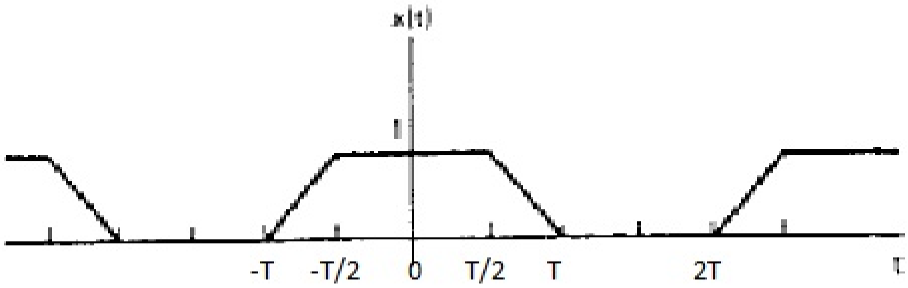
ΗΥ215 - Φροντιστήριο : Επαναληπτικό προ τελικού

Επιμέλεια: Γιώργος Καφεντζής

4-6-2011

1. Βρείτε το ανάπτυγμα σε εκθετική σειρά Fourier του παρακάτω σήματος:



<u>Λύση:</u>

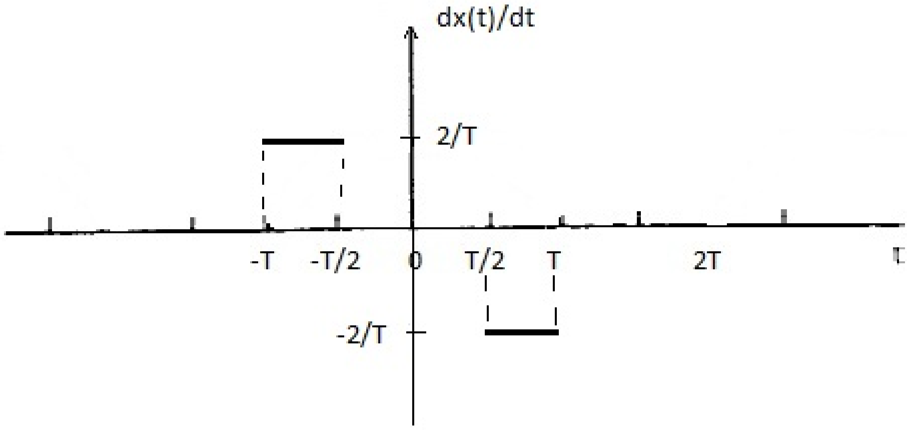
Ο αναλυτικός υπολογισμός της σειράς μέσω των τύπων είναι χρονοβόρος. Μπορούμε να πάμε μέσω του Μετασχ. Fourier. Γνωστό θεώρημα λέει ότι η εύρεση των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier μπορεί να γίνει μέσω του μετασχ. Fourier σε μια περίοδο, δηλ.

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_{T_0}(f)\Big|_{f=\frac{k}{T_0}}$$

όπου $X_{T_0}(f)$ είναι ο μετασχ. Fourier του σήματος σε μια περίοδο (δηλ. θεωρούμε το σήμα ως μη περιοδικό, κρατώντας μόνο μια περίοδό του). Προφανώς η περίοδος του σήματος είναι $T_0 = 3T$. Έστω $x_{T_0}(t)$ η μια περίοδος του $x(t)$. Ο μετασχ. Fourier αυτού του σήματος μπορεί να υπολογιστεί αρκετά εύκολα μέσω της ιδιότητας των παραγώγων:

$$F\{\frac{dx_{T_0}(t)}{dt}\} \leftrightarrow j2\pi f X_{T_0}(f)$$

Παραγωγίζοντας λοιπόν το σήμα, παίρνουμε το παρακάτω σήμα:



