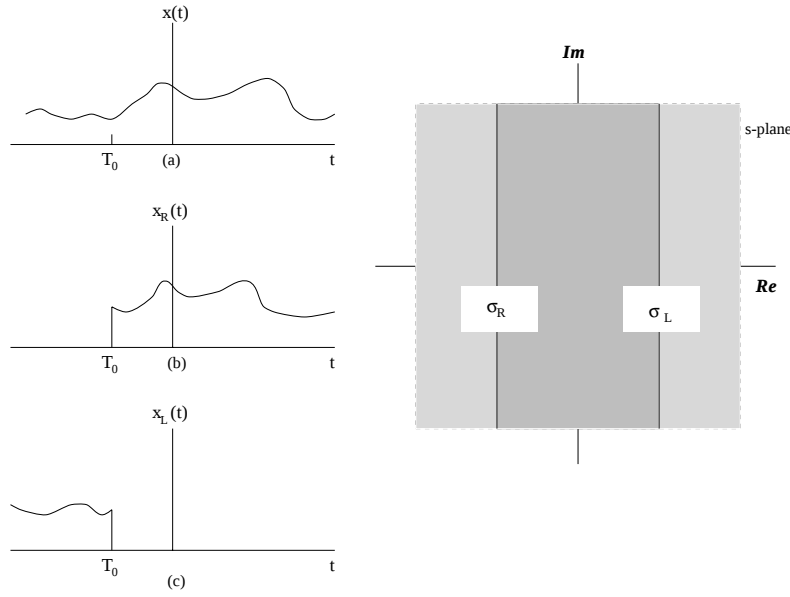
Παράδειγμα 8.6. Εστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 < t < T \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Είναι

$$X_B(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}]$$

Οπως έχουμε ήδη δει, όταν το $x(t)$ είναι πεπερασμένο στο χρόνο τότε το ROC είναι όλος ο s -χώρος. Ομως, στο παράδειγμα αυτό φαίνεται καθαρά ότι υπάρχει πόλος στο $s = -a$ γεγονός που αντικρούεται με την παρατήρηση ιδιότητα αυτή. Εξετάζοντας όμως καλύτερα τη παραπάνω



Σχήμα 8.6: Αριστερά: Ένα διπλευρο σήμα χωρισμένο ως το άθροισμα ενός αριστερόπλευρου και ενός δεξιόπλευρου. Δεξιά: ROC's των δύο (υπο)σημάτων και η κοινή περιοχή όπου αυτά επικαλύπτονται.

σχέση για το $X_B(s)$ παρατηρούμε ότι υπάρχει και μηδέν στο $s = -a$. Οπότε, χρησιμοποιώντας το κανόνα του L'Hopital

$$\lim_{s \rightarrow -a} X_B(s) = \lim_{s \rightarrow -a} \left[\frac{\frac{d}{ds}(1 - e^{-(s+a)T})}{\frac{d}{ds}(s + a)} \right] = \lim_{s \rightarrow -a} T e^{-aT} e^{-sT} = T$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι το $x(t)$ δεν έχει πόλους. Ο πόλος στο $s = -a$ εξουδετερώνεται από το μηδέν στο ίδιο σημείο. Το $x(t)$ έχει μηδέν στα σημεία όπου

$$1 - e^{-(s+a)T} = 0$$

ή ισοδύναμα

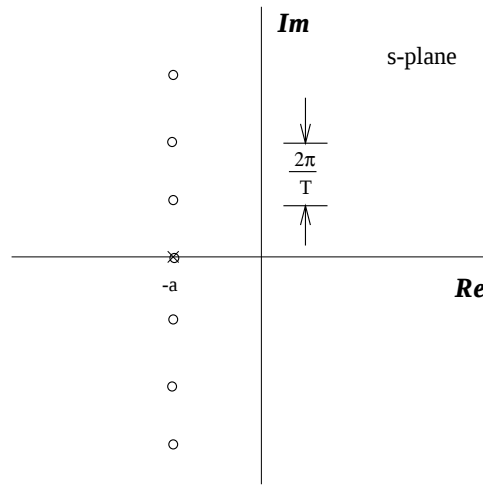
$$e^{-(s+a)T} = 1 = e^{-j2\pi k}, \quad k \text{ ακέραιος} \Rightarrow$$

$$(s + a)T = j2\pi k \Rightarrow$$

$$s = -a + j\frac{2\pi k}{T}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(βλέπε Σχ 8.7).

Παράδειγμα 8.7. Εστω το σήμα $x(t) = e^{-b|t|}$ που απεικονίζεται γραφικά στο Σχ 8.8.



Σχήμα 8.7: Pole-zero plot για το παράδειγμα 8.6. Όπως φαίνεται, ο πόλος στο $s = -a$ εξουδετερώνεται από το μηδέν στο σημείο αυτό.

$$e^{-bt}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+b}, \quad \Re\{s\} > -b$$

$$e^{+bt}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{-1}{s-b}, \quad \Re\{s\} < +b$$

$a : b < 0$, $ROC = \emptyset$ (δεν υπάρχει κοινή περιοχή σύγκλισης)

$b : b > 0$, $ROC = \{-b < \Re\{s\} < +b\}$

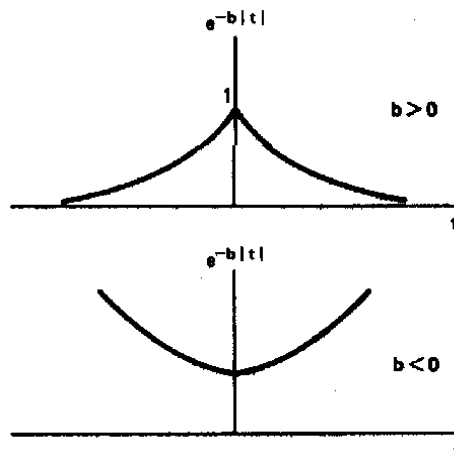
$$e^{-b|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{2b}{s^2 - b^2}, \quad -b < \Re\{s\} < +b$$

Το pole-zero plot φαίνεται στο Σχ 8.9.

Συνοψίζοντας, κάθε σήμα $x(t)$ ή δεν έχει μετασχηματισμό Laplace ή το ROC του μετασχηματισμού του είναι ένα από τα παρακάτω:

- όλος ο s-χώρος.
- ένας αριστερός ημικώρος.
- ένας δεξιός ημικώρος.
- μια ζώνη στον s-χώρο.

Στον παρακάτω πίνακα 8.1 παρατίθενται οι διπλευροί μετασχηματισμοί Laplace ορισμένων βασικών σημάτων.



Σχήμα 8.8: Σήμα $x(t) = e^{-b|t|}$ για $b > 0$ και $b < 0$.

8.3 Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Laplace

Στην πράξη όλα τα σήματα είναι αιτιατά (causal), δηλαδή “ξεκινούν” κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή (συνήθως $t = 0$). Επιπλέον, αν περιοριστούμε σε αιτιατά σήματα εισόδου και συστήματα, τότε και οι έξοδοι που παίρνουμε είναι αιτιατοί. Ο δίπλευρος μετασχηματισμός Laplace ενός αιτιατού σήματος λέγεται *μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace* (unilateral Laplace transform):

$$X_U(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (8.6)$$

Ορισμένες φορές, αντί για το 0^- ως κάτω όριο στο ολοκλήρωμα χρησιμοποιείται το 0^+ ή το 0 . Εντούτοις, όλα αυτά είναι ισοδύναμα αν η συνάρτηση $x(t)$ δεν είναι “ιδιάζουσα” στο 0 .

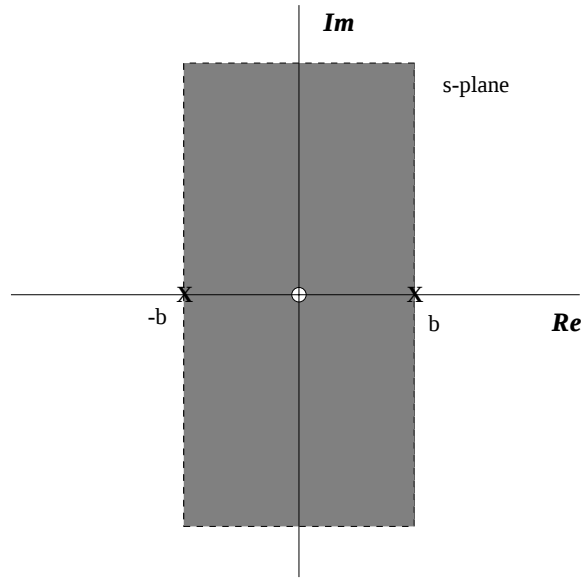
Ενώ στο δίπλευρο μετασχηματισμό Laplace η αντιστοιχία μεταξύ $x(t)$ και $X_B(s)$ δεν είναι μονοσήμαντη παρά μόνο αν ορίσουμε το ROC, αυτό δεν ισχύει στο μονόπλευρο. Στο μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace, για κάθε $X_U(s)$ υπάρχει μόνο ένα $x(t)$.

Παράδειγμα 8.8. π.χ. (Soliman ex.5.3.1, p.233) Εστω $x_1(t) = A$, $x_2(t) = \delta(t)$, $x_3(t) = e^{j2t}$, $x_4(t) = \cos 2t$, $x_5(t) = \sin 2t$. Ζητείται να υπολογιστούν οι μονόπλευροι μετασχηματισμοί Laplace αυτών των σημάτων.

Απάντηση:

$$X_{U_1}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} A e^{-st} dt = \frac{A}{s}, \quad \Re\{s\} > 0$$

$$X_{U_2}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1, \quad \forall s$$



Σχήμα 8.9: Pole-zero plot και ROC του παραδείγματος 8.7.

$$X_{U_3}(s) = \int_{0-}^{+\infty} e^{j2t} e^{-st} dt = \frac{1}{s - j2} = \frac{s}{s^2 + 4} + j \frac{2}{s^2 + 4}, \quad \Re\{s\} > 0$$

$$\cos 2t = \Re \{e^{j2t}\} \Rightarrow X_{U_4}(s) = \Re \left\{ \frac{1}{s - j2} \right\} = \frac{s}{s^2 + 4}, \quad \Re\{s\} > 0$$

$$\sin 2t = \Im \{e^{j2t}\} \Rightarrow X_{U_5}(s) = \Im \left\{ \frac{1}{s - j2} \right\} = \frac{2}{s^2 + 4}, \quad \Re\{s\} > 0$$

■

Στον παρακάτω πίνακα 8.2 φαίνονται οι μονόπλευροι μετασχηματισμοί Laplace ορισμένων βασικών σημάτων.

8.3.1 Δίπλευρος Μετασχηματισμός Laplace με Χρήση του Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ο δίπλευρος μετασχηματισμός μπορεί να υπολογιστεί με χρήση του μονόπλευρου αν εκφράσουμε το $x(t)$ σαν άθροισμα δύο σημάτων

$$x(t) = x_+(t)u(t) + x_-(t)u(-t) \quad (8.7)$$

Πίνακας 8.1: Δίπλευροι Μετασχηματισμοί Laplace Βασικών Σημάτων

Transform pair	Signal	Transform	ROC
1.	$\delta(t)$	1	All s
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
3.	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} < 0$
4.	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} > 0$
5.	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} < 0$
6.	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\Re\{s\} > -\alpha$
7.	$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\Re\{s\} < -\alpha$
8.	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$	$\Re\{s\} > -\alpha$
9.	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$	$\Re\{s\} < -\alpha$
10.	$\delta(t - T)$	e^{-sT}	All s
11.	$[\cos \omega_0 t]u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
12.	$[\sin \omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
13.	$[e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t]u(t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -\alpha$
14.	$[e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -\alpha$

Παίρνοντας δίπλευρο μετασχηματισμό και από τα δύο μέρη

$$X_B(s) = X_{U_+}(s) + \int_{-\infty}^{0^-} x_-(t)e^{-st} dt \quad (8.8)$$

και κάνοντας την αντικατάσταση μεταβλητής $t = -\tau$

$$\begin{aligned} X_B(s) &= X_{U_+}(s) + \int_{0^+}^{\infty} x_-(-\tau)e^{s\tau} d\tau \\ &= X_{U_+}(s) + \mathcal{L}\{x_-(-t)u(t)\}_{s \rightarrow -s} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Σημειώνεται ότι αν $x_-(-t)u(t)$ έχει ως ROC το $\Re\{s\} > \sigma$, τότε το $x_-(t)u(-t)$ έχει ως ROC το $\Re\{s\} < -\sigma$.

