ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς - Εαρινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Ι. Στυλιανού

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 10/5/2011 — Ημερομηνία Παράδοσης: 16/5/2011

Άσκηση 1.

Ισχύει ότι:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|}e^{-st}dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}e^{-st}dt}_{A_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-st}dt}_{A_2}$$

οπότε, θα είναι

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-s)t}dt = \frac{1}{\alpha-s}e^{(\alpha-s)t}\Big|_{-\infty}^{0} = \\ &= \frac{1}{\alpha-s}\Big(1-e^{(\alpha-s)(-\infty)}\Big) = \frac{1}{\alpha-s} \end{aligned}$$

όπου, το ολοκλήρωμα (A_1) συγκλίνει όταν $e^{(\alpha-s)t} \xrightarrow{t\to-\infty} 0$, δηλαδή όταν
$\alpha - \sigma > 0 \Rightarrow \Re\{s\} < \alpha$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{(-\alpha-s)t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{(-\alpha-s)t}dt = \frac{1}{-\alpha-s}e^{(-\alpha-s)t}\Big|_{0}^{\infty} = \\ &= \frac{1}{-\alpha-s}\Big(e^{(-\alpha-s)(+\infty)}-1\Big) = \frac{-1}{-\alpha-s} = \frac{1}{\alpha+s} \end{aligned}$$

όπου, το ολοκλήρωμα (A_2) συγκλίνει όταν $e^{(-\alpha-s)t} \xrightarrow{t\to+\infty} 0$, δηλαδή όταν
$-\alpha - \sigma < 0 \Rightarrow \Re\{s\} > -\alpha$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- για $\alpha > 0$ η περιοχή σύγκλισης (ROC) θα είναι $-\alpha < \sigma < \alpha$
- για $\alpha < 0$ η περιοχή σύγκλισης (ROC) θα είναι $\sigma < -\alpha$ και $\sigma > \alpha$ (οπότε, και δεν υφίσταται σύγκλιση)

Άσκηση 2.

Έχουμε ότι:

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{d\,x(t)}{dt}\Big\} = sX(s) - x(0^-).$$

Άρα, θα είναι:

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{d^2\,x(t)}{dt^2}\Big\} = \mathcal{L}\Bigg\{\frac{d}{dt}\Big\{\frac{d\,x(t)}{dt}\Big\}\Bigg\} \overset{y(t)=\frac{d\,x(t)}{dt}}{=} \mathcal{L}\Big\{\frac{d}{dt}y(t)\Big\} = sY(s) - y(0^-) \qquad (1)$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\Big\{\frac{d\,x(t)}{dt}\Big\} = sX(s) - x(0^-) \tag{2}$$

Από (1),(2) θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big\{\frac{d^2\,x(t)}{dt^2}\Big\} &= s\big(sX(s)-x(0^-)\big) - y(0^-) \overset{y(t)=x'(t)}{=} s\big(sX(s)-x(0^-)\big) - x'(0^-) = \\ &= s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)\end{aligned}$$

Άσκηση 3.

Έχουμε ότι:

α.

$$\begin{aligned}X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \overset{x(t)=x(-t)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-st}dt \overset{u=-t}{=} \int_{\infty}^{-\infty} x(u)e^{su}dt \overset{dt=-du}{=} \\ &= -\int_{\infty}^{-\infty} x(u)e^{su}du = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{su}du = X(-s)\end{aligned}$$

β.

$$\begin{aligned}X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \overset{x(t)=-x(-t)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} -x(-t)e^{-st}dt \overset{u=-t}{=} -\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{su}dt \overset{dt=-du}{=} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{su}du = -\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{su}du = -X(-s)\end{aligned}$$

Τώρα, εξετάζουμε αν η συνάρτηση $X(s) = \frac{A\,s}{(s-1)(s+1)}$ είναι άρτιο ή περιττό σήμα:

$$\begin{aligned}-X(-s) &= -\frac{A(-s)}{(-s-1)(-s+1)} = \frac{A\,s}{(-s-1)(-s+1)} = \\ &= \frac{A\,s}{(-(s+1))(-(s-1))} = \frac{A\,s}{(s-1)(s+1)} = \\ &= X(s),\end{aligned}$$

οπότε, είναι περιττό σήμα.

Άσκηση 4.

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$ θα είναι:

$$\begin{aligned}X_M(s) &= \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha(t+1)}\epsilon(t+1)e^{-st}dt = \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha(t+1)}e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-\alpha}e^{-st}dt = \\ &= e^{-\alpha}\int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-st}dt = e^{-\alpha}\int_{0^-}^{\infty} e^{-(\alpha+s)t}dt = \\ &= e^{-\alpha}\frac{1}{-(\alpha+s)}e^{-(\alpha+s)t}\Big|_{0^-}^{\infty} = e^{-\alpha}\frac{1}{-\alpha-s}(0-1) = \\ &= -e^{-\alpha}\frac{1}{-\alpha-s} = \\ &= \frac{e^{-\alpha}}{s+a}\end{aligned}$$

όπου, το ολοκλήρωμα συγκλίνει όταν $e^{-(\alpha+s)t} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, δηλαδή όταν
$\alpha+\sigma>0 \Rightarrow \Re\{s\}>-\alpha$.
Ο δίπλευρος μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$ θα είναι:

$$\begin{aligned}
X_\Delta(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t+1)}\epsilon(t+1)e^{-st}dt = \\
&= \int_{-1}^{\infty} e^{-\alpha(t+1)}e^{-st}dt = \int_{-1}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-\alpha}e^{-st}dt = \\
&= e^{-\alpha}\int_{-1}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-st}dt = e^{-\alpha}\int_{-1}^{\infty} e^{-(\alpha+s)t}dt = \\
&= e^{-\alpha}\frac{1}{-(\alpha+s)}e^{-(\alpha+s)t}\bigg|_{-1}^{\infty} = e^{-\alpha}\frac{1}{-\alpha-s}(0-e^{\alpha+s}) = \\
&= -e^{-\alpha}\frac{1}{-(\alpha+s)}e^{\alpha+s} = \\
&= \frac{e^s}{a+s}
\end{aligned}$$

όπου, το ολοκλήρωμα συγκλίνει όταν $e^{-(\alpha+s)t} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, δηλαδή όταν
$\alpha+\sigma>0 \Rightarrow \Re\{s\}>-\alpha$.
Το σήμα είναι δεξιόπλευρο αλλά έχει ένα μη-αιτιατό ''κομμάτι'' (το διάστημα [-1,0]), οπότε ο δίπλευρος μεταχηματιμσός Laplace θα το λάβει υπόψιν του, ενώ ο μονόπλευρος όχι.

Άσκηση 5.

Ισχύει ότι:

$$y(t) = (e^{-t}-e^{-2t})\epsilon(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2},$$

αφού γνωρίζουμε ότι $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\epsilon(t)\} = E(s-\alpha) = \frac{1}{s-\alpha}$. Οπότε, θα είναι

$$Y(s) = \frac{(s+2)-(s+1)}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{(s+2)(s+1)},$$

και η περιοχή σύγκλισης θα είναι $\sigma > -1$ (γνωρίζοντας πως $y(t)$ δεξιόπλευρο).
Επίσης, θα είναι

$$x(t) = e^{-3t}\epsilon(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) = \frac{1}{s+3},$$

με περιοχή σύγκλισης $\sigma > -3$.
Τώρα, για το σύστημα μοναδιαίας απόκρισης $h(t)$ θα ισχύει:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{(s+2)(s+1)}}{\frac{1}{s+3}} = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)}.$$

Οπότε,

$$ROC_y = ROC_x \cap ROC_h \Rightarrow \{\sigma > -1\} = \{\sigma > -3\} \cap ROC_h \Rightarrow ROC_h = \{\sigma > -1\},$$

δηλαδή το σύστημα απόκρισης $h(t)$ είναι αιτιατό. Άρα, θα ισχύει ότι

$$H(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}, \tag{3}$$

όπου

$$A = H(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{s+3}{s+1}\Big|_{s=-2} = \frac{1}{-1} = -1, \tag{4}$$

και

$$B = H(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{s+3}{s+2}\Big|_{s=-1} = \frac{2}{1} = 2 \tag{5}$$

Άρα, από τις (3),(4),(5) έχουμε ότι

$$H(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+1} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} h(t) = -e^{-2t}\epsilon(t) + 2e^{-t}\epsilon(t), \tag{6}$$

το οποίο είναι αιτιατό όπως και αναμενόταν.