Αυτο μπορει να γραφεί ως:

$$\frac{dx_{T_0}(t)}{dt} = \frac{2}{T}rect(\frac{t+\frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}}) - \frac{2}{T}rect(\frac{t-\frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}}) \leftrightarrow$$

$$F\{\frac{dx_{T_0}}{dt}\} = \frac{T}{2}\frac{2}{T}sinc(\frac{fT}{2})e^{j2\pi\frac{3T}{4}f} - \frac{T}{2}\frac{2}{T}sinc(\frac{fT}{2})e^{-j2\pi\frac{3T}{4}f} =$$

$$= sinc(\frac{fT}{2})(e^{j2\pi\frac{3T}{4}f} - e^{-j2\pi\frac{3T}{4}f}) = sinc(\frac{fT}{2})2j\sin(2\pi\frac{3T}{4}f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow j2\pi fX(f) = sinc(\frac{fT}{2})2j\sin(2\pi\frac{3T}{4}f) \Leftrightarrow X(f) = \frac{\sin(\pi\frac{3T}{2}f)}{\pi f}sinc(\frac{fT}{2}) \Leftrightarrow$$

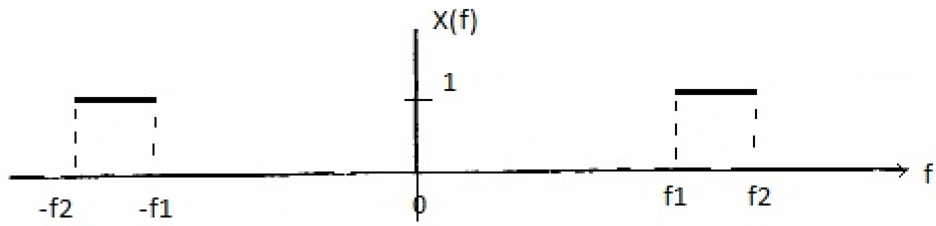
$$\Leftrightarrow X(f) = \frac{3T}{2}sinc(\frac{3T}{2}f)sinc(\frac{fT}{2}).$$

Άρα τελικά $X_k = \frac{1}{T_0}X_{T_0}(f)\Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{2}sinc(\frac{k}{2})sinc(\frac{k}{6})$.
Οπότε η εκθετική σειρά Fourier μπορεί να γραφεί ως εξής:

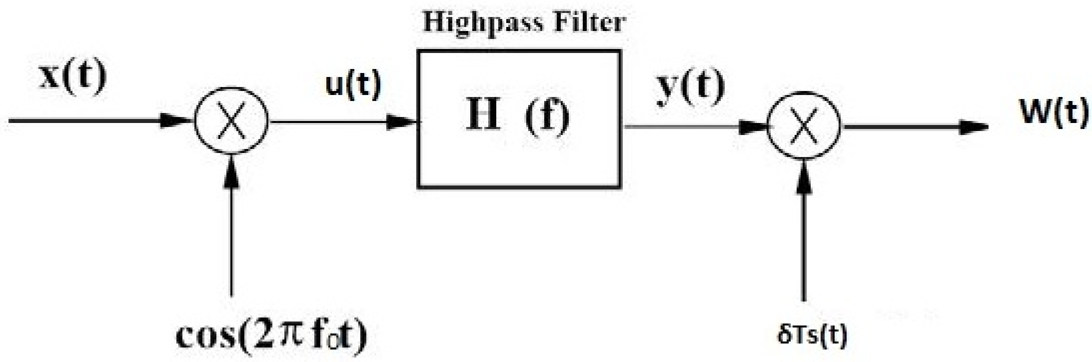
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi\frac{k}{3T}t} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} sinc(\frac{k}{2})sinc(\frac{k}{6})e^{j2\pi\frac{k}{3T}t}$$

που είναι και το ζητούμενο.

