ΗΥ215 - Φροντιστήριο : Εισαγωγικά

Επιμέλεια: Γιώργος Καφεντζής

24-2-2011

Ας κάνουμε μια πολύ γρήγορη επανάληψη στους μιγαδικούς αριθμούς όπως τους γνωρίζουμε ήδη, και ας δούμε και μερικές γνωστές ταυτότητες που είδαμε στο μάθημα:

- Έστω ο μιγαδικός $z = x + jy$, με $x, y \in \Re$. Το x λέγεται πραγματικό μέρος και συμβολίζεται ως $Re\{z\}$ και το y λέγεται φανταστικό μέρος και συμβολίζεται ως $Im\{z\}$.

- Η παραπάνω μορφή του μιγαδικού z είναι γνωστή ως καρτεσιανή μορφή. Μια άλλη μορφή, που θα μας είναι ΠΟΛΥ χρήσιμη για τους σκοπούς μας, είναι η περίφημη πολική μορφή (polar form). Αυτή ορίζεται ως:

  $$z = |z|e^{j\phi}, \text{ όπου } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ και } \phi = \tan^{-1}(\tfrac{y}{x})$$

  Όπως είναι προφανές, το $|z|$ πρέπει να είναι πάντα θετικός αριθμός. Για παράδειγμα, η παράσταση $z = -3e^{j\frac{\pi}{4}}$ ΔΕΝ είναι γραμμένη σε πολική μορφή - βρείτε εσείς πώς πρέπει να γραφεί για να είναι σε πολική μορφή.
  Επίσης, η φάση εκφράζεται συνήθως στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

- Σχέσεις του Euler:

  1. $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$
  2. $\cos(\theta) = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$
  3. $\sin(\theta) = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

  Αυτές οι σχέσεις μετατρέπουν ημίτονα/συνημίτονα σε εκθετικά, και αντίστροφα βέβαια, και θα μας απασχολήσουν αρκετά στο μάθημα.

1. Θεωρήστε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = 1 + j, w = -1 + j, v = -1 - j, u = 1 - j$.

α) Βρείτε το μέτρο και τη φάση καθενός, και γράψτε τους σε πολική μορφή.

β) Βρείτε τον αριθμό $z + w + u + v$.

γ) Βρείτε τα $z/w, w/v, u/z$. Βρείτε το πραγματικό και φανταστικό τους μέρος, καθώς και το μέτρο και τη φάση τους.

δ) Η φάση ενός μιγαδικού αριθμού είναι σημαντική μόνον όταν το μέτρο του μιγαδικού είναι σημαντικό. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z και ο μιγαδικός αριθμός $y = 10^{-6}z$. Συγκρίνετε το μέτρο και τη φάση τους. Τι έχετε να πείτε για τη φάση του y;

Λύση:

α) Για τον z, θα είναι:

$z = 1+j \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ και $\phi = \tan^{-1}(\frac{1}{1}) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$. Άρα θα είναι $z = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$.

Για τον w, θα είναι:

$w = -1+j \Rightarrow |w| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ και $\phi = \tan^{-1}(\frac{1}{-1}) = \tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$. Άρα θα είναι $w = \sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$.

Για τον v, θα είναι:

$v = -1-j \Rightarrow |v| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ και $\phi = \tan^{-1}(\frac{-1}{-1}) = \tan^{-1}(1) = \frac{5\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4}$. Άρα θα είναι $v = \sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}}$.

Για τον u, θα είναι:

$u = 1-j \Rightarrow |u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ και $\phi = \tan^{-1}(\frac{-1}{1}) = \tan^{-1}(-1) = \frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$. Άρα θα είναι $u = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$.

Σημείωση:

Οι μιγαδικοί z, v και w, u έχουν την ίδια φάση, όσον αφορά το αποτέλεσμα της αντίστροφης εφαπτομένης ($\tan^{-1}(1)$ και $\tan^{-1}(-1)$ αντίστοιχα). Όμως κάθε ένας από αυτούς τους μιγαδικούς έχει διαφορετικές φάσεις ως γωνίες στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Γιατί συμβαίνει αυτό;

Αυτό προκύπτει από το πραγματικό και το φανταστικό τους μέρος. Γνωρίζετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο, ο οριζόντιος άξονας είναι το πραγματικό μέρος και ο κατακόρυφος άξονας είναι το φανταστικό μέρος. Έτσι λοιπόν, ο μιγαδικός z τοποθετείται κάπου κοντά και έξω απ'το μοναδιαίο κύκλο (αφού έχει ακτίνα $\sqrt{2} > 1$), στο 1ο τεταρτημόριο του επιπέδου, αφού τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό του μέρος είναι θετικά. Βρίσκουμε λοιπόν ότι η φάση εκεί είναι $\frac{\pi}{4}$.

