

# Σχετικά με Δειγματοληψία

Επιμέλεια: Καφεντζής Γιώργος

17-11-2010

## Εισαγωγή:

Οι περισσότερες μετρήσιμες φυσικές διαδικασίες που συμβαίνουν στον κόσμο μας είναι αναλογικές. Από την ηλιακή ακτινοβολία, την ανθρώπινη φωνή, τον ήχο μιας λύρας, τα σεισμικά κύματα, ως μια φωτογραφία, το χτύπο της καρδιάς, και τα εγκεφαλικά κύματα, όλα αυτά είναι αναλογικά σήματα.

Αυτά τα σήματα είναι συναρτήσεις του χρόνου, δηλ. αλλάζουν τιμές με την πάροδο του. Ο όρος *αναλογικός* έχει την έννοια της συνεχούς συνάρτησης, σε χρόνο και πλάτος, δηλ. ένα αναλογικό σήμα ορίζεται για κάθε χρονική στιγμή και έχει τιμή με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Οι τιμές αυτές εκφράζουν κάτι διαφορετικό, ανάλογα με την εφαρμογή (π.χ. στη φωτογραφία εκφράζουν το χρώμα του pixel, ενώ στον ήχο την ένταση του ήχου) . Με την έκρηξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών τη δεκαετία του '50, αναζητήθηκε ο τρόπος να μπορούν να αποθηκευτούν τέτοια σήματα σε έναν υπολογιστή, για περαιτέρω επεξεργασία. Φυσικά, ένας υπολογιστής δεν καταλαβαίνει στην ουσία τίποτα άλλο εκτός από 0 και 1, ενώ η χωρητικότητα και η ακρίβειά του είναι πεπερασμένες. Έτσι λοιπόν έπρεπε να βρεθεί ένας τρόπος να καταγραφούν αυτά τα αναλογικά σήματα σε ψηφιακή μορφή, αλλά με την ικανότητα να μπορούν να “δώσουν πίσω” το αναλογικό σήμα από το οποίο προήλθαν. Με άλλα λόγια, από το συνεχές/αναλογικό σήμα, να μπορώ να πάρω κάποια δείγματά του, αλλά αυτά τα δείγματα να είναι ικανά να μου δώσουν πίσω ολόκληρο το συνεχές σήμα! Δύσκολη δουλειά! :-) Η διαδικασία μετατροπής, λοιπόν, ενός αναλογικού σήματος σε ΔΙΑΚΡΙΤΟ (κι όχι ψηφιακό) λέγεται Δειγματοληψία.

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα της όλης διαδικασίας από την καθημερινότητά σας. :-) Ο Πλούταρχος (respect), όταν τραγουδάει μπροστά σε ένα μικρόφωνο, τα ηχητικά κύματα από τη φωνή του ταξιδεύ-

ουν στον αέρα και φτάνουν ως το μικρόφωνο. Τα ηχητικά αυτά κύματα χτυπούν ένα διάφραγμα μέσα στο μικρόφωνο, το οποίο πάει μπρος - πίσω (ταλαντώνεται). Ένα πηνίο, που είναι συνδεδεμένο με το διάφραγμα, κινείται κι αυτό μπρος - πίσω. Ένας μαγνήτης που είναι μαζί με το πηνίο, παράγει μαγνητικό πεδίο που το διαπερνά, και λόγω της μπρος - πίσω κίνησης του πηνίου, παράγεται ροή ηλεκτρικού ρεύματος. Το ρεύμα αυτό ρέει προς έναν ενισχυτή ή μια συσκευή καταγραφής (άλλα μικρόφωνα χρησιμοποιούν διαφορετικό τρόπο αλλά στην ουσία πάλι μετατρέπουν ηχητική ενέργεια σε ηλεκτρική). Έρα στην περίπτωση μας, το αναλογικό σήμα είναι ηλεκτρικό, αλλά δε μας απασχολεί η φύση του σήματος. Είναι ένα σήμα. Αυτό το σήμα θέλουμε να το αποθηκεύσουμε σε έναν υπολογιστή. Πρέπει λοιπόν να το δειγματοληπτήσουμε, δηλ. να διαλέξουμε κάποιες χρονικές στιγμές και να πάρουμε τις τιμές του ηλεκτρικού σήματος σε εκείνες τις στιγμές, να πάρουμε δηλ. δείγματα του σήματος.

Εδώ ας κάνουμε μια παρένθεση για να ορίσουμε λίγο την ορολογία. Ορίζουμε ως **περίοδο δειγματοληψίας**  $T_s$  την απόσταση (σε δευτερόλεπτα) μεταξύ των δειγμάτων που παίρνουμε. Συνήθως είναι σταθερή. Επίσης, ορίζουμε ως **συχνότητα δειγματοληψίας**  $f_s$  το αντίστροφο της περιόδου δειγματοληψίας ( $f_s = \frac{1}{T_s}$ ), και είναι ένας αριθμός που μας λέει πόσα δείγματα παίρνουμε ανά δευτερόλεπτο. Για παράδειγμα, στα μουσικά CD του εμπορίου, η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 44100Hz. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα δευτερόλεπτο ηχητικού κομματιού, έχουμε πάρει 44100 δείγματα, τα οποία απέχουν  $\frac{1}{44100}$  δευτερόλεπτα μεταξύ τους! Πολλά δείγματα, πολύ κοντά το ένα με το άλλο! Γι' αυτό και η ποιότητα της μουσικής είναι τόσο καλή. Ας κλείσουμε όμως εδώ την παρένθεση κι ας επιστρέψουμε στη θεωρία...

Τα ερωτήματα που μπορεί κανείς να σκεφτεί και να θέσει άμεσα είναι: ποιά δείγματα να πάρω; Όποια θέλω; Και κάθε πότε να τα παίρνω; Όποτε θέλω; Να πάρω δηλ. ένα δείγμα τώρα κι ένα δείγμα μετά από 5 sec, κι άλλο ένα μετά από 40 sec; Ή πρέπει να υπάρχει ένα σταθερό χρονικό διάστημα στο οποίο θα πρέπει να παίρνω δείγματα; Κι αν τα πάρω αυτά τα δείγματα, μετά θα μπορώ να ανακατασκευάσω και να ακούσω το τραγούδι του Πλούταρχου από ένα ηχείο ή θα ακούσω Μπετόβεν; (που λέει ο λόγος :-) - εννοώ κάτι άσχετο) Όλα αυτά τα ερωτήματα τα απάντησε ο Nyquist και ο Shannon, το 1928 ο πρώτος, και το 1949 ο δεύτερος, με κάποιες διαφορές στις εργασίες τους.

Το θεώρημα που απαντάει σε αυτά τα ερωτήματα ονομάστηκε Θεώρημα των Shannon-Nyquist.

### Θεώρημα Shannon-Nyquist

Ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα  $B$ , μπορεί να ανακτηθεί από τα δείγματά του, αν δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s > 2B$ , δηλ. με περίοδο δειγματοληψίας  $T_s < \frac{1}{2B}$ .

Η συνθήκη:

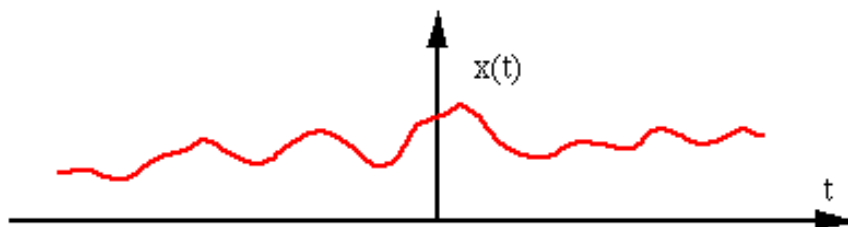
$$f_s > 2B \text{ (ή } T_s < \frac{1}{2B}\text{)}$$

λέγεται *συνθήκη του Shannon* (η μέγιστη συχνότητα  $B$  συνήθως αναφέρεται και στη βιβλιογραφία ως  $f_{max}$ ).