Πίνακας 8.2: Μονόπλευροι Μετασχηματισμοί Laplace Βασικών Σημάτων

	Signal	Transform	ROC
1.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
2.	$u(t) - u(t - a)$	$\frac{1 - e^{-as}}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
3.	$\delta(t)$	1	All s
4.	$\delta(t - a)$	e^{-as}	All s
5.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$	$\Re\{s\} > 0$
6.	$\exp[-at]u(t)$	$\frac{1}{s + a}$	$\Re\{s\} > -a$
7.	$t^n \exp[-at]u(t)$	$\frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$	$\Re\{s\} > -a$
8.	$\cos \omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\Re\{s\} > 0$
9.	$\sin \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\Re\{s\} > 0$
10.	$\cos^2 \omega t u(t)$	$\frac{s^2 + 2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$	$\Re\{s\} > 0$
11.	$\sin^2 \omega t u(t)$	$\frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$	$\Re\{s\} > 0$
12.	$\exp[-at] \cos \omega t u(t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$\Re\{s\} > 0$
13.	$\exp[-at] \sin \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$\Re\{s\} > 0$
14.	$t \cos \omega t u(t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
15.	$t \sin \omega t u(t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\Re\{s\} > 0$

Παράδειγμα 8.9. Εστω το σήμα $x(t) = e^{at}u(-t)$, $a > 0$. Είναι

$$X_B(s) = \mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\}_{s \rightarrow -s} = \left(\frac{1}{s+a}\right)_{s \rightarrow -s} = \frac{-1}{s-a}, \quad \Re\{s\} < a$$

Σημείωση: Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace του $x(t)$ είναι μηδέν.

Παράδειγμα 8.10. Εστω το σήμα

$$x(t) = Ae^{-at}u(t) + Bt^2e^{-bt}u(-t), \quad a, b > 0$$

Είναι

$$\begin{aligned} X_B(s) &= \frac{A}{s+a} + \mathcal{L}\{B(-t)^2e^{bt}u(t)\}_{s \rightarrow -s} \\ &= \frac{A}{s+a} + \left(B\frac{2!}{(s-b)^3}\right)_{s \rightarrow -s}, \quad (\Re\{s\} > -a) \cap (\Re\{s\} < -b) \\ &= \frac{A}{s+a} - \frac{2B}{(s+b)^3}, \quad -a < \Re\{s\} < -b \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.11. Εστω το περιοδικό εκθετικό σήμα $x(t) = e^{j\omega_0 t}$. Είναι

$$\begin{aligned} X_B(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-j\omega_0)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-(s-j\omega_0)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(s-j\omega_0)t} dt \end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει για $\Re\{s\} < 0$ ενώ το δεύτερο συγκλίνει για $\Re\{s\} > 0$. Συνεπώς, ο μετασχηματισμός δεν συγκλίνει για καμία τιμή του s .

8.4 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Στην παρακάτω ανάπτυξη των ιδιοτήτων, όπου δεν αναφέρεται συγκεκριμένα το είδος του μετασχηματισμού, η ιδιότητα ισχύει και για το δίπλευρο και για το μονόπλευρο μετασχηματισμό. Επίσης για $x(t) \longleftrightarrow X(s)$ θεωρείται $ROC = R$.

Γραμμικότητα:

$$x_1(t) \longleftrightarrow X_1(s), \quad ROC = R_1$$

$$x_2(t) \longleftrightarrow X_2(s), \quad ROC = R_2$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longleftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s), \quad ROC \text{ περιέχει } R_1 \cap R_2 \quad (8.10)$$

Παράδειγμα 8.12. Το παράδειγμα αυτό αφορά διπλευρους μετασχηματισμούς. Εστω

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \\ X_2(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \Re\{s\} > -1 \end{aligned}$$

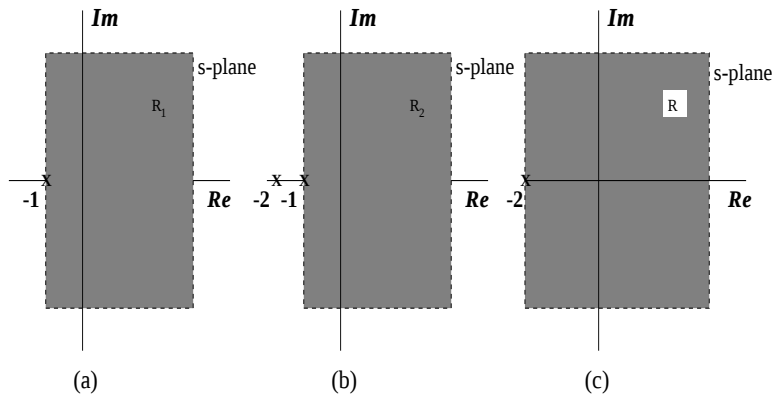
και έστω

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

Τότε, ο μετασχηματισμός του $x(t)$ δίνεται ως

$$X(s) = X_1(s) - X_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -2$$

(Βλέπε Σχ 8.10).



Σχήμα 8.10: Pole-zero plots και ROCs για το παράδειγμα 8.12.

Ολίσθηση στον Χρόνο: Η ολίσθηση στο χρόνο έχει ως αποτέλεσμα μια διαφορά φάσης στο μετασχηματισμό.

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-st_0} X(s), \quad \text{ίδιο ROC}, \quad t_0 > 0 \quad (8.11)$$

Παράδειγμα 8.13. Εστω ο τετραγωνικός παλμός

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-a}{2a}\right) = u(t) - u(t-2a)$$

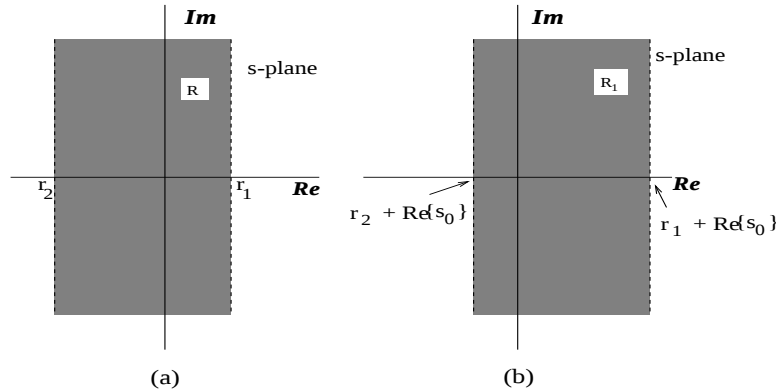
Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός του μπορεί να βρεθεί ως

$$X(s) = \frac{1}{s} - e^{-2as} \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-2as}}{s}, \quad \Re\{s\} > 0$$

Ολίσθηση στον s-Χώρο:

$$e^{s_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(s - s_0) \quad , \quad ROC \quad R_s = R + \Re\{s_0\} \quad (8.12)$$

Δηλαδή το ROC είναι το ROC του $X(s)$ μετατοπισμένο κατά $\Re\{s_0\}$ (βλέπε Σχ 8.11).



Σχήμα 8.11: Αλλαγή του ROC σαν αποτέλεσμα της ολίσθησης στον s-χώρο.

Πολλαπλασιασμός στο Χρόνο: Ο πολλαπλασιασμός στο χρόνο επιφέρει διαίρεση στη μεταβλητή s .

Δίπλευρος: (βλέπε Σχ 8.12).

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad , \quad ROC \quad R_t = \frac{R}{a} \quad (8.13)$$

Μονόπλευρος:

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \Re\{s\} > a\sigma_1 \quad (8.14)$$

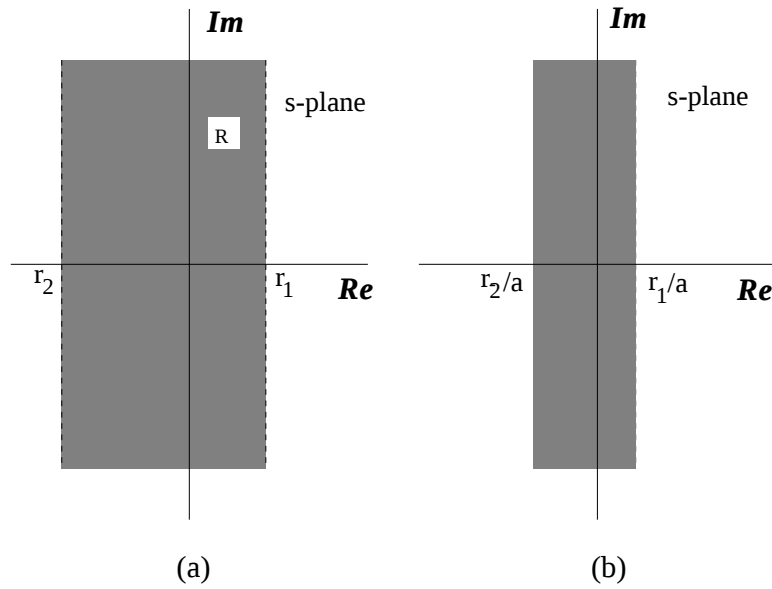
Παραγωγή στο Χρόνο: Η παραγωγή στο χρόνο έχει ως αποτέλεσμα τον πολλαπλασιασμό στον s-χώρο.

Δίπλευρος:

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s) \quad , \quad ROC \text{ περιέχει } R \quad (8.15)$$

Μονόπλευρος:

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s) - x(0^-) \quad (8.16)$$



Σχήμα 8.12: Αλλαγή του ROC σαν αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού στο χρόνο.

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - \dots - sx^{(n-2)}(0^-) - x^{(n-1)}(0^-) \quad (8.17)$$

Η παραπάνω ιδιότητα είναι πολύ σπουδαία και χρήσιμη στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων γιατί μετατρέπει τις διαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές εξισώσεις.

Παράδειγμα 8.14. Ζητείται να βρεθεί ο μετασχηματισμός του $x(t) = \sin^2 \omega t \cdot u(t)$, $x(0^-) = 0$.

Απάντηση: Υπολογίζουμε το μετασχηματισμό της παραγώγου του $x(t)$ και βάσει της ιδιότητας υπολογίζουμε το μετασχηματισμό του $x(t)$.

$$x'(t) = 2\omega \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t \cdot u(t) = \omega \cdot \sin 2\omega t \cdot u(t)$$

$$\mathcal{L}\{\omega \sin 2\omega t u(t)\} = \frac{2\omega^2}{s^2 + 4\omega^2}$$

Συνεπώς

$$\mathcal{L}\{\sin^2 \omega t u(t)\} = \frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$$

Παράδειγμα 8.15. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0 \quad , \quad y(0^-) = 3 \quad , \quad y'(0^-) = 1$$

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 3$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) = s^2Y(s) - 3s - 1$$

Παίρνουμε μετασχηματισμό Laplace και από τις δύο πλευρές της διαφορικής εξίσωσης:

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 3s + 10$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3s + 10}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{7}{s + 1} - \frac{4}{s + 2} \\ \Rightarrow y(t) &= 7e^{-t}u(t) - 4e^{-2t}u(t) \end{aligned}$$

Παραγωγή στον s-Χώρο: Η παραγωγή στον s-χώρο έχει ως αποτέλεσμα το πολλαπλασιασμό στο χρόνο.

$$-tx(t) \longleftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}, \text{ ίδιο ROC} \quad (8.18)$$

και γενικότερα

$$(-t)^n x(t) \longleftrightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n} \quad (8.19)$$

Παράδειγμα 8.16. Ζητείται να βρεθεί ο μετασχηματισμός του $x(t) = te^{-at}u(t)$.