Αντίστοιχα, ο μιγαδικός v έχει τόσο στο πραγματικό όσο και στο φανταστικό μέρος του αρνητικές τιμές. Άρα θα βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο. Δε θα μπορούσε τότε να έχει φάση $\frac{\pi}{4}$, αλλά θα έχει εκείνη που αντιστοιχεί σε αυτό το τεταρτημόριο, που είναι η $\frac{5\pi}{4}$, αλλά επειδή θέλουμε τη φάση στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, τη μετατρέπουμε σε $-\frac{3\pi}{4}$, που ουσιαστικά είναι η ίδια γωνία.

Όμοια σκεφτόμαστε και για τους άλλους μιγαδικούς.

β) Είναι $z + w + v + u = 1 + j - 1 + j - 1 - j + 1 - j = 0$.

γ) Είναι $z/w = \frac{1+j}{-1+j} = \frac{(1+j)(-1-j)}{(-1+j)(-1-j)} = \frac{(1+j)(-1-j)}{|-1+j|^2} = \frac{-2j}{2} = -j$, άρα το πραγματικό μέρος του είναι 0 και το φανταστικό μέρος του είναι -1 (όχι $-j$!). Η πολική μορφή βρίσκεται πολύ εύκολα, καθώς το $-j = \cos(-\pi/2) + j\sin(-\pi/2) = 0 - j\sin(\pi/2)$ μπορεί να γραφεί ως $e^{-j\frac{\pi}{2}}$, από τη σχέση του Euler.

Είναι $w/v = \frac{-1+j}{-1-j} = \frac{(-1+j)(-1+j)}{(-1-j)(-1+j)} = \frac{(-1+j)^2}{|-1-j|^2} = \frac{-2j}{2} = -j$, άρα το πραγματικό μέρος του είναι 0 και το φανταστικό μέρος του είναι -1. Η πολική μορφή βρίσκεται επίσης πολύ εύκολα, καθώς το $-j$ μπορεί να γραφεί ως $e^{-j\frac{\pi}{2}}$, από τη σχέση του Euler.

Είναι $u/z = \frac{1-j}{1+j} = \frac{(1-j)(1-j)}{(1-j)(1+j)} = \frac{(1-j)^2}{|1+j|^2} = \frac{-2j}{2} = -j$, άρα το πραγματικό μέρος του είναι 0 και το φανταστικό μέρος του είναι -1. Η πολική μορφή είναι ξανά $e^{-j\frac{\pi}{2}}$, από τη σχέση του Euler.

δ) Η φάση του z είναι, όπως είδαμε, $\angle z = \frac{\pi}{4}$. Για τον y έχουμε: $y = 10^{-16}z = 10^{-16}\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$. Προφανώς το μέτρο του y είναι μικρότερο απ'το μέτρο του z. Η φάση του y είναι ίδια με του z αλλά με πολύ μικρότερο μέτρο, οπότε είναι και λιγότερο σημαντική.

2. Θεωρήστε τη συνάρτηση του $z = 1 + j$, $w = e^z$.

   α) Βρείτε το $\log(w)$, καθώς και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του w.

   β) Βρείτε το $w + w^*$.

   γ) Βρείτε το $|w|$ (μέτρο) και το $\angle w$ (φάση).

   δ) Βρείτε το $\cos(1)$ συναρτήσει του w με χρήση των εξισώσεων του Euler.

Λύση:

α) Είναι $\log(w) = \log(e^z) = \log(e^{1+j}) = \log(ee^j) = \log(e) + \log(e^j) = 1 + j\log(e) = 1 + j$. Επίσης είναι $w = e^z = e^{1+j} = ee^j = e(\cos(1) + j\sin(1)) = e\cos(1) + je\sin(1)$. Άρα το πραγματικό μέρος είναι ίσο με $e\cos(1)$ και το φανταστικό μέρος ίσο με $e\sin(1)$.

β) Είναι $w + w^* = 2Re\{w\} = 2e\cos(1)$.

γ) Είναι $|w| = e$, προφανώς, αφού $w = ee^j$, και άρα $\angle w = 1$.

δ) Από β) ερώτημα, έχουμε $\cos(1) = \frac{w+w^*}{2e}$.

3. α) Βρείτε την τριγωνομετρική ταυτότητα του $\sin^2(\theta)$ με χρήση των ταυτότητων του Euler.
β) Υπολογίστε το $\int_0^1 \sin^2(2\pi t)dt$.

Λύση:

α) Είναι:

$$\sin^2(\theta) = (\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j})^2 = \frac{(e^{j\theta} - e^{-j\theta})^2}{4j^2} = \frac{e^{j2\theta} - 2e^{j\theta}e^{-j\theta} + e^{-j2\theta}}{4j^2} = -\frac{e^{j2\theta} - 2 + e^{-j2\theta}}{4} =$$
$$-\frac{e^{j2\theta} + e^{-j2\theta} - 2}{4} = -\frac{e^{j2\theta} + e^{-j2\theta}}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}.$$

β) Είναι:

$$\int_0^1 \sin^2(2\pi t)dt = \int_0^1 \frac{1 - \cos(4\pi t)}{2}dt = \int_0^1 \frac{1}{2}dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(4\pi t)dt =$$
$$= \frac{t}{2}|_0^1 - \frac{1}{8\pi}\sin(4\pi t)|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8\pi}(\sin(4\pi) - \sin(0)) = \frac{1}{2},$$

γιατί προφανώς τα παραπάνω ημίτονα έχουν τιμή μηδέν.

4. Να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος

$$x(t) = 2 + \cos(2\pi t) - \sin(\pi t) - 3\cos(3\pi t).$$

Λύση:

Θα χρειαστούμε τις ταυτότητες:

$\sin(\theta) = \cos(\theta - \pi/2)$,

$-\sin(\theta) = \cos(\theta + \pi/2)$ και

$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$.

Θα μετατρέψουμε τα sin σε cos και θα φροντίσουμε τα πρόσημα να είναι όλα θετικά, εισάγοντας όπου χρειάζεται την κατάλληλη φάση.

Είναι: $x(t) = 2 + \cos(2\pi t) - \sin(\pi t) - 3\cos(3\pi t) =$

$= 2 + \cos(2\pi t) + \cos(\pi t + \pi/2) + 3\cos(3\pi t + \pi) =$

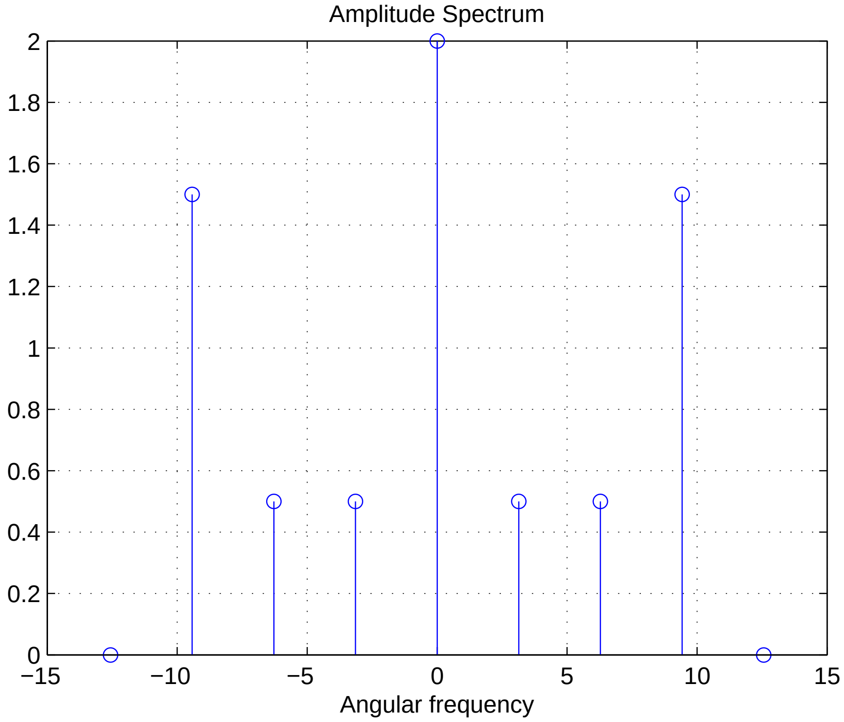
$= 2 + \frac{1}{2}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\pi t}e^{j\pi/2} + \frac{1}{2}e^{-j\pi t}e^{-j\pi/2} + \frac{3}{2}e^{j3\pi t}e^{j\pi} + \frac{3}{2}e^{-j3\pi t}e^{-j\pi}.$

Το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης φαίνονται στα σχήματα 1 και 2 (προσέξτε ότι εδώ χρησιμοποιούμε τη γωνιακή συχνότητα για τη σχεδίαση των φασμάτων - δείτε το σχόλιο στο τέλος αυτού του PDF).

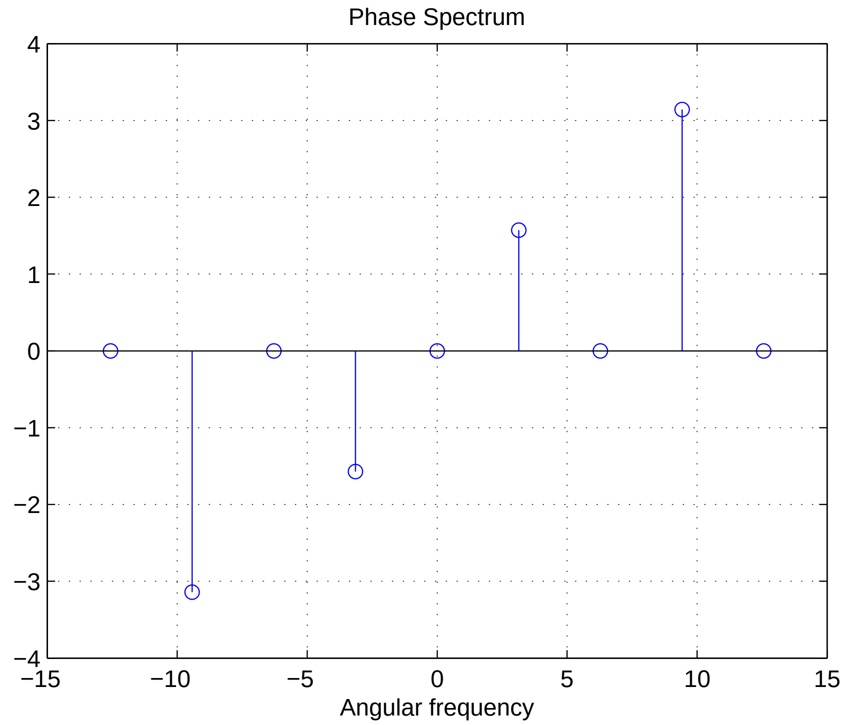
Μπορούμε να δούμε ότι το φάσμα πλάτους είναι άρτια συνάρτηση, όπως πρέπει να είναι για πραγματικά σήματα. Επίσης, το φάσμα φάσης είναι περιττή συνάρτηση, όπως πρέπει να είναι για πραγματικά σήματα.

5. Να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος

$$x(t) = 1 + 3\cos(2\pi 10t - \pi/3) + 4\sin(2\pi 20t + \pi/4).$$



Σχήμα 1: Φάσμα Πλάτους Ασκ. 4



Σχήμα 2: Φάσμα Φάσης Ασκ. 4

Λύση:

Είναι:

$x(t) = 1 + 3\cos(2\pi 10t - \pi/3) + 4\sin(2\pi 20t + \pi/4) =$

$$= 1 + \frac{3}{2}(e^{j2\pi 10t}e^{-j\pi/3} + e^{-j2\pi 10t}e^{j\pi/3}) + \frac{2}{j}(e^{j2\pi 20t}e^{j\pi/4} - e^{-j2\pi 20t}e^{-j\pi/4}) =$$

$$= \frac{3}{2}e^{j2\pi 10t}e^{-j\pi/3} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi 10t}e^{j\pi/3} + \frac{2}{j}e^{j2\pi 20t}e^{j\pi/4} - \frac{2}{j}e^{-j2\pi 20t}e^{-j\pi/4}.$$

Πρέπει τώρα να εξαλείψουμε τα αρνητικά πρόσημα και τη φανταστική μονάδα j, εισάγοντας την κατάλληλη φάση σε κάθε ένα απ΄τα εκθετικά. Γνωρίζουμε (κι αν δεν γνωρίζουμε, το μαθαίνουμε! :-)) ότι:

$$e^{j\pi/2} = j, e^{-j\pi/2} = -j$$

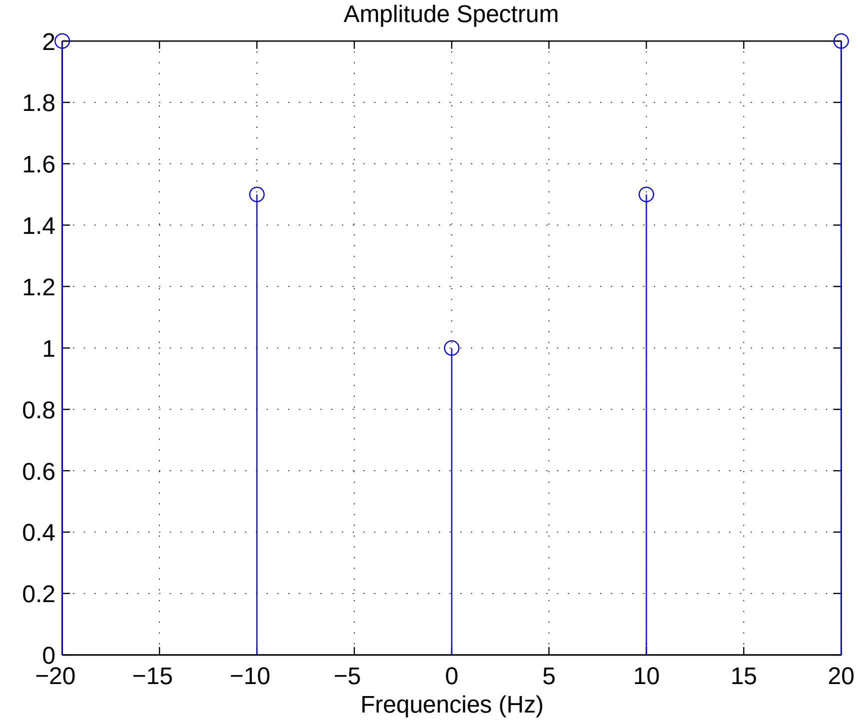
και άρα θα έχουμε:

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{j2\pi 10t}e^{-j\pi/3} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi 10t}e^{j\pi/3} + \frac{2}{j}e^{j2\pi 20t}e^{j\pi/4} - \frac{2}{j}e^{-j2\pi 20t}e^{-j\pi/4} =$$

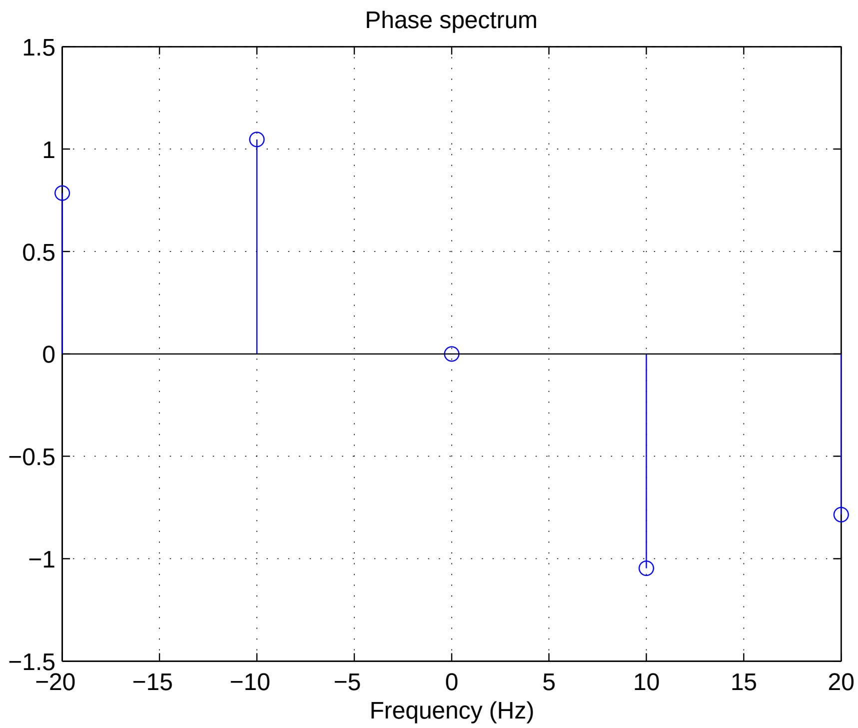
$$= \frac{3}{2}e^{j2\pi 10t}e^{-j\pi/3} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi 10t}e^{j\pi/3} + 2e^{-j\pi/2}e^{j2\pi 20t}e^{j\pi/4} + 2e^{j\pi/2}e^{-j2\pi 20t}e^{-j\pi/4} =$$

$$= \frac{3}{2}e^{j2\pi 10t}e^{-j\pi/3} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi 10t}e^{j\pi/3} + 2e^{j2\pi 20t}e^{-j\pi/4} + 2e^{-j2\pi 20t}e^{j\pi/4}.$$

Τώρα είμαστε σε θέση να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης, τα οποία φαίνονται στα σχήματα 3 και 4. Μπορούμε να δούμε ότι το φάσμα πλάτους είναι κι εδώ άρτια συνάρτηση, όπως πρέπει να είναι για πραγματικά σήματα, όπως και το φάσμα φάσης είναι περιττή συνάρτηση, όπως πρέπει να είναι για πραγματικά σήματα.