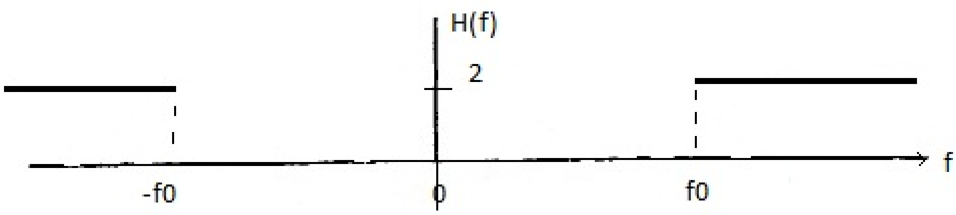
2. Έστω πραγματικό σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier όπως στο παρακάτω σχήμα:



Το σήμα αυτό περνάει από το παρακάτω σύστημα:



με το $H(f)$ όπως στο παρακάτω σχήμα:



και $\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$

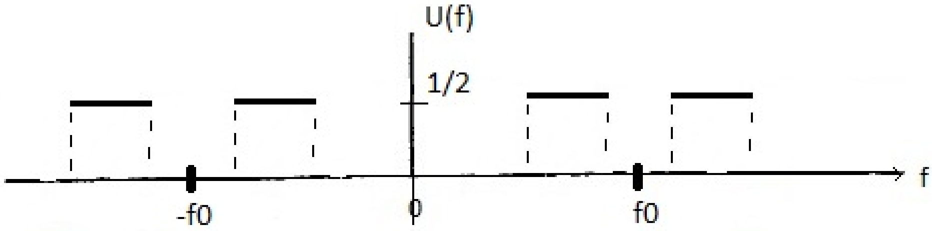
α) Βρείτε το $y(t)$ μέσω του $Y(f)$

β) Βρείτε το $w(t)$ και σχεδιάστε το φάσμα του. Ποιά γνωστή σας διαδικασία σας θυμίζει η κατασκευη του $w(t)$;

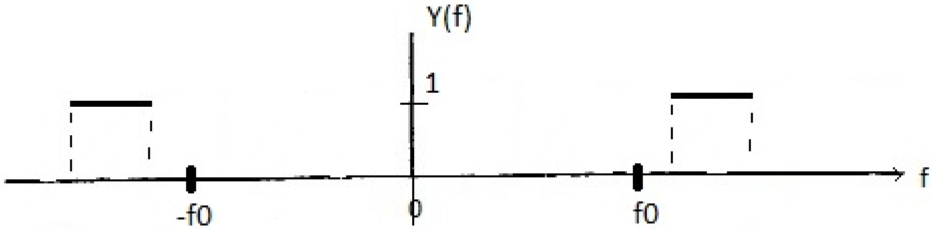
γ) Βρείτε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας f_s για να μπορεί να ανακατασκευαστεί το $y(t)$ από το $w(t)$.

Λύση:

α) Είναι $u(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow U(f) = X(f) * (\frac{1}{2}\delta(f+f_0) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0)) \Leftrightarrow U(f) = \frac{1}{2}X(f+f_0) + \frac{1}{2}X(f-f_0)$, από γνωστή ιδιότητα της συνέλιξης σήματος με συναρτήσεις δέλτα. Το παραπάνω λέει ουσιαστικά ότι το φάσμα του $U(f)$ αποτελείται απ'το φάσμα του $X(f)$ μετατοπισμένο γύρω απ'τη συχνότητα $f = -f_0$ ($X(f+f_0)$) και γύρω απ'τη συχνότητα $f = f_0$ ($X(f-f_0)$), με πλάτος 1/2 το καθένα. Σχηματικά, φαίνεται παρακάτω:



Ο πολλαπλασιασμός των δυο σημάτων, $U(f)$ και $H(f)$, στη συχνότητα θα μας δώσει το $Y(f)$ όπως φαίνεται παρακάτω:



Πρέπει να βρούμε τώρα το $Y(f)$. Υπάρχουν δυο τρόποι για να το κάνουμε αυτό.