Απάντηση: Ξέρουμε ότι

$$e^{-at} \cdot u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s + a}, \quad \Re\{s\} > -a$$

και συνεπώς

$$te^{-at}u(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s + a} \right] = \frac{1}{(s + a)^2}, \quad \Re\{s\} > -a$$

Γενικότερα, με επαναληπτική εφαρμογή παίρνουμε

$$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!} e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s + a)^n}, \quad \Re\{s\} > -a$$

Ολοκλήρωση στο Χρόνο: Η ολοκλήρωση στο χρόνο έχει ως αποτέλεσμα τη διαίρεση στον s-χώρο.

Δίπλευρος:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s} X(s), \text{ ROC περιέχει } R \cap \Re\{s\} > 0 \quad (8.20)$$

Μονόπλευρος:

$$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s} X(s) \quad (8.21)$$

όπου το ολοκλήρωμα του $x(t)$ δεν μεγαλώνει γρηγορότερα κάποιο εκθετικό της μορφής Ae^{-at} .

Πολλαπλασιαστική Ιδιότητα: Μελετούμε αυτή την ιδιότητα μόνο για το μονόπλευρο και μόνο για συναρτήσεις διαμόρφωσης $\cos$ και $\sin$.

$$x(t) \cos \omega t \longleftrightarrow \frac{1}{2} [X(s + j\omega) + X(s - j\omega)] \quad (8.22)$$

$$x(t) \sin \omega t \longleftrightarrow \frac{j}{2} [X(s + j\omega) - X(s - j\omega)] \quad (8.23)$$

Παράδειγμα 8.17. Ο μετασχηματισμός του $\cos \omega t \cdot u(t)$ μπορεί να εξαχθεί από τον μετασχηματισμό του $u(t)$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t \cdot u(t)\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s + j\omega} + \frac{1}{s - j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Παρόμοια για το $e^{-at} \cdot \sin \omega t \cdot u(t)$

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot \sin \omega t \cdot u(t)\} = \frac{j}{2} \left(\frac{1}{s + j\omega + a} - \frac{1}{s - j\omega + a} \right) = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

Ιδιότητα Συγκερασμού: Ο συγκερασμός στο χρόνο έχει ως αποτέλεσμα το πολλαπλασιασμό στον s -χώρο.

$$x_1(t) \star x_2(t) \longleftrightarrow X_1(s)X_2(s) \quad , \text{ ROC περιέχει } R_1 \cap R_2 \quad (8.24)$$

Παράδειγμα 8.18. Μπορούμε να αποδείξουμε την ιδιότητα ολοκλήρωσης από την ιδιότητα συγκερασμού

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) \star u(t) \longleftrightarrow X(s) \cdot \frac{1}{s}$$

8.4.1 Θεωρήματα Αρχικής και Τελικής Τιμής

Τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής (Initial and Final Value Theorems) είναι πολύ σημαντικά για τη μελέτη της “αρχικής” και “τελικής” (μετά από άπειρο χρόνο) συμπεριφοράς των συστημάτων.

Θεώρημα Αρχικής Τιμής:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (8.25)$$

Γενικότερα, αν $x^{(n)}(0^+) = 0$ για $n < N$ τότε

$$x^{(N)}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{N+1} X(s) \quad (8.26)$$

Παρατήρηση: Το δεξί μέλος μπορεί και να υπάρχει ακόμη και σε περιπτώσεις που το αριστερό δεν υπάρχει. Για το λόγο αυτό, πρέπει να ελέγχουμε την ύπαρξη του $x(0^+)$ πριν την εφαρμογή του θεωρήματος.

Παράδειγμα 8.19. Η αρχική τιμή ενός σήματος μπορεί να βρεθεί από το μετασχηματισμό του. Έστω

$$X(s) = \frac{cs + d}{(s - a)(s - b)} \quad , \quad a \neq b$$

Βάσει του θεωρήματος παίρνουμε

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{cs + d}{(s - a)(s - b)} = c$$

Θεώρημα Τελικής Τιμής:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (8.27)$$

Η παραπάνω σχέση είναι πολύ βασική γιατί μας επιτρέπει να βρίσκουμε τη τελική τιμή (τιμή σε σταθερή κατάσταση) της εξόδου ενός συστήματος.

Όπως στη περίπτωση του θεωρήματος Αρχικής Τιμής, έτσι και στο θεώρημα Τελικής Τιμής ισχύει η παρατήρηση ότι το δεξιό όριο μπορεί να υπάρχει ακόμη και στη περίπτωση που το αριστερό δεν υπάρχει. Έτσι, πρέπει πρώτα να ελέγχουμε την ύπαρξη του $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ πριν την εφαρμογή του θεωρήματος. Αυτό μπορούμε να το δούμε εύκολα αν θεωρήσουμε το $X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$. Έτσι έχουμε

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} = 0 \quad (8.28)$$

Ισχύει όμως ότι $x(t) = \cos \omega t$ το οποίο δεν έχει όριο για $t \rightarrow +\infty$. Η διαφορά οφείλεται στο ότι το $s = 0$ πρέπει να είναι στο ROC για την εφαρμογή του θεωρήματος Τελικής Τιμής, άρα όλοι οι πόλοι του $X(s)$ πρέπει να είναι στον αριστερό ημιχώρο.

Παράδειγμα 8.20. Έστω ότι το σήμα $x(t) = A \cdot u(t)$ εφαρμόζεται ως είσοδος στο σύστημα

$$H(s) = \frac{c}{s(s + b) + c}$$

Τότε η έξοδος σε σταθερή κατάσταση από το σύστημα μπορεί να βρεθεί ως

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)H(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s} \frac{c}{s(s + b) + c} = A \end{aligned}$$

(θεωρώντας ότι τα μηδενικά της $s^2 + sb + c$ είναι στον αριστερό ημιχώρο). Το σύστημα αυτό μετά από “κάποιο” χρονικό διάστημα “ακολουθεί” (tracks) την είσοδο. ■

Στους παρακάτω δύο πίνακες 8.3, 8.4 συνοψίζονται οι ιδιότητες του διπλEURON και του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace, αντίστοιχα.

Πίνακας 8.3: Ιδιότητες ΔιπλEURON Μετασχηματισμού Laplace

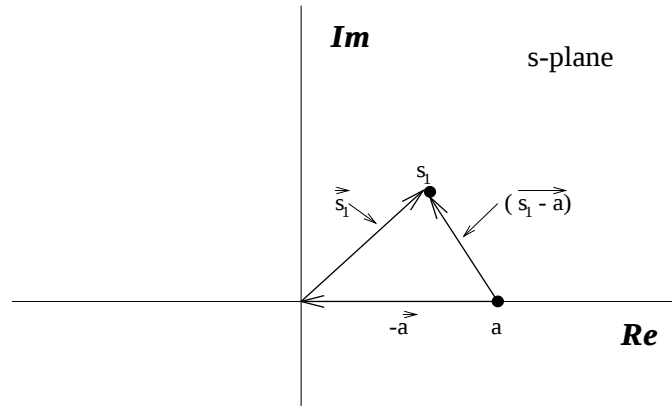
Property	Signal	Transform	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
1.	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	At least $R_1 \cap R_2$
2.	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
3.	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s - s_0)$	Shifted version of R [i.e., s is in the ROC if $(s - s_0)$ is in R]
4.	$x(\alpha t)$	$\frac{1}{ \alpha }X\left(\frac{s}{\alpha}\right)$	“Scaled” ROC [i.e., s is in the ROC if (s/α) is in the ROC of $X(s)$]
5.	$x_1(t) \star x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	At least $R_1 \cap R_2$
6.	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	At least R
7.	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
8.	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	At least $R_1 \cap R_2$

Πίνακας 8.4: Ιδιότητες Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

	Signal	Tranform
1.	$x(t)$	$X(s)$
2.	$\sum_{n=1}^N a_n x_n(t)$	$\sum_{n=1}^N a_n X_n(s)$
3.	$x(t - t_0)$	$X(s)e^{-t_0 s}$
4.	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$
5.	$x(\alpha t), \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} X\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
6.	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$
7.	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$
8.	$tx(t)$	$-\frac{dX(s)}{ds}$
9.	$x(t) \cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2}[X(s - j\omega_0) + X(s + j\omega_0)]$
10.	$x(t) \sin \omega_0 t$	$\frac{1}{2j}[X(s - j\omega_0) - X(s + j\omega_0)]$
11.	$x(t) \star h(t)$	$X(s)H(s)$
12.	$x(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$
13.	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

8.5 Γεωμετρικός Υπολογισμός του Μετασχηματισμού Fourier

Για την απλή περίπτωση που $X(s) = (s - a)$ μπορούμε να υπολογίσουμε το $X(s)$ σε κάποιο σημείο s_1 σαν άνοσμα (Σχ 8.13).



Σχήμα 8.13: Αναπαράσταση των ανοσμάτων s_1 , a και $s_1 - a$ στο μιγαδικό χώρο.

Το $X(s_1)$ έχει μέτρο ίσο με το μέτρο του $(s_1 - a)$ και φάση ίση με την γωνία του ανόσματος με τον άξονα των πραγματικών. Αν $X(s) = \frac{1}{s-a}$ τότε το μέτρο του $X(s_1)$ θα είναι το αντίστροφο του μέτρου του ανόσματος $(s_1 - a)$ και η φάση θα είναι το αρνητικό της γωνίας του ανόσματος με τον άξονα των πραγματικών. Πιο γενικότερα αν,

$$X(s) = M \frac{\prod_{i=1}^R (s - \beta_i)}{\prod_{j=1}^P (s - \alpha_j)} \quad (8.29)$$

το μέτρο του $X(s_1)$ στο s_1 θα είναι το μέτρο του M , επί το γινόμενο των μηκών των “zero-ανοσμάτων” (ανόσματα από τα μηδενικά β_i στο s_1), δια το γινόμενο των μηκών των “pole-ανοσμάτων” (ανόσματα από τους πόλους α_j στο s_1). Η φάση είναι το άθροισμα των γωνιών των zero-ανοσμάτων μείον το άθροισμα των γωνιών των pole-ανοσμάτων. Αν $M < 0$, τότε προστίθεται στη φάση η γωνία π . Αν υπάρχει πολλαπλή ρίζα ή πόλος, τότε τα αντίστοιχα μήκη/γωνίες υπολογίζονται τόσες φορές όση η τάξη της ρίζας ή του πόλου. Αν οι παραπάνω υπολογισμοί γίνουν στον $j\omega$ άξονα τότε παίρνουμε τον μετασχηματισμό Fourier.

Παράδειγμα 8.21.

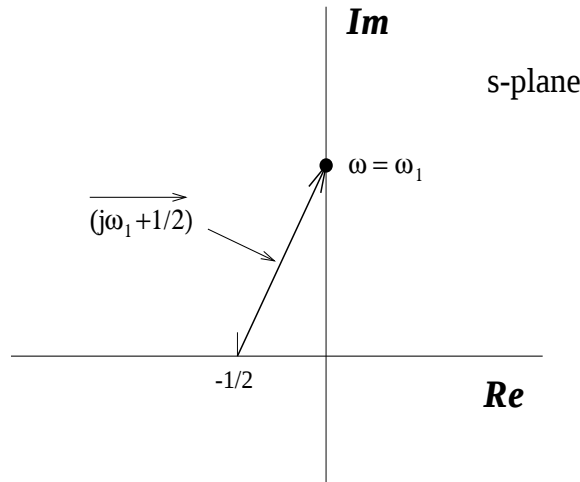
$$X(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}} \quad , \quad \Re\{s\} > -\frac{1}{2}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier δίνεται ως

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{2}}$$

το pole-zero plot φαίνεται στο Σχ 8.14.

$$\begin{aligned} |X(j\omega_1)|^2 &= \frac{1}{\omega_1^2 + (\frac{1}{2})^2} \\ \angle X(j\omega) &= -\tan^{-1} 2\omega_1 \end{aligned}$$



Σχήμα 8.14: Pole-zero plot του παραδείγματος 8.21.

