ΗΥ215 - Φροντιστήριο : Σειρές Fourier στην πράξη

Επιμέλεια: Γιώργος Καφεντζής

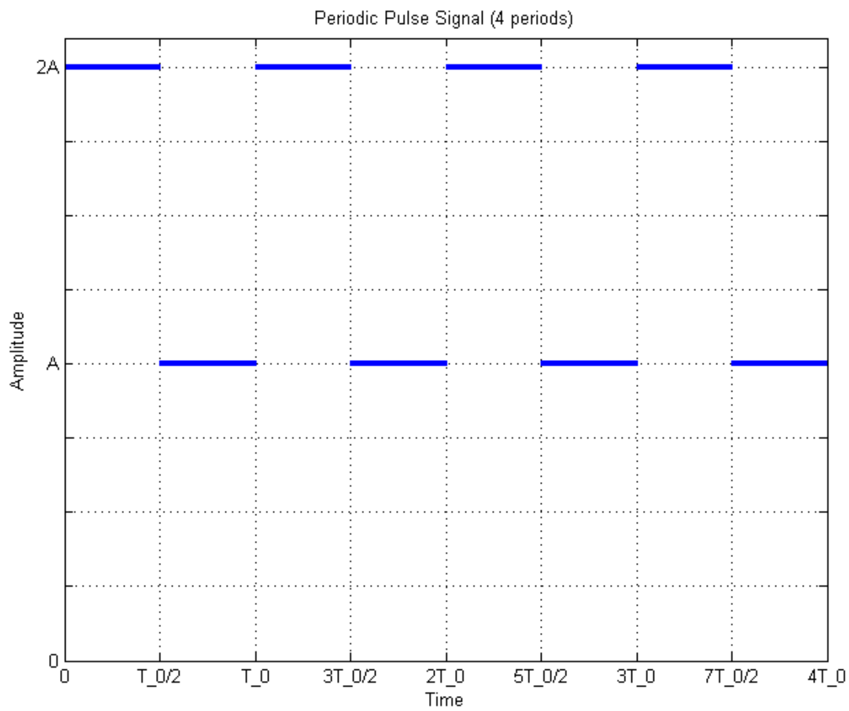
13-3-2011

Το φροντιστήριο αυτό δεν έχει σκοπό τόσο να σας δείξει πώς αναπτύσσεται θεωρητικά ένα περιοδικό σήμα σε σειρά Fourier, αλλά να δείξει πώς ΣΧΗΜΑΤΙΖΕΤΑΙ ένα περιοδικό σήμα από τα συνημίτονα της σειράς Fourier και τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σήμα ΠΕΡΙΕΧΕΙ κάποιες συχνότητες.

Έστω λοιπόν το περιοδικό σήμα $x(t)$ που περιγράφεται σε μια περίοδό του T_0 ως:

$$x(t) = \begin{cases} 2A, & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ A, & \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$

το οποίο θέλουμε να το αναπτύξουμε σε σειρά Fourier. Τέσσερις περίοδοι του σχήματος αυτού φαίνονται παρακάτω:



Αποδείξτε μόνοι σας - εξάσκηση! :-) - ότι:

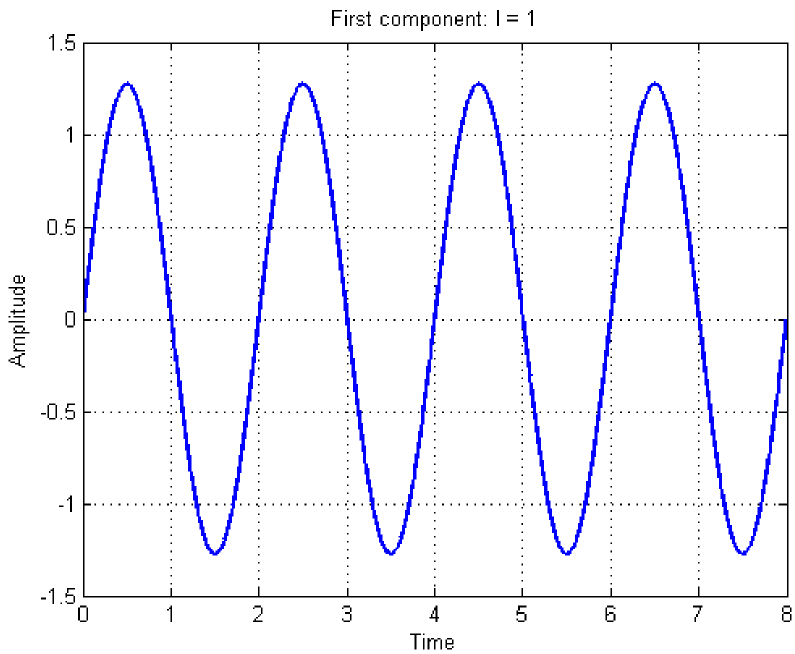
$$X_0 = \frac{3A}{2},\ X_k = \frac{A}{2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}}(1-(-1)^k) = \begin{cases} \frac{A}{\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k\ odd \\ 0, & k\ even \end{cases}$$

