ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς - Εαρινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Ι. Στυλιανού

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 18/5/2011 Ημερομηνία Παράδοσης: 25/5/2011

Άσκηση 1.

α. Έστω ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $h(t)e^{2t}$ υπάρχει. Τότε θα ισχύει $\mathcal{L}\{h(t)e^{2t}\} = H(s-2)$, το οποίο σημαίνει ότι θα περιλαμβάνει η περιοχή σύγκλισής του τον άξονα $j2\pi f$ (των φανταστικών). Αφού το $h(t)$ είναι ευσταθές και αιτιατό (με πόλο στο $\sigma = -1$), η περιοχή σύγκλισης θα είναι $\sigma > -1$, γιατί μόνο αυτή η περιοχή σύγκλισης ικανοποιεί τα δεδομένα.
Επανερχόμενοι τώρα στον μετασχηματισμό $H(s-2)$ του σήματος, η περιοχή σύγκλισής του θα είναι $\sigma - 2 > -1 \Rightarrow \sigma > 1$, η οποία όμως δεν περιέχει τον φανταστικό άξονα. Οπότε, ο μετασχηματισμός Fourier του $h(t)e^{2t}$ δεν υπάρχει τελικώς.

β. Έστω ότι ισχύει $H(s) = H(-s)$. Αυτό σημαίνει ότι αν ο $H(s)$ έχει πόλο στο s_k θα έχει άλλον ένα πόλο στο $-s_k$. Όμως, από δεδομένα γνωρίζουμε ότι έχει έναν πόλο στο $\sigma = -1 = s_1$, οπότε θα πρέπει να έχει άλλον ένα πόλο στο $-\sigma = -s_1 = -(-1) = 1$. Η περιοχή σύγκλισης όμως είναι $\sigma > -1$, και δεν πρέπει να περιλαμβάνει πόλους. Άρα, δεν μπορεί να έχει πόλο στο $-s_1 = 1$, οπότε η υπόθεση $H(s) = H(-s)$ που κάναμε στην αρχή, δεν ισχύει.

Άσκηση 2.

α. Έχουμε ότι $x(t)$ πραγματικό, άρα $x(t) = x^*(t)$. Οπότε, θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \overset{x(t)=x^*(t)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(x(t)(e^{-st})^*\Big)^* dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(x(t)e^{-s^*t}\Big)^* dt = \big(X(s^*)\big)^* = X^*(s^*) \end{aligned}$$

β. Αν $X(s_0) = 0$, τότε λόγω (α) θα έχουμε ότι $X^*(s_0^*) = 0$. Οπότε, αν έχουμε ένα μηδενικό στο $s = s_0$, τότε θα υπάρχει άλλο ένα μηδενικό στο $s = s_0^*$.
Αν $X(s_0) = \pm\infty$, τότε όμοια σκεπτόμενοι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως αν υπάρχει ένας πόλος στο $s = s_0$ θα υπάρχει άλλος ένας πόλος στο $s = s_0^*$.

Άσκηση 3.

Έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t),$$

όπου
$$x(t) = e^{-4t}\epsilon(t).$$
Άρα, θα ισχύει ότι
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big\{\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t)\Big\} &= \mathcal{L}\{x(t)\} \overset{\mathcal{L}\{d^ny(t)/dt^n\}=s^nY(s)}{\Rightarrow} \\
s^3Y(s) + 6s^2Y(s) + 11sY(s) + 6Y(s) &= X(s) \Rightarrow \\
Y(s)\Big(s^3 + 6s^2 + 11s + 6\Big) &= X(s) \overset{\mathcal{L}\{e^{-4t}\epsilon(t)\}=1/(s+4)}{\Rightarrow} \\
Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+4}}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \Rightarrow \\
Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+4}}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Rightarrow \\
Y(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{\Gamma}{s+3} + \frac{\Delta}{s+4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$
$$y(t) = Ae^{-t}\epsilon(t) + Be^{-2t}\epsilon(t) + \Gamma e^{-3t}\epsilon(t) + \Delta e^{-4t}\epsilon(t), \quad (1)$$
όπου,
$$A = Y(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{(s+2)(s+3)(s+4)}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{6}, \quad (2)$$

$$B = Y(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{1}{(s+1)(s+3)(s+4)}\Big|_{s=-2} = -\frac{1}{2}, \quad (3)$$

$$\Gamma = Y(s)(s+3)\Big|_{s=-3} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)}\Big|_{s=-3} = \frac{1}{2}, \quad (4)$$

$$\Delta = Y(s)(s+4)\Big|_{s=-4} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\Big|_{s=-4} = -\frac{1}{6}. \quad (5)$$
Άρα, από τις (1),(2),(3),(4),(5) θα έχουμε τελικά ότι
$$y(t) = \frac{1}{6}e^{-t}\epsilon(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}\epsilon(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}\epsilon(t) - \frac{1}{6}e^{-4t}\epsilon(t).$$

Άσκηση 4.

Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό, άρα αν έχει έναν πόλο στο $s = s_1 = -2 + j$, θα έχει και άλλον έναν πόλο στο $s = s_1^* = -2 - j$.
Επίσης, ισχύει ότι
$$X(0) = 2 \Rightarrow X(s)\Big|_{s=0} = \frac{A}{(s-s_1)(s-s_1^*)}\Big|_{s=0} \Rightarrow \frac{A}{(-s_1)(-s_1^*)} = 2 \Rightarrow \frac{A}{(2-j)(2+j)} = 2 \Rightarrow A = 10.$$
Οπότε, τελικά θα είναι
$$X(s) = \frac{10}{(s+2-j)(s+2+j)}.$$
Πιθανή περιοχή σύγκλισης θα είναι $\sigma > -2$ ή $\sigma < -2$. Όμως, το σήμα $x(t)e^{3t}$ δεν έχει μετασχηματισμό Fourier, οπότε ο $X(s-3)$ δεν έχει στην περιοχή σύγκλισής του το φανταστικό άξονα. Δηλαδή, θα ισχύει ότι $\sigma - 3 > -2$ ή $\sigma - 3 < -2$, άρα $\sigma > 1$ ή $\sigma < 1$. Από τις δύο περιοχές αυτή που δεν περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα είναι η $\sigma > 1$. Άρα, η περιοχή σύγκλισης του $X(s)$ είναι $\sigma > -2$.