<u>1ος τρόπος:</u>

Παρατηρούμε ότι το φάσμα αποτελείται από 2 παράθυρα, που έχουν κέντρο τη συχνότητα $f_c = \pm(f_0 + \frac{f_1+f_2}{2})$. Άρα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $x(t)e^{\pm j2\pi f_c t} \leftrightarrow X(f \mp f_c)$, θα έχουμε ότι:

$$Y(f) = rect\Big(\frac{f+f_c}{f_2-f_1}\Big) + rect\Big(\frac{f-f_c}{f_2-f_1}\Big) \leftrightarrow$$

$$y(t) = (f_2-f_1)sinc((f_2-f_1)t)e^{-j2\pi f_c t} + (f_2-f_1)sinc((f_2-f_1)t)e^{j2\pi f_c t}$$

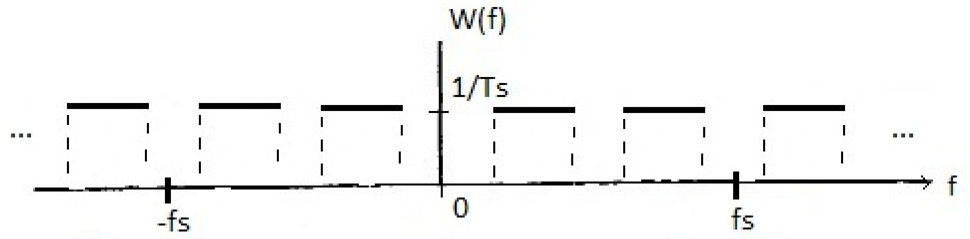
<u>2ος τρόπος:</u>

Ένας δεύτερος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι τα δυο παράθυρα μπορούν να προκύψουν αν θεωρήσουμε ένα μεγάλο παράθυρο που ξεκινάει από το $-f_0 - f_2$ και τελειώνει στο $f_0 + f_2$, και από αυτό να αφαιρέσουμε ένα λίγο μικρότερο, που ξεκινάει από το $-f_0 - f_1$ και τελειώνει στο $f_0 + f_1$. Αυτό θα μας δώσει:

$$Y(f) = rect\Big(\frac{f}{2(f_0+f_2)}\Big) - rect\Big(\frac{f}{2(f_0+f_1)}\Big) \leftrightarrow$$

$$y(t) = 2(f_0+f_2)sinc(2(f_0+f_2)t) - 2(f_0+f_1)sinc(2(f_0+f_1)t)$$

β) Είναι $w(t) = \delta_{T_s}(t)y(t) = y(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}y(kT_s)\delta(t-kT_s)$. Ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος με μια άπειρη σειρά από συναρτήσεις δέλτα, οι οποίες ισαπέχουν μεταξύ τους κατά χρόνο T_s, είναι η γνωστή μας διαδικασία της δειγματοληψίας. Περίοδος δειγματοληψίας είναι η T_s και συχνότητα δειγματοληψίας η $f_s = \frac{1}{T_s}$. Για να βρούμε το φάσμα, έχουμε: $W(f) = Y(f) * F\{\delta_{T_s}(t)\} = Y(f) * \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f-kf_s) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}Y(f-kf_s)$, λόγω της γνωστής ιδιότητας $X(f)*\delta(f-f_0) = X(f-f_0)$. Αυτό μας λέει ότι το φάσμα του $W(f)$ είναι το φάσμα του $Y(f)$ επαναλαμβανόμενο γύρω από τις συχνότητες kf_s, που θα μπορούσαμε να το εξάγουμε κατέυθείαν από τη θεωρία μας σχετικά με τη δειγματοληψία - απλά εδώ το δείξαμε και με μαθηματικά. Αν το f_s είναι αρκετά μεγάλο, τότε το φάσμα θα είναι όπως στο παρακάτω σχήμα:



γ) Σύμφωνα με το θεώρημα του Shannon, για να μπορεί να ανακατασκευαστεί ένα σήμα από τη δειγματοληπτημένη μορφή του, θα πρέπει η συχνότητα δειγματοληψίας να είναι μεγαλύτερη από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα του σήματος που πρόκειται να δειγματοληπτηθεί. Αν κοιτάξουμε το φάσμα του $Y(f)$, βλέπουμε ότι η μέγιστη συχνότητά του είναι η $f_{max} = f_0 + f_2$. Άρα η f_s πρέπει να είναι γνήσια μεγαλύτερη με $2(f_0+f_2)$, για να μπορεί να ανακτηθεί το σήμα από τα δείγματά του. Άρα πρέπει $f_s > 2(f_0+f_2)$.