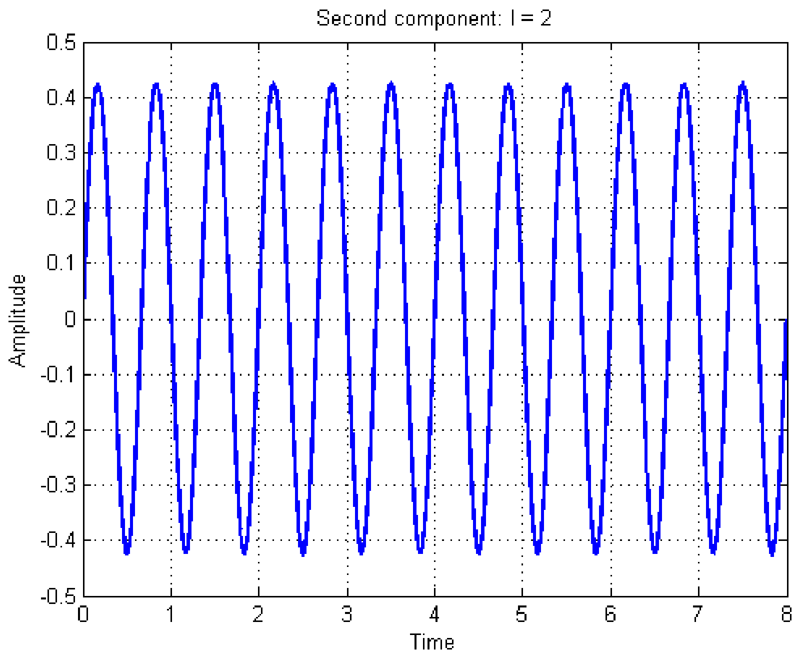
Έστω λοιπόν ότι αποδείξατε τα παραπάνω. Έτσι, το περιοδικό σήμα που συζητάμε αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως εξής:

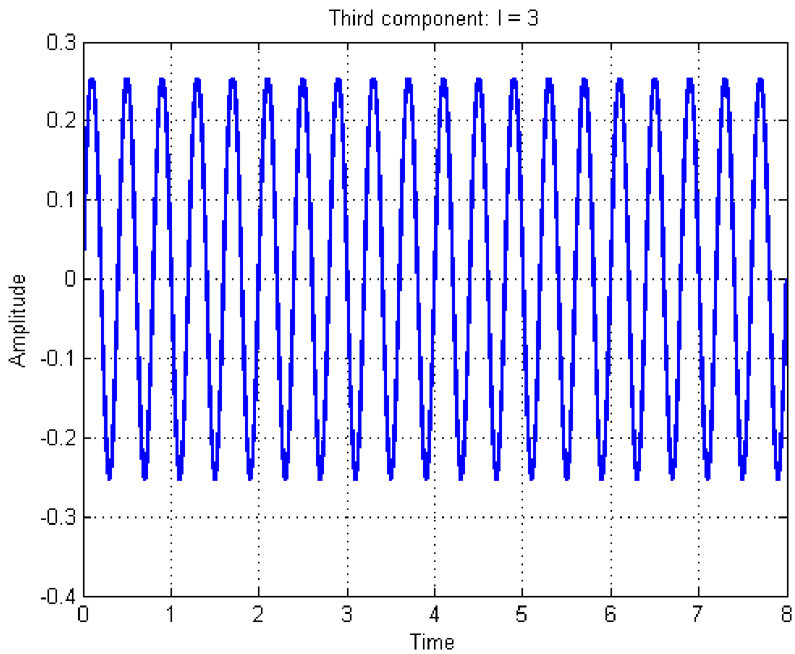
$$x(t) = \frac{3A}{2} + \sum_{k=-\infty, k\ odd}^{+\infty} \frac{A}{\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{3A}{2} + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2l-1)}\cos(2\pi(2l-1)f_0 t - \frac{\pi}{2})$$