Σχήμα 3: Φάσμα Πλάτους Ασκ. 5



Σχήμα 4: Φάσμα Φάσης Ασκ. 5

Σχόλια:

(α′) Παρ'οτι για τη λύση των ασκήσεων 4 και 5 ακολουθήσαμε λίγο διαφορετικές μεθόδους λύσης, συνίσταται ένθερμα να προτιμάτε τη μέθοδο της άσκησης 4, όπου αλλάζετε στην αρχή τα ημίτονα σε συνημίτονα και τα αρνητικά πρόσημα σε θετικά. Θα χρειαστείτε γιάυτό μερικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

(β′) Προσέξτε τα φάσματα πλάτους στην άσκηση 4 και στην άσκηση 5. Παρατηρήστε ότι ο οριζόντιος άξονας είναι angular frequency στη μια περίπτωση και Frequency in Hz στην άλλη. Η angular frequency είναι η λεγόμενη γωνιακή συχνότητα, και ορίζεται ως $\omega = 2\pi f$, όπου f η συχνότητα σε Hz. Για παράδειγμα, στο σήμα $x(t) = 2\cos(2\pi 200t)$, η συχνότητα είναι 200 Hz ενώ η γωνιακή συχνότητα είναι $\omega = 2\pi 200 = 400\pi$ και μετριέται σε rad/sec. Όμοια και στο σήμα $y(t) = e^{j2\pi 200t}$.

Πολλά βιβλία χρησιμοποιούν τη γωνιακή συχνότητα αντί της συχνότητας σε Hz, και σχεδιάζουν ένα φάσμα πλάτους όπως στην άσκηση 4. Στο μάθημα χρησιμοποιείται κυρίως η συχνότητα σε Hz και έτσι τα φάσματα πλάτους θα σχεδιάζονται όπως στην άσκηση 5. Όμοια και για το φάσμα φάσης. Ουσιαστικά δεν υπάρχει καμία διαφορά μεταξύ των δυο διαφορετικών αναπαραστάσεων. Δίνουν ακριβώς την ίδια πληροφορία. Είναι θέμα γούστου το ποιά θα χρησιμοποιείτε, αρκεί να είστε συνεπείς. Καλό είναι όμως να χρησιμοποιείτε την αναπαράσταση με τη συχνότητα σε Hz για τους σκοπούς του μαθήματος.

(γ′) Λίγα πράγματα για τα φάσματα πλάτους και φάσης... εν γένει, το φάσμα είναι μια αναπαράσταση που αφορά το πεδίο της συχνότητας. Είναι μια διαφορετική περιγραφή ενός σήματος. Για παράδειγμα, έχετε δει πολλές φορές πως είναι η γραφική παράσταση ενός ημιτόνου συναρτήσει του χρόνου. Το φάσμα (πλάτους και φάσης) μας δείχνει την αναπαράσταση του ίδιου αυτού ημιτόνου συναρτήσει των συχνοτήτων. Τα φάσματα που σχεδιάζουμε στο μάθημα λέγονται αμφίπλευρα, γιατί έχουν τόσο θετικές όσο και αρνητικές συχνότητες. Υπάρχουν και τα μονόπλευρα φάσματα, που έχουν μόνο θετικές συχνότητες, αλλά δεν τα χρησιμοποιούμε στο μάθημα.

Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = 3\cos(2\pi 1000t + \pi/8)$ έχει προφανώς δυο συχνότητες, ± 1000 Hz, αφού αναλύεται σύμφωνα με τον τύπο του Euler σε δυο εκθετικά σήματα, που το πρώτο έχει συχνότητα 1000 Hz και το άλλο έχει συχνότητα -1000 Hz. Άρα το (αμφίπλευρο) φάσμα πλάτους του θα έχει δυο γραμμές, μια στα 1000 και μια στα -1000