3. Έστω $H(s) = \dfrac{2s^2 e^{-2s}}{(s-2)(s-3)}$, το οποίο έχει αντίστρ. μετασχ. Laplace ένα $h(t)$ που είναι αμφίπλευρο σήμα. Βρείτε την περιοχή σύγκλισης και το $h(t)$.

Λύση:

Αφού το $H(s)$ είναι αμφίπλευρο και έχει πόλους, το πεδίο σύγκλισής του θα είναι μια "λωρίδα"στο μιγαδικό επίπεδο. Οι πόλοι είναι στις θέσεις $s = 2, s = 3$, άρα το πεδίο σύγκλισης (από τα 3 πιθανά) θα είναι το $ROC : 2 < \Re\{s\} < 3$.

Είναι $H(s) = \dfrac{2s^2 e^{-2s}}{(s-2)(s-3)} = \dfrac{2s^2}{(s-2)(s-3)} e^{-2s} = 2G(s)e^{-2s} \leftrightarrow h(t) = 2g(t-2)$, με $G(s) = \dfrac{s^2}{(s-2)(s-3)}$.

Οπότε αρκεί να βρούμε το $g(t)$ και να αντικαταστήσουμε. Θα κάνουμε ανάλυση σε μερικά κλάσματα στο $G(s)$ λοιπόν. Παρατηρώντας το $G(s)$, βλέπουμε ότι ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι ίσος με τον βαθμό του αριθμητή, άρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αμέσως ανάλυση σε μερικά κλάσματα. Για να γίνει αυτό, πρέπει να έχουμε βαθμό πολυωνύμου παρονομαστή $>$ βαθμό πολυωνύμου αριθμητή. Για να έρθουμε σε μια τέτοια περίπτωση, θα κάνουμε διαίρεση των πολυωνύμων. Οπότε θα έχουμε:

$G(s) = \dfrac{s^2}{(s-2)(s-3)} = 1 + \dfrac{5s-6}{(s-2)(s-3)} = 1 + \dfrac{A}{s-2} + \dfrac{B}{s-3}$,

με $A = \dfrac{5s-6}{(s-2)(s-3)}(s-2)\Big|_{s=2} = -4$ και

$B = \dfrac{5s-6}{(s-2)(s-3)}(s-3)\Big|_{s=3} = 9$, άρα τελικά: $G(s) = 1 - \dfrac{4}{s-2} + \dfrac{9}{s-3}$.

Ξέρουμε ότι $2 < \Re\{s\} < 3 \Leftrightarrow \Re\{s\} > 2$ και $\Re\{s\} < 3$.

Προφανώς το πρώτο πεδίο αντιστοιχεί στον πρώτο όρο και το δεύτερο πεδίο στο δεύτερο όρο. Κοιτώντας τους πίνακες με τα ζεύγη των μετασχ. Laplace, καταλήγουμε ότι:

$$G(s) = 1 - \frac{4}{s-2} + \frac{9}{s-3} \leftrightarrow g(t) = \delta(t) - 4e^{2t}\epsilon(t) - 9e^{3t}\epsilon(-t).$$

Οπότε τελικά θα έχουμε:

$$h(t) = 2g(t-2) = 2\delta(t-2) - 8e^{2(t-2)}\epsilon(t-2) - 18e^{3(t-2)}\epsilon(t-2)$$

που είναι το ζητούμενο.

4. Έστω $h(t)$ πραγματικό σήμα, που έχει ρητό μετασχ. Laplace με 4 πόλους εκ των οποίων ένας είναι στο $s_1 = -1 + j$, και δυο στο $s_2 = 2$. Επίσης, έχει δυο μηδενικά στο $s_0 = 1$. Τέλος, γνωρίζουμε οτι $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = 1$. Να βρεθούν:

   α) το $H(s)$.

   β) τα πιθανά πεδία σύγκλισης.

   γ) το $h(t)$, αν γνωρίζετε ότι το $h(t)e^{4t}$ ΕΙΝΑΙ απολύτως ολοκληρώσιμο.

   δ) πότε το $H(s)$ είναι ευσταθές;

<u>Λύση:</u>

Δική σας. :-)