8.6 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Για $s = \sigma + j\omega$, $\Re\{s\} \in ROC$, ο μετασχηματισμός Laplace του $x(t)$ ερμηνεύεται ως ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)e^{-\sigma t}$.

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt \quad (8.30)$$

παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad (8.31)$$

και πολλαπλασιάζοντας στη συνέχεια με $e^{\sigma t}$ καταλήγουμε στη σχέση

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}d\omega \quad (s = \sigma + j\omega) \quad (8.32)$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει το σήμα $x(t)$ από τον μετασχηματισμό του $X(s)$ και αναφέρεται ως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds \quad (\text{Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace}) \quad (8.33)$$

Παρατηρούμε ότι στη προηγούμενη σχέση έχουμε ολοκλήρωση κατά μήκος της ευθείας $\sigma + j\omega$. Αυτό είναι πολύ δύσκολο να γίνει αναλυτικά. Στις περισσότερες περιπτώσεις

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (8.34)$$

όπου $N(s)$ και $D(s)$ είναι πολυώνυμα ως προς s και $D(s)$ είναι μεγαλύτερου βαθμού από το $N(s)$. Χρησιμοποιώντας ανάλυση σε απλά κλάσματα (partial fraction expansion) μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

Παράδειγμα 8.22. Ζητείται να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad , \quad \Re\{s\} > -1$$

Εφαρμόζουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \quad , \quad A = 1 \quad , \quad B = -1$$

και καταλήγουμε εύκολα στη σχέση

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Μεσω των πινάκων μπορούμε εύκολα να αντιστρέψουμε τη παραπάνω παίρνοντας

$$\begin{aligned} e^{-t}u(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s+1} \quad , \quad \Re\{s\} > -1 \\ e^{-2t}u(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s+2} \quad , \quad \Re\{s\} > -2 \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\left[e^{-t} - e^{-2t} \right] u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad , \quad \Re\{s\} > -1$$

Παράδειγμα 8.23.

$$X(s) = \frac{2s^2 - 3s}{s^3 - 4s^2 + 5s - 2} \quad , \quad D(s) = (s-2)(s-1)^2$$

$$X(s) = \frac{B}{s-2} + \frac{A_2}{(s-1)^2} + \frac{A_1}{s-1}$$

Μετά την ανάλυση σε απλά κλάσματα βρίσκουμε $B = 2$, $A_2 = 1$, $A_1 = 0$, άρα

$$X(s) = \frac{2}{s-2} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

και συνεπώς

$$x(t) = 2e^{2t}u(t) + te^t u(t)$$

Κεφάλαιο 9

Μετασχηματισμός Z

Ο μετασχηματισμός Z είναι το αντίστοιχο του μετασχηματισμού Laplace στο διακριτό χρόνο. Ετσι, όπως ο μετασχηματισμός Laplace αποτελεί μια επέκταση του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου, έτσι και ο μετασχηματισμός Z αποτελεί μια επέκταση του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου. Κατ' απόλυτη αντιστοιχία είναι χρήσιμος για περιπτώσεις σημάτων διακριτού χρόνου που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier.

9.1 Δίπλευρος Μετασχηματισμός Z

Ο δίπλευρος μετασχηματισμός Z ορίζεται ως

$$X_B(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}, \quad z \in \mathcal{C} \quad (9.1)$$

Ο συμβολισμός που υιοθετούμε για ένα σήμα και το μετασχηματισμό του είναι ο $x[n] \longleftrightarrow X_B(z)$. Αν εκφράσουμε το $z = re^{j\Omega}$, τότε

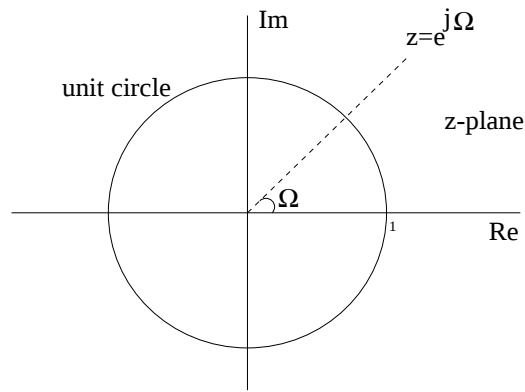
$$\begin{aligned} X_B(re^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\Omega})^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x[n]r^{-n}\}e^{-j\Omega n} \end{aligned} \quad (9.2)$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$X_B(re^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\} \quad (9.3)$$

Η τελευταία σχέση υποδηλώνει ότι ο μετασχηματισμός Z είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $x[n]$ πολλαπλασιασμένου επί r^{-n} , το οποίο μπορεί να φθίνει ή να αυξάνει ανάλογα με το αν $r > 1$ ή $r < 1$. Στην ειδική περίπτωση που $r = 1$ (ή ισοδύναμα $|z| = 1$), ο μετασχηματισμός Z μεταπίπτει στο μετασχηματισμό Fourier (βλέπε Σχ 9.1):

$$X_B(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \mathcal{F}\{x[n]\} \quad (9.4)$$



Σχήμα 9.1: Μιγαδικός z-χώρος. Ο μετασχηματισμός Z μεταπίπτει στο μετασχηματισμό Fourier για τιμές του z στο μοναδιαίο κύκλο.

Βλέπουμε δηλαδή ότι υπάρχει μια προφανής αντιστοιχία μεταξύ των μετασχηματισμών Z και Laplace. Η αντιστοιχία αυτή συνοψίζεται ως:

Μετασχηματισμός Laplace = μετασχηματισμός Fourier στο φανταστικό άξονα
 Μετασχηματισμός Z = μετασχηματισμός Fourier στο μοναδιαίο κύκλο

Εφ'όσον $X_B(z) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$, η σύγκλιση του μετασχηματισμού Z είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση του μετασχηματισμού Fourier της ακολουθίας $x[n]r^{-n}$. Οπως και στην περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace, για κάθε $x[n]$ θα υπάρχει μια “περιοχή σύγκλισης” (Region Of Convergence – ROC) όπου ο μετασχηματισμός Z θα συγκλίνει (πιθανόν το ROC να είναι κενό, οπότε ο μετασχηματισμός Z δε συγκλίνει για καμιά τιμή z). Αν το ROC περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο, τότε και ο μετασχηματισμός Fourier θα συγκλίνει.

Παράδειγμα 9.1. Εστω το σήμα $x[n] = a^n u[n]$. Τότε, ο διπλευρος μετασχηματισμός του Z δίνεται ως

$$X_B(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n$$

Για να συγκλίνει ο $X_B(z)$ πρέπει $\sum_{n=0}^{+\infty} |az^{-1}|^n < \infty$. Έτσι το ROC είναι οι τιμές για τις οποίες $|az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$. Συνεπώς,

$$X_B(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$

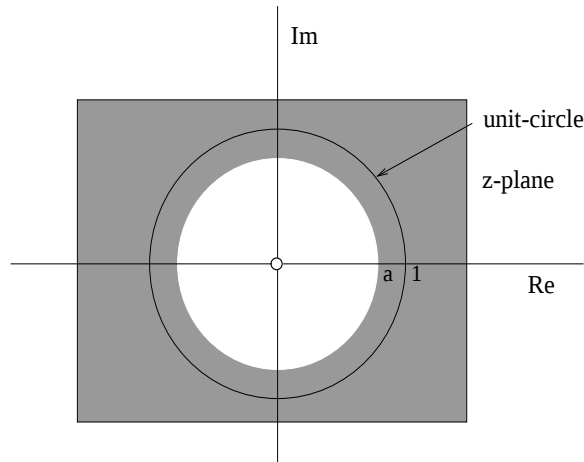
Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Z συγκλίνει για κάθε πεπερασμένη τιμή του a , ενώ ο μετασχηματισμός Fourier συγκλίνει μόνο για $|a| < 1$. Για $a = 1$, $x[n] = u[n]$ με μετασχηματισμό Z

$$u[n] \longleftrightarrow X_B(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

Παρατηρούμε ότι σ' αυτή την περίπτωση ο μετασχηματισμός Z είναι της μορφής

$$X_B(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

άρα μπορεί, όπως και στην περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace, να χαρακτηριστεί από τα μηδέν και τους πόλους, δηλαδή από το pole-zero plot (βλέπε Σχ 9.2).



Σχήμα 9.2: Pole-zero plot και ROC για το παράδειγμα 9.1.

Παράδειγμα 9.2. Εστω το σήμα $x[n] = -a^n u[-n-1]$. Ο μετασχηματισμός του δίνεται ως

$$\begin{aligned} X_B(z) &= - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1} z)^n \end{aligned}$$

Το παραπάνω άθροισμα συγκλίνει για

$$|a^{-1} z| < 1 \Rightarrow |z| < |a|$$

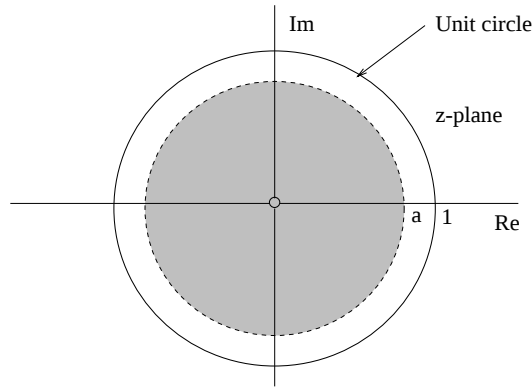
και συνεπώς

$$X_B(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|$$

Παρατηρούμε ότι καταλήξαμε στην ίδια αλγεβρική έκφραση όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, αλλά με διαφορετικό ROC, το οποίο απεικονίζεται στο Σχ 9.3.

Παράδειγμα 9.3. Εστω το σήμα

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$



Σχήμα 9.3: Pole-zero plot και ROC για το παράδειγμα 9.2.

Τότε

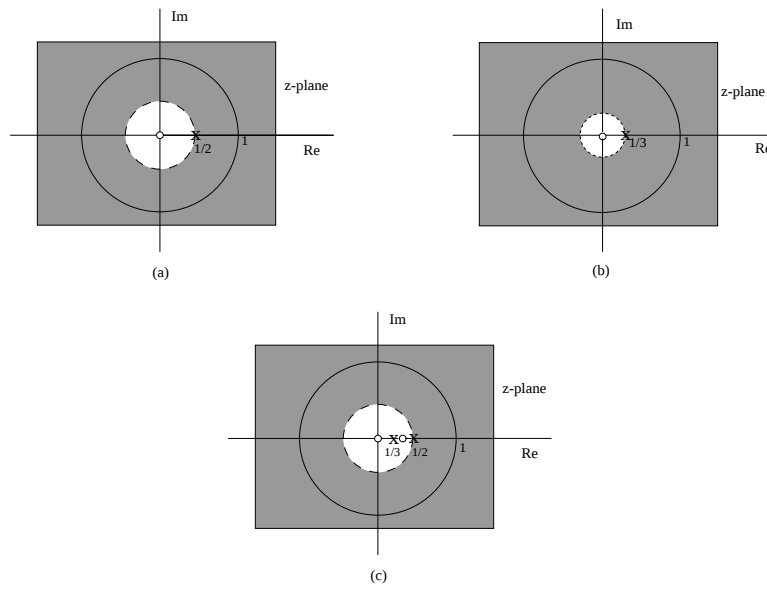
$$\begin{aligned}
 X_B(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \right\} z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{2 - \frac{5}{6} z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2} z^{-1})(1 - \frac{1}{3} z^{-1})} = \frac{z(2z - \frac{5}{6})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})}
 \end{aligned}$$

Εφ' όσον και οι δύο όροι του παραπάνω αθροίσματος πρέπει να συγκλίνουν, $|z| > \frac{1}{2}$ και $|z| > \frac{1}{3}$, και συνεπώς το ROC είναι $|z| > \frac{1}{2}$. Το παραπάνω αποτέλεσμα θα μπορούσαμε να το είχαμε πάρει χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των προηγούμενων παραδειγμάτων και τη γραμμικότητα του μετασχηματισμού Z (βλέπε παρακάτω ιδιότητες). Στο Σχ 9.4 απεικονίζονται τα pole-zero plots και τα ROCs των ξεχωριστών όρων καθώς και του αθροίσματος.