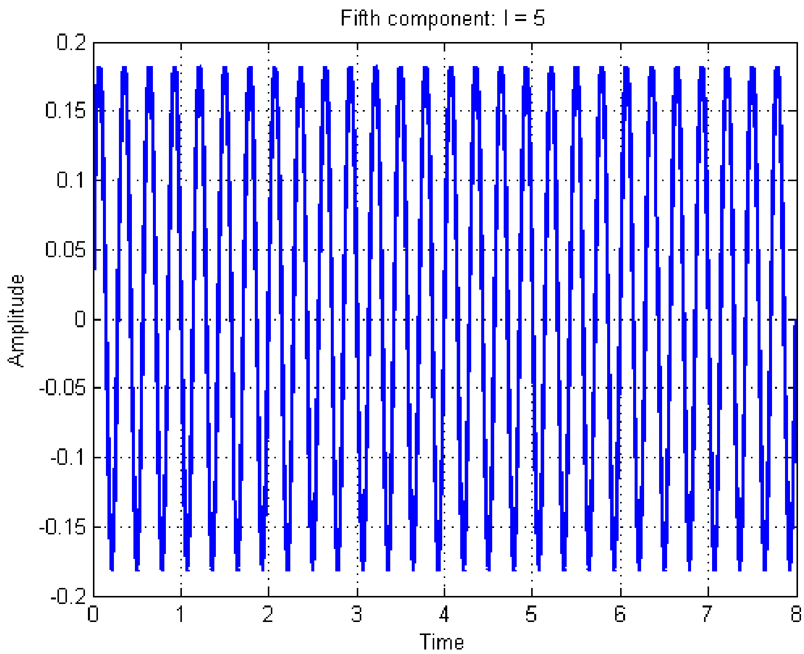
(ουσιαστικά θέσαμε παραπάνω $k = 2l-1$. Ο συμβολισμός με το l αντί για k έγινε για να μπορούμε να ξεχωρίζουμε σε ποιό δείκτη αναφερόμαστε στη διάρκεια του κειμένου - δεν είναι λάθος να κρατήσουμε το δείκτη k παντού)

Θα χρησιμοποιήσουμε MATLAB για να δούμε πως σχηματίζεται το σήμα από το άθροισμα αυτών των συνημιτόνων. Για πρακτικούς λόγους, ας ορίσουμε ότι $A = 2$ και $T_0 = 2 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2}Hz$. Γράφοντας κατάλληλο κώδικα, τον οποίο θα δείτε σε επόμενη σειρά ασκήσεων, ας δούμε πως σχηματίζεται σιγά σιγά το περιοδικό σήμα μας από το άθροισμα αυτών των συνημιτόνων που βρήκαμε παραπάνω. Προτού το δούμε αυτό, ας δούμε ένα-ένα τα συνημίτονα του παραπάνω αθροίσματος:



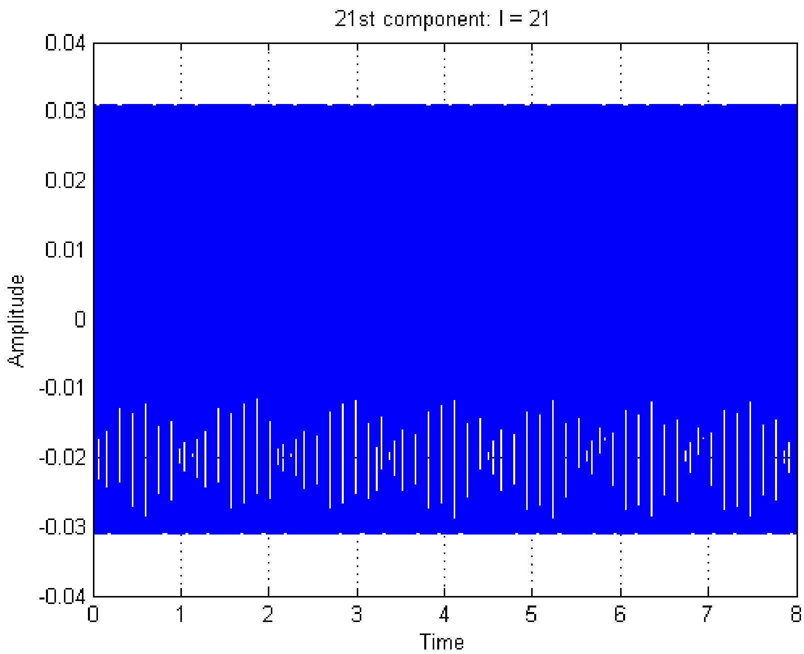

Second component: l = 2
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
Amplitude
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Time