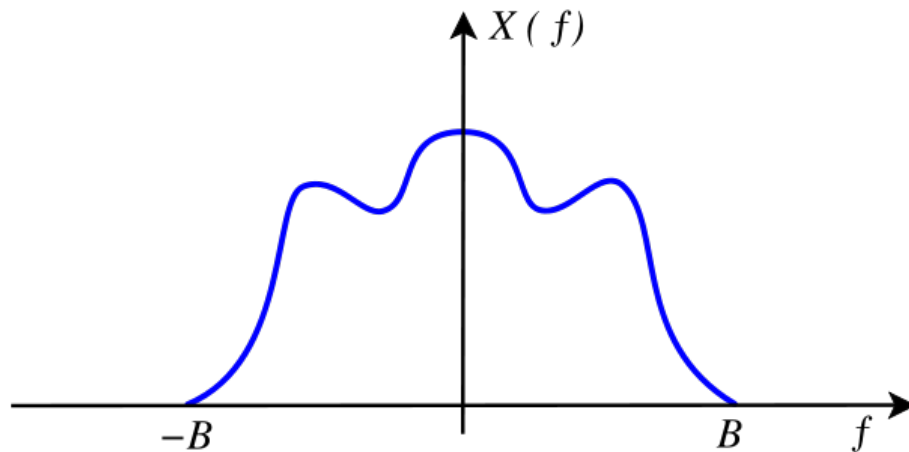
### Θεωρία:

Όπως πρέπει να σας έχει γίνει ήδη αντιληπτό, το θεώρημα της δειγματοληψίας εμπλέκει μέσα το πεδίο της συχνότητας, εκτός από αυτό του χρόνου. Το πεδίο της συχνότητας, όπως ΠΡΕΠΕΙ να ξέρετε, δεν είναι τίποτα άλλο από την αναπαράσταση του ίδιου σήματος ως προς τη συχνότητα  $f$ , κι όχι ως προς το χρόνο  $t$ .

Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα αναλογικό σήμα  $x(t)$  που θέλουμε να δειγματοληπτήσουμε, σαν κι αυτό στην εικόνα παρακάτω:



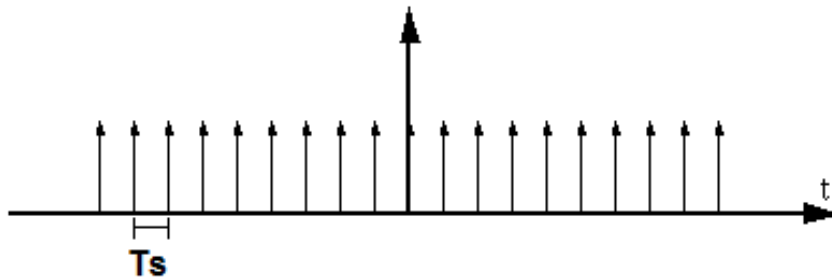
και αυτό το σήμα έχει φάσμα (αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας)  $X(f)$  όπως φαίνεται παρακάτω:



Παρατηρείτε ότι το φάσμα του σήματος έχει μέγιστη συχνότητα  $B$ . Μετά τη συχνότητα αυτή, δεν υπάρχουν τιμές (μπλε γραμμή) για τις υπόλοιπες συχνότητες. Το ίδιο και για το αρνητικό μέρος των συχνοτήτων. Ας κάνουμε τώρα δειγματοληψία στο σήμα μας στο χρόνο, με περίοδο δειγματοληψίας  $T_s = \frac{1}{f_s}$ . Η συνάρτηση δειγματοληψίας δεν είναι τίποτα άλλο από μια σειρά από τις γνωστές μας συναρτήσεις Δέλτα:

$$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$

Η συνάρτηση δειγματοληψίας φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Όπως φαίνεται, αυτές οι συναρτήσεις Δέλτα απέχουν μεταξύ τους χρόνο  $T_s$ .