9.2 ROC Μετασχηματισμού Z

Οι ιδιότητες του ROC για την περίπτωση του μετασχηματισμού Z είναι αντίστοιχες με αυτές του μετασχηματισμού Laplace. Αυτές συνοψίζονται σ' αυτή τη παράγραφο:

1. Το ROC αποτελείται από ένα δακτύλιο (ring) στο z-χώρο με κέντρο την αρχή ($z = 0$), όπως φαίνεται στο Σχ 9.5. Αυτό είναι πολύ εύκολο να το δούμε γιατί το ROC αποτελείται από εκείνες τις τιμές που ο μετασχηματισμός Fourier του $x[n]r^{-n}$, $z = re^{j\Omega}$, συγκλίνει, άρα εξαρτάται μόνο από το μέτρο του z .
2. Το ROC δεν περιέχει πόλους του $X_B(z)$.



Σχήμα 9.4: Pole-zero plots και ROCs για το παράδειγμα 9.3.

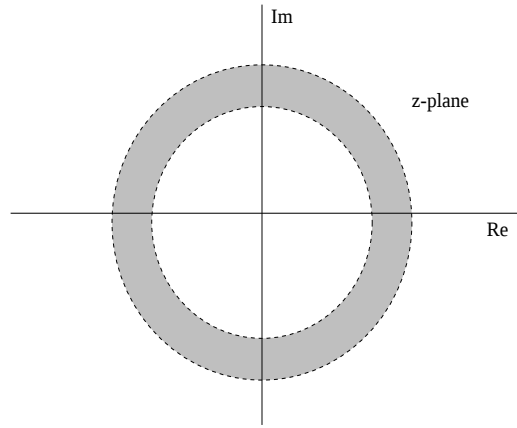
3. Αν το $x[n]$ είναι πεπερασμένο στο χρόνο, τότε το ROC είναι όλος ο z -χώρος με πιθανές εξαιρέσεις $z = 0$ και/ή $z = \infty$.
4. Αν το $x[n]$ είναι δεξιόπλευρο και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στο ROC, τότε κάθε πεπερασμένη τιμή του z με $|z| > r_0$ θα ανήκει στο ROC. Η διαισθητική εξήγηση αυτού έχει ως εξής: για $r_1 > r_0$ το $x[n]r_1^{-n}$ φθίνει γρηγορότερα από το $x[n]r_0^{-n}$. Άρα το άθροισμα θα συγκλίνει (βλέπε Σχ 9.6).
5. Αν το $x[n]$ είναι αριστερόπλευρο και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στο ROC, τότε όλες οι τιμές του z με $0 < |z| < r_0$ θα ανήκουν στο ROC. (εξήγηση παρόμοια με την εξήγηση της ιδιότητας 4).
6. Αν το $x[n]$ είναι δίπλευρο και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στο ROC, τότε το ROC θα είναι ένας δακτύλιος που περιέχει τον κύκλο $|z| = r_0$. (αποδεικνύεται εκφράζοντας το $x[n]$ σαν το άθροισμα ενός δεξιόπλευρου και ενός αριστερόπλευρου σήματος, Σχ 9.7).

Παράδειγμα 9.4. Εστω το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} 3^n, & n < 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n = 0, 2, 4, \dots \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Ο δίπλευρος μετασχηματισμός Z του $x[n]$ δίνεται ως

$$X_B(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n z^{-n} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ άρτιος}}}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ περιττός}}}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$$



Σχήμα 9.5: Το ROC είναι πάντα ένας δακτύλιος στο z -χώρο. Σε ορισμένες περιπτώσεις το εσωτερικό του δακτυλίου μπορεί να προεκταθεί μέχρι την αρχή οπότε το ROC γίνεται δίσκος. Σε άλλες πάλι περιπτώσεις, το εξωτερικό του δακτυλίου μπορεί να προεκταθεί μέχρι το άπειρο.

Κάνουμε τις εξής αντικαταστάσεις μεταβλητών:

στον 1^ο όρο του αθροίσματος: $n := -m$

στον 2^ο όρο του αθροίσματος: $n := 2m$

στον 3^ο όρο του αθροίσματος: $n := 2m + 1$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} X_B(z) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}z\right)^m + \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}z^{-2}\right)^m + \frac{z^{-1}}{2} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}z^{-2}\right)^m \\ &= \frac{\frac{1}{3}z}{1 - \frac{1}{3}z} + \frac{1}{1 - \frac{1}{9}z^{-2}} + \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \\ &= -\frac{z}{z-3} + \frac{z^2}{z^2 - \frac{1}{9}} + \frac{z/2}{z^2 - \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

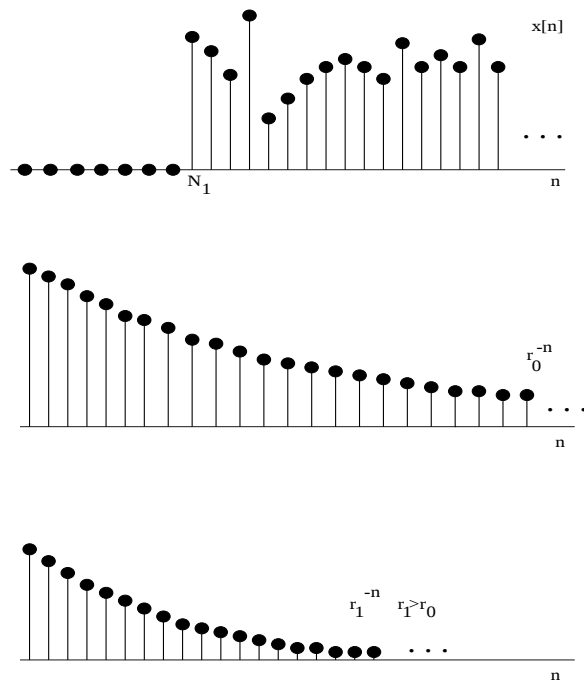
Πόλους έχουμε στα $z = 3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. Αρα, το ROC ορίζεται από τη σχέση $\frac{1}{2} < |z| < 3$, όπως απεικονίζεται στο Σχ 9.8.

Παράδειγμα 9.5. Εστω το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, a > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$X_B(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a}$$

Εφ'όσον το $x[n]$ είναι πεπερασμένο στο χρόνο, το ROC θα είναι όλος ο z -χώρος με πιθανές εξαιρέσεις την αρχή και/ή το άπειρο. Επιπλέον, αφού υπάρχει ένας πόλος τάξης $N-1$ στο



Σχήμα 9.6: Για $r_1 > r_0$ το $x[n]r_1^{-n}$ φθίνει γρηγορότερα από το $x[n]r_0^{-n}$. Αρα, αν το $x[n]r_0^{-n}$ συγκλίνει και το $x[n]r_1^{-n}$ θα συγκλίνει.

$z = 0$ η αρχή αποκλείεται από το ROC. Οι ρίζες του αριθμητή είναι τα

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Η ρίζα για $k = 0$ εξουδετερώνει τον πόλο στο $z = a$. Οπότε, οι μόνοι πόλοι είναι στην αρχή. Τα μηδέν βρίσκονται στα

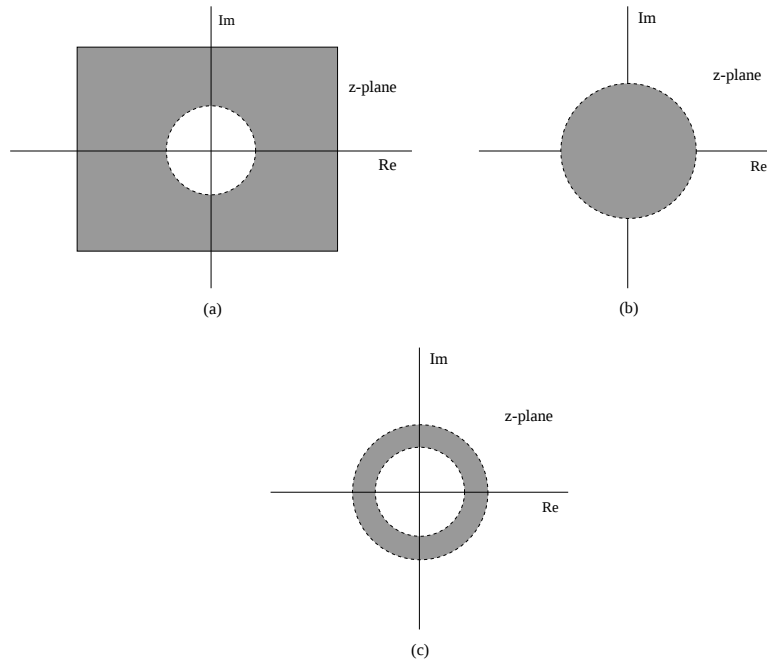
$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

Το pole-zero plot φαίνεται στο Σχ 9.9.

Παράδειγμα 9.6. Εστω το σήμα $x[n] = b^{|n|}$, $b > 0$. Το $x[n]$ απεικονίζεται στο Σχ 9.10 για $b < 1$ και $b > 1$.

$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

$$\begin{aligned} b^n u[n] &\longleftrightarrow \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b \\ b^{-n} u[-n-1] &\longleftrightarrow \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{b} \end{aligned}$$



Σχήμα 9.7: (α) ROC για μια δεξιόπλευρη ακολουθία, (β) ROC για μια αριστερόπλευρη ακολουθία, (γ) ROC για μια διπλευρη ακολουθία άθροισμα μιας δεξιόπλευρης και μιας αριστερόπλευρης ακολουθίας).

Τα ROCs και pole-zero plots απεικονίζονται στο Σχ 9.11. Παρατηρούμε ότι για $b > 1$ δεν υπάρχει κοινό ROC και συνεπώς ο μετασχηματισμός Z δεν συγκλίνει.

$$X_B(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} - \frac{1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad b < |z| < \frac{1}{b} \text{ και } b < 1$$

9.3 Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Z

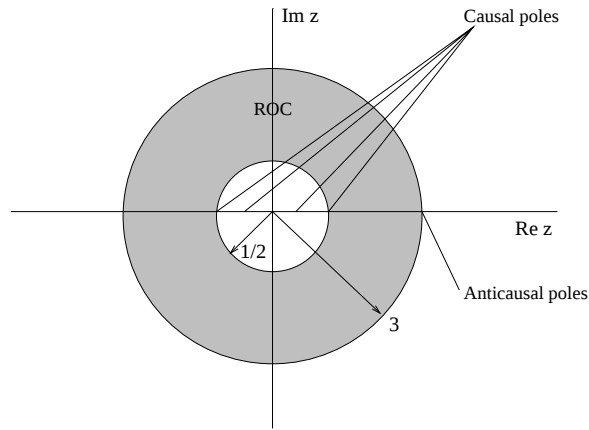
Όπως και στην περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace, για αιτιατά σήματα ο μετασχηματισμός Z γίνεται

$$X_U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad (9.5)$$

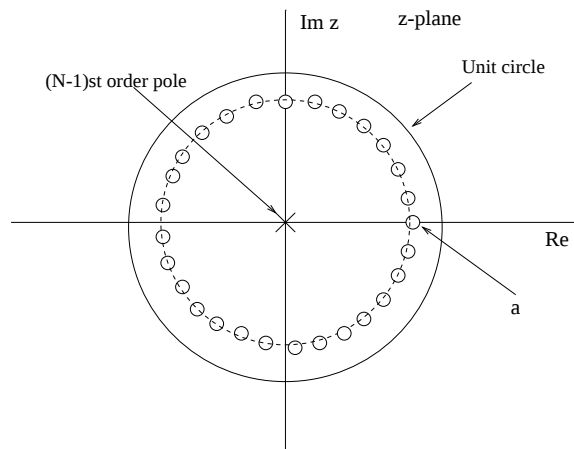
Αυτός ο ορισμός ονομάζεται *Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Z* (unilateral Z-transform).