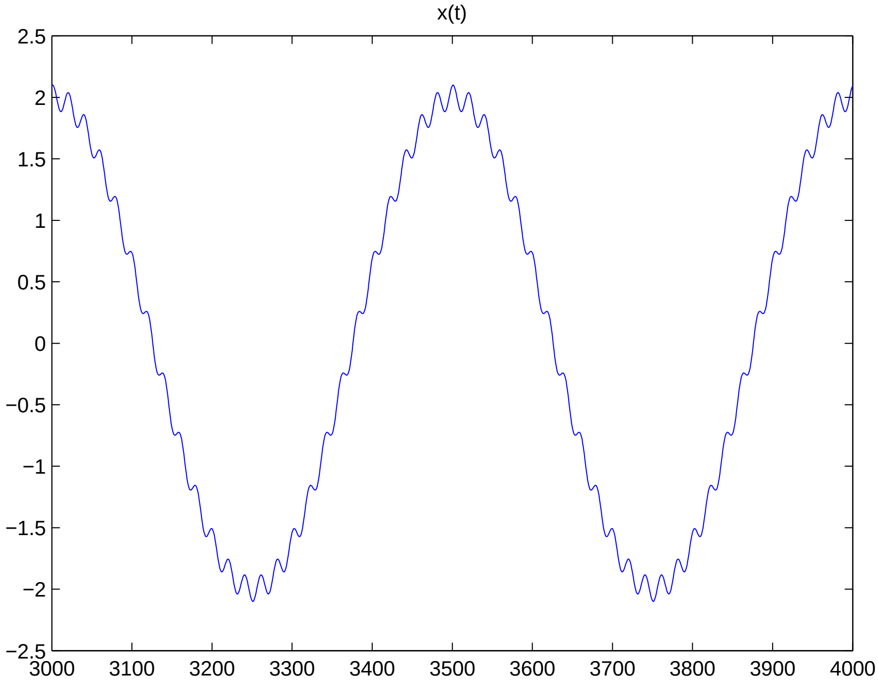
Hz, με ύψος 3/2 (καταλαβαίνετε γιατί έχουν αυτήν την τιμή;). Ακριβώς όπως το κάναμε στις ασκήσεις 4 και 5.

(δ') Για να δείτε καλύτερα τη χρησιμότητα των φασμάτων, προσπαθήστε να κάνετε το αντίστροφο στις ασκήσεις 4 και 5. Δηλ. έστω ότι σας δίνονται τα φάσματα πλάτους και φάσης. Μπορείτε να βρείτε ποιά σήματα αναπαριστούν; Μπορείτε να κατασκευάσετε την αρχική εξίσωση; Φυσικά και μπορείτε, γιατί γνωρίζετε το πλάτος, τη φάση και τη συχνότητα καθενός εκθετικού απ'τα οποία προέρχονται οι γραμμές του φάσματος! Αρκεί να τα αθροίσετε και να δείτε τι βγαίνει.

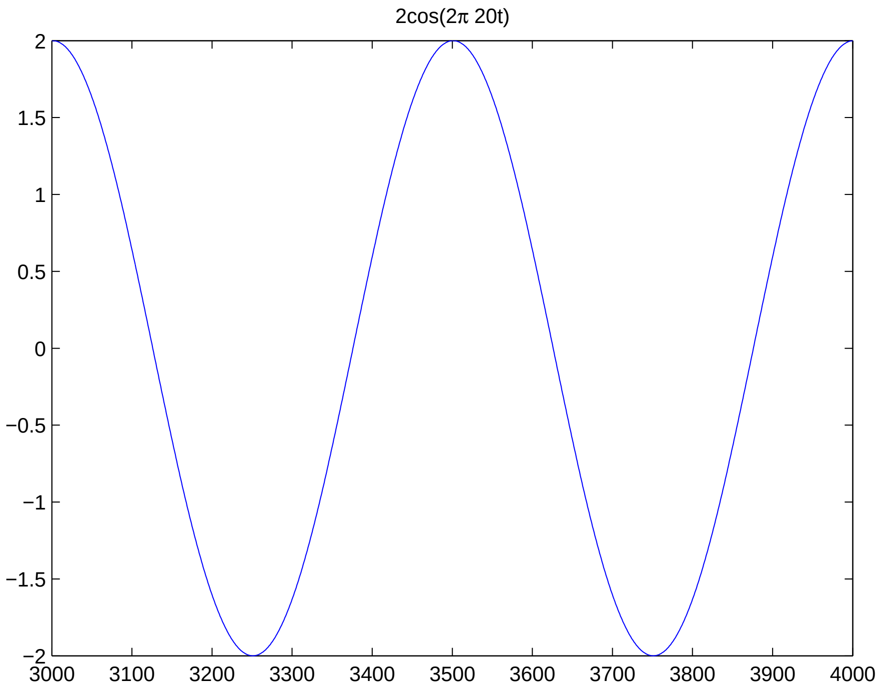
(ε') Όσον αφορά τη "φυσική" ερμηνεία ενός φάσματος πλάτους... έστω ότι έχετε το σήμα $x(t) = 0.01\cos(2\pi 500 t) + 2\cos(2\pi 20 t)$. Προφανώς έχετε τέσσερις μόνο συχνότητες στο φάσμα πλάτους σας. Στις συχνότητες ± 500 Hz, το πλάτος είναι 0.005, ενώ στις συχνότητες ± 20 Hz, το πλάτος είναι 1. Αυτό τι σημαίνει; Σημαίνει ότι η συνιστώσα των 20 Hz είναι ΠΟΛΥ πιο ισχυρότερη στο άθροισμα $x(t)$ απ'οτι η συνιστώσα των 500 Hz! Γιατί; Γιατί το πλάτος της είναι πολύ μεγαλύτερο. Δείτε παρακάτω πώς είναι η γραφική παράσταση στο χρόνο του σήματος $x(t)$, και των δυο συνιστωσών που το αποτελούν, στα σχήματα 5, 6, 7. (δώστε προσοχή στην κλίμακα των πλατών)