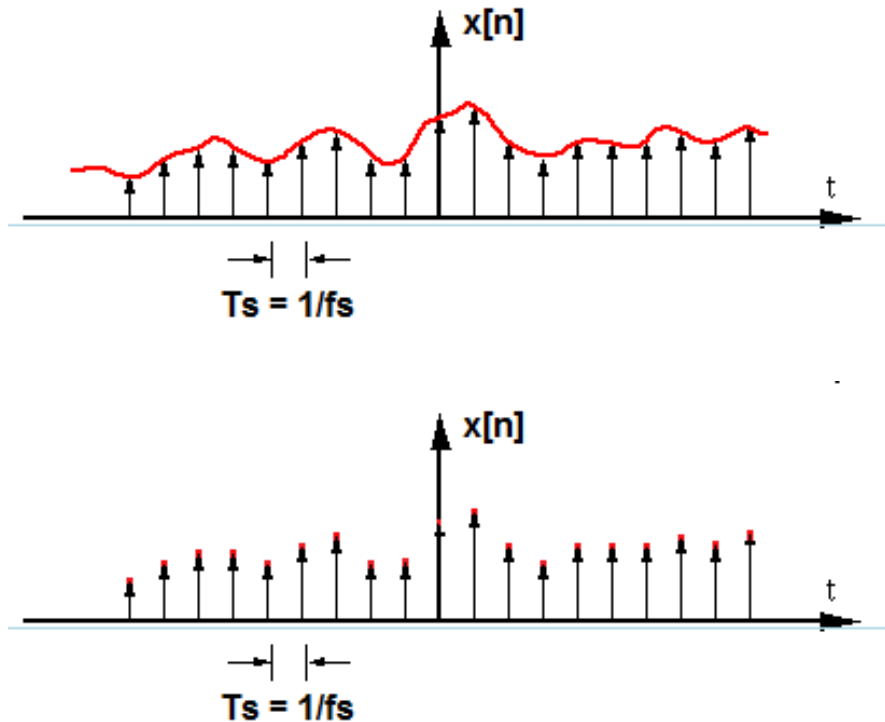
Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης δειγματοληψίας εύκολα μπορεί ναδειχθεί (κάντε το) ότι είναι:

$$\Delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s)$$

Βλέπουμε ότι και ο μετασχ. Fourier είναι μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους  $f_s$  Hz. Η δειγματοληψία μπορεί να αναπαρασταθεί λοιπόν μαθηματικά από τον πολλαπλασιασμό στο χρόνο του σήματος πληροφορίας  $x(t)$  με τη σειρά από συναρτήσεις Δέλτα,  $x_\delta(t)$ . Άρα θα έχουμε:

$$x_s(t) = x(t)x_\delta(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s)$$

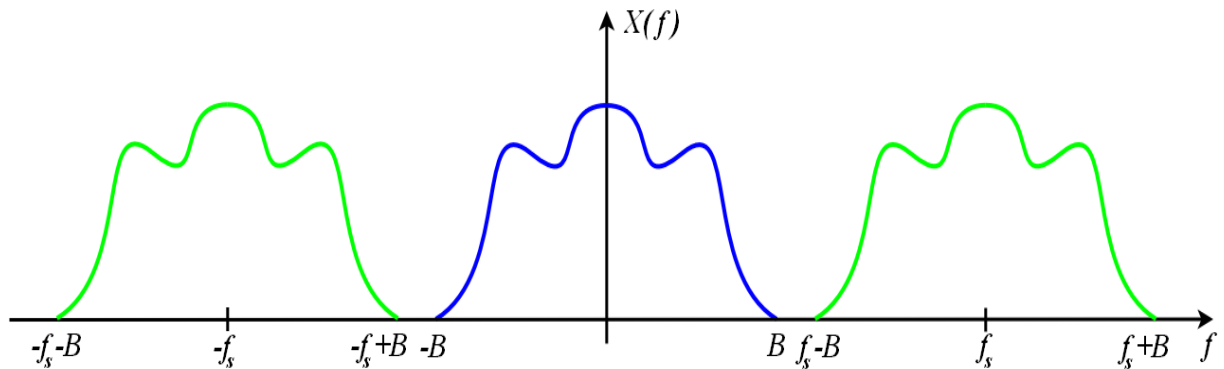
Οπότε αυτό που θα πάρουμε θα είναι οι κόκκινες τιμές στις κορυφές των συναρτήσεων Δέλτα. Οι υπόλοιπες τιμές χάνονται. Αυτό που μένει λοιπόν είναι το ΔΙΑΚΡΙΤΟ σήμα μας, αυτό που στα πλαίσια του μαθήματος ονομάζουμε  $x[n]$ . Αυτό το  $x[n]$  δεν είναι τίποτα άλλο από τις τιμές  $x(kT_s)$  που πήραμε παραπάνω. Όλα αυτά μας τα δείχνει εποπτικά η παρακάτω εικόνα:



Ας δούμε τι συμβαίνει στο πεδίο της συχνότητας. Το γινόμενο των δυο παραπάνω σημάτων,  $x_s(t) = x(t)x_\delta(t)$ , γίνεται συνέλιξη στη συχνότητα:

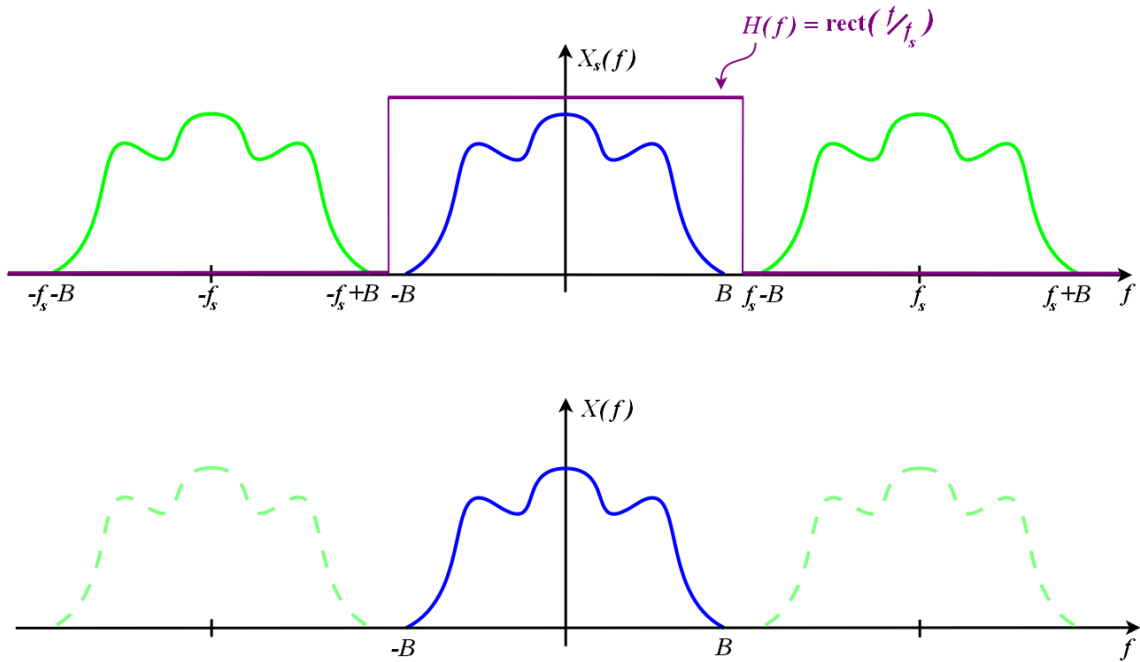
$$X_s(f) = X(f) * \Delta(f) = X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (X(f) * \delta(f - kf_s)) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_s)$$

Άρα λοιπόν, αυτό που παίρνουμε στο πεδίο της συχνότητας σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, είναι επαναλήψεις του φάσματος  $X(f)$  γύρω από τις συχνότητες  $\pm kf_s$ . Αν η συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$  που επιλέξαμε ικανοποιεί το κριτήριο του Shannon, δηλ. είναι  $f_s > 2B$ , όπου  $B$  η μέγιστη συχνότητα του σήματος  $x(t)$ , τότε αυτό που θα συμβεί στο πεδίο της συχνότητας φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Τι παρατηρούμε και στο σχήμα; Παρατηρούμε ξανά ότι, λόγω της διαδικασίας της δειγματοληψίας, εμφανίστηκαν από το πουθενά περιοδικές “επαναλήψεις” του αρχικού φάσματος γύρω από τις συχνότητες  $\pm k f_s$ . Αυτό είναι το φάσμα του δειγματοληπτημένου (== ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ) σήματος. Στο σχήμα φαίνονται μόνο οι “επαναλήψεις” του φάσματος γύρω από τις συχνότητες  $\pm f_s$ , αλλά αυτή η επανάληψη συνεχίζεται σε όλα τα πολλαπλάσια της  $f_s$ , από το  $-\infty$  ως το  $+\infty$ . Το ίδιο φάσμα δηλ. εμφανίζεται και γύρω από τη συχνότητα  $2f_s, 3f_s$ , κλπ. Το ίδιο και στις τις αρνητικές τους. Απλά για λόγους ευκολίας, εδώ δείχνουμε μόνο τις επαναλήψεις γύρω από την  $f_s$  και την  $-f_s$ .