Παράδειγμα 9.7. Εστω τα σήματα $x[n] = \delta[n]$, $x[n] = \cos \Omega_0 n$, $x[n] = \sin \Omega_0 n$. Οι μονόπλευροι μετασχηματισμοί Z αυτών δίνονται ως:

$$x[n] = \delta[n] \longleftrightarrow 1 \cdot z^0 = 1$$



Σχήμα 9.8: Πόλοι και ROC για το παράδειγμα 9.4.



Σχήμα 9.9: Pole-zero plot για το παράδειγμα 9.5.

$$x[n] = \cos \Omega_0 n = \frac{1}{2} [e^{j\Omega_0 n} + e^{-j\Omega_0 n}]$$

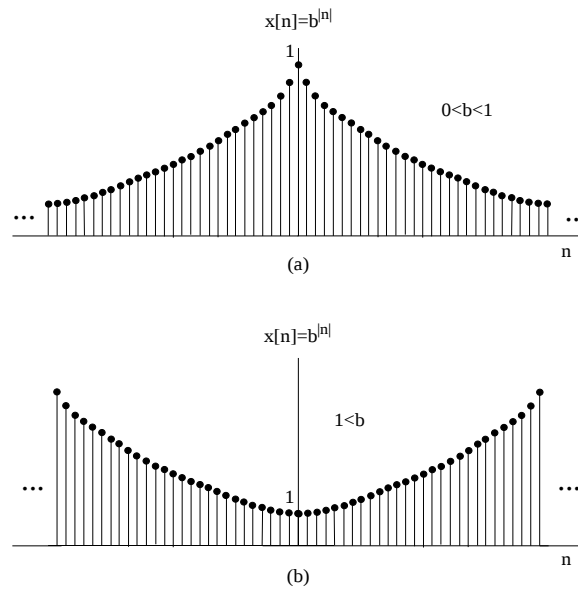
$$\Rightarrow X_U(z) = \frac{1}{z} \frac{z}{z - e^{j\Omega_0}} + \frac{1}{z} \frac{z}{z - e^{-j\Omega_0}} = \frac{z(z - \cos \Omega_0)}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}, |z| > 1$$

παρόμοια για το $x[n] = \sin \Omega_0 n$

$$X_U(z) = \frac{z \sin \Omega_0}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}, |z| > 1$$

9.4 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z

Στην παρακάτω ανάπτυξη των ιδιοτήτων, όπου δεν αναφέρεται συγκεκριμένα το είδος του μετασχηματισμού, η ιδιότητα ισχύει και για το δίπλευρο και για το μονόπλευρο μετασχηματισμό. Επίσης για $x(t) \longleftrightarrow X(z)$ θεωρείται $\text{ROC} = \mathbb{R}$.



Σχήμα 9.10: Ακολουθία $x[n]$ του παραδείγματος 9.6. (α) $|b| < 1$, (β) $|b| > 1$.

Γραμμικότητα:

$$\begin{aligned} x_1(t) &\longleftrightarrow X_1(z), \quad ROC = R_1 \\ x_2(t) &\longleftrightarrow X_2(z), \quad ROC = R_2 \end{aligned}$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longleftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z) \quad ROC \text{ περιέχει } R_1 \cap R_2 \quad (9.6)$$

Παράδειγμα 9.8.

$$\left. \begin{aligned} x_1[n] &= a^n u[n] \\ x_2[n] &= a^n u[n-1] \end{aligned} \right\} \text{ και οι δύο έχουν ROC } |z| > |a|$$

Η διαφορά των $x_1[n]$, $x_2[n]$ έχει μετασχηματισμό Z

$$a^n u[n] - a^n u[n-1] = \delta[n] \longleftrightarrow 1, \quad ROC \text{ όλος ο } z\text{-χώρος}$$

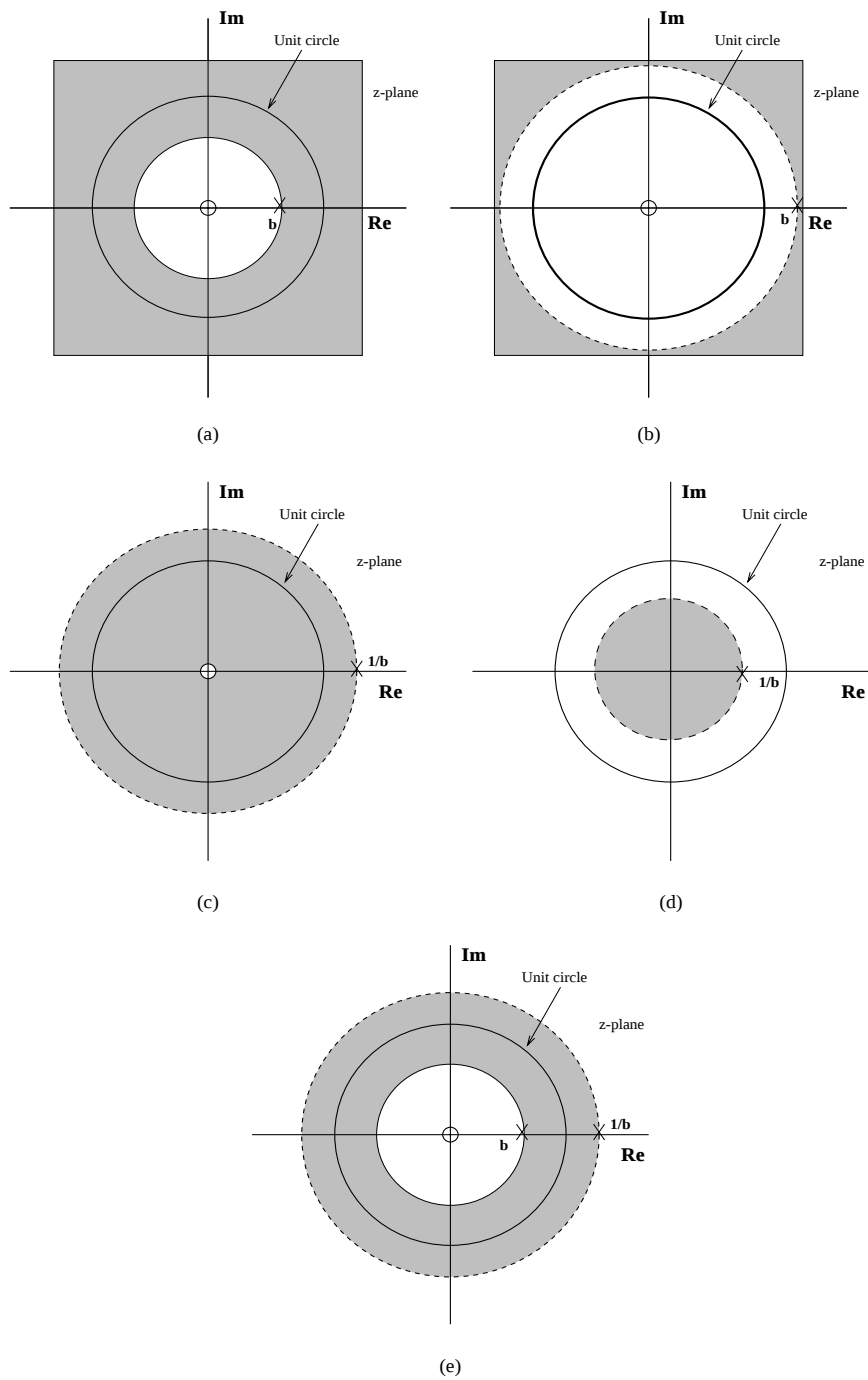
Ολίσθηση στο Χρόνο: Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Διπλευρος:

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} X_B(z), \quad \begin{aligned} &ROC=R \text{ με την πιθανή προσθήκη} \\ &\text{ή εξαίρεση της αρχής ή του άπειρου} \end{aligned} \quad (9.7)$$

Μονόπλευρος: ($n_0 > 0$)

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} \left[X_u(z) + \sum_{m=-n_0}^{-1} x[m] z^{-m} \right] \quad (9.8)$$



Σχήμα 9.11: Pole-zero plots και ROCs του παραδείγματος 9.6. Για $|b| > 1$ ο μετασχηματισμός Z δεν συγκλίνει για καμιά τιμή του z .

$$x[n + n_0] \longleftrightarrow z^{n_0} \left[X_u(z) - \sum_{m=0}^{n_0-1} x[m]z^{-m} \right] \quad (9.9)$$

Αυτή η ιδιότητα εφαρμόζεται πολύ στη λύση εξισώσεων διαφοράς.

Παράδειγμα 9.9. Να λυθεί η εξίσωση διαφοράς

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = \delta[n]$$

με αρχική συνθήκη $y[-1] = 3$.

Απάντηση: Παίρνουμε μονόπλευρο μετασχηματισμό Z και από τις δύο πλευρές της εξίσωσης

$$Y_u(z) - \frac{1}{2}z^{-1}[Y_u(z) + y[-1]z] = 1$$

και συνεπώς

$$Y_u(z) = \frac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{5}{2} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \Rightarrow y[n] = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n, \quad n \geq 0$$

Παράδειγμα 9.10. Να λυθεί η εξίσωση διαφοράς

$$y[n+2] - y[n+1] + \frac{2}{9}y[n] = u[n], \quad y[1] = -1, \quad y[0] = 1$$

Απάντηση: Παίρνουμε μονόπλευρο μετασχηματισμό Z και από τις δύο πλευρές της εξίσωσης

$$\begin{aligned} z^2[Y_u(z) - y[0] - y[1]z^{-1}] - z[Y_u(z) - y[0]] + \frac{2}{9}Y_u(z) &= X_u(z) = \frac{z}{z-1} \\ \Rightarrow Y_u(z) &= z \frac{z^2 - z + 1}{(z-1)\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{2}{3}\right)} = z \left[\frac{\frac{9}{2}}{z-1} + \frac{\frac{7}{2}}{z - \frac{1}{3}} - \frac{7}{z - \frac{2}{3}} \right] = \frac{\frac{9}{2}z}{z-1} + \frac{\frac{7}{2}z}{z - \frac{1}{3}} - \frac{7z}{z - \frac{2}{3}} \\ \Rightarrow y[n] &= \frac{9}{2}u[n] + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n u[n] - 7 \left(\frac{2}{3} \right)^n u[n] \end{aligned}$$

Ολίσθηση στη συχνότητα:

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \longleftrightarrow X(e^{-j\Omega_0} z), \quad ROC = R \quad (9.10)$$

Πολλαπλασιασμός στη συχνότητα:

$$z_0^n x[n] \longleftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad ROC = z_0 R \quad (9.11)$$

Παράδειγμα 9.11. Εστω το σήμα $y[n] = a^n \cdot \cos \Omega_0 n \cdot u[n]$. Ο μετασχηματισμός του μπορεί να υπολογιστεί ως

$$Y(z) = \frac{a^{-1}z(a^{-1}z - \cos \Omega_0)}{a^{-2}z^2 - 2a^{-1}z \cos \Omega_0 + 1}$$

Αντιστροφή στο Χρόνο: Μόνο για το διπλευρο μετασχηματισμό Z

$$x[-n] \longleftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right), \quad \text{ROC} = \frac{1}{R} = R' \text{ δηλαδή αν } z_0 \text{ στο } R \text{ τότε } \frac{1}{z_0} \text{ στο } R' \quad (9.12)$$

Παραγωγή στον z-χώρο:

$$nx[n] \longleftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} \quad (9.13)$$

και γενικότερα

$$n^k x[n] \longleftrightarrow (-z)^k \frac{d^k X(z)}{dz^k} \quad (9.14)$$

Παράδειγμα 9.12. Εστω ο μετασχηματισμός Z

$$X_B(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|$$

χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγωγής στο z-χώρο

$$nx[n] \longleftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}$$

Ξέρουμε ότι $a(-a)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{a}{1+az^{-1}}$ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ολίσθησης στον χρόνο

$$a(-a)^{n-1} u[n-1] \longleftrightarrow \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$\Rightarrow x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]$$

Συγκερασμός:

$$x_1[n] \star x_2[n] \longleftrightarrow X_1(z)X_2(z), \quad \text{ROC περιέχει } R_1 \cap R_2 \quad (9.15)$$

9.4.1 Θεωρήματα Αρχικής και Τελικής Τιμής

Όπως στο μετασχηματισμό Laplace, έτσι και στο μετασχηματισμό Z ισχύουν ανάλογα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής.

Θεώρημα Αρχικής Τιμής:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (9.16)$$

Πίνακας 9.1: Ιδιότητες Διπλευρου Μετασχηματισμού Z

Sequence	Transform	ROC
$x[n]$	$X(z)$	R_x
$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x except for the possible addition or deletion of the origin
$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\Omega_0}z)$	R_x
$z_0^n x[n]$	$X(\frac{z}{z_0})$	$z_0 R_x$
$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	Scaled version of R_x (i.e., $ a \cdot R_x =$ the set of points $\{ a z\}$ for z in R_x)
$x[-n]$	$X(z^{-1})$	Inverted R_x (i.e., $R_x^{-1} =$ the set of points z^{-1} where z is in R_x)
$w[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ for some r	$X(z^k)$	$R_x^{1/k}$ (i.e., the set of points $z^{1/k}$ where z is in R_x)
$x_1[n] \star x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R_x except for the possible addition or deletion of the origin
$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	At least the intersection of R_x and $ z > 1$

Πίνακας 9.2: Ιδιότητες Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Z

Sequence	Transform
$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)$	$a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$
$x(n - n_0)$	$z^{-n_0} \left[X(z) + \sum_{m=-n_0}^{-1} x(m) z^{-m} \right]$
$x(n + n_0)$	$z^{n_0} \left[X(z) - \sum_{m=0}^{n_0-1} x(m) z^{-m} \right]$
$a^n x(n)$	$X(a^{-1} z)$
$n x(n)$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$
$n^k x(k)$	$\left(-z \frac{d}{dz} \right)^k X(z)$
$x_1(n) \star x_2(n)$	$X_1(z) X_2(z)$

Θεώρημα Τελικής Τιμής:

$$x[N]_{N \rightarrow \infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) X_u(z) \quad (9.17)$$

Στους επόμενους δύο πίνακες 9.1,9.2 φαίνονται οι ιδιότητες για το διπλευρο και το μονόπλευρο μετασχηματισμό Z, αντίστοιχα.

Στους παρακάτω δύο πίνακες 9.3,9.4 παρατίθενται οι διπλευροι και μονόπλευροι μετασχηματισμοί z ορισμένων βασικών σημάτων, αντίστοιχα.

9.5 Γεωμετρικός Υπολογισμός του Μετασχηματισμού Fourier

Εστω

$$X(z) = G z^{(N-M)} \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)} \quad \begin{array}{l} z_i = \text{zeros} \\ p_i = \text{poles} \end{array} \quad (9.18)$$

Πίνακας 9.3: Διπλευροι Μετασχηματισμοί Z Βασικών Σημάτων

	Transform pair Signal	Transform	ROC
1.	$\delta[n]$	1	All z
2.	$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3.	$u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
4.	$\delta[n - m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5.	$\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha $
6.	$-\alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z < \alpha $
7.	$n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
8.	$-n\alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z < \alpha $
9.	$[\cos \Omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [\cos \Omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \Omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
10.	$[\sin \Omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin \Omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \Omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
11.	$[r^n \cos \Omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [r \cos \Omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \Omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12.	$[r^n \sin \Omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [r \sin \Omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \Omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$

Πίνακας 9.4: Μονόπλευροι Μετασχηματισμοί Ζ Βασικών Σημάτων

	$x[n]$ for $n \geq 0$	$X(z)$	Radius of convergence $ z > R$
1.	$\delta[n]$	1	0
2.	$\delta[n - m]$	z^{-m}	0
3.	$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$	1
4.	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	1
5.	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	1
6.	α^n	$\frac{z}{z-\alpha}$	$ \alpha $
7.	$n\alpha^n$	$\frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}$	$ \alpha $
8.	$(n+1)\alpha^n$	$\frac{z^2}{(z-\alpha)^2}$	$ \alpha $
9.	$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)\alpha^n}{m!}$	$\frac{z^{m+1}}{(z-\alpha)^{m+1}}$	$ \alpha $
10.	$\cos \Omega_0 n$	$\frac{z(z - \cos \Omega_0)}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}$	1
11.	$\sin \Omega_0 n$	$\frac{z \sin \Omega_0}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}$	1
12.	$\alpha^n \cos \Omega_0 n$	$\frac{z(z - \alpha \cos \Omega_0)}{z^2 - 2z \alpha \cos \Omega_0 + \alpha^2}$	$ \alpha $
13.	$\alpha^n \sin \Omega_0 n$	$\frac{z \alpha \sin \Omega_0}{z^2 - 2z \alpha \cos \Omega_0 + \alpha^2}$	$ \alpha $
14.	$e^{-\alpha n T}$	$\frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$	$ e^{-\alpha T} $
15.	nT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	1
16.	$nT e^{-\alpha n T}$	$\frac{T e^{-\alpha T}}{[z - e^{-\alpha T}]^2}$	$ e^{-\alpha T} $
17.	$\cos n\omega_0 T$	$\frac{z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	1
18.	$\sin n\omega_0 T$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	1
19.	$e^{-\alpha n T} \cos n\omega_0 T$	$\frac{z[z - e^{-\alpha T} \cos \omega_0 T]}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \omega_0 T + e^{-2\alpha T}}$	$ e^{-\alpha T} $
20.	$e^{-\alpha n T} \sin n\omega_0 T$	$\frac{z[z - e^{-\alpha T} \sin \omega_0 T]}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \omega_0 T + e^{-2\alpha T}}$	$ e^{-\alpha T} $

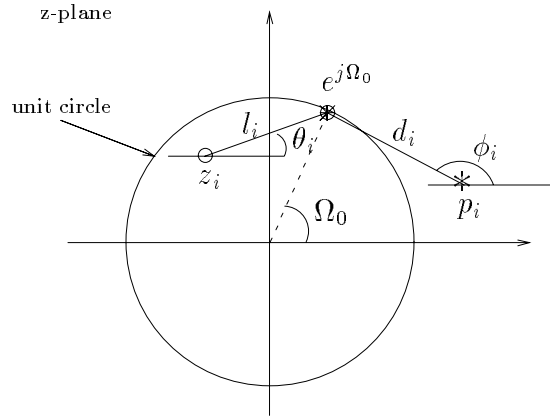
Θέτοντας $z = e^{j\Omega}$

$$X(\Omega) = G e^{j(N-M)\Omega} \frac{\prod_{i=1}^M (e^{j\Omega} - z_i)}{\prod_{i=1}^N (e^{j\Omega} - p_i)} \quad (9.19)$$

οπότε παίρνουμε για το μέτρο και τη φάση του $X(\Omega)$ (βλέπε Σχ 9.12).

$$|X(\Omega)| = |G| \frac{\prod_{i=1}^M |e^{j\Omega} - z_i|}{\prod_{i=1}^N |e^{j\Omega} - p_i|} \quad (9.20)$$

$$\begin{aligned} \angle X(\Omega) &= (N - M)\Omega + \sum_{i=1}^M \angle(e^{j\Omega} - z_i) - \sum_{i=1}^N \angle(e^{j\Omega} - p_i) \\ &= (N - M)\Omega + \sum_{i=1}^M \theta_i - \sum_{i=1}^N \phi_i \end{aligned} \quad (9.21)$$



Σχήμα 9.12: Αναπαράσταση του μέτρου και της φάσης του $X(\Omega)$ καθώς το Ω διαγράφει το μοναδιαίο κύκλο.

Καθώς το Ω καλύπτει τον μοναδιαίο κύκλο από το 0 ως το 2π , στο $\Omega = \Omega_0$, για τα $|X(\Omega)|$ και $\angle X(\Omega)$ έχουμε

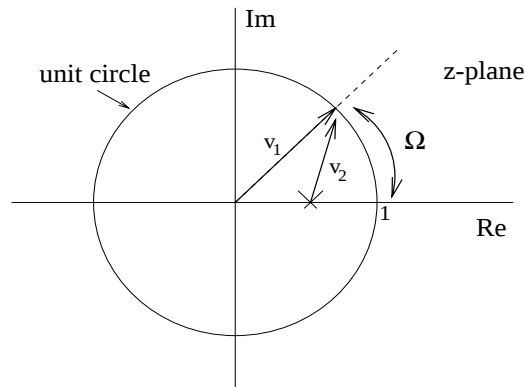
- το $|X(\Omega)|$ μπορεί να υπολογιστεί από τα l_i και d_i
- η $\angle X(\Omega)$ μπορεί να υπολογιστεί από τις γωνίες θ_i και ϕ_i

Σημείωση: Καθώς το Ω πλησιάζει ένα μηδενικό z_i , η αντίστοιχη απόσταση l_i γίνεται μικρή και δημιουργεί ένα “βύθισμα” στο $|X(\Omega)|$. Καθώς το Ω πλησιάζει ένα πόλο p_i η αντίστοιχη απόσταση d_i γίνεται μικρή και δημιουργεί μια κορυφή στο $|X(\Omega)|$. Ετσι με την παρατήρηση του pole-zero plot μπορούμε να πάρουμε προσεγγιστικά τα $|X(\Omega)|$ και $\angle X(\Omega)$ σε σχέση με τα “βυθίσματα” και τις “κορυφές”.

Παράδειγμα 9.13. Εστω το σήμα $h[n] = a^n u[n]$ με μετασχηματισμό Z

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad , \quad |z| > a$$

Τα zero και pole ανύσματα για το γεωμετρικό υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier φαίνονται στο Σχ 9.13. Τα $|X(\Omega)|$ (λογαριθμικό) και $\angle X(\Omega)$ φαίνονται στο Σχ 9.14.



Σχήμα 9.13: Zero και pole ανύσματα για το γεωμετρικό υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier για το παράδειγμα 9.13.