Δεν είναι φανερό ότι στο άθροισμα των δυο συνημιτόνων, έχει πολύ μεγαλύτερη "ισχύ/βαρύτητα" το συνημίτονο των 20 Hz;

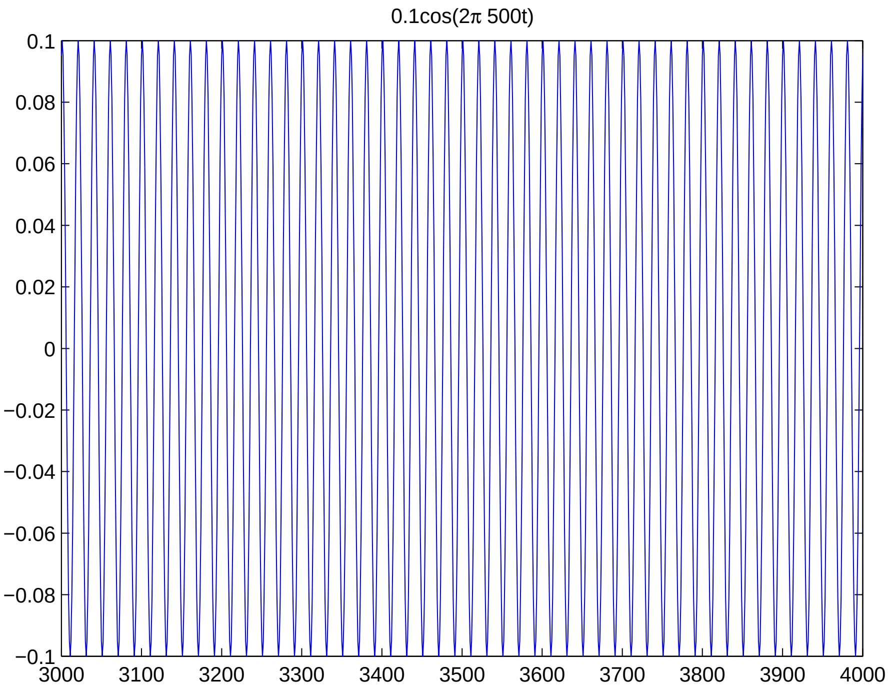
(ϛ') Η παραπάνω παρατήρηση όμως μπορούσε να γίνει απλά κοιτώντας την εξίσωση του $x(t)$. Βλέπετε ότι το ένα συνημίτονο έχει πλάτος 2 και το άλλο έχει πλάτος 0.01. Είναι προφανές ότι αν τα προσθέσει κανείς, αυτό με το μεγάλο πλάτος δε θα αλλοιωθεί σημαντικά από το δεύτερο, με το μικρό πλάτος. Είναι μαθηματικά λογικό. :-) Τότε γιατί κάναμε όλη αυτή την ανάλυση; Ποιό το όφελος; Εν προκειμένω, δεν υπάρχει κάποιο ιδιαίτερο όφελος. :-) Πριν αρχίσετε όμως να δυσανασχετείτε, ακούστε το εξής. Σε ένα σήμα το οποίο είναι απλά ένα άθροισμα από ημίτονα, μια τέτοια ανάλυση δεν έχει ιδιαίτερη αξία. Όλα είναι προφανή από την εξίσωση. Πλάτη, συχνότητες, και φάσεις. Όλα μας δίνονται σχεδόν στο πιάτο. Αν όμως έχουμε ένα άλλο σήμα, πιο πολύπλοκο, λιγότερο ομαλό από τα απλά ημίτονα (ας πούμε, ένας περιοδικός ορθογώνιος παλμός ή ένας τριγωνικός παλμός), και θέλουμε να βρούμε ποιές συχνότητες περιέχει (με άλλα λόγια, ποιά ημίτονα πρέπει να προσθέσω για να το κατασκευάσω), τότε αυτή η ανάλυση αποκτά αξία, γιατί μας πληροφορεί για



Σχήμα 5: x(τ)



Σχήμα 6: συνημίτονο στα 20Hz



Σχήμα 7: συνημίτονο στα 500Hz

το συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος, που δε μας είναι προφανές από την εξίσωσή του! Αυτή η διαδικασία λέγεται Ανάλυση Fourier, και θα τη δείτε σύντομα και με πολλή λεπτομέρεια... ;-)