Υπενθυμίζεται ότι μετά την επεξεργασία του διακριτού σήματος που θα κάνουμε στον υπολογιστή, σκοπός μας είναι να μπορούμε να πάρουμε πίσω το αρχικό σήμα, δηλ. την μπλέ γραμμή. Αυτό γίνεται με την εφαρμογή ενός χαμηλοπερατού (lowpass) φίλτρου γύρω από το κεντρικό φάσμα, κόβοντας τα “περισσευόμενα” φάσματα και κρατώντας μόνο το κεντρικό, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Θυμίζεται ότι το κεντρικό (μπλε) φάσμα είναι το φάσμα του αρχικού αναλογικού σήματος, ενώ τα πράσινα “ξεφύτρωσαν” λόγω της διαδικασίας της δειγματοληψίας. Οπότε αν θέλουμε να ανακτήσουμε το αναλογικό σήμα, θα πρέπει να κρατήσουμε μόνο το κεντρικό φάσμα, γιατί ΜΟΝΟ αυτό αντιστοιχεί στο αναλογικό σήμα, όπως δείχνει η εικόνα:



Το φίλτρο αυτό, που προφανώς το ορίζουμε παραπάνω στη συχνότητα, δίνεται από την εξίσωση:

$$H(f) = \frac{1}{f_s} \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

Αυτό σημαίνει ότι το παράθυρο ορίζεται στο διάστημα  $[-f_s/2, f_s/2]$ . Ο αντίστροφος μετασχη. Fourier του σήματος αυτού -δείξτε το- είναι:

$$h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

Πολλαπλασιάζοντας το σήμα  $H(f)$  με το φάσμα του διακριτού σήματος  $\frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_s)$ , θα έχουμε:

$$\frac{1}{T_s} H(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_s) = \frac{1}{T_s} \frac{1}{f_s} X(f) = X(f),$$

αφού το  $H(f)$  είναι μη μηδενικό στο διάστημα  $[-f_s/2, f_s/2]$ .

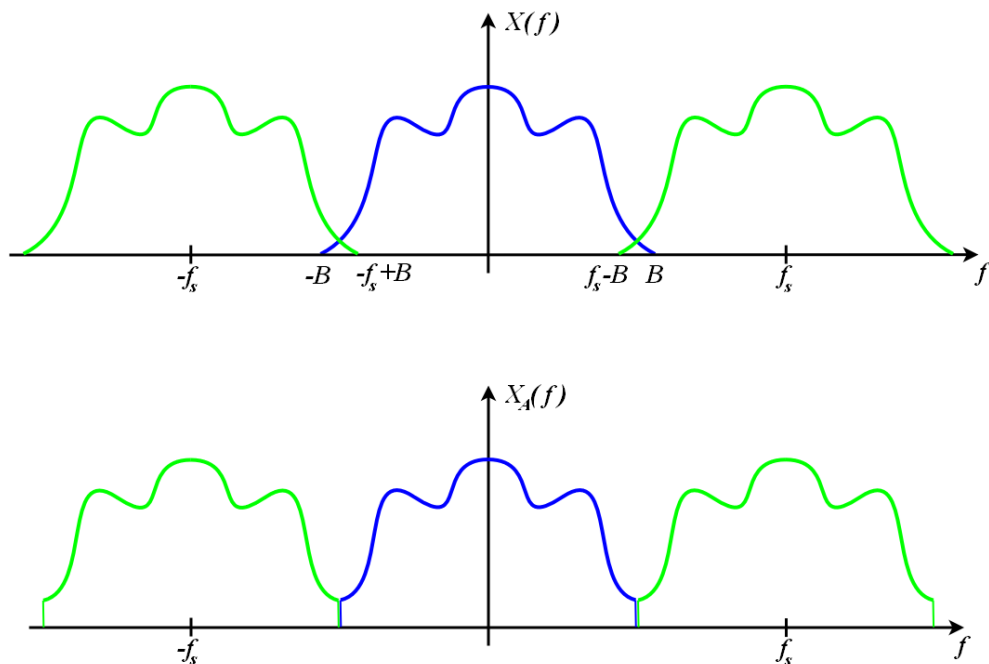
Το γινόμενο στη συχνότητα γίνεται συνέλιξη στο χρόνο:

$$h(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) h(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - k\right)$$