Third component: l = 3
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
Amplitude
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Time



$\vdots$

$\vdots$



κλπ. μέχρι όποιο συνημίτονο θέλουμε.

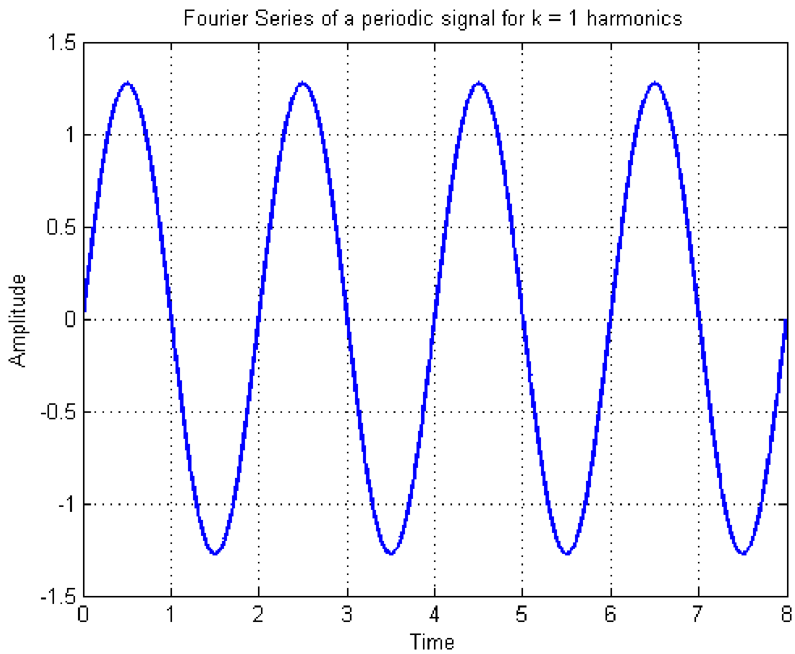
Όλα αυτά τα συνημίτονα έχουν συχνότητα ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας $f_0 = 0.5$ Hz. Βλέπετε ότι όσο προχωράμε προς τις υψηλότερες αρμονικές συχνότητες, τόσο η συχνότητα των συνημιτόνων μεγαλώνει. Λογικό, αν σκεφτούμε αυτό που μόλις είπαμε για τις αρμονικές. Το πρώτο συνημίτονο του αθροίσματος έχει συχνότητα $(2l-1)f_0 = (2*1-1)f_0 = f_0$, το δεύτερο έχει συχνότητα $(2*2-1)f_0 = 3f_0$, το τρίτο $5f_0$, ..., το 21ο έχει συχνότητα $41f_0$.

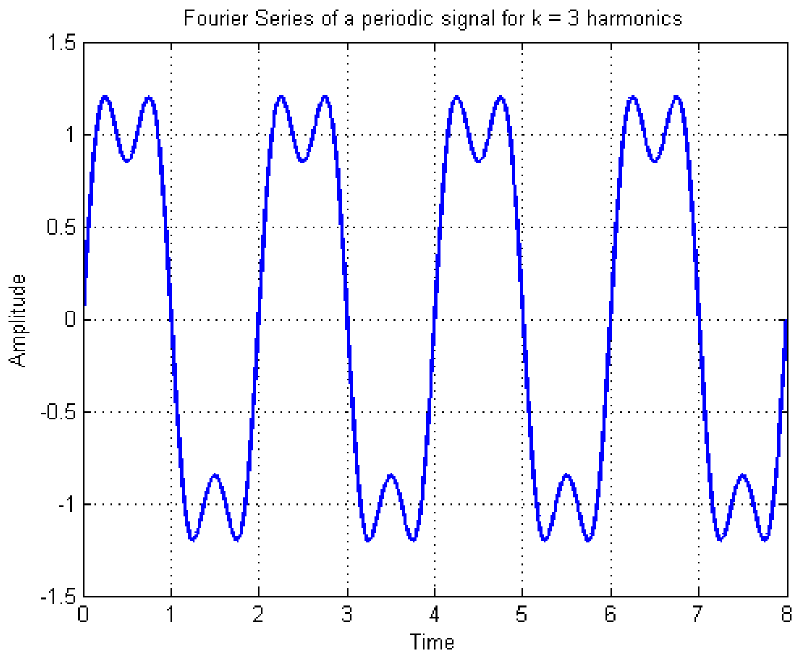
Βλέπετε ότι οι συχνότητες είναι επίσης περιττές ακέραιες πολλαπλάσεις της θεμελιώδους. Είναι αναμενόμενο, μιας και είδαμε παραπάνω ότι το ανάπτυγμά μας αποτελείται μόνο από περιττά k. Τα άρτια k έχουν πλάτος μηδέν, άρα τα αντίστοιχα συνημίτονα είναι μηδενικά - προσέξτε, μιλάμε για τα k, όχι για τα l, τα οποία παίρνουν όλες τις ακέραιες τιμές αλλά δίνουν μόνο περιττά k!

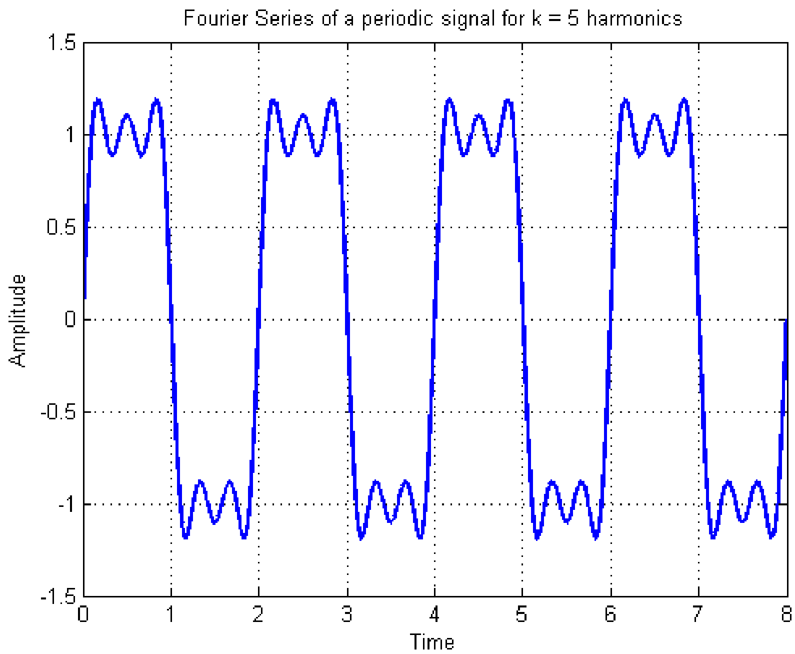
Προσοχή ξανά όμως! :-) Όταν μιλάμε για αρμονικές συχνότητες και για τα αντίστοιχα συνημίτονα, αναφερόμαστε στις ακέραιες πολλαπλάσεις της θεμελιώδους, άσχετα αν το αντίστοιχο πλάτος του συνημιτόνου είναι μηδέν! Δηλ. για παράδειγμα, η πρώτη αρμονική έχει πλάτος $\frac{4}{\pi}$ και συχνότητα f_0, η δεύτερη έχει πλάτος μηδέν και συχνότητα $2f_0$, η τρίτη αρμονική έχει πλάτος $\frac{4}{3\pi}$ και συχνότητα $3f_0$, η τέταρτη έχει πλάτος μηδέν και συχνότητα $4f_0$, η πέμπτη έχει πλάτος $\frac{4}{5\pi}$ και συχνότητα $5f_0$, κ.ο.κ.

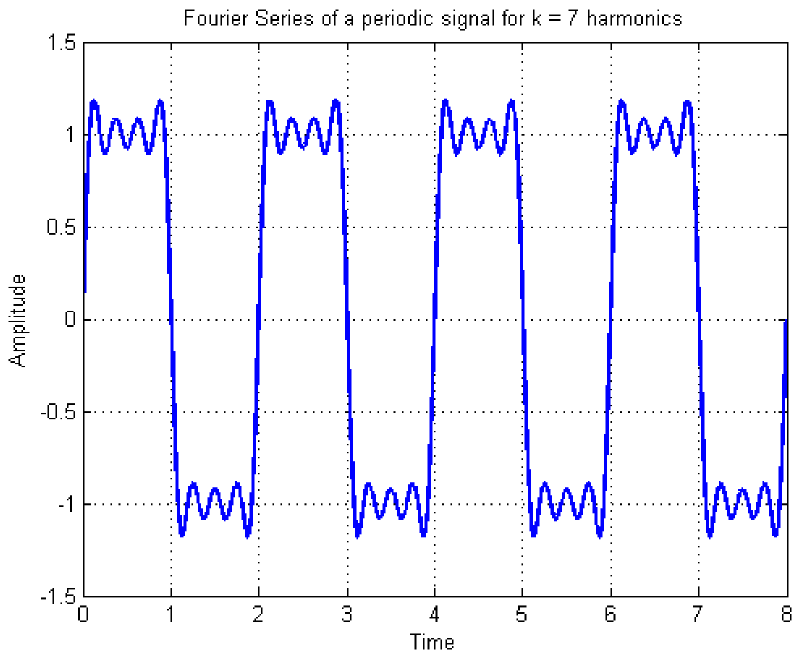
Τέλος, αν υπολογίσετε τα πλάτη των παραπάνω συνημιτόνων από τον τύπο της σειράς Fourier, θα βρείτε αντίστοιχα $\frac{4}{\pi} = 1.2732$, $\frac{4}{3\pi} = 0.4244$, $\frac{4}{5\pi} = 0.2546$, $\frac{4}{7\pi} = 0.1819$, $\frac{4}{41\pi} = 0.0311$, που συμβαδίζουν απόλυτα με τα πλάτη των συνημιτόνων στα παραπάνω σχήματα.

Οπότε αυτό που μας λέει η θεωρία των σειρών Fourier είναι ότι αν αθροίσουμε ΟΛΑ αυτά τα συνημίτονα (και προσθέσουμε στο τέλος και τη μέση τιμή X_0), το αποτέλεσμα που θα πάρουμε θα είναι ίδιο κι απαράλλακτο με το περιοδικό σήμα που είχαμε εξ' αρχής! Φυσικά για να είναι απόλυτα ίδιο, πρέπει να αθροίσουμε άπειρα συνημίτονα - έτσι λέει η θεωρία. Στην πράξη φυσικά αυτό δεν μπορεί να γίνει. Θα αθροίσουμε κάποια από αυτά, όσα θέλουμε εμείς, με βάση κάποιο οπτικό, μαθηματικό, ή άλλο, κριτήριο. Αυτό σημαίνει ότι το σήμα που θα πάρουμε θα έχει κάποιες διαφορές με το αρχικό. Το πόσο μεγάλες θα είναι, εξαρτάται από το πλήθος των συνημιτόνων που θα αθροίσουμε. Ας ξεκινήσουμε λοιπόν να αθροίζουμε ένα-ένα τα συνημίτονα για να δούμε πώς σχηματίζεται το αρχικό σήμα. Διαβάστε τον τίτλο κάθε σχήματος για να δείτε πόσα συνημίτονα αθροίζουμε:


Fourier Series of a periodic signal for k = 1 harmonics
Amplitude
Time
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8

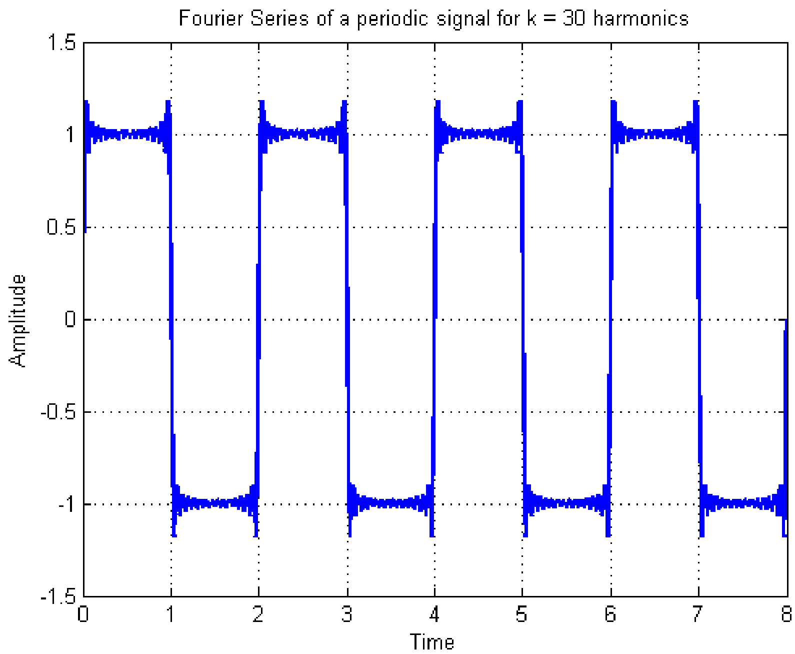

Fourier Series of a periodic signal for k = 3 harmonics
Amplitude
Time
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8


Fourier Series of a periodic signal for k = 5 harmonics
Amplitude
Time
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8


Fourier Series of a periodic signal for k = 7 harmonics
Amplitude
Time
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8

⋮

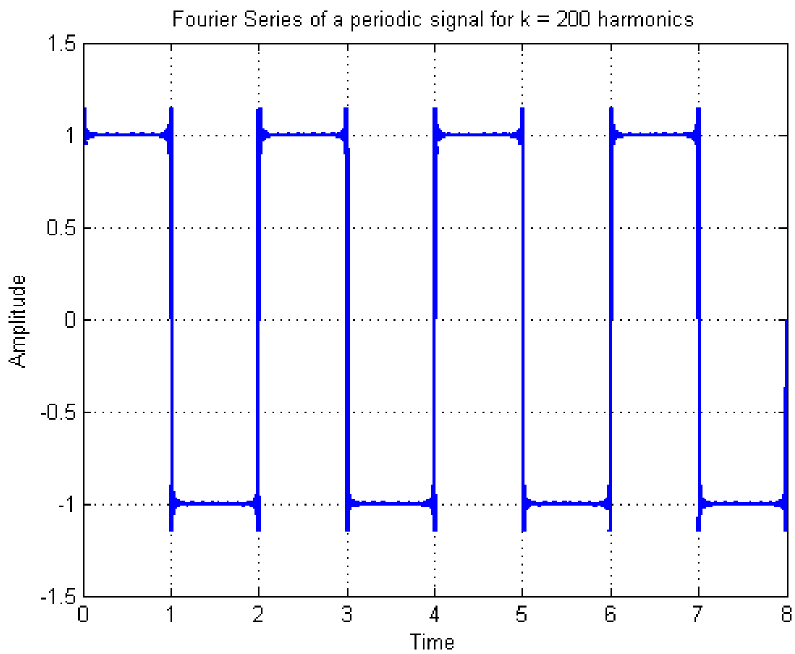
⋮



Fourier Series of a periodic signal for k = 30 harmonics
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
Amplitude
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Time

⋮

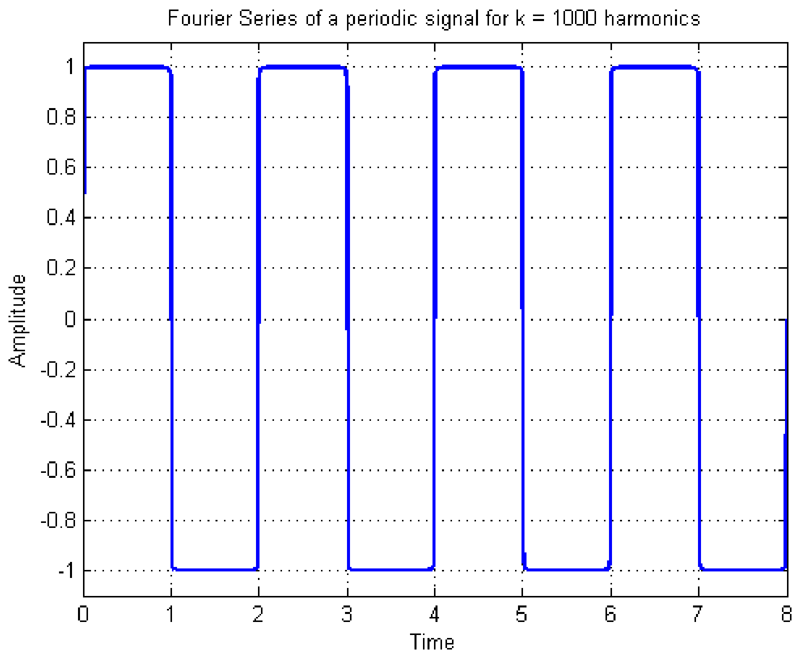
⋮

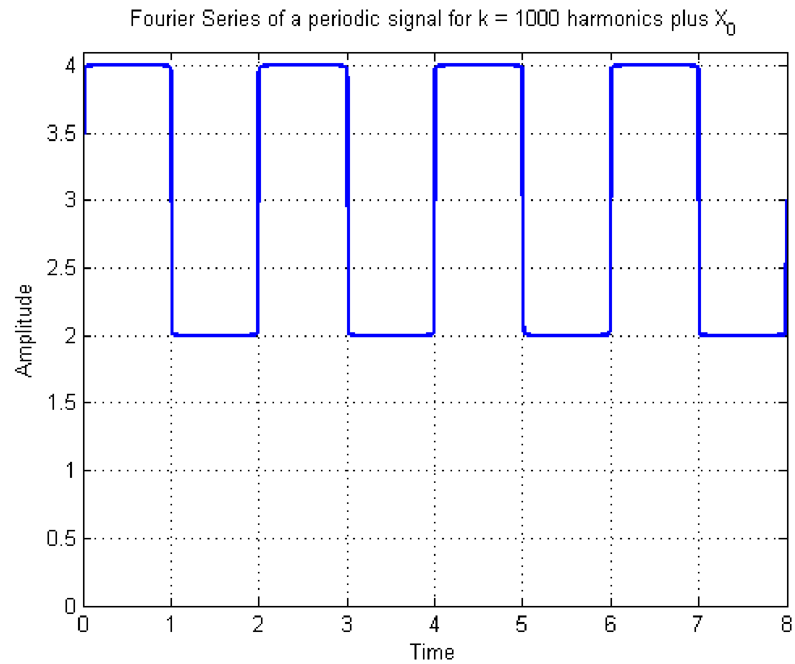


Fourier Series of a periodic signal for k = 200 harmonics
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
Amplitude
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Time

⋮

⋮





Βλέπετε ότι για 1000 αρμονικές, το αποτέλεσμα είναι ουσιαστικά ολόιδιο στο μάτι με το αρχικό σήμα - στην ουσία δεν είναι όμως.

Τώρα λοιπόν είναι πιο ξεκάθαρα γιατί η ανάλυση σε σειρές Fourier μας δίνει την απάντηση για το ποιό είναι το συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος, δηλ. με άλλα λόγια ποιές συχνότητες περιέχει ένα σήμα. Περιέχει αυτές τις συχνότητες των οποίων τα συνημίτονα έχουν μη μηδενικό πλάτος στο ανάπτυγμα κατά Fourier, δηλ. στο παράδειγμά μας τις συχνότητες $f_0, 3f_0, 5f_0, \cdots = 0.5, 1.5, 4.5, \cdots$ Hz.

Βάσει αυτών, μπορούμε εύκολα να σχεδιάσουμε αμφίπλευρο φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης, μια και έχουμε την εκθετική αναπαράσταση του αναπτύγματος. Το πλάτος X_k είναι ίσο με $X_k = \frac{A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, για περιττά k. Άρα θέτοντας περιττές τιμές στο k, έχουμε τα αντίστοιχα πλάτη για τις περιττές συχνότητες $f_0, 3f_0, 5f_0, \cdots$. Προσοχή όμως, γιατί αφού το πλάτος X_k είναι μιγαδικός αριθμός, θα πρέπει στο φάσμα πλάτους να βάλετε το $|X_k|$. Όμοια για το φάσμα φάσης, το οποίο είναι σταθερό και ίσο με $-\frac{\pi}{2}$ για τις θετικές περιττές συχνότητες, ενώ είναι μηδέν για τις θετικές άρτιες συχνότητες, και ίσο με $\frac{\pi}{2}$ για τις αρνητικές περιττές συχνότητες (και πάλι μηδέν για τις αρνητικές άρτιες συχνότητες). Καταλαβαίνετε το γιατί; Σχεδιάστε τα! :-)