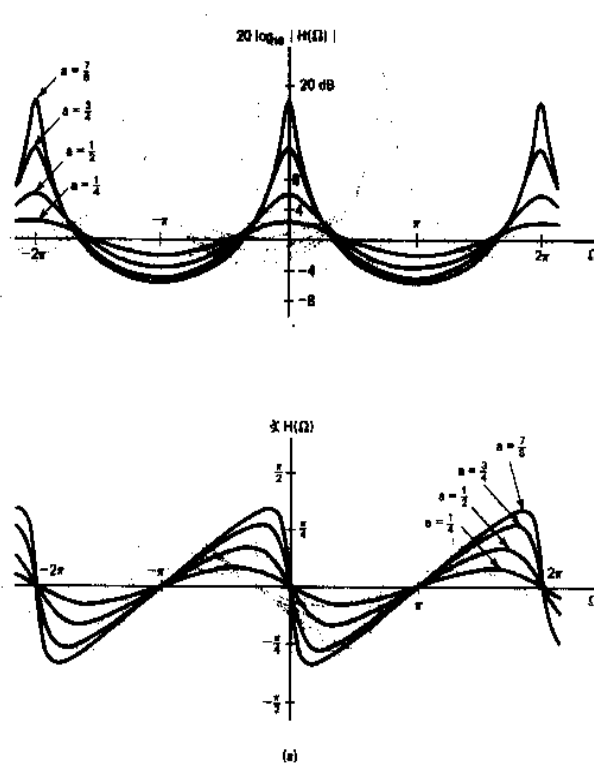
9.6 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z μπορεί να υπολογισθεί θεωρώντας το μετασχηματισμό Z σαν τον μετασχηματισμό Fourier του $x[n]r^{-n}$

$$X(re^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\} \quad (9.22)$$

παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Fourier

$$\begin{aligned} x[n]r^{-n} &= \mathcal{F}^{-1}\{X(re^{j\Omega})\} \Rightarrow \\ x[n] &= r^n \mathcal{F}^{-1}\{X(re^{j\Omega})\} \\ &= r^n \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\Omega}) (re^{j\Omega})^n d\Omega \end{aligned} \quad (9.23)$$



Σχήμα 9.14: Μέτρο και φάση του μετασχηματισμού Fourier για το παράδειγμα 9.13.

Στη παραπάνω σχέση θέλουμε να αλλάξουμε τη μεταβλητή ολοκλήρωσης ώστε να ολοκληρώνουμε ως προς z . Ισχύει $z = re^{j\Omega}$, r σταθερό, οπότε $dz = jre^{j\Omega}d\Omega = jz d\Omega$ ή $d\Omega = (\frac{1}{j})z^{-1}dz$. Εφόσον η ολοκλήρωση ως προς Ω είναι σε διάστημα 2π , στο z θα αντιστοιχεί σε μια περιστροφή γύρω από τον κύκλο $|z| = r$. Συνεπώς

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz \quad (9.24)$$

όπου το $\oint$ συμβολίζει την ολοκλήρωση κατά μήκος κλειστής κυκλικής διαδρομής με κέντρο την αρχή των αξόνων και φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Στην πράξη, συνήθως δεν υπολογίζουμε το κλειστό ολοκλήρωμα αλλά υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό χρησιμοποιώντας ανάλυση σε απλά κλάσματα και τους πίνακες μετασχηματισμών.

Παράδειγμα 9.14. Ζητείται να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z του

$$X(z) = \frac{z}{z - 0.1} \quad , \quad |z| > 0.1$$

Με διαίρεση πολωνών (αριθμητής διά παρονομαστής) παίρνουμε
Αρα

$$X(z) = 1 + 0.1z^{-1} + (0.1)^2 z^{-2} + (0.1)^3 z^{-3} + \dots$$

απ' όπου προκύπτει $x[0] = 1$, $x[1] = 0.1$, $x[2] = (0.1)^2$, $x[3] = (0.1)^3, \dots$ και συνεπώς $x[n] = (0.1)^n u[n]$.

Παράδειγμα 9.15. Ζητείται να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z του

$$X(z) = \frac{z^3 - z^2 + z - \frac{1}{16}}{z^3 - \frac{5}{4}z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{16}} , \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Γράφουμε το $X(z)$ ως

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 + \frac{\frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}z}{z^3 - \frac{5}{4}z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{16}} \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{4}z(z+2)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \left(z - \frac{1}{4}\right)} \\ &= 1 + z \left[\frac{-9}{z - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{5}{2}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{9}{z - \frac{1}{4}} \right] \\ &= 1 - 9 \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + 5 \frac{z/2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} + 9 \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \Rightarrow \end{aligned}$$

Από τη τελευταία σχέση καταλήγουμε εύκολα στην έκφραση του $x[n]$

$$x[n] = \delta[n] - 9 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 5n \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 9 \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Παράδειγμα 9.16. Να λυθεί η εξίσωση διαφοράς

$$y[n] + 3y[n-1] = u[n] \quad , \quad y[-1] = 1$$

Παίρνοντας μονόπλευρους μετασχηματισμούς Z και από τα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε

$$Y(z) + 3 + 3z^{-1}Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= -\frac{3}{1 + 3z^{-1}} + \frac{1}{(1 + 3z^{-1})(1 - z^{-1})} \\ &= -\frac{\frac{9}{4}}{1 + 3z^{-1}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - z^{-1}} = -\frac{9}{4} \frac{1}{1 - (-3)z^{-1}} + \frac{1}{4} \frac{1}{1 - z^{-1}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$y[n] = -\frac{9}{4}(-3)^n u[n] + \frac{1}{4}u[n] = \left[\frac{1}{4} - \frac{9}{4}(-3)^n \right] u[n]$$

9.7 Σχέση Μεταξύ Μετασχηματισμών Z και Laplace

Θεωρώντας τη δειγματοληψία ενός αναλογικού σήματος $x_a(t)$, ως έξοδος από τον δειγματολήπτη μπορεί να θεωρηθεί είτε το σήμα συνεχούς χρόνου $x_s(t)$ είτε το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$, όπου

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)\delta(t - nT) \quad (9.25)$$

και

$$x[n] = x_a(nT) \quad (9.26)$$

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace της πρώτης εξίσωσης έχουμε

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)e^{-nTs} \quad (9.27)$$

Θέτουμε $z = e^{Ts}$, οπότε

$$X_s(s) \big|_{z=e^{Ts}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)z^{-n} \quad (9.28)$$

Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος είναι ο μετασχηματισμός Z του $x[n]$. Έτσι, ο μετασχηματισμός Z μπορεί να θεωρηθεί ως ο μετασχηματισμός Laplace του $x_s(t)$ (σήμα που προέρχεται από τη δειγματοληψία) με την αλλαγή στη μεταβλητή $z = e^{Ts}$. Η τελευταία εξίσωση ορίζει μια απεικόνιση του s-χώρου στο z-χώρο. Έστω $s = \sigma + j\omega$ έτσι ώστε $z = e^{\sigma T}e^{j\omega T}$. Εφόσον $|z| = e^{\sigma T}$, είναι φανερό ότι αν $\sigma < 0$, $|z| < 1$. Έτσι, κάθε σημείο στον αριστερό ημιχώρο του s-χώρου απεικονίζεται σε κάποιο σημείο εσωτερικά του μοναδιαίου κύκλου στο z-χώρο. Παρόμοια, για $\sigma > 0$, $|z| > 1$ έτσι ώστε κάθε σημείο στο δεξί ημιχώρο του s-χώρου απεικονίζεται σε κάποιο σημείο εξωτερικά του μοναδιαίου κύκλου στο z-χώρο. Για $\sigma = 0$, $|z| = 1$ έτσι ώστε ο $j\omega$ -άξονας στον s-χώρο απεικονίζεται στο μοναδιαίο κύκλο στο z-χώρο. Η αρχή του s-χώρου αντιστοιχεί στο $z = 1$.

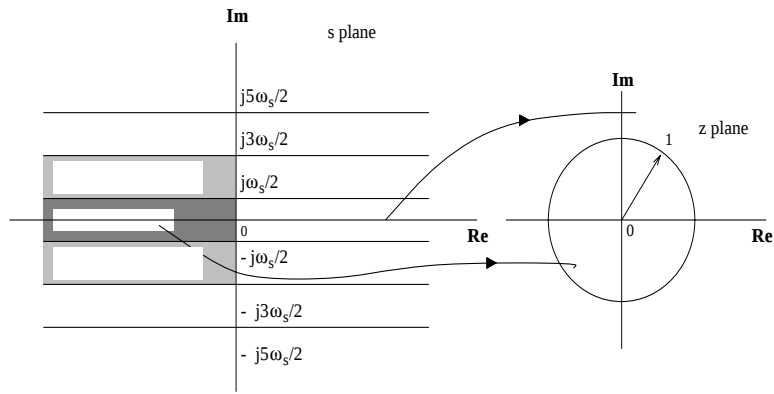
Επιπλέον αν θεωρήσουμε το σύνολο των σημείων s_k που απέχουν κάθετα από κάποιο σημείο s^* ένα πολλαπλάσιο της συχνότητας δειγματοληψίας $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

$$s_k = s^* + jk\omega_s \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.29)$$

Τότε παίρνουμε

$$z_k = e^{Ts_k} = e^{T(s^* + jk\omega_s)} = e^{Ts^*} = z^* \quad (9.30)$$

Αρα, τα σημεία s_k απεικονίζονται στο ίδιο $z^* = e^{Ts^*}$ στο z-χώρο. Μπορούμε λοιπόν να χωρίσουμε τον s-χώρο σε οριζόντιες ζώνες, κάθε μία πλάτους ω_s . Κάθε μία από αυτές τις ζώνες απεικονίζεται σε ολόκληρο το z-χώρο. Τα παραπάνω συνοψίζονται στο Σχ 9.15 το οποίο δείχνει



Σχήμα 9.15: Απεικόνιση του s-χώρου στο z-χώρο με το μετασχηματισμό $z = e^{Ts}$.

την απεικόνιση του s-χώρου στο z-χώρο.

Σημείωση: Το γεγονός ότι η απεικόνιση του s-χώρου στο z-χώρο δεν είναι αμφιμονοσήμαντη (το ίδιο σημείο στον z-χώρο αντιστοιχεί σε πολλά σημεία στον s-χώρο) είναι απόρροια του γεγονότος ότι μπορούμε να συσχετίσουμε περισσότερα του ενός αναλογικά σήματα σε ένα δοσμένο σύνολο από τιμές δειγματοληψίας.

9.8 Σχέση Μεταξύ Μετασχηματισμών Z και DFT

Για μια ακολουθία N σημείων

$$x[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9.31)$$

οι μετασχηματισμοί DFT και Z δίνονται αντίστοιχα ως

$$\text{DFT: } \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (9.32)$$

$$\text{Z: } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \quad (9.33)$$

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις εύκολα καταλήγουμε στη

$$\tilde{X}[k] = X(z) \Big|_{z=e^{jk(2\pi/N)}} \quad (9.34)$$

Δηλαδή, ο DFT είναι ο μετασχηματισμός Z υπολογισμένος σε N ισαπέχοντα σημεία πάνω στο μοναδιαίο κύκλο στο z-χώρο.

Βιβλιογραφία

- [1] Ν. Καλουπτοΐδης, “Σήματα, Συστήματα και Αλγόριθμοι,” Δίαυλος, Αθήνα 1993.
- [2] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky and I.T. Young, “Signals and Systems,” Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J., 1983.
- [3] S.S. Soliman and M.D. Srinath, “Continuous and Discrete Signals and Systems,” Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J., 1990.
- [4] S.B. Maurer and A. Ralston, “Discrete Algorithmic Mathematics,” Addison-Wesley, Reading MA, 1991.
- [5] P.A. Lynn and W.Fuerst, “Introductory Digital Signal Processing with Computer Applications,” J. Willey, Great Britain, 1989.
- [6] O.E. Brigham, “The Fast Fourier Transform and its Applications,” Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J., 1988.
- [7] A.D. Poularikas and S. Seely, “Signals and Systems,” 2nd Ed., PWS-KENT Publ., Boston MA, 1990.
- [8] A.V. Oppenheim and R.W. Schafer, “Discrete-Time Signal Processing,” Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J., 1989.
- [9] A. Papoulis, “The Fourier Integral and its Applications,” McGraw-Hill, New York, 1962.
- [10] A.K. Jain, “Fundamentals of Digital Image Processing,” Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J., 1989.
- [11] R.C. Gonzalez and R.E. Woods, “Digital Image Processing,” Addison-Wesley, Reading MA, 1992.