Η παραπάνω σχέση είναι πολύ σημαντική. Μας λέει ότι, ιδανικά, ένα αναλογικό σήμα (το οποίο ορίζεται σε κάθε χρονική στιγμή - άρα σε άπειρες χρονικές στιγμές) μπορεί να ανακατασκευαστεί όταν τα δείγματά του  $x(kT_s)$  (δηλ. από κάποιες διακριτές μόνο χρονικές στιγμές του σήματος) συνδυαστούν

γραμμικά με τη συνάρτηση sinc.

Ας επανέλθουμε λίγο στο φάσμα του διακριτού σήματος, που το παραθέτουμε παρακάτω για ευκολία. Παρατηρήστε λίγο το δεξί άκρο της μπλέ γραμμής και το αριστερό άκρο της πράσινης γραμμής (του δεξιού φάσματος). Βλέπετε ότι το ένα έχει συχνότητα  $B$  και το άλλο έχει συχνότητα  $f_s - B$ . Αν αυτά τα δυο άκρα ήταν πιο κοντά απ' ότι φαίνεται στο σχήμα (δηλ. αν η  $f_s$  ήταν "πιο κοντά" στο μηδέν απ' ότι φαίνεται στο σχήμα), τότε πιθανόν να "έμπαινε" το ένα μέσα στο άλλο, να είχαμε δηλ. επικάλυψη στα φάσματα. Για να μη συμβαίνει αυτό, καταλαβαίνετε ότι πρέπει το αριστερό άκρο της πράσινης γραμμής να είναι ΠΑΝΤΑ μεγαλύτερο από το δεξί άκρο της μπλέ γραμμής, δηλ. να ισχύει  $B < f_s - B \Leftrightarrow f_s > 2B$ , που είναι το κριτήριο του Shannon. Αυτή ουσιαστικά είναι η απόδειξη του θεωρήματος της δειγματοληψίας (χωρίς μαθηματικά :-). Προέρχεται απλά από την παρατήρηση αυτού του σχήματος. Δείτε παρακάτω τι συμβαίνει αν το κριτήριο του Shannon παραβιάζεται, δηλ. η συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$  είναι μικρότερη από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα  $B$  του σήματος:



Βλέπετε ότι πλέον η μπλέ γραμμή δεν είναι η ίδια με πριν. Στα άκρα της έχουν προστεθεί συχνότητες "ξένες", και έχουν αλλοιώσει το κεντρικό φάσμα. Καταλαβαίνετε τι γίνεται αν η  $f_s$  είναι ακόμα πιο κοντά στο μηδέν... χαμός!

Το φαινόμενο αυτό της επικάλυψης των φασμάτων ονομάζεται **Aliasing** στα Αγγλικά, ενώ δεν έχω ιδέα πως μπορεί κάποιος να το μεταφράσει στα Ελληνικά χωρίς να βγει μια λέξη που να ηχεί παράξενα. :-)



Παρατηρήσεις:

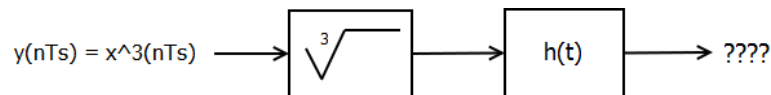
1. Προσέξτε ότι στην παραπάνω ανάλυσή μας, θεωρήσαμε ότι το  $x(t)$  είναι ένα σήμα πεπερασμένης ζώνης συχνοτήτων, δηλ. το φάσμα του,  $X(f)$ , είναι μη μηδενικό σε ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων. Αυτό μπορεί να μην ισχύει πάντα στην πράξη. Τότε πρέπει να εφαρμόσουμε στο σήμα ένα φίλτρο, σαν το  $H(f)$  που είδαμε, ώστε να περιορίσουμε το εύρος ζώνης του, ώστε να ισχύει η ανάλυση που κάναμε παραπάνω. Το φίλτρο αυτό πρέπει να είναι κατάλληλο ώστε να μην “κόβει” μεγάλο κομμάτι απ’ την πληροφορία του σήματος.

2. Δείτε το φίλτρο  $H(f)$ . Αυτό το φίλτρο είναι ιδανικό, άρα μη υλοποιήσιμο στην πράξη, όμως υπάρχουν αρκετά παρόμοια που το προσεγγίζουν. Αυτή η “παραχώρηση” που κάνουμε εισάγει παραμόρφωση στο σήμα μας, αλλά δεν μπορεί να γίνει αλλιώς...

3. Η συνάρτηση δειγματοληψίας  $x_s(t)$  επίσης δεν μπορεί να υλοποιηθεί στην πράξη. Προσεγγίζονται αρκετά καλά όμως από τετραγωνικούς παλμούς (αντί για συναρτήσεις Δέλτα) με πολύ μικρό εύρος.

4. Η συνθήκη του Shannon δεν είναι αναγκαία για τη σωστή ανάκτηση του σήματος. Γιατί; Δείτε το παρακάτω παράδειγμα:

Έστω  $x(t) \leftrightarrow X(f)$ , με  $f \in [-B, B]$ . Έστω  $y(t) = x^3(t)$ , άρα θα είναι  $Y(f) \neq 0$  στο  $[-3B, 3B]$ . Για ανάκτηση του σήματος σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει, πρέπει  $f_s > 6B$ . Έστω ότι το δειγματοληπτούμε με  $f_s = 2B$ . Τι συμβαίνει; Προφανώς υπάρχουν επικαλύψεις στο φάσμα του διακριτού σήματος  $y(nT_s)$ . Όμως για δείτε την παρακάτω διάταξη:



Γίνεται ή όχι σωστή ανάκτηση του σήματος από την παραπάνω διάταξη; :-)

### Συνοψίζοντας:

Κατά τη διάρκεια της δειγματοληψίας, πρέπει να προσέχουμε ώστε η συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$  να είναι μεγαλύτερη από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα  $B$  του σήματος που θέλουμε να δειγματοληψήσουμε, δηλ. να είμαστε σύμφωνοι με το κριτήριο του Shannon.

Αν συμβαίνει αυτό, τότε ΔΕΝ έχουμε επικαλύψεις στο κεντρικό φάσμα, και μπορούμε να ανακτήσουμε το αρχικό φάσμα μέσω ενός χαμηλοπερατού φίλτρου που κόβει τις επαναλήψεις του φάσματος στις συχνότητες  $\pm kf_s$ .

Αν δεν ικανοποιείται το κριτήριο του Shannon, τότε έχουμε επικαλύψεις (aliasing) στο φάσμα του διακριτού σήματος, και τότε δεν μπορούμε να ανακτήσουμε το αρχικό φάσμα με χρήση του χαμηλοπερατού φίλτρου. Αυτό δε σημαίνει ότι δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτα. Ανάλογα την περίπτωση ίσως μπορούμε να καταφύγουμε σε διάφορες λύσεις για να ανακτήσουμε ξανά το σήμα μας (οι οποίες δε μας ενδιαφέρουν εδώ φυσικά :-).

### Ασκήσεις:

- Ένα συνεχές σήμα της μορφής  $x(t) = 3 \cos(400\pi t) + 5 \sin(1200\pi t) + 6 \cos(4400\pi t)$  δειγματοληπτείται με  $f_s = 4 \text{ kHz}$ , παράγοντας την ακολουθία  $x[n]$ . Βρείτε τη μαθηματική έκφραση του  $x[n]$ .

Λύση:

Προφανώς  $t = nT_s = n \frac{1}{4000} \text{ sec}$ . Άρα θα είναι:

$$x[n] = 3 \cos(400\pi nT_s) + 5 \sin(1200\pi nT_s) + 6 \cos(4400\pi nT_s) = 3 \cos\left(\frac{n\pi}{10}\right) + 5 \sin\left(\frac{12n\pi}{40}\right) + 6 \cos\left(\frac{44n\pi}{40}\right)$$

- Δείξτε ότι  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi nt/T}$ .

3. Δείξτε ότι το φίλτρο  $h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_s t/2}$ , με  $\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$  και  $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$  παίρνει την τιμή  $h[nT_s] = \delta[n]$  για κάθε  $n$ , αν ισχύει ότι  $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ .