ΗΥ215 - Φροντιστήριο : Μετασχηματισμός Laplace

Επιμέλεια: Γιώργος Καφεντζής

19-5-2011

1. Για ένα σήμα και το μετασχ. Laplace του γνωρίζετε ότι:

   (α′) το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό και άρτιο

   (β′) έχει 4 πόλους και κανένα μηδενικό στο μιγαδικό επίπεδο

   (γ′) ένας πόλος βρίσκεται στο $s = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$

   (δ′) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 4$

   Βρείτε το $X(s)$.

   Λύση:

   Προφανώς το $X(s)$ θα είναι της μορφής:

$$X(s) = \frac{A}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}$$

   Δίδεται όμως ότι το σήμα είναι πραγματικό και άρτιο, άρα θα είναι $x(t) = x^*(t) \leftrightarrow X(s) = X^*(s^*)$ και $x(t) = x(-t) \leftrightarrow X(s) = X(-s)$. Άρα αν έχει έναν πόλο στη θέση s_k, θα έχει επίσης έναν πόλο στη θέση $-s_k$ (από τη σχέση του άρτιου σήματος). Όμοια, αν έχει έναν πόλο στη θέση $-s_k$ θα έχει επίσης έναν πόλο στη θέση $-s_k^*$ (από τη σχέση του πραγματικού σήματος). Γνωρίζουμε ότι έχει έναν πόλο s_1, άρα θα έχει κι έναν $-s_1$, κι έναν $-s_1^*$ και έναν s_1^*. Οπότε το σήμα θα γράφεται:

$$X(s) = \frac{A}{(s-s_1)(s-s_1^*)(s+s_1)(s+s_1^*)}$$

Μένει να βρούμε το A. Δίνεται ότι $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 4$. Όμως ξέρουμε ότι $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-0t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$. Άρα $X(0) = 4 = \frac{A}{(0-s_1)(0-s_1^*)(0+s_1)(0+s_1^*)} = \frac{A}{|s_1|^2|s_1|^2} = \frac{A}{\frac{1}{4}\frac{1}{4}} = \frac{A}{\frac{1}{16}} \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

2. Σας δίνονται τα παρακάτω στοιχεία για ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ και το μετασχ. Laplace του.

   (α′) Το $X(s)$ έχει ακριβώς δυο πόλους

   (β′) Το $X(s)$ δεν έχει κανένα μηδενικό

   (γ′) Το $X(s)$ έχει πόλο στο $s = -1 + j$

   (δ′) Το $e^{2t}x(t)$ δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο

   (ε′) $X(0) = 8$

   Βρείτε το $X(s)$ και την περιοχή σύγκλισης.

   Λύση: Λύστε το! :-)

   Hint: Βρείτε πρώτα τη μαθηματική μορφή του $X(s)$. Βρείτε τα πιθανά πεδία σύγκλισης. Τέλος, το (δ′) στοιχείο αξιοποιήστε το για να βρείτε το πεδίο σύγκλισης. Ερμηνεύστε σωστά τι σημαίνει το $e^{2t}x(t)